Examen 1

Análisis y Diseño de Algoritmos

20 de Abril del 2022

Ejercicio 1 (2 ptos). Demuestre que $\sum_{k=1}^{n}(k/3^k) \leq 1$. Puede suponer que es conocido que $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ cuando $|x| < 1$.

Ejercicio 2 (6 ptos). Pruebe las siguientes afirmaciones.

(a) $\frac{2}{3}n^2 - 7n - 300 = \Omega(n^2)$.

(b) $n^2 = O(n^2/3 - 5n \lg n)$. Puede suponer que es conocido que $n/\lg n$ es una función creciente. Sugerencia: tome como n_0 a una potencia de 2.

Ejercicio 3 (5 ptos). Resuelva la recurrencia **de manera explícita**, usando los métodos vistos en clase. Debe dar **la solución exacta** cuando n es potencia de 3. Cuando no lo es, debe acotar adecuadamente.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 3T(\lfloor n/3 \rfloor) + n^2 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Puede suponer que es conocido que $T(n)$ es una función creciente.

Ejercicio 4 (3.5 ptos). Considere la siguiente recurrencia sobre los números naturales

$$T(n) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq n \leq 2 \\ T(n-2) + 2T(n-3) + 1 & : \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pruebe por inducción que $T(n) = \Omega((3/2)^n)$.

Ejercicio 5 (3.5 ptos). Considere el siguiente problema. Entrada: un arreglo $A[1..n]$ de números, donde n es una potencia de 3. Reordenar el arreglo A de manera no decreciente.

Un algoritmo de división y conquista para dicho problema divide el arreglo en tres partes del mismo tamaño. Luego, invoca tres veces a sí mismo. Finalmente, el algoritmo mezcla las tres partes en tiempo $\Theta(n)$.

Escriba el pseudocódigo del algoritmo anterior. Analize el tiempo de ejecución de este algoritmo como fue visto en clase. Escriba una recurrencia para el desempeño de este algoritmo. Indique el crecimiento Θ de esta recurrencia **usando teorema maestro**. Por facilidad, puede considerar que todas las constantes asociadas valen 1.