Demostrar que $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Dem

Por inducción en n. Cuando $n=1$, tenemos que

$$1+2+\ldots+n = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cuando $n>1$, por hipótesis de ind, tenemos

$$1+2+\ldots+n-1 = \frac{(n-1)n}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 1+2+\ldots+n &= 1+2+\ldots+n-1+n \\ &\overset{(h.i)}{=} \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= \frac{n}{2}(n-1+2) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

→ Inducción fuerte $<n$

→ Inducción debil $n-1 \Rightarrow n$

Sumatorias

Props

Para todo número natural n, $1+2+2^2+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$

Para todo número natural n, $\lg n \leq n$

Para todo número natural $n \geq 44$, $8 \lg n \leq n$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Series Aritméticas: incremento en sumas

Series Geométricas: incremento en multip.

Acotando sumas

Probar por ind. en n que:

$$P(n) \quad \sum_{k=1}^{n} k \leq \frac{1}{2}(n+1)^2$$

$n=1$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{1} k = 1 \leq \frac{1}{2}(1+1)^2 = \frac{1}{2}(n+1)^2$$

$n>1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \leq \frac{1}{2} n^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &\leq \sum_{k=1}^{n-1} k + n \\ &\leq \frac{1}{2} n^2 + n \leq \frac{1}{2} n^2 + n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n^2+2n+1) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)^2 \end{aligned}$$

Probar por ind. en n que

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k \leq c\,3^n, \text{ para alguna cte. } C$$

Dem ~~Por inducción en~~ n.

Probaremos por inducción en n que $\sum_{i=0}^{n} 3^i \leq \frac{3}{2} \cdot 3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Cuando $n=0$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \sum_{i=0}^{0} 3^i = 3^0 = 1 \leq \cancel{c}\,\tfrac{3}{2} \cdot 3^0$$

Cuando $n \geq 1$, tenemos que, por h.i.,

$$\sum_{i=0}^{n-1} 3^i \leq \cancel{c}\,\tfrac{3}{2} \cdot 3^{n-1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} 3^i &= \sum_{i=0}^{n-1} 3^i + 3^n \\ &\overset{(h.i)}{\leq} \cancel{c}\,\tfrac{3}{2} \cdot 3^{n-1} + 3^n \\ &= \cancel{c}\,\tfrac{3}{2} \cdot 3^n \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{\cancel{c}\,\frac{3}{2}}\right) \leq 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{c} \leq 1$$

$$\frac{c+3}{3c} \leq 1$$

$$c+3 \leq 3c$$

$$\frac{3}{2} \leq c$$

- $a_1 + a_2 + \dots + a_n$
- $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq r \quad 0 < r < 1$