E-1

Muestre que $\sqrt{3n-200} = \Theta(\sqrt{2n}) \equiv \sqrt{3n-200} = \Omega(\sqrt{2n}) \wedge$
$\sqrt{3n-200} = O(\sqrt{2n})$

- $\sqrt{3n-200} = \Omega(\sqrt{2n})$, entonces

$0 \leq c_1\sqrt{2n} \leq \sqrt{3n-200}$, lo que equivale a
$0 \leq c_1^2 \cdot 2n \leq 3n-200$

Note que para $n \geq 200$,
$$2n + n \geq 2n + 200$$
$$3n \geq 2n + 200$$
$$3n - 200 \geq 2n$$

Entonces:
$$0 \leq \underset{\substack{\uparrow \\ c_1}}{1} \cdot 2n \leq 3n-200 \quad \blacksquare$$

$\boxed{c_1 = 1}$ ... (1)

- $\sqrt{3n-200} = O(\sqrt{2n})$, entonces

$0 \leq \sqrt{3n-200} \leq c_2\sqrt{2n}$, lo que equivale a:
$0 \leq 3n-200 \leq (c_2)^2\, 2n$

Note que para $n \geq 1$:
$$3n - 200 \leq 3n \leq 8n = 4 \cdot 2n \quad \blacksquare$$
$\hookrightarrow c_2 = \sqrt{4}$

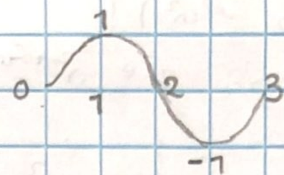
$\boxed{c_2 = 2}$ ... (2)

$\boxed{n_0 = \max(200, 1) = 200}$ ... (3)

Por lo anterior ((1), (2) y (3)) $\sqrt{3n-200} = \Theta(\sqrt{2n})$ $\blacksquare$

E-2

Sea f la función definida $\begin{cases} f(4i) = 0 \\ f(4i+1) = 1 \\ f(4i+2) = 0 \\ f(4i+3) = -1 \end{cases}$ con la forma



Todo número n tiene una definición de la forma $4i + x$, con $0 \le x \le 3$

1) ¿$n^{2+f(n)} = O(n^2)$?

Suponga que $n^{2+f(n)} = O(n^2)$, entonces $\exists\ c, n_0$ constantes positivas tal que:

$$0 \le n^{2+f(n)} = n^2 . n^{f(n)} \le c . n^2$$

Tomemos $n = 1$ $(4i+1)$

Luego:

$$n^2 . n^{f(1)} \le c . n^2$$

$$n^2 . n \le c . n^2$$

$$n \le c$$

. (c tiene que ser una constante positiva. Contradicción $\Rightarrow\Leftarrow$) ∎

5) $n^{2+f(n)} = \omega(n)$

Suponga que $n^{2+f(n)} = \omega(n)$ entonces para cada $c > 0$ existe un n_0 tal que $\forall n \ge n_0$ se cumple que:

$$0 \le cn < n^{2+f(n)}$$

Tome $n = 3$, entonces $0 \le c.n < n^2 . \frac{1}{n}$

$$c.n < n$$

Tome $c = 2$. Entonces $2n < n$ (Contradicción) ∎

2) ¿Es $\Omega(n^2)$?

Suponga que $n^{2+f(n)} = \Omega(n^2)$. Entonces $\exists\, c, n_0$ constantes positivas tales que:

$$0 \le c \cdot n^2 \le n^{2+f(n)}$$

Tenemos que $n = 1(4^0+1)$

Luego

$$n^2 \cdot n^{f(4^0+1)} \ge c \cdot n^2$$

$$cn^2 \le n^{2+f(4^0+1)}$$

$$cn^2 \le n^3$$

$$\cancel{c \le \frac{1}{n}}$$

$$c \le n$$

Se tiene que ser una constante positiva y no depender de n

Se muestra la contradicción

3) ¿ Es $o(n^3)$?

Suponga que $n^{2+f(n)} = o(n^3)$. Entonces, para todo $c > 0$ existe un n_0 tal que

$$0 \leq n^{2+f(n)} \leq c \cdot n^3$$

Entonces, si $n = 4k+1$ para $k \in Q_0^+$

$$0 \leq n^2 \cdot n \leq c \cdot n$$

$$1 \leq c$$

Entonces, se demuestra la contradicción, porque se debe cumplir para todo $c > 0$ $\Rightarrow\Leftarrow$.

4) ¿ Es $o(n^4)$?

Suponga que $n^{2+f(n)} = o(n^4)$. Entonces, para todo $c > 0$ existe uno tal que

$$0 \leq n^{2+f(n)} \leq c \cdot n^4$$

~~Para~~ Entonce, si $n = 4k+1$ para $k \in Q_0^+$

$$0 \leq n^{2+1} \leq c \cdot n^4$$

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq c$$

Entonces, se demuestra la contradicción porque se debe cumplir para todo $c > 0$

Integrantes:

- Jeremy Matos
- Alexander Morales
- Paolo Armas