

Trabajo Practico Volúmenes Finitos 1D

Lagorio, Jeremias Unrrein, G. Julián

Octubre 2019

1 Discretización de la Ecuación de Conservación escalar

Sea $\phi(x, y, z)$ una magnitud escalar, Ω un dominio en \mathbb{R}^3 y Γ su frontera, podemos escribir una ecuación de conservación de esta cantidad en forma diferencial como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \vec{v} \phi + c\phi = \nabla \cdot \left(\frac{k}{\rho C_p} \nabla \phi \right) + Q \quad (1)$$

Tomando la ecuación diferencial anterior e integrándola en todo el dominio. Si aplico el teorema de Gauss-Green, a los términos que poseen divergencia de flujos estos generan en lugar de integrales de volúmenes, integrales de superficies como se ve en la siguiente ecuación:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{v} \phi \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Omega} c\phi d\Omega = \int_{\Gamma} \frac{k}{\rho C_p} \nabla \phi \cdot d\vec{\Gamma} + \int_{\Omega} Q d\Omega \quad (2)$$

Juntando las integrales de volumen en un termino y las de superficie en otros.

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\phi - Q \right) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(\vec{v} \phi - \frac{k}{\rho C_p} \nabla \phi \right) \cdot d\vec{\Gamma} = 0 \quad (3)$$

Tomando dominio de calculo y dividirla en porciones denominadas celdas o volúmenes finitos que cubrirán todo el dominio de calculo, además no están superpuestas.

$$\sum_{j=1}^m \left[\int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\phi - Q \right) d\Omega - \int_{\Gamma_j} (\kappa \nabla \phi - \vec{v} \phi) \cdot d\vec{\Gamma} \right] = 0 \quad (4)$$

Considerando a los volúmenes de la discretización como poliedros, se obtiene entonces:

$$\sum_{j=1}^m \left[\int_{\Omega_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + c\phi - Q \right) d\Omega - \left\{ \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} (\kappa \nabla \phi - \vec{v} \phi) \cdot d\vec{\Gamma}_i \right\}_j \right] = 0 \quad (5)$$

Considerando los valores de ϕ constante por celda y por cara se puede realizar las siguientes aproximaciones

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_j} \phi d\Omega_j &= \bar{\phi} V_j \\ \int_{\Gamma_i} \phi d\vec{\Gamma}_i &= \bar{\phi} \vec{S}_{f_i}\end{aligned}\tag{6}$$

Donde V_j es el volumen de la celda j-esima y \vec{S}_{f_i} es el área de la frontera con dirección normal a ésta. Quedando la ecuación final

$$\sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial t} + c\phi_j - Q \right) V_j - \left\{ \sum_{i=1}^n (\kappa \nabla \phi - \vec{v}\phi)_{f_i} \cdot \vec{S}_{f_i} \right\}_j \right] = 0 \tag{7}$$

2 Aplicación en 1D

Aplicando la ecuación 7 a una sola celda P queda:

$$\left(\frac{\partial \phi_P}{\partial t} + c\phi_P - Q_P \right) V_P - \left\{ \sum_{i=1}^n (\kappa \nabla \phi - \vec{v}\phi)_{f_i} \cdot \vec{S}_{f_i} \right\}_P = 0 \tag{8}$$

Considerando que la celda P, tiene como vecinos los centroides W y E, con sus respectivas caras w y e. El gradiente de las respectivas caras se obtiene a partir de una aproximación centrada. Las aproximaciones son:

$$\begin{aligned}\nabla \phi_w \cdot \vec{S}_{f_w} &= \frac{\phi_W - \phi_P}{\delta_w} (-\vec{i}) \cdot \vec{n}_w S_w = \frac{\phi_W - \phi_P}{\delta_w} S_w \\ \nabla \phi_w \cdot \vec{S}_{f_e} &= \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta_e} (\vec{i}) \cdot \vec{n}_e S_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta_e} S_e\end{aligned}\tag{9}$$

Donde $S_{w|e}$ son la magnitud del área de las respectivas caras, y $\vec{n}_{w|e}$ son los versores normales a la caras. Los cuales son para 1D resultan ser $(-\vec{i}) = (-1, 0, 0)$ e $(\vec{i}) = (1, 0, 0)$ respectivamente.

