Analisis y Diseño de Algoritmos

Juan Gutiérrez

August 16, 2022

Resumen

Algoritmos

Algoritmos

¿Qué es un algoritmo?

Técnicas a estudiar en el curso

Introducción al análisis de eficiencia

Ejemplo 2. *Tenemos dos computadores A y B con las siguientes características y algoritmos a ejecutar:*

- *Computador A:*
  - *Velocidad:* 10^{10} *instrucciones/s,*
  - *Algoritmo a ejecutar: Insertion sort, cuyo tiempo de ejecucion es* $2n^2$ *(es decir, con entrada de tamaño* n*, ejecuta* $2n^2$ *instrucciones),*
- *Computador B:*
  - *Velocidad:* 10^7 *instrucciones/s,*
  - *Algoritmo a ejecutar: Merge sort, cuyo tiempo de ejecucion es* $50n\lg(n)$

- Si ordenamos 10^7 números tenemos que ...
- Si ordenamos 10^8 números tenemos que ...

Ejercicios

Ejercicio 1. *Suponga que en una misma computadora se corre Insertion sort y Merge sort, donde Insertion sort corre en* $8n^2$ *pasos con entrada de tamaño* n *y Merge sort corre en* $64n \lg n$ *pasos. Para que valores de* n*, es más eficiente el Insertion sort?*

Ejercicios

Ejercicio 2. *Cual es el menor valor de n tal que un algoritmo con tiempo de ejecucion $100n^2$ es más rapido que uno con tiempo de ejecucion 2^n en la misma máquina.*

Ejercicios

Ejercicio 3. *Para cada función $f(n)$ y tiempo t en la siguiente tabla, determine el mayor tamaño de n de un problema que puede ser resuelto en tiempo t, suponiendo que el algoritmo para resolver el problema toma $f(n)$ μs*

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$							
$\sqrt{n}$							
n							
$n \lg n$							
n^2							
n^3							
2^n							
$n!$							

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.
- $\log_a x^y = y \log_a x$

Propiedades de logaritmos

- $\log_a b = x$ si y solo si $b = a^x$.
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

Propiedad
Para todo número natural n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Propiedad
Para todo número natural n, $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Propiedad
Para todo número natural n, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$..

Inducción

Propiedad
Para todo número natural n, $\lg n \leq n$.

Propiedad
Para todo número natural $n \geq 44$, $8 \lg n \leq n$.

Sumatorias

Definición 5. *Dada una secuencia $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de números, donde n es un entero no negativo, podemos escribir la suma finita $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ como*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Sumatorias

Definición 6. *Dada una secuencia infinita* $a_1, a_2, \ldots$ *de números, podemos escribir la suma infinita* $a_1 + a_2 + \cdots$ *como*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si el límite no existe, la serie diverge, si no, esta converge.

Propiedad de Linealidad

Para cada número real c y cualesquier secuencias $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} (ca_k + b_k) = c\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Sumatorias

Series aritméticas

Son series en donde la resta de cada dos términos consecutivos es la misma. Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Sumatorias

Suma de cuadrados y cubos

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\frac{n(n+1)}{2})^2.$$

Series geométricas

Son series en donde la división de cada dos términos consecutivos es la misma.

Por ejemplo, para cada número real $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Sumatorias

Serie ármónica

Es la serie

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Acotando sumatorias por inducción

Probaremos por inducción en n que

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \frac{1}{2}(n+1)^2.$$

Acotando sumatorias por inducción

Probaremos por inducción en n que

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c3^n$$

Acotando sumatorias por inducción

Probaremos por inducción en n que

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq \frac{3}{2} 3^n.$$

Acotando sumatorias por términos

Podemos acotar superiomente cada término de una serie, por ejemplo

$$\sum_{k=1}^{n} k \leq \sum_{k=1}^{n} n = n^2$$

Acotando sumatorias por términos

En general, sea $a_{\max} = \max_{1 \leq k \leq n} a_k$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_{\max} = n \cdot a_{\max}$$

Acotando sumatorias por división

Acotaremos $\sum_{k=1}^{n} k$.

Acotando sumatorias por división

Acotaremos $\sum_{k=0}^{\infty} k^2/2^k$.

Acotando sumatorias por división

Acotaremos $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Árboles binarios

Un *árbol binario* T es definido recursivamente según:

- si T no tiene nodos entonces es un árbol binario
- si T tiene nodos, está compuesto por un nodo *raíz*, un árbol binario llamado *subárbol izquierdo* y un árbol binario llamado *subárbol derecho*

Árboles binarios

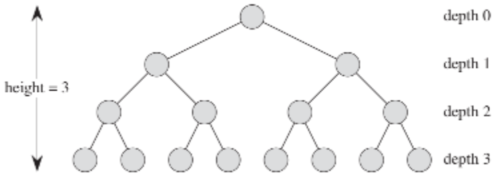

Figure B.8 A complete binary tree of height 3 with 8 leaves and 7 internal nodes.

Figure 1: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

Gracias