Trabajo Final: Algoritmo Q-D Grupo 16

Sandoval, Sanna, Sauro, Savarino

Introducción:

- Algoritmo Q-D

Polinomio completo, con coeficientes reales, no nulos y de grado n

→ todas las raíces de manera simultánea.

Otras aplicaciones

-Cálculo de autovalores y autovectores de una matriz

-Fracciones continuas

-Transformación LR de Rutishauser

- Método de Bairstow

Polinomio que contengan raíces complejas

→ mejora el factor cuadrático según una precisión deseada.

- Métodos de preprocesamiento de polinomios
- Ejemplos comparativos de los resultados con otros métodos de obtención de raíces.

Algoritmo Q-D

Aproximación de los factores lineales y cuadráticos.
Sea el polinomio real:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tal que $a_k \neq 0$ para todo k = n, n-1, ...,1,0

- Iteración 0:

$$q_1^{(0)} = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad | \quad q_i^{(0)} = 0 \quad \forall i = 2,3,\cdots,n$$

$$e_i^{(0)} = \frac{a_{n-i-1}}{a_{n-i}} \quad \forall i = 1,2,\cdots,n-2,n-1 \quad ; \quad e_0^{(0)} = e_n^{(0)} = 0$$

- Iteraciones de orden (m+1): (resto de las iteraciones):

$$q_i^{(m+1)} = e_i^{(m)} - e_{i-1}^{(m)} + q_i^{(m)} \quad \forall i = 1,2,\cdots,n$$

$$e_i^{(m+1)} = \frac{q_{i-1}^{(m+1)}}{q_i^{(m+1)}} \cdot e_i^{(m)} \quad \forall i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$e_0^{(m+1)} = e_n^{(m+1)} = 0$$

Tabla de valores

A partir de los valores de la iteración cero y los valores de las demás iteraciones ➡

- Columnas qi los valores de las raíces irán convergiendo a un valor real
- Columnas ei el valor del error tenderá a cero.
- Si los valores de alguna columna ei fluctúan:
  - ➡ recurrir al método de Bairstow.

Iter.	e_0	q_1	e_1	q_2	....	e_{n-1}	q_n	e_n
0		$-\frac{a_{n-1}}{a_n}$		0	......		0	
	0		$\frac{a_{n-i-1}}{a_{n-i}}$		......	0		0
1		$q_1^{(1)}$		$q_2^{(1)}$	......		$q_n^{(1)}$	
	0		$e_1^{(1)}$		......	$e_2^{(1)}$		0
2		$q_1^{(2)}$		$q_2^{(2)}$	......		$q_n^{(2)}$	
	0		$e_1^{(2)}$		......	$e_2^{(2)}$		0

Metodo de Bairstow

Si el polinomio con el que se trabaja posee raíces complejas, este método se puede utilizar para refinar el factor cuadrático (aquel que contiene raices co-modulares).

Se parte del siguiente conjunto de datos:

- Un polinomio P(x).
- Un factor cuadratico perteneciente al polinomio.
- Una tolerancia para el valor del error.

Este método se aplica cuando en una iteración m-ésima se ve una fluctuación en la columna de error.

q_i	e_i	q_{i+1}
$q_i^{(m-1)}$		$q_{i+1}^{(m-1)}$
	$e_i^{(m-1)}$	
$q_i^{(m)}$		$q_{i+1}^{(m)}$

Explicacion del metodo Bairstow

Partiendo de unos valores iniciales u0 y v0, se calcula en cada iteración t (0 ...N) los valores de qt y pt por medio del siguiente esquema:

$$q_t = a_t + u_m \cdot q_{t-1} + v_m \cdot q_{t-2} \quad \textit{para } 0 < t < n \quad \textit{y adoptando}: \; q_{-2} = q_{-1} = 0$$

$$p_t = q_t + u_m \cdot p_{t-1} + v_m \cdot p_{t-2} \quad \textit{para } 0 < t < n\text{-}1 \quad \textit{y adoptando}: \; p_{-2} = p_{-1} = 0$$

Con los valores obtenidos para q y p, podemos calcular valores de h y k solución del siguiente sistema:

$$p_{n-2} \cdot h + p_{n-3} \cdot k = q_{n-1}$$
$$p_{n-1} \cdot h + p_{n-2} \cdot k = q_n$$

*o sea, despejando **h** y **k***

$$h = \frac{q_n \cdot p_{n-3} - q_{n-1} \cdot p_{n-2}}{p_{n-2}^2 - p_{n-1} \cdot p_{n-3}}$$

$$k = \frac{q_{n-1} \cdot p_{n-1} - q_n \cdot p_{n-2}}{p_{n-2}^2 - p_{n-1} \cdot p_{n-3}}$$

Finalmente, con h y k, volvemos a calcular los valores de u y v de la siguiente forma:

$$u_{m+1} = u_m + h_m$$
$$v_{m+1} = v_m + k_m$$

El método se va a repetir en la medida que los valores de qn y qn-1 sigan siendo mayores que la cota de error deseada.

Al terminar, se calculan las raíces en cuestión usando u y v como valores dentro de la fórmula resolvente.

Aun asi, si el polinomio no cumple con las condiciones para el uso del algoritmo Q-D, se pueden aplicar métodos de preprocesamiento para transformar dicho polinomio.