Los valores $\delta_{w|e}$ son la distancias entre los centroides W-P y E-P, si se considera una malla uniforme con división dx , ambas distancias son iguales a dx . El área en ambas caras, con malla uniforme, esta dada por $S_{w|e} = A = dy * t$.

Expandiendo (8) y reemplazando los gradientes por (9), eliminado el termino temporal y agregando todas las consideraciones dichas anteriormente, la ecuación resultante es:

$$\begin{aligned}Q_P V_P &= c V_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) + \vec{v} \phi_{f_w} \cdot \vec{S}_{f_w} \\ &\quad - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + \vec{v} \phi_{f_e} \cdot \vec{S}_{f_e}\end{aligned}\tag{10}$$

Considerando que

$$\begin{aligned}\vec{v}\phi_{f_w} \cdot \vec{S}_{f_w} &= \phi_{f_w} \vec{v} \cdot \vec{n}_w A = -v_x \phi_{f_w} A \\ \vec{v}\phi_{f_e} \cdot \vec{S}_{f_e} &= \phi_{f_e} \vec{v} \cdot \vec{n}_e A = v_x \phi_{f_e} A\end{aligned}\quad (11)$$

La ecuación (10) puede reducirse, aplicando estas consideraciones y agrupando términos, a:

$$\begin{aligned}Q_P V_P &= cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x \phi_{f_w} A \\ &\quad - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x \phi_{f_e} A\end{aligned}\quad (12)$$

2.1 Esquema Centrado para ϕ_{f_i}

Para aproximar ϕ_{f_i} se utiliza una interpolación lineal entre los centroides que están relacionados por la cara, es decir:

$$\begin{aligned}\phi_{f_w} &= f_x^w \phi_P + (1 - f_x^w) \phi_W \\ \phi_{f_e} &= f_x^e \phi_P + (1 - f_x^e) \phi_N\end{aligned}$$

Para una malla uniforme $f_x^{w|e} = 1/2$, quedando las siguientes aproximaciones:

$$\begin{aligned}\phi_{f_w} &= \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \\ \phi_{f_e} &= \frac{\phi_P + \phi_E}{2}\end{aligned}$$

Aplicando estas aproximaciones a la ecuación (12) se obtiene:

$$\begin{aligned}Q_P V_P &= cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x \frac{\phi_P + \phi_W}{2} A \\ &\quad - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x \frac{\phi_P + \phi_E}{2} A\end{aligned}\quad (13)$$

Reagrupando los términos, queda la ecuación utilizada para armar el stencil central de la matriz:

$$Q_P V_P = \left(cV_P + 2 \frac{\kappa A}{dx} \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2} \right) \phi_W + \left(-\frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2} \right) \phi_E \quad (14)$$

2.2 Esquema Upwind para ϕ_{f_i}

En lugar de aproximar el valor de ϕ_{f_i} , se utiliza el valor de ϕ en el centro de la celda que se encuentra "aguas arriba" (upwind):

$$\phi_{f_w} = \begin{cases} \phi_W, & \text{si } v_x > 0 \\ \phi_P, & \text{si } v_x < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{f_e} = \begin{cases} \phi_P, & \text{si } v_x > 0 \\ \phi_E, & \text{si } v_x < 0 \end{cases}$$

En el caso en que $v_x > 0$ la ecuación 12 se transforma en:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x A \phi_W - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x A \phi_P \quad (15)$$

