

Examen 2

Análisis y Diseño de Algoritmos

07 de Junio del 2021

Ejercicio 1 (3.5 ptos). Ejercicio 2 (3.5 ptos). Dado un conjunto de k vectores ordenados de manera decreciente, que en total tienen n elementos, indique un algoritmo $O(n \lg k)$ que los junta en un solo arreglo ordenado de manera decreciente. Sugerencia: use fila de prioridades. Puede invocar directamente a las funciones vistas en clase. No es necesario escribir pseudocódigo (si ve que es necesario hágalo). **Basta dar una idea clara de su algoritmo y su complejidad.**

Considere el siguiente problema. Entrada: Un arreglo $A[1..n]$ de números enteros positivos diferentes ordenado de manera creciente. Salida: El mínimo número entero positivo que no está en A . Por ejemplo, si $B = [1, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 12]$, el algoritmo debe devolver el valor 5. Diseñe un algoritmo de **división y conquista** (escriba el pseudocódigo del algoritmo) $\Theta(\lg n)$ en el peor caso. Escriba una recurrencia para el desempeño de este algoritmo. Compruebe el crecimiento Θ de esta recurrencia **usando teorema maestro**.

Ejercicio 3 (3 ptos). Muestre que la altura de un nodo i de un heap $A[1..n]$ es menor o igual que $\lg \frac{n}{i}$. Sugerencia: aplique inducción. Puede saber que es conocido cuanto es el valor de la altura de un heap con n nodos (no necesita probar este hecho).

Ejercicio 4 (3.5 ptos). Considere el siguiente algoritmo que determina el segundo mayor elemento de un vector $v[1 \dots n]$ con $n \geq 2$ números positivos distintos.

ALGO(v, n)

```
1: mayor = 0
2: segundo_mayor = 0
3: for  $i = 1$  to  $n$ 
4:   if  $v[i] > \textit{mayor}$ 
5:      $\textit{segundo\_mayor} = \textit{mayor}$ 
6:      $\textit{mayor} = v[i]$ 
7:   else
8:     if  $v[i] > \textit{segundo\_mayor}$ 
9:        $\textit{segundo\_mayor} = v[i]$ 
10: return  $\textit{segundo\_mayor}$ 
```

Suponga que v es una permutación de 1 a n escogida de entre todas las permutaciones de 1 a n con distribución uniforme de probabilidad. Sea X la variable aleatoria que guarda el número de veces que la variable $\textit{segundo_mayor}$ es alterada (osea, el número de ejecuciones de las líneas 5 y 9 del algoritmo) en una llamada a ALGO(v, n). Calcule el valor esperado de X .

Ejercicio 5 (3 ptos). ¿Cual es el tiempo de ejecución del Quicksort (usando la subrutina PARTITION vista en clase), en notación asintótica Θ , cuando todos los elementos del arreglo son iguales? Justifique (puede usar teorema maestro).

Ejercicio 6 (4 ptos). Tareas de evaluación continua