

Trabajo Barras Matricial y FEM 1D

Lagorio Jeremias Unrein, G. Julián

Noviembre 2019

1 Barras Matricial

1.1 Teoría

Para elementos de barras se utiliza la siguiente ecuación,

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (1)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez global, el cual se obtiene ensamblando las distintas matrices de rigidez local, \mathbf{u} es el vector incógnitas de desplazamientos, y \mathbf{F} es el vector de fuerzas nodales.

Utilizando la matriz de rigidez local para una barra orientada arbitrariamente en el plano, definida de la siguiente manera:

$$[k] = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

Se define $c = \cos(\phi)$, $s = \sin(\phi)$, ϕ es el ángulo de la barra obtenido a partir del eje horizontal, E es el módulo de Young, A es el área de la barra y L su longitud.

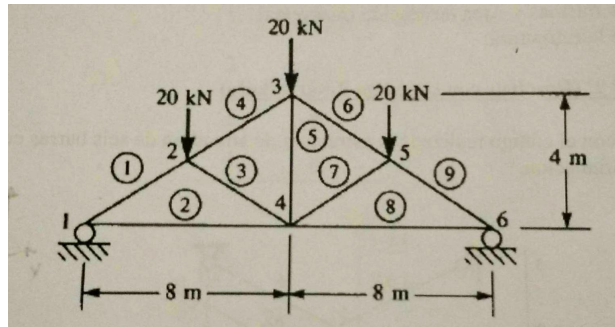
La tensión axial de cada barra se obtiene con la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{E}{L} [-c \quad -s \quad c \quad s] \mathbf{u}_i$$

\mathbf{u}_i son los desplazamientos de la barra i, obtenidos.

1.2 Ejercicio 10 de la guía de barras

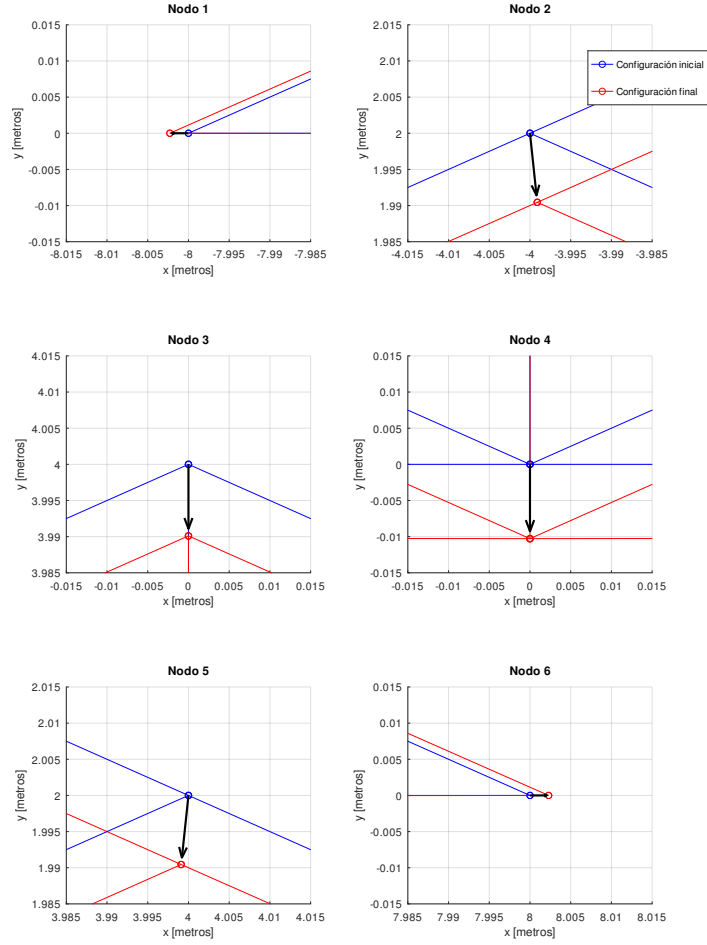
Para la armadura de un hipotético techo que se muestras en la figura siguiente, usar simetría para determinar los desplazamientos, de los nodos y las tensiones en cada elemento de barra. Todos los elementos tienen: $E = 210 \text{ [GPa]}$ y $A = 10 \times 10^{-4} [m^2]$



1.3 Resultados

Los resultados se obtuvieron utilizando el algoritmo adjunto, el cual básicamente, trabaja por cada barra armando su matriz local y luego la ensambla en la global. En caso de que la barra tenga fuerza nodales, se incluye en el vector de fuerza global.

En la siguiente figura se muestra los desplazamientos obtenidos, en los nodos de las barras:



En las siguientes tablas se muestran los desplazamientos de los nodos y las tensiones en cada elemento de barra:

| Nodo | u [m] | v [m] |
|------|-----------|-----------|
| 1 | -0.002286 | 0 |
| 2 | 0.000894 | -0.009553 |
| 3 | 0 | -0.009895 |
| 4 | 0 | -0.010276 |
| 5 | -0.000894 | -0.009553 |
| 6 | 0.002286 | 0 |

| Barra | σ [10^6 N/m ²] |
|-------|--------------------------------------|
| 1 | -6.7082 |
| 2 | 6 |
| 3 | -2.2361 |
| 4 | -4.4721 |
| 5 | 2 |
| 6 | -4.4721 |
| 7 | -2.2361 |
| 8 | 6 |
| 9 | -6.7082 |

2 Ejercicio 5 FEM 1D

2.1 Teoría

A partir de la ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dx}(AE \frac{du}{dx}) + b_x = 0 \quad [0, L] \quad (2)$$

b_x es una fuerza por unidad de longitud.