Reagrupando los términos, queda la ecuación utilizada para armar el stencil central de la matriz:

$$Q_P V_P = \left(cV_P + 2\frac{\kappa A}{dx} + v_x A \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - v_x A \right) \phi_W - \frac{\kappa A}{dx} \phi_E \quad (16)$$

En el caso en que $v_x < 0$, un análisis similar lleva a la siguiente expresión para el stencil de las celdas centrales:

$$Q_P V_P = \left(cV_P + 2\frac{\kappa A}{dx} - v_x A \right) \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} \phi_W + \left(-\frac{\kappa A}{dx} + v_x A \right) \phi_E \quad (17)$$

3 Condiciones de borde

3.1 Condición Dirichlet

3.1.1 Izquierda Centrado(West)

En este caso ϕ_W no existe y se cambia por el termino del valor dado $\bar{\phi}$.
El término difusivo $\nabla \phi_w$ se cambia por:

$$\frac{\kappa A}{\frac{dx}{2}} (\bar{\phi} - \phi_P)$$

El término advectivo ϕ_{f_w} se cambia por el valor $\bar{\phi}$ directamente, quedando:

$$v_x \bar{\phi} A$$

Reemplazando estas ecuaciones en (24) se obtiene:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa 2A}{dx} (\bar{\phi} - \phi_P) - v_x \bar{\phi} A - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x \frac{\phi_P + \phi_E}{2} A$$

Reagrupando, el stencil para la condición borde es:

$$Q_P V_P + \frac{\kappa 2A}{dx} \bar{\phi} + v_x \bar{\phi} A = (cV_P + \frac{\kappa 3A}{dx} + \frac{v_x A}{2}) \phi_P + (-\frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2}) \phi_E \quad (18)$$

3.1.2 Izquierda Upwind $v_x > 0$

Teniendo en cuenta las mismas consideraciones que en centrado la ecuación (15), cambia por:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa 2A}{dx} (\bar{\phi} - \phi_P) - v_x A \bar{\phi} - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x A \phi_P$$

Obteniendo el siguiente stencil:

$$Q_P V_P + \frac{\kappa 2A}{dx} \bar{\phi} + v_x A \bar{\phi} = \left(cV_P + \frac{\kappa 3A}{dx} + v_x A \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} \right) \phi_E \quad (19)$$

3.1.3 Derecha (East)

Para el caso de la condición en la derecha, el planteno es el mismo, solo que se cambia el término difusivo $\nabla \phi_e$ y el término advectivo ϕ_{fe} la ecuación (24), resulta:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x \frac{\phi_P + \phi_W}{2} A - \frac{2\kappa A}{dx} (\bar{\phi} - \phi_P) + v_x \bar{\phi} A$$

El stencil, reagrupando los términos es:

$$Q_P V_P + \frac{\kappa 2A}{dx} \bar{\phi} - v_x \bar{\phi} A = (cV_P + \frac{\kappa 3A}{dx} - \frac{v_x A}{2}) \phi_P + (-\frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2}) \phi_W \quad (20)$$

3.1.4 Derecha Upwind $v_x > 0$

Trabajando igual que la condición izquierda solo que en este caso $\phi_E = \bar{\phi}$, se obtiene:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x A \phi_W - \frac{2\kappa A}{dx} (\bar{\phi} - \phi_P) + v_x A \phi_P$$

El stencil para éste caso es:

$$Q_P V_P + \frac{2\kappa A}{dx} \bar{\phi} = \left(cV_P + \frac{3\kappa A}{dx} + v_x A \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - v_x A \right) \phi_W \quad (21)$$

3.2 Condición Neumann

La condición de Neumann establece $-\kappa \nabla \phi_{f_i} \cdot \vec{n}_{f_i} = \bar{q}$ en la dirección de la normal a la cara. Para los términos difusivos $\nabla \phi_{f_i}$ el reemplazo es directo, en la cara el cual esta impuesto el flujo. Para los términos advectivos, el valor en la cara se obtiene a partir de utilizar la ecuación de Taylor $\phi_P = \phi_{f_i} - \nabla \phi_{f_i} \cdot \frac{dx}{2} \vec{n}_{f_i}$ por lo tanto $\phi_{f_i} = \phi_P + \nabla \phi_{f_i} \cdot \frac{dx}{2} \vec{n}_{f_i} = \phi_P - \frac{\bar{q} dx}{2\kappa}$.

