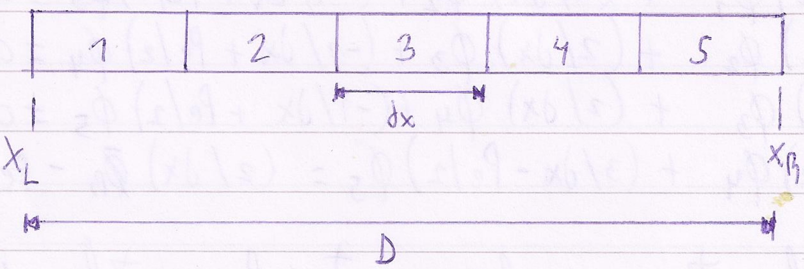
Mecánica Computacional 2019
Trabajo Práctico Volúmenes Finitos 1D

Solución del Modelo 1 utilizando Cálculo Manual

El dominio será dividido en 5 celdas de tamaño uniforme, como se muestra en la figura:



Además de los parámetros establecidos directamente por el enunciado del problema, se definen los siguientes:

$D = X_R - X_L = 1 - 0 = 1$
$\delta x = D/5 = 0{,}2$
$A = 1$
$V_P = V = A\,\delta x = D/5$

Al usar el método de volúmenes finitos para resolver el problema, la incógnita será el valor de la variable ϕ en los siguientes puntos del dominio:

$$X = [0{,}1 \quad 0{,}3 \quad 0{,}5 \quad 0{,}7 \quad 0{,}9]$$

Se pide resolver el problema para valores de $Pe = [0{,}1 \quad 1 \quad 10]$. Para los dos primeros se utilizará un esquema centrado para aproximar el valor de ϕ en la cara de las celdas. Para $Pe = 10$ se utilizará un esquema upwind para garantizar la estabilidad de la solución.

Solución utilizando esquema centrado ($Pe = [0{,}1 \quad 1]$)

Los stencils que aproximan la ecuación del modelo en las celdas se derivan de las ecuaciones (14), (18) y (20).

El sistema ensamblado de stencils será:

$$\begin{cases} (3/dx + Pe/2)\,\phi_1 + (-1/dx + Pe/2)\,\phi_2 = (2/dx)\bar{\phi}_L + Pe\,\bar{\phi}_L \\ (-1/dx - Pe/2)\,\phi_1 + (2/dx)\,\phi_2 + (-1/dx + Pe/2)\,\phi_3 = 0 \\ (-1/dx - Pe/2)\,\phi_2 + (2/dx)\,\phi_3 + (-1/dx + Pe/2)\,\phi_4 = 0 \\ (-1/dx - Pe/2)\,\phi_3 + (2/dx)\,\phi_4 + (-1/dx + Pe/2)\,\phi_5 = 0 \\ (-1/dx - Pe/2)\,\phi_4 + (3/dx - Pe/2)\,\phi_5 = (2/dx)\,\bar{\phi}_B - Pe\,\bar{\phi}_B \end{cases}$$

Planteando el sistema de forma matricial, y utilizando los valores de dx, $\bar{\phi}_L$ y $\bar{\phi}_B$ del problema, el mismo será:

$$\begin{bmatrix} 15 + Pe/2 & -5 + Pe/2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 - Pe/2 & 10 & -5 + Pe/2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 - Pe/2 & 10 & -5 + Pe/2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 - Pe/2 & 10 & -5 + Pe/2 \\ 0 & 0 & 0 & -5 - Pe/2 & 15 - Pe/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + Pe \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $Pe = 0{,}1$, el vector solución está dado por:

$$\phi_{Pe_{0,1}} = [0{,}90 \quad 0{,}71 \quad 0{,}51 \quad 0{,}31 \quad 0{,}11]$$

Para $Pe = 1$, el vector solución será:

$$\phi_{Pe_1} = [0{,}94 \quad 0{,}80 \quad 0{,}63 \quad 0{,}42 \quad 0{,}16]$$

Solución utilizando esquema upwind ($Pe=10$)

En este caso, los stencils que aproximan la ecuación del modelo para cada celda se derivan a partir de las ecuaciones (16), (19) y (21).

El sistema ensamblado de stencils queda:

$$\begin{cases} (3/dx + Pe)\,\phi_1 - (1/dx)\,\phi_2 = (2/dx)\,\bar{\phi}_L + Pe\,\bar{\phi}_L \\ (-1/dx - Pe)\,\phi_1 + (2/dx + Pe)\,\phi_2 - (1/dx)\,\phi_3 = 0 \\ (-1/dx - Pe)\,\phi_2 + (2/dx + Pe)\,\phi_3 - (1/dx)\,\phi_4 = 0 \\ (-1/dx - Pe)\,\phi_3 + (2/dx + Pe)\,\phi_4 - (1/dx)\,\phi_5 = 0 \\ (-1/dx - Pe)\,\phi_4 + (3/dx + Pe)\,\phi_5 = (2/dx)\,\bar{\phi}_R \end{cases}$$

Planteando el sistema de forma matricial, y utilizando los valores de dx, $\bar{\phi}_L$, $\bar{\phi}_R$, junto con $Pe=10$, el mismo queda:

$$\begin{bmatrix} 25 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -15 & 20 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 20 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & 20 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector solución de este sistema está dado por:

$$\phi_{Pe_{10}} = \begin{bmatrix} 0{,}997 & 0{,}98 & 0{,}95 & 0{,}84 & 0{,}50 \end{bmatrix}$$