Preprocesamiento de un polinomio

- Transformación de polinomios

- Elimina las restricciones de $p(X)$ para poder aplicar el algoritmo

- Los métodos son:
  - Traslación efectuada sobre la indeterminada
  - Transformación Recíproca
  - Homotecia sobre un polinomio
  - Homotecia sobre la indeterminada

Transformación sobre la indeterminada

- $P(x) \rightarrow P(x + c)$

  $Q(x) = P(x + c) = \Sigma\, b_k (x - c)^k$

- Los coeficientes de b están dados por: $b_k = \frac{P^{(k)}(c)}{k!}$
- z es cero de P(x) si y sólo si z – c es cero de Q(x)
- Es útil para desarrollar el algoritmo Q-D cuando uno de los coeficientes es nulo

Homotecia sobre un polinomio

- Se implementa para realizar un ajuste de escalas en el gráfico

- $P(x) \rightarrow c\,P(x) = Q(x)\ (c \neq 0)$

- El resultado obtenido es un nuevo polinomio que posee todos los coeficientes de P(x) pero ahora multiplicados por el valor c.

Transformación Recíproca

- Consiste en realizar la siguiente operación:

  $P(x) \rightarrow x^{n} p(1/x)$ donde n es el grado de P(x)

- El nuevo polinomio Q (x) será:

  $Q(x) = x^{n} P(1/x)$

- Un número complejo z distinto de 0 será raíz del polinomio P(x) si, y sólo si, su recíproco 1/z es cero del polinomio transformado Q(x).

  $P(z) = 0 \leftrightarrow Q(1/z) = 0$

Homotecia sobre la indeterminada

- Se modifica el eje x en base a un factor |c|.

- $P(cz) = 0 \leftrightarrow Q(z) = 0$

- Si el factor c= -1:

  $-Q(x)=P(-x)$

  - Sus coef. : $b_k = [(-1)]^k a_k$ siendo a_k el coeficiente de x_k en P(x).

  - $P(-z) = 0 \leftrightarrow Q(z) = 0$

Casos Analizados

- Par de raíces co-modulares
- Coeficientes iguales a 0
- Todas raíces reales
- Raíces complejas y reales
- Raíces muy cercanas

Coeficientes iguales a cero

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 1$

$x1 = 2.20556943$

$x2 = -0.1027847152 + 0.6654569512\ i$

$x3 = -0.1027847152 - 0.6654569512\ i$

$C=2: \ Q(x) = x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

Coeficientes iguales a cero

Raíces de Q(x):

- x1 = -2.10278 + 0.66546 i
- x2 = -2.10278 - 0.66546 i
- x3 = 0.20557

Raices de P(x):

- x1= 2.20557
- x2= -0.10278 + 0.66546 i
- x3= -0.10278- 0.66546 i

Coeficientes iguales a cero

Comparación con el método de Newton-Raphson

	original	Q-D (100 iter) tol=0.0001	Newton-Raphson tol=0.0001
x1	2.20556943	2.20557	2.2055766 x0=1 11 iter
x2	-0.1027847152+ 0.66546 i	-0.10278+ 0.66546 i	-0.10278+ 0.66546i x0=1+i 8 iter
x3	-0.1027847152 - 0.66546 i	-0.10278- 0.66546 i	-0.10278-0.66546i x0=1-i 8 iter

Raices co-modulares

$P(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$

- $x1 = -3$
- $x2 = -1$
- $x3 = 3$

Raices co-modulares

Raíces obtenidas por el método Q-D

- Se obtuvieron dos raíces por el método de Bairstow, más allá de que estas sean reales:

  x1=-3.00002

  x2=3.00002

- Esta raiz se obtuvo por qd, sin necesidad de aplicar Bairstow

  x3=-1.00001

Raices co-modulares

Comparación con Punto Fijo Sistemático

	origInal	QD /Bairstow (100 iter) tol=0.0001	P F S tol=0.0001
x1	3	3.00002	2.9999981 intervalo: [2 ; 4] Iter =4
x2	-3	-3.00002	-3.0000065 intervalo [-4;-2] Iter =32
x3	-1	-1.00001	-1.0000022 Intervalo [-2;0] Iter =6

Todas raíces reales

$P(x)= 25x^3+75x^2-15x-1$

x1=-3.184469958

x2= 0.2373840453

x3= -0.05291408719

Todas raíces reales

Comparación con el método de Bisección

	original	QD (iter: 4)	Bisección
x1	-3.184469958	-3.18447	-3.18447 [-3.15;-3.19], iter: 9
x2	-0.05291408719	-0.05295	-0.05291 [-0.1;0.0], iter: 10
x3	0.2373840453	0.23742	0.2374023 [0.2;0.24], iter: 9

Raíces complejas y reales

$P(x)= x^4 +2x^3 -2x^2 +7x +10$

x1= -1

x2 -3.054239

x3= 1.027119592 + 1.489685589 i

x4=1.027119592 - 1.489685589 i

Raíces complejas y reales

	original	QD (iter: 100)	NR
x1	-3.054239	-3,05424	-3.0542392 x0= -5, Iter: 6
x2	-1	-1,0000	-1.00000 x0= -2, Iter: 4
x3	1.027119592 + 1.489685589 i	1,02712 + 1,48969 i	1.02712 + 1.489689 i x0= (0,2.4 i). Iter: 9
x4	1.027119592 - 1.489685589 i	1,02712 - 1,48969 i	1.02712 -1.48969 i x0= (1, -10 i). Iter: 12

Raíces muy cercanas

$P(x)=x^2 -8.001x +16.004$

$x1=4$

$x2= 4,001.$

Raíces muy cercanas

Comparación con el método de Newton Raphson

	original	QD (iter 100)	NR
x1	4	3.99903	3.99259 Iter: 11, x0=0
x2	4.001	4.00197	4.00840 Iter: 7, x0=5

Conclusión

Ventajas:

- Obtención directa de todas las raíces.

Desventajas:

- Gran cantidad de iteraciones.
- El polinomio debe estar completo.
- Las raíces deben ser reales y con un espaciado determinado.