La ecuación (8) se expande y utilizara para hacer los reemplazos necesarios (aplicando también lo considerado en (11)):

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \kappa \nabla \phi_{f_w} \cdot A \vec{n}_{f_w} - v_x A \phi_{f_w} - \kappa \nabla \phi_{f_e} \cdot A \vec{n}_{f_e} + v_x A \phi_{f_e} \quad (22)$$

3.2.1 Izquierda (West)

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P + A\bar{q} - v_x \left(\phi_P - \frac{\bar{q} dx}{2\kappa} \right) A - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x \frac{\phi_P + \phi_E}{2} A$$

El stencil resultante es:

$$Q_P V_P - A\bar{q} - \frac{v_x A \bar{q} dx}{2\kappa} = \left(cV_P - v_x A + \frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2} \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2} \right) \phi_E \quad (23)$$

3.2.2 Derecha (East)

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x \frac{\phi_P + \phi_W}{2} A + A\bar{q} + v_x \left(\phi_P - \frac{\bar{q} dx}{2\kappa} \right) A$$

El stencil resultante es:

$$Q_P V_P - A\bar{q} + \frac{v_x A \bar{q} dx}{2\kappa} = \left(cV_P + \frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2} + v_x A \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2} \right) \phi_W \quad (24)$$

3.3 Condición Robin

La condición de Robin, establece lo siguiente:

$$\kappa \nabla \phi_{f_i} \cdot \vec{n}_{f_i} + h(\phi_{f_i} - \phi_\infty) = 0$$

Esta ecuación tiene dos incógnitas. Para poder obtenerlas es necesario plantear una ecuación más que las relacione, para así armar un sistema con dos ecuaciones. La ecuación que se plantea es la aproximación de ϕ_P utilizando una serie de Taylor centrada en ϕ_{f_i} .

$$\phi_P = \phi_{f_i} - \nabla \phi_{f_i} \cdot \vec{n}_{f_i} \delta_{f_i}, \quad \delta_{f_i} = |x_P - x_{f_i}| = \frac{dx}{2}$$

Con estas dos ecuaciones se plantea el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} h & \kappa \\ 1 & -\delta_{f_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{f_i} \\ \nabla \phi_{f_i} \cdot \vec{n}_{f_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\phi_\infty \\ \phi_P \end{bmatrix}$$

Obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \phi_{f_i} &= \frac{h\phi_\infty \delta_{f_i}}{\kappa + h\delta_{f_i}} + \frac{\kappa\phi_P}{\kappa + h\delta_{f_i}} = a_i + b_i\phi_P \\ \nabla \phi_{f_i} \cdot \vec{n}_{f_i} &= \frac{h\phi_\infty}{\kappa + h\delta_{f_i}} - \frac{h\phi_P}{\kappa + h\delta_{f_i}} = c_i + d_i\phi_P \end{aligned} \quad (25)$$

3.3.1 Izquierda (West)

Sustituyendo los resultados de (25) en la ecuación (22) con $i = w$ se obtiene:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \kappa A(c_w + d_w \phi_P) - v_x A(a_w + b_w \phi_P) - \frac{\kappa A}{dx}(\phi_E - \phi_P) + v_x A \phi_{f_e}$$

Si se decide aproximar ϕ_{f_e} utilizando un esquema centrado, se llega a que:

$$\begin{aligned} Q_P V_P &= cV_P \phi_P - \kappa A(c_w + d_w \phi_P) - v_x A(a_w + b_w \phi_P) \\ &\quad - \frac{\kappa A}{dx}(\phi_E - \phi_P) + \frac{v_x A}{2}(\phi_P + \phi_E) \end{aligned}$$