Con las condiciones de contornos:

$$\begin{aligned} u &= 0 & x &= 0 \\ AE \frac{du}{dx} &= P & x &= L \end{aligned}$$

Utilizando la forma debilitada de MRP la ecuación resulta:

$$\int_0^L \frac{dW}{dx} AE \frac{d\hat{u}}{dx} dx = \int_0^L W b(x) dx + [W \cdot P]_{x=L} \quad (3)$$

La aproximación está definida por: $\hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i(x) u_i$. Escogiendo tantas funciones de pesos como incógnitas u_i , se obtiene.

$$\int_0^L \frac{dW_i}{dx} AE \frac{d \sum_{j=1}^n N_j u_j}{dx} dx = \int_0^L W_i b(x) dx + [W_i \cdot P]_{x=L} \quad (4)$$

Utilizando Galerkin $W_i = N_i$

$$\int_0^L \frac{dN_i}{dx} AE \frac{d \sum_{j=1}^n N_j u_j}{dx} dx = \int_0^L N_i b(x) dx + [N_i \cdot P]_{x=L} \quad (5)$$

Se puede armar el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Donde

$$k_{ij} = \int_0^L \frac{dN_i}{dx} AE \frac{dN_j}{dx} dx \quad (6)$$

$$f_i = \int_0^L N_i b(x) dx + [N_i \cdot P]_{x=L} \quad (7)$$

Divido el dominio en elementos no intersectantes, y aplico el sistema obtenido, a cada uno de los elementos, y luego se ensambla juntando por los nodos coincidentes, a una matriz global.

Las funciones de formas N_i se definen locales, las cuales valen 1 en un nodo y luego cero en los otros.

Para un elemento entre $[x_1, x_2]$ con funciones de formas polinómicas lineales, definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} N_1^{(e)} &= \frac{x_2 - x}{l^{(e)}}; & \frac{dN_1}{dx} &= \frac{-1}{l^{(e)}} \\ N_2^{(e)} &= \frac{x - x_1}{l^{(e)}}; & \frac{dN_2}{dx} &= \frac{1}{l^{(e)}} \end{aligned} \quad (8)$$

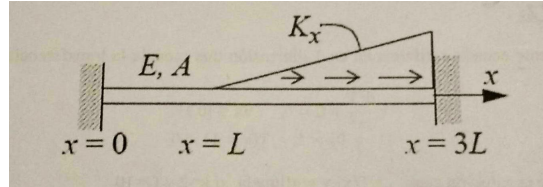
Donde $l^{(e)} = x_2 - x_1$.

2.2 Ejercicio 5 FEM 1D

La barra de la siguiente figura, tiene longitud de $3L$ y está cargada por una fuerza distribuida de :

$$k_x = \frac{Q}{2AL} \left(\frac{x}{L} - 1 \right),$$

donde Q corresponde a la fuerza total axial actuando sobre la barra. Ambos extremos están empotrados. Dividir la barra en dos elementos finitos de longitud L y $2L$ respectivamente y determinar los desplazamientos nodales y fuerzas de reacción. Compara con la solución exacta. Luego calcular con mas elementos.



2.3 Solución

Como en una parte de la barra se utiliza una fuerza distribuida que no es constante, se plantea las integrales de las funciones de formas lineales multiplicadas por una carga distribuida que varía linealmente en x , es decir, $b(x) = \alpha + \beta x$.

Las integrales planeadas son:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} N_1 b(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x_2 - x)}{l} \cdot (\alpha + \beta x) dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{\alpha(x_2 - x_1)^2}{2} + \beta \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{x_1^2 x_2}{2} + \frac{x_2^3}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} N_2 b(x) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{(x - x_1)}{l} \cdot (\alpha + \beta x) dx \\ &= \frac{1}{x_2 - x_1} \left[\frac{\alpha(x_2 - x_1)^2}{2} + \beta \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{x_2^2 x_1}{2} + \frac{x_1^3}{6} \right) \right]\end{aligned}$$

La solución analítica del problema es:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} \frac{Q}{EA} x & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ \frac{1}{36} \frac{QL}{EA} \left[3 - \frac{x}{L} + 9 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 3 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] & \text{para } L \leq x \leq 3L \end{cases}$$

2.3.1 Resultados

Para el problema resuelto utilizando dos elementos, los desplazamientos y reacciones nodales obtenidos son:

| Posición / L | Desplazamiento / $\frac{QL}{AE}$ | Reacción / Q |
|----------------|----------------------------------|----------------|
| 0 | 0 | -2/9 |
| 1 | 2/9 | 0 |
| 3 | 0 | -7/9 |

Para el problema resuelto utilizando 6 elementos, los desplazamientos y reacciones nodales obtenidos son:

| Posición / L | Desplazamiento / $\frac{QL}{AE}$ | Reacción / Q |
|----------------|----------------------------------|----------------|
| 0 | 0 | -2/9 |
| 1/2 | 1/9 | 0 |
| 1 | 2/9 | 0 |
| 3/2 | 31/96 | 0 |
| 2 | 13/36 | 0 |
| 5/2 | 79/288 | 0 |
| 3 | 0 | -7/9 |

En ambos casos, los resultados obtenidos coinciden con la solución analítica en los nodos evaluados.