

# Examen 3

## Análisis y Diseño de Algoritmos

16 de junio de 2022

Duración: 2 horas

No se permite ningún tipo de apunte

**Ejercicio 1 (2 ptos).** Muestre la tabla para el problema SUBSET-SUM visto en clase para los items  $[2, 1, 2]$  con  $W = 5$ . Solo es necesario que muestre la tabla resultante final.

**Ejercicio 2 (3 ptos).** Escriba la recurrencia para el problema MIN-PARTITION visto en clase: dado un arreglo  $A[1..n]$  de números enteros no negativos, encontrar una partición de tamaño  $k$  con peso mínimo. El peso de una partición es el mayor valor de la suma de los elementos de un bloque de la partición.

**Ejercicio 3 (3 ptos).** Sobre el problema de la mochila fraccionaria. Sea  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  una solución al problema. Además, suponga que  $\frac{v[2]}{w[2]} > \frac{v[1]}{w[1]}$  y que todos los elementos en  $v$  y  $w$  son positivos. Sean  $\delta > 0$  y  $\beta = \delta \cdot \frac{w[1]}{w[2]}$ . Definamos una nueva posible solución  $x$  según

$$x[j] = \begin{cases} y[j] & \text{si } j \notin \{1, 2\} \\ y[j] - \delta & \text{si } j = 1 \\ y[j] + \beta & \text{si } j = 2 \end{cases}$$

Demuestre que  $x \cdot v > y \cdot v$ .

**Ejercicio 4 (4 ptos).** Queremos codificar el archivo cuyo contenido es la siguiente cadena:

*aaabbbbccccccddddddeefffgggghhhhhhhh.*

- (a) Muestre el resultado **final** (el árbol y las codificaciones asociadas) luego de correr la implementación  $O(n \lg n)$  de Huffman (no necesita mostrar pasos intermedios).
- (b) Indique cuál es el peso del archivo codificado y compárelo con el peso de un archivo codificado usando una cantidad fija de bits para cada caracter. ¿Existe una mejora?

**Ejercicio 5 (5 ptos).** Dado un arreglo  $A[1..n]$  de números enteros un *emparejamiento* de  $A$  es un conjunto de pares ordenados de elementos de  $A$ , tales que todo elemento en  $A$  aparece exactamente una vez en cualquier par. El *costo* de un emparejamiento  $X$  es  $\max\{a + b : (a, b) \in X\}$ . Por ejemplo, si  $A = \{3, 2, 3, 5\}$ , un emparejamiento es  $\{(3, 2), (3, 5)\}$  y su costo es  $\max\{3 + 2, 3 + 5\} = 8$ .

Diseñe un algoritmo voraz que recibe un arreglo  $A[1..n]$  y encuentra un emparejamiento de **costo mínimo**.

- (a) Mencione cual es la elección voraz
- (b) Escriba el pseudocódigo (no código) de su algoritmo voraz. Indique claramente qué recibe y qué devuelve su algoritmo. El algoritmo debe ser recursivo.
- (c) Demuestre que su elección voraz es correcta. Enuncie a modo de lema y demuestre que su lema es correcto.

Deberá utilizar las siguientes variables para soluciones devueltas por el algoritmo o utilizadas en las demostraciones:  $X, X'$ . Para subproblemas:  $A'$ .

**Ejercicio 6 (4 ptos).** Dados dos arreglos  $A[1..n]$  y  $B[1..m]$  de números enteros, queremos saber si  $A$  es una subsecuencia de  $B$ . Es decir, si existen índices  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  tales que

$$A[j] = B[i_j] \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Por ejemplo,  $A = [2, 3, 1, 4]$  es una subsecuencia de  $[2, 8, 3, 7, 1, 4, 9, 0]$ .

- Para cada par  $(i, j)$ , sea  $C(i, j)$  la variable que indica si  $A[1..i]$  es subsecuencia de  $B[1..j]$ . Describa una recurrencia para  $C(i, j)$ .
- Diseñe un algoritmo de programación dinámica (haga el pseudocódigo) con tiempo de ejecución  $O(nm)$  a partir de la recurrencia anterior.