

Ejercicios en clase: introducción

Análisis y Diseño de Algoritmos

8 de septiembre de 2021

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes desigualdades

- (a) Para todos números reales x, y , $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$
- (b) Para todos números reales x, y , $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$
- (c) Para todo número natural n , $(n-1)/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$
- (d) Para todo número natural n , $n/2 \leq \lceil n/2 \rceil \leq (n+1)/2$
- (e) Para todo número natural n , $n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$
- (f) Para todos $x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{Z}$, $\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil = \lceil \frac{x}{ab} \rceil$

Ejercicio 2. Probar por inducción que

- (a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo número natural n .
- (b) $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo número natural n .
- (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo número natural n .
- (d) $n \leq 2^{n/2}$, para $n \geq 4$.

Ejercicio 3.

- (a) Encuentre una fórmula simple para $\sum_{k=1}^n (2k-1)$
- (b) Muestre que $\sum_{k=1}^n 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + c$, donde c es una constante. Sugerencia: usar la serie armónica
- (c) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} (kx^k) = x/(1-x)^2$ cuando $|x| < 1$.
- (d) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 x^k) = x(1+x)/(1-x)^3$ cuando $|x| < 1$.
- (e) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} (k-1)/2^k = 0$.

Ejercicio 4.

- (a) Muestre que $\sum_{k=0}^{n+1} (3^k) \leq c3^{n+1}$ para alguna constante $c \geq 1$
- (b) Muestre que $\sum_{k=1}^n a_k \leq n \cdot \max_{1 \leq k \leq n} a_k$
- (c) Suponga que $a_{k+1}/a_k \leq r$ para todo $k \geq 0$. Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq a_0 \frac{1}{1-r}$.
- (d) Usando el ejercicio anterior, muestre que $\sum_{k=1}^{\infty} (k/3^k) \leq 1$.
- (e) Muestre que $\sum_{k=1}^n k \geq (n/2)^2 \sum_{k=1}^n (1/k^2) \leq c$ para alguna constante c

Ejercicio 5. ¿Cuántas hojas tiene un árbol binario completo con n nodos? Demuestre por inducción.

Ejercicio 6. Demuestre que la altura de un árbol binario completo con k hojas es $\lg k$.