Reagrupando términos:

$$\begin{aligned} Q_P V_P + \kappa A c_w + v_x A a_w &= \left(cV_P - \kappa A d_w - v_x A b_w + \frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2} \right) \phi_P \\ &\quad + \left(-\frac{\kappa A}{dx} + \frac{v_x A}{2} \right) \phi_E \end{aligned} \quad (26)$$

Si se decide aproximar ϕ_{f_e} utilizando un esquema upwind con $v_x > 0$, se llega a que:

$$Q_P V_P = c V_P \phi_P - \kappa A (c_w + d_w \phi_P) - v_x A (a_w + b_w \phi_P) - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_E - \phi_P) + v_x A \phi_P$$

Reagrupando términos:

$$Q_P V_P + \kappa A c_w + v_x A a_w = \left(c V_P - \kappa A d_w - v_x A b_w + \frac{\kappa A}{dx} + v_x A \right) \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} \phi_E \quad (27)$$

3.3.2 Derecha (East)

Sustituyendo los resultados de (25) en la ecuación (22) con $i = e$ se obtiene:

$$Q_P V_P = c V_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x A \phi_{f_w} - \kappa A (c_e + d_e \phi_P) + v_x A (a_e + b_e \phi_P)$$

Si se decide aproximar ϕ_{f_w} utilizando un esquema centrado, se llega a que:

$$Q_P V_P = c V_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - \frac{v_x A}{2} (\phi_P + \phi_W) - \kappa A (c_e + d_e \phi_P) + v_x A (a_e + b_e \phi_P)$$

Reagrupando términos:

$$Q_P V_P + \kappa A c_e - v_x A a_e = \left(c V_P - \kappa A d_e + v_x A b_e + \frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2} \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - \frac{v_x A}{2} \right) \phi_W \quad (28)$$

3.3.3 Derecha Upwind $v_x > 0$

Al usar un esquema upwind ya se eligió una aproximación para ϕ_{f_e} , por lo que no es necesario hacer una aproximación del mismo como se hizo al inicio de la sección.

Es suficiente con reemplazar en la condición Robin el valor de ϕ_{f_e} ya aproximado:

$$\kappa \nabla \phi_{f_e} \cdot \vec{n}_{f_e} + h(\phi_{f_i} - \phi_\infty) = \kappa \nabla \phi_{f_e} \cdot \vec{n}_{f_e} + h(\phi_P - \phi_\infty) = 0$$

Multiplicando la ecuación por A y reordenando términos, se llega a:

$$-\kappa \nabla \phi_{f_e} \cdot A \vec{n}_{f_e} = hA \phi_P - hA \phi_\infty$$

Utilizando este resultado, el stencil para dicha celda queda:

$$Q_P V_P = cV_P \phi_P - \frac{\kappa A}{dx} (\phi_W - \phi_P) - v_x A \phi_W + hA \phi_P - hA \phi_\infty + v_x A \phi_P$$

Reagrupando términos:

$$Q_P V_P + hA \phi_\infty = \left(cV_P + \frac{\kappa A}{dx} + hA + v_x A \right) \phi_P + \left(-\frac{\kappa A}{dx} - v_x A \right) \phi_W \quad (29)$$

4 Obtención de los valores en los bordes

Para la obtención del valor de la variable incógnita en los bordes del dominio, una vez calculado el valor en el centro de la celda del borde, se obtiene el valor correspondiente del borde a partir de la aproximación que se utilizó para calcular este centroide.

El cálculo tanto para la celda Oeste(West) y Este (East) es el mismo, sin importar la condición impuesta.

