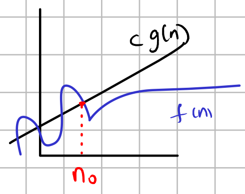
Notación O-grande

$O(g(n)) = \{ f(n) :$ donde existen constantes positivas c, n_0 tal que $0 \le f(n) \le cg(n)$ para todo $n \ge n_0 \}$



Notación Ω

$\Omega(g(n)) = \{ f(n) :$ existen constantes positivas c, n_0 tales que $0 \le cg(n) \le f(n)$ para todo $n \ge n_0 \}$

Notación Θ

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) :$ existen constantes positivas c_1, c_2, n_0 tales que $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ para todo $n \ge n_0 \}$

Notación o

$o(g(n)) = \{ f(n) :$ para cada constante $c > 0$ existe una constante n_0 tal que $0 \le f(n) < cg(n)$ para todo $n \ge n_0 \}$

Notación ω

$\omega(g(n)) = \{ f(n) :$ para cada constante $c > 0$ existe una constante n_0 tal que $0 \le cg(n) < f(n)$ para todo $n \ge n_0 \}$

Ejercicios Fáciles

Probar que $n^2 + 10n + 2 = O(n^2)$

Note que $2 \le n$, tenemos que $2 \le n^2$. Luego, tenemos que $10n \le 10n^2$. Entonces, $n^2 + 10n + 2 \le n^2 + 10n^2 + n^2 = 12n^2$.
Por lo tanto, concluimos que $n^2 + 10n + 2 = O(n^2)$.

Borrador

$0 \le n^2 + 10n + 2 \le Cn^2$, $n \ge n_0 > 0$

$n^2 \le n^2$

$10n \le n^2 \leftarrow 10n \le 10n$

$\le 10n^2$

$2 \le n^2$

$\sqrt{2} \le n$

$\sqrt{2} \le 2 \le n$

$10n \le 10n^2$

$1 \le n$

$10n \le n^2$

$10 \le n$

Probar $n^2/2 + 3n = O(n^2)$

Note que $3 \le n$, tenemos $3n \le n^2$. Luego,
$\frac{n^2}{2} + 3n \le n^2 + n^2 = 2n^2$. Por lo tanto, concluimos $\frac{n^2}{2} + 3n = O(n^2)$.
(ya que $0 \le \frac{n^2}{2} + 3n \le Cn^2$ para $n \ge n_0$, con $n_0 = 3$ y $C = 2$)

Borrador

$0 \le \frac{n^2}{2} + 3n \le Cn^2$. $n \ge n_0 \ge 0$

$\frac{n^2}{2} \le n^2$

$0 \le \frac{n^2}{2} + 3n$

$3n \le n^2$

$3 \le n$

$\frac{n^2}{2} \ge 3n$

$\frac{n}{2} \ge 3$

$n \ge 6$

Note que $6 \le n$, tenemos $6n \le n^2$. Luego, $3n \le \frac{n^2}{2}$.
Por lo tanto,

$$0 \le \frac{n^2}{2} + 3n \le \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = n^2$$

concluimos que $\frac{n^2}{2} + 3n = O(n^2)$.
(ya que $0 \le \frac{n^2}{2} + 3n \le Cn^2$ para $n \ge n_0$, con $n_0 = 6$ y $C = 1$).

Probar que $\frac{n^2}{2} - 3n = \Theta(n^2)$

Note que para $n \geq 7$, se cumple que

$$\frac{n^2}{2} - 3n = n\left(\frac{n}{2} - 3\right) \geq \frac{n^2}{14}$$

y tambien se cumple que

$$\frac{n^2}{2} - 3n \leq \frac{n^2}{2}$$

Luego, para $c_1 = \frac{1}{14}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ y $n_0 = 7$, tenemos que

$$\frac{1}{14} n^2 \leq \frac{n^2}{2} - 3n \leq \frac{1}{2} n^2,$$

Para todo $n \geq n_0$. Por lo tanto $\frac{n^2}{2} - 3n = \Theta(n^2)$ ■

Prueba

$0 \leq c_1 n^2 \leq \frac{n^2}{2} - 3n$

$\frac{n^2}{3} \leq \frac{n^2}{2}$ $\quad c_1 n^2 \leq \frac{n^2}{2} - 3n$

$0 \leq \frac{n^2}{2} - 3n$ $\quad c_1 n \leq \frac{n}{2} - 3$ $\quad n = 7$

$3\cancel{n} \leq \frac{n^{\cancel{2}}}{2}$ $\quad c_1 7 \leq \frac{7}{2} - 3$

$6 \leq n$ $\quad c_1 \leq \frac{1}{14}$

$c_1 = \frac{1}{14}$ ✓

$n = 6$

$c_1 6 \leq 0$

$c_1 \leq 0$ ✗

$\frac{n^2}{2} - 3n \leq c_2 n^2$

$-3n \leq n^2$

$-3 \leq n$

$\frac{n^2}{2} - 3n \leq c_2 n^2$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c_2$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{7}$

$\frac{4}{14} \leq c_2$

$\frac{1}{7} \leq c_2$

Demuestre: $n^2 - 10n - 2 = O(n^2)$

Note que, cuando $n \geq 2$, se tiene que $n^2 \geq 4 \geq 2$.
Además $10 \leq 10n^2$.
Luego, $0 \leq n^2 + 10n + 2 \leq n^2 + 10n^2 + n^2 \leq 12n^2$

Demuestre: $n^2 - 10n + 2 = O(n^2)$

$n^2 - 10n + 2 \geq 0$
$n(n-10) + 2 \geq 0 \rightarrow n(n-10) \geq 0$
$n_0 = 10$

Note que, para $n \geq 10$, se tiene que $n^2 \geq 10n$. Por lo tanto
$0 \leq n^2 - 10n \leq n^2 - 10n + 2 \leq n^2 + 2 \leq n^2 + 2n^2 = 3n^2$ □

Demuestre: $n^2 - 10n - 2 = O(n^2)$ → + fácil de demostrar, pero $n_0 =$ " tb cumple.

