Ejercicios en clase: introducción

Análisis y Diseño de Algoritmos

8 de septiembre de 2021

Ejercicio 1. Demostrar las siguientes desigualdades

(*a*) Para todos números reales x, y, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

(*b*) Para todos números reales x, y, $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil - 1 \leq \lceil x + y \rceil \leq \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$

(*c*) Para todo número natural n, $(n-1)/2 \leq \lfloor n/2 \rfloor \leq n/2$

(*d*) Para todo número natural n, $n/2 \leq \lceil n/2 \rceil \leq (n+1)/2$

(*e*) Para todo número natural n, $n = \lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil$

(*f*) Para todos $x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{Z}$, $\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \rceil = \lceil \frac{x}{ab} \rceil$

Ejercicio 2. Probar por inducción que

(*a*) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para todo número natural n.

(*b*) $1 + 2 + 2^2 + \cdots 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo número natural n.

(*c*) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo número natural n.

(*d*) $n \leq 2^{n/2}$, para $n \geq 4$.

Ejercicio 3.

(*a*) Encuentre una fórmula simple para $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

(*b*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) = \ln(\sqrt{n}) + c$, donde c es una constante. Sugerencia: usar la serie armónica

(*c*) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(kx^k) = x/(1-x)^2$ cuando $|x| < 1$.

(*d*) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k^2x^k) = x(1+x)/(1-x)^3$ cuando $|x| < 1$.

(*e*) Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty}(k-1)/2^k = 0$.

Ejercicio 4.

(*a*) Muestre que $\sