

Ejercicios en clase: Análisis probabilístico y Quicksort

Análisis y Diseño de Algoritmos

31 de mayo de 2021

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria que guarda el número de caras en dos lanzamientos de una moneda justa. ¿Cuánto vale $E[X^2]$? ¿Cuánto vale $E[X]^2$?

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria que guarda la suma de los resultados en el lanzamiento de n dados. ¿Cuánto vale $E[X]$?

Ejercicio 3. Considere el problema de contratación de n personas (HIRE-ASSISTANT). Sea X_i la variable aleatoria que vale 1 si el i -ésimo candidato es contratado y 0 si no lo es. Hallar X_1, X_2, X_3 cuando $n = 3$ y los candidatos son $\{1, 2, 3\}$. Hallar X_1, X_2, X_3, X_4 cuando $n = 4$ y los candidatos son $\{1, 2, 3, 4\}$.

Ejercicio 4. En el pseudocódigo de HIRE-ASSISTANT, suponiendo que los candidatos se presentan en de manera aleatoria uniforme, ¿cual es la probabilidad que se contrate exactamente una vez?, ¿cual es la probabilidad de que se contrate n veces? ¿cual es la probabilidad que se contrate 2 veces?

Ejercicio 5. Considere el siguiente algoritmo que determina el el mayor y menor elemento de un vector $v[1 \dots n]$ con números positivos distintos.

MAYORMENOR(v, n)

```
1:  $mayor = v[1]$ 
2:  $menor = v[1]$ 
3: for  $i = 2$  to  $n$ 
4:   if  $v[i] > mayor$ 
5:      $mayor = v[i]$ 
6:   else
7:     if  $v[i] < menor$ 
8:        $menor = v[i]$ 
9: return  $mayor, menor$ 
```

Suponga que la entrada del algoritmo es una permutación de 1 a n escogida uniformemente dentre todas las permutaciones de 1 a n . ¿Cual es el número esperado de comparaciones ejecutadas en la línea 7 del algoritmo? ¿Cual es el número esperado de atribuciones efectuadas en la línea 8 del algoritmo?

Ejercicio 6. Ilustre la operación PARTITION en el arreglo $A = [13, 19, 9, 5, 12, 8, 7, 4, 21, 2, 6, 11]$.

Ejercicio 7. Escriba una función que reciba un vector con n letras A y B y, a través de intercambios, mueve todas las A al comienzo del vector. Su función deberá tener tiempo de ejecución $O(n)$.

Ejercicio 8. ¿Cual es el tiempo de ejecución de QUICKSORT cuando todos los elementos del arreglo A tienen el mismo valor?

Ejercicio 9. Pruebe que $\max_{0 \leq q \leq n-1} \{q^2 + (n - q - 1)^2\} = (n - 1)^2$