Analisis y Diseño de Algoritmos
División y Conquista

Juan Gutiérrez

September 2019

1 El método de división y conquista

- **Dividir** el problema en subproblemas que son instancias del mismo problema.

  (En MergeSort: dividir el arreglo de tamaño n en dos subsecuencias de tamaño $n/2$.)

- **Conquistar**: Resolver los subproblemas recursivamente. Si el tamaño es pequeño, resolverlos directamente.

  (En MergeSort: ordenar las dos subsecuencias usando MergeSort.)

- **Combinar** las soluciones de los subproblemas en una solución para el problema original.

  (En MergeSort: Mezclar las dos subsecuencias ordenadas.)

Analizaremos el algoritmo MERGE-SORT. Este algoritmo tiene como base a la subrutina MERGE. Esta subrutina recibe un vector$A[1..n]$ y tres indices p, q, r tales que $A[p..q]$ y $A[q+1..r]$ están ordenados, y ordena el vector $A[p..r]$.

```
MERGE-SORT(A, p, r)
if p < r
    q = ⌊(p + r)/2⌋
    MERGE-SORT(A, p, q)
    MERGE-SORT(A, q + 1, r)
    MERGE(A, p, q, r)
```

Figure 1: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

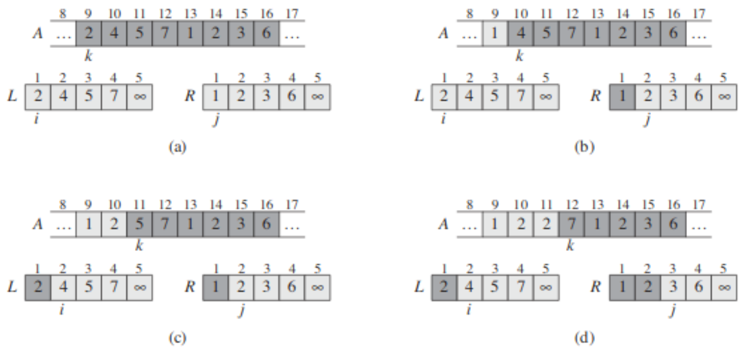


Figure 2: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

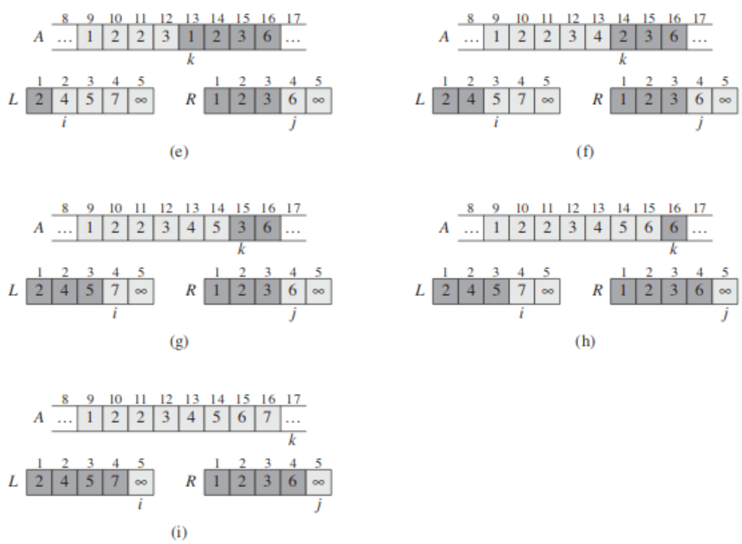


Figure 3: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

```
MERGE(A, p, q, r)
1  n1 = q - p + 1
2  n2 = r - q
3  let L[1 . . n1 + 1] and R[1 . . n2 + 1] be new arrays
4  for i = 1 to n1
5      L[i] = A[p + i - 1]
6  for j = 1 to n2
7      R[j] = A[q + j]
8  L[n1 + 1] = ∞
9  R[n2 + 1] = ∞
10 i = 1
11 j = 1
12 for k = p to r
13     if L[i] ≤ R[j]
14         A[k] = L[i]
15         i = i + 1
16     else A[k] = R[j]
17         j = j + 1
```

Figure 4: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

MERGE recibe un vector $A[1..n]$ y tres indices p, q, r tales que $A[p..q]$ y $A[q+1..r]$ están ordenados, y ordena el vector$A[p..r]$.

Analizamos la subrutina MERGE.

Invariante: Al inicio de cada iteración del bucle **for** (líneas 12–17), el subvector $A[p..k-1]$ contiene a los $k-p$ elementos más pequeños entre $L[1..n_1+1]$ y $R[1..n_2+1]$ ordenados. También, $L[i]$ y $R[j]$ son los elementos más pequeños que no han sido copiados.

