

Examen 1

Análisis y Diseño de Algoritmos

20 de Enero del 2022

Ejercicio 1 (2 ptos). Encuentre una fórmula directa para la siguiente sumatoria: $2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n}$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 (2.5 ptos). ¿Cuántos nodos a profundidad k tiene un árbol binario completo? Pruebe por inducción.

Ejercicio 3 (3.5 ptos). Pruebe que $\frac{1}{3}(n+1)(n-2) - 5 = \Theta(n^2)$.

Ejercicio 4 (4.5 ptos). Resuelva la recurrencia **de manera explícita**, usando los métodos vistos en clase. Debe dar **la solución exacta** cuando n es potencia de 2. Cuando no lo es, debe acotar adecuadamente.

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ T(n) = 6T(\lfloor n/2 \rfloor) + n & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Puede suponer que es conocido que $T(n)$ es una función creciente.

Ejercicio 5 (4.5 ptos). Considere la siguiente recurrencia sobre los números naturales

$$T(n) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq n \leq 2 \\ T(n-2) + 2T(n-3) + 1 & : \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Pruebe por inducción que $T(n) = \Omega((3/2)^n)$.

Ejercicio 6 (3 ptos). Considere el siguiente problema. Entrada: un arreglo $A[1..n]$ de números, donde n es una potencia de 3. Salida: el valor de un elemento mínimo en A . Un algoritmo de división y conquista para dicho problema divide el arreglo en tres partes del mismo tamaño. Luego, busca el valor mínimo de un elemento en cada una de estas partes y compara estos tres valores encontrados. Escriba el pseudocódigo del algoritmo anterior. Analise el tiempo de ejecución de este algoritmo como fue visto en clase. Escriba una recurrencia para el desempeño de este algoritmo. Indique el crecimiento Θ de esta recurrencia **usando teorema maestro**.