$n^2 \geq 10n + 2$
$n^2 \geq 10n + 2n$
$n \geq 12$

Note que, para $n \geq 12$ ¿?, se tiene que $n^2 \geq 12n$.
Luego $n^2 \geq 12n = 10n + 2n \geq 10n + 2$.
Por lo tanto, $0 \leq n^2 - 10n + 2 \leq n^2 + 2 \leq n^2 + 2n^2 = 3n^2$ □

Probar $n/100$ no es $O(1)$

Suponga por contradicción que $\frac{n}{100} = O(1)$. Entonces existen constantes $c, n_0 > 0$ tales que $n \geq n_0$.

otra demostración

Demostrar que, si $f(n)$ es creciente, que $f(n)$ no es $O(1)$

a: $c - f(a)$ es lo menos posible
Si tenemos $b = a + 1$
$c - f(b) < c - f(a)$

Probar que $an + b = O(n^2)$ para $a > 0$.

Note que, para todo $n \geq \max\{1, -\frac{b}{a}\}$ se tiene lo siguiente.
como $n \geq 1$, entonces $an + b \leq an^2 + b \leq an^2 + |b| \leq an^2 + |b| n^2 = (a + |b|) n^2$.
Como $n \geq -\frac{b}{a}$ entonces $an + b \geq a(\frac{-b}{a}) + b = -b + b = 0$.

Concluimos que $0 \leq an + b \leq (a + |b|) n$ para todo $n \geq \max\{1, -\frac{b}{a}\}$.

Probar que $an + b = O(n^2)$ para $a > 0$.

$n = 1$ siempre $+$
$0 \leq b < c n^2$
$c = a + |b|$ $n \geq 1$

$0 \leq an + b \leq c n^2$, $n_0, n > 0$

$an + b \leq (a + |b|) n^2 \rightarrow an + b \leq an^2 + |b| n^2$

$n \geq 1$ puede ser negativo
$an + b \leq an + |b| \leq an^2 + |b| \leq an^2 + |b| n^2$

$-\frac{b}{a} \geq n$
$1 \leq n$

$n_0 = 1$
$a + b$
$n_0 = -b/a$
0

$0 \leq \max\{1, -\frac{b}{a}\} \leq n$

$\max\{1, -\frac{b}{a}\} = n_0$

Note que, para todo $n \geq \max\{1, -\frac{b}{a}\}$ se tiene que.
como $n \geq 1$, $an + b \leq an + |b| \leq an^2 + |b| \leq an^2 + |b| n^2$.
como $n \geq -\frac{b}{a}$, $an + b \geq a(-\frac{b}{a}) + b \geq -b + b = 0$.
Concluimos que $0 \leq an + b \leq (a + |b|) n^2$ para todo $n \geq \max\{1, -\frac{b}{a}\}$

Demostrar $n^2-10n+2 = Cn^2$ $\qquad C, n_0 > 0 \qquad n \geq n_0$

$n^2 \leq n^2$
$-10n \leq n \leq n^2$
$2 \leq n^2$
$n^2-10n+2 \leq 3n^2$

$0 \leq n^2-10n+2$
$0 \leq n(n-10)+2$
$0 \leq n(n-10) \leq n(n-10)+2$
$n>0$
$n-10>0$
$n>10$

Note que, para $n \geq 10$ se tiene que como $-10n \leq n \leq n^2$. Luego, $n^2-10n+2 \leq n^2+n^2 \leq n^2 = 3n^2$
Concluimos que $0 \leq n^2-10n+2 \leq 3n^2$ para todo $n \geq 10$.
Por lo tanto $n^2-10n+2 = O(n^2)$

Probar $\lceil n/3 \rceil = O(n)$

$\frac{n}{3} \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil < \frac{n}{3}+1 \leq Cn$

$1 \leq Cn - \frac{n}{3}$

$0 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq Cn$

$1 \leq n(C-\frac{1}{3})$

$0 \leq \frac{n}{3}$

$\frac{1}{C-\frac{1}{3}} \leq n$

$0 \leq n$
$0 < n$ $\quad n_0 = 2$

$\frac{1}{\frac{3C-1}{3}} \leq n \qquad \frac{3}{3C-1} \leq n$

$3C-1>0$
$3C>1$
$C>\frac{1}{3}$ $\quad C=3$

PRUEBA

Note que, para todo $n \geq 0$, se tiene que $n/3 \leq \lceil n/3 \rceil$, entonces $0 \leq \frac{n}{3}$. Luego, como $0 \leq \frac{n}{3} \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil < \frac{n}{3}+1 \leq 3n$.
concluimos que $0 \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil \leq 3n$ para todo $n \geq 0$.
Entonces $\lceil n/3 \rceil = O(n)$.

(c) Probar $\lg n = O(\log_{10} n)$

$0 \leq \lg n \leq C(\log_{10} n)$

$0 \leq \lg n$
$2^0 \leq n$
$1 \leq n$

$\lg n \leq C \log_{10} n$
$\lg n \leq c \log_{10} n$
$n \leq (2^{\log_{10} n})^C$
$n \leq (n^{0.301})^C$
$n \leq n^C \leq (n^{0.301})^C$
$n \leq n^C \qquad C = 1$