Prueba:

- **Inicialización** $k = p$, luego $A[p..k-1] = \emptyset$

- **Manuntención**

  Caso 1: $L[i] \leq R[j]$. Entonces se ejecuta la línea 14. Como $A[p..k-1]$ estaba ordenado con los menores elementos, entonces $A[p..k-1]$ tendrá los $k-p+1$ elementos menores. Caso 2: $L[i] > R[j]$: similar.

- **Terminación**

  $k = r+1$. Luego $A[p..k-1] = A[p..r]$ contiene los $k-p = r-p+1 = n_1+n_2-2$ elementos más pequeños de $L[1..n_1+1]$ y $R[1..n_2+1]$. Osea todos excepto los sentinelas.

Tiempo de ejecución de la subrutina MERGE:

- Líneas 1–3, 8–11: tiempo constante.

- Líneas 4–7: tiempo $\Theta(n_1 + n_2) = \Theta(n)$.
- Líneas 12–17: tiempo $\Theta(n)$.

Llamada inicial: MERGE-SORT$(A, 1, A.length)$.

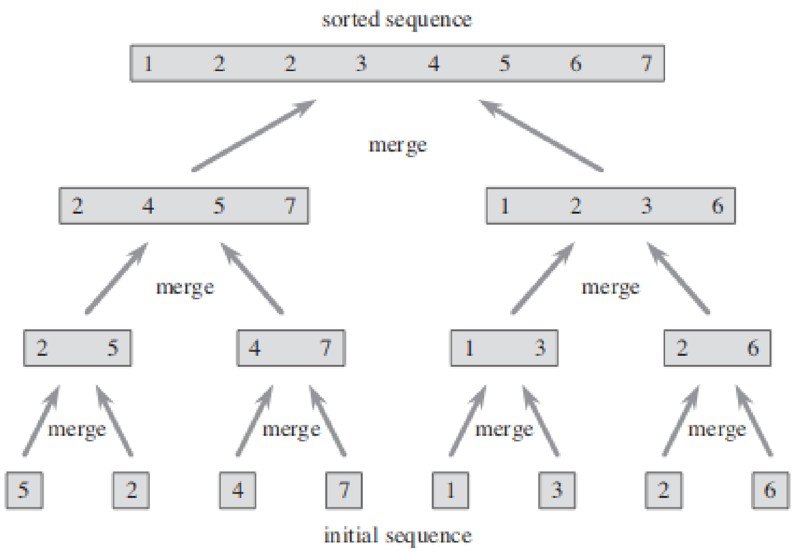


Figure 5: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms.

2 Análisis de tiempo

En general, cuando un algoritmo tiene una llamada a sí mismo, describimos su tiempo de ejecución $T(n)$ mediante una recurrencia.

Si el tamaño es $n \leq n_0$, la solución toma tiempo constante: $T(n) = k$. Si el tamaño es $n > n_0$ y tenemos a subproblemas, cada uno de tamaño n/b, la solución toma tiempo:

$$T(n) = aT(n/b) + D(n) + C(n),$$

donde $D(n)$ es el tiempo utilizado para subdividir en subproblemas y $C(n)$ es el tiempo utilizado para combinar las soluciones.

Análisis del Mergesort

Supondremos por un momento que n es potencia de 2. Tenemos

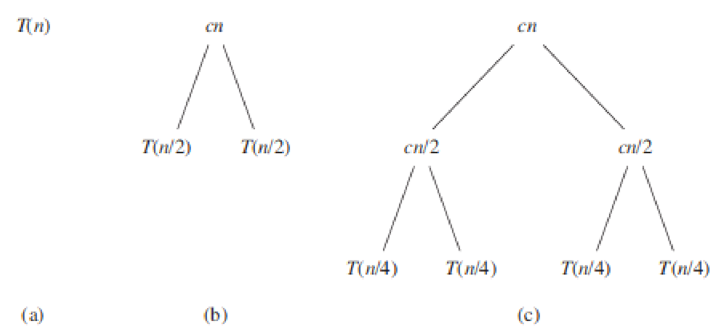
- $D(n)$ (dividir). Línea 2: tiempo constante k_1.

- $C(n)$ (combinar): Procedimiento MERGE (línea 5): $\Theta(n) = k_2 n$.