4.1 Condición Dirichlet

Para este tipo de condición el valor se obtiene directamente por el valor dado, es decir, $\phi_{borde} = \bar{\phi}$

4.2 Condición Neumann

Para esta condición se planteó la siguiente aproximación:

$$\phi_{borde} = \phi_P - \frac{\bar{q} dx}{2\kappa}$$

4.3 Condición Robin

4.3.1 Centrado

El valor en el borde para una condición Robin, está dado por:

$$\phi_{borde} = \frac{h\phi_\infty \delta_{f_i}}{\kappa + h\delta_{f_i}} + \frac{\kappa \phi_P}{\kappa + h\delta_{f_i}} = a_i + b_i \phi_P$$

Donde, para una malla uniforme, se tiene $\delta_{f_i} = dx/2$

4.3.2 Upwind

En este caso el valor en el borde se obtiene por el impuesto dado por la implementación upwind.

$$\phi_{borde} = \phi_{fi}$$

5 Esquema temporal

El planteo para esquema temporal es el siguiente:

$$\rho c_p \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \phi^{n+\theta} = \underline{F}^{n+\theta} \quad (30)$$

5.1 Forward-Euler o Explícito

En este caso $\theta = 0$, a partir de la ecuación (30) se obtiene:

$$\rho c_p \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \phi^n = \underline{F}^n$$

Despejando ϕ^{n+1} , la ecuación final es:

$$\phi^{n+1} = \frac{\Delta t}{\rho c_p} \underline{F}^n + \left[\underline{I} - \frac{\Delta t}{\rho c_p} \underline{\underline{K}} \right] \phi^n$$

5.2 Backward-Euler o Implícito

Planteamos $\theta = 1$ que dada la ecuación (30) resulta en:

$$\rho c_p \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \phi^{n+1} = \underline{F}^{n+1}$$

Despejando ϕ^{n+1} , la ecuación final es:

$$\phi^{n+1} = \left[\frac{\rho c_p}{\Delta t} \underline{I} + \underline{\underline{K}} \right]^{-1} \left[\frac{\rho c_p}{\Delta t} \phi^n + \underline{F}^{n+1} \right]$$

5.3 Crank-Nicholson o Semi-Implícito

Para este esquema se utiliza $\theta = 1/2$, por lo que la ecuación 30 se hace:

$$\rho c_p \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \underline{\underline{K}} \phi^{n+\frac{1}{2}} = \underline{F}^{n+\frac{1}{2}}$$

Si \underline{F} no depende del tiempo, entonces se puede usar $\underline{F}^{n+\frac{1}{2}} = \underline{F}^n$, mientras que $\phi^{n+\frac{1}{2}}$ es aproximado como:

$$\phi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\phi^{n+1} + \phi^n}{2}$$

Estas consideraciones transforman al esquema en:

$$\rho c_p \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} (\phi^{n+1} + \phi^n) = \underline{F}^n$$

Despejando ϕ^{n+1} , la ecuación final es:

$$\underline{\phi}^{n+1} = \left[\frac{\rho c_p}{\Delta t} I + \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} \right]^{-1} \left[\left[\frac{\rho c_p}{\Delta t} I - \frac{1}{2} \underline{\underline{K}} \right] \underline{\phi}^n + \underline{F}^n \right]$$

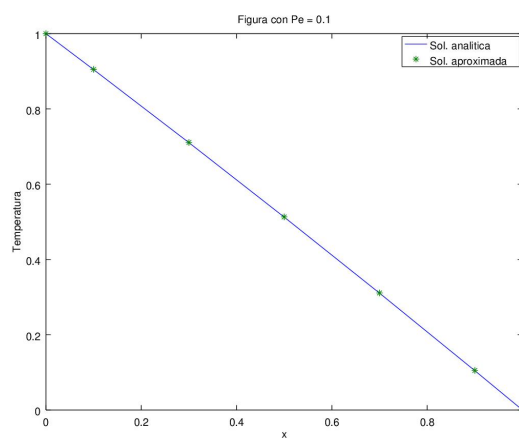
6 Soluciones de los ejercicios

6.1 Ejercicio 1

A continuación se muestran las soluciones obtenidas con los distintos valores de Pe . La división se hace con 5 celdas.

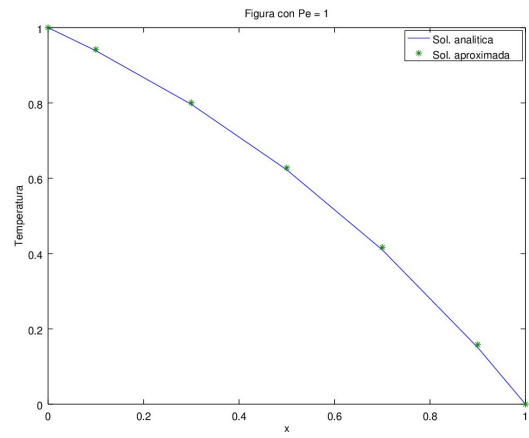
Para $Pe = 0,1$:

x	Sol. Analítica	Sol. Aproximada
0,1	0.90444	0.90402
0,3	0.71043	0.71014
0,5	0.51250	0.51239
0,7	0.31057	0.31068
0,9	0.10456	0.10493



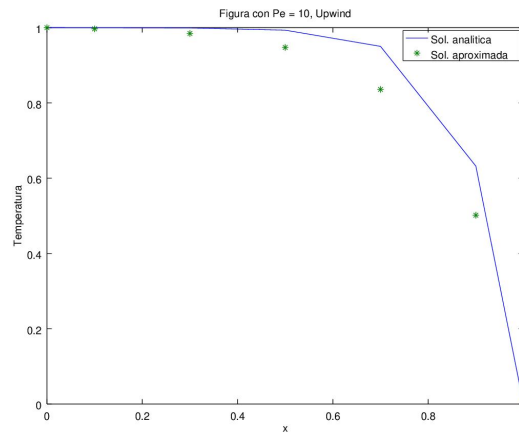
Para $Pe = 1$:

x	Sol. Analítica	Sol. Aproximada
0,1	0.93879	0.93373
0,3	0.79639	0.78795
0,5	0.62246	0.61300
0,7	0.41002	0.40307
0,9	0.15054	0.15115

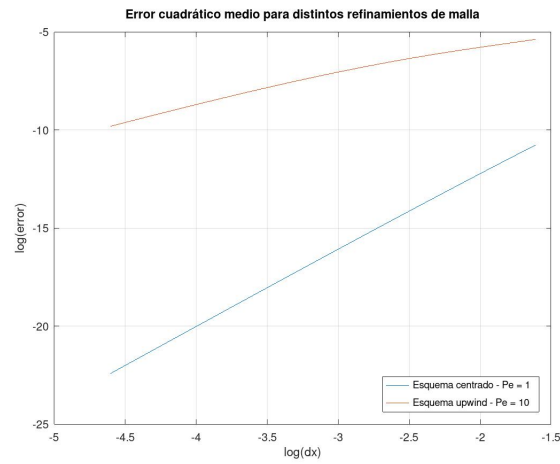


Para $Pe = 10$:

x	Sol. Analítica	Sol. Aproximada
0,1	0.99992	0.99690
0,3	0.99913	0.98452
0,5	0.99331	0.94737
0,7	0.95026	0.83591
0,9	0.63215	0.50155



Las siguiente gráficas muestran el logaritmo del error cuadrático medio, de la solución aproximada comparando con la solución analítica, a medida que se aumenta el tamaño de las celdas en que se divide el dominio:



El orden en que el error es proporcional al refinamiento de la malla puede obtenerse calculando la pendiente de estas rectas. Para el esquema centrado se tiene un orden de 3,9, y para el esquema upwind se tiene un orden de 1,5.

6.2 Ejercicio 2

A continuación se muestra la gráfica de las distintas soluciones obtenidas, con 10, 20 y 50 celdas, del problema 2.

