VARIEDADES LINEALES

Extendamos el estudio de los vectores al espacio n-dimensional.

Se llama variedad lineal de $\mathbf{R^n}$, de dimensión $\boldsymbol{m < n}$, a un conjunto de puntos

X de R^n, del tipo:

$$\boxed{X = P + t_1\boldsymbol{A_1} + t_2\boldsymbol{A_2} + t_3\boldsymbol{A_3} + \ldots t_m\boldsymbol{A_m} \longrightarrow m < n}$$

- $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m}$ son vectores no nulos de R^n, llamados **vectores directores** de la variedad lineal; tales que ninguno de ellos es combinación lineal de los demás.
- P es un punto de R^n
- $t_1, t_2, \ldots . t_m$ son números reales(parámetros)

Si la dimensión ***m=1***, la Variedad Lineal es una recta de R^n $\longrightarrow$ $\boxed{X = P + t_1\boldsymbol{A_1}}$

Ejemplo :Una recta de R^4 que pasa por el punto *P=(1;2;3;4)* en la dirección de vector *A=(5;6;7;8)*:

$$\boxed{X = (1; 2; 3; 4) + t\,(5; 6; 7; 8)}$$

$x=1+5t$

$y=2+6t$

$z=3+7t$

$w=4+8t$

Ecuaciones paramétricas

Lo que antes escribías así:
$X = P + uA + vB$

Si la dimensión $m=2$ la Variedad Lineal es un plano de R^n

$$X = P + t_1 A_1 + t_2 A_2$$

Ejemplo: Un plano de R^4 que pasa por el punto $P = (1;2;3;4)$ y tiene los vectores directores $A = (5;6;7;8)$, $B = (9;10;11;12)$

$$X = (1;2;3;4) + u\,(5;6;7;8) + v\,(9;10;11;12)$$

Ecuación vectorial

$$\begin{cases} x = 1 + 5u + 9v \\ y = 2 + 6u + 10v \\ z = 3 + 7u + 11v \\ w = 4 + 8u + 12v \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas

Si la dimensión es ***m = n-1***, la Variedad Lineal se llama **HIPERPLANO DE R^n**

O sea los hiperplanos de R^n son Variedades Lineales de dimensión ***n-1***

$m=n\text{-}1 \rightarrow m=3\text{-}1$

m=2

Ejemplo: *El plano de* $\mathbf{R}^3$: $X = u\,(1,2,3) + v\,(0,1,0)$ *es un* ***Hiperplano de R^3***

2 vectores no paralelos

Ejemplo: $X = t_1\,(1,0,0,-1) + t_2\,(0,1,0,0) + t_3\,(0,0,0,1)$ **Hiperplano de R^4 de dimensión 3.**

- Los hiperplanos de R^n son las únicas variedades lineales de R^n que pueden representarse mediante **una única ecuación cartesiana.**
- **Los planos de R^3** pueden representarse mediante **una única ecuación cartesiana** porque los planos de R^3 son también hiperplanos de R^3.
- **Las rectas de R^2** también son hiperplanos de R^2 y como ya sabemos se pueden representarse mediante **una única ecuación cartesiana.**

$m=n\text{-}1 \rightarrow m=2\text{-}1$

m=1

Ejemplo: $X = t\,(1,2)$

Recta de R^2 es un **Hiperplano de R^2** de dimensión ***m =1*** (un vector director no nulo)

Para hallar la ecuación cartesiana del hiperplano de R^4 que pasa por el punto *P = (1,-1,2,-3)* y es ortogonal a la recta *X = (2,0,4,1) + t (3,4,5,6)*, el vector normal **N** del hiperplano debe ser **paralelo** al **vector director de la recta** (leer página 147 del texto)

$$\boxed{ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + k = 0} \Rightarrow \text{Ecuación cartesiana del hiperplano de } R^4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + k = 0$$

$$3.1 + 4.(-1) + 5.2 + 6.(-3) + k = 0 \Rightarrow \boxed{K = 9}$$

$$\boxed{3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9 = 0} \qquad \boxed{3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = -9}$$

Para escribir la ecuación cartesiana del hiperplano de R^5 que pasa por el punto *P = (2;1;0;4;-1)* y es paralelo al hiperplano $x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 1$, los **vectores normales** de ambos hiperplanos deben ser **paralelos**: $\boxed{x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 5x_5 + k = 0}$

reemplazamos por el punto P : 2+1-0+3.4-5.(-1)+ k =0 , de donde despejando resulta *k = -20*

$$\boxed{x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 20}$$