Luego $T(n) = c$ si $n = 1$ y, si $n > 1$,

$$T(n) = 2T(n/2) + k_2 n + k_1 = 2T(n/2) + cn.$$

Por facilidad (solo por esta vez), estamos suponiendo que $k_2 n + k_1 = cn$. Tenemos el siguiente árbol:



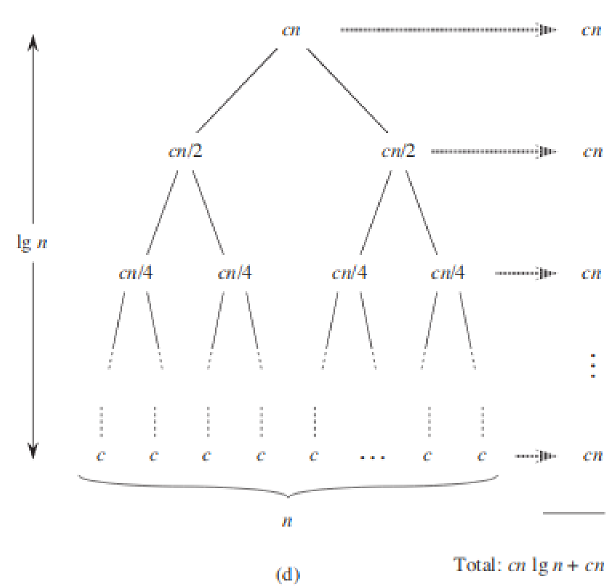


Figure 6: Tomada del libro Cormen, Introduction to Algorithms

Luego, intuitivamente, $T(n) = cn \lg n + cn = \Theta(n \lg n)$.

Este método nos da una intuición, pero aun no es tan formal, en la siguiente sección veremos como resolver recurrencias.

3 Recurrencias

Una recurrencia es una función que depende de sí misma en su definición. Plantear y resolver recurrencias nos ayudará a acotar el tiempo de ejecución de un algoritmo de división y conquista.

3.1 Resolución explícita

En esta sección veremos una manera mucho más detallada y formal para resolver recurrencias.

Ejemplo 3.1. *Sea* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{>}$ *definido por*

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2F(n-1)+1 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Por ejemplo $F(2) = 2F(1) + 1 = 3, F(3) = 2F(2) + 1 = 7, F(4) = 15$. *¿Cuanto vale* $F(n)$*?*

Solución.

$$\begin{aligned} F(n) &= 2F(n-1)+1 \\ &= 2(2F(n-2)+1)+1 \\ &= 4F(n-2)+3 \\ &= 4(2F(n-3)+1)+3 \\ &= 8F(n-3)+7 \\ &= \dots \\ &= 2^j F(n-j) + 2^j - 1 \\ &= 2^{n-1}F(1) + 2^{n-1} - 1 \\ &= 2 \cdot 2^{n-1} - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

Luego $F(n) = 2^n - 1 = \Theta(2^n)$.

Ejemplo 3.2. *Sea* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{>}$ *definido por*

$$F(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ F(n-1)+n & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Por ejemplo $F(2) = F(1) + 2 = 3, F(3) = F(2) + 3 = 6$. *Cuanto vale* $F(n)$*?*

Solución.

$$\begin{aligned}
F(n) &= F(n-1)+n \\
&= F(n-2)+(n-1)+n \\
&= F(n-3)+(n-2)+(n-1)+n \\
&= \ldots \\
&= F(n-j)+(n-j+1)+\cdots+n \\
&= F(1)+2+3+\cdots+n \\
&= 1+2+3+\cdots+n \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

Luego $F(n)=\Theta(n^2)$.

Ejemplo 3.3. *Sea* $F:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{>}$ *definido por*

$$F(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 2F(\lfloor n/2\rfloor)+n & \textit{caso contrário}\end{cases}$$

Por ejemplo $F(2)=2F(1)+2=4, F(3)=2F(1)+3=5$. *Como podemos acotar* $F(n)$*?*

Solución. Primero, supongamos que n es potencia de 2, osea $n=2^j$ para algún j. Tenemos,

$$\begin{aligned}
F(2^j) &= 2F(2^{j-1})+2^j \\
&= 2(2F(2^{j-2})+2^{j-1})+2^j \\
&= 2^2F(2^{j-2})+2^j+2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3})+2^j+2^j+2^j \\
&= 2^3F(2^{j-3})+3\cdot 2^j \\
&= 2^iF(2^{j-i})+i\cdot 2^j \\
&= 2^jF(1)+j\cdot 2^j \\
&= (j+1)2^j \\
&= (\lg n+1)n.
\end{aligned}$$

Ahora, suponga que n un número natural cualesquiera. Sea j tal que $2^j\le n<2^{j+1}$. Como F es creciente (ver final), tenemos que

$$F(n)<F(2^{j+1})=(j+2)\cdot 2^{j+1}\le 3j\cdot 2^{j+1}=6j\cdot 2^j\le 6n\lg n$$

(la última desigualdad vale porque $j\le\lg n$). y también,

$$F(n)\ge F(2^j)=(j+1)2^j=\frac{1}{2}(j+1)2^{j+1}>\frac{1}{2}n\lg n$$

(la última desigualdad vale porque $j+1 > \lg n$). Concluimos que $F(n) = \Theta(n \lg n)$.

Finalmente, probaremos que $F(n)$ es creciente. Debemos probar que $F(n) < F(n+1)$ para todo $n \geq 1$. Probaremos por inducción en n. Si $n = 1$, tenemos que $F(1) = 1 < 4 = F(n+1)$.

Si $n > 1$, tenemos dos casos. Si n es par, tenemos que $F(n) < F(n)+1 = 2F(n/2)+n+1 = 2F(\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor) + n + 1 = F(n+1)$. Si n es impar, tenemos que $F(n) = 2F(\frac{n-1}{2}) + n < 2F(\frac{n+1}{2}) + n < 2F(\frac{n+1}{2}) + n + 1 = F(n+1)$.

Practicar más ejercicios en la hoja de ejercicios.

3.2 Demostraciones por inducción

Ejemplo 3.4. *Sea $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{>}$ definido por*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Compruebe por inducción que $T(n) = O(n^2)$. Compruebe por inducción que $T(n) = \Omega(n \lg n)$.

Primero probaremos por inducción en n que $T(n) \leq 2n^2$ para $n \geq 1$. Si $n = 1$, tenemos que $T(1) = 1 \leq 2 \leq 2n^2$. Si $n > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n \\ &\leq 4(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)^2 + n \\ &\leq 4(\frac{n}{2})^2 + n^2 \\ &= 2n^2. \end{aligned}$$

Ahora probaremos por inducción en n que $T(n) \geq \frac{1}{4} n \lg n$ para $n \geq 4$. Si $n = 4$, tenemos que $T(4) = 12 \geq \frac{1}{4} 4 \lg 4 = \frac{1}{4} n \lg n$. Si $n > 4$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + n \\ &\geq 2 \cdot \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \lg \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + n \\ &\geq \frac{1}{2}(\frac{n}{2} - 1) \lg (\frac{n}{2} - 1) + n \\ &\geq \frac{1}{2}(\frac{n}{2} - 1) \lg (\frac{n}{4}) + n \\ &= \frac{1}{2}(\frac{n}{2} - 1)(\lg n - 2) + n \\ &= \frac{1}{4}(n \lg n) + n/2 + 2 - \lg n/2 \\ &\geq \frac{1}{4}(n \lg n). \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5. *Sea* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{>}$ *definido por*

$$T(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 2T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1 & \textit{caso contrário} \end{cases}$$

Compruebe por inducción que $T(n) = O(n)$.

Probaremos por inducción en n que $T(n) \leq 2n - 1$ para $n \geq 1$. Si $n = 1$, tenemos que $T(1) = 1 = 2 - 1 \leq 2n - 1$. Si $n > 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + 1 \\ &\leq 2(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1) + 1 \\ &= 4\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \\ &\leq 4 \cdot \frac{n}{2} - 1 \\ &= 2n - 1. \end{aligned}$$

Luego, $T(n) \leq 2n - 1 \leq 2n$ para $n \geq 1$, y por lo tanto $T(n) = O(n)$.

3.3 Teorema Maestro

Sean $a \geq 1$, $b \geq 2$, $k \geq 0$, $n_0 \geq 1 \in \mathbb{N}$. Sea $c \in \mathbb{R}^{>}$. Sea $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{>}$ una función no decreciente tal que

$$F(n) = aF(n/b) + cn^k$$

para $n = n_0b^1, n_0b^2, n_0b^3, \ldots$. Se cumple que

- Si $\lg a / \lg b > k$ entonces $F(n) = \Theta(n^{\lg a / \lg b})$
- Si $\lg a / \lg b = k$ entonces $F(n) = \Theta(n^k \lg n)$
- Si $\lg a / \lg b < k$ entonces $F(n) = \Theta(n^k)$

Cuando $b = 2$ tenemos que

- Si $\lg a > k$ entonces $F(n) = \Theta(n^{\lg a})$
- Si $\lg a = k$ entonces $F(n) = \Theta(n^k \lg n)$
- Si $\lg a < k$ entonces $F(n) = \Theta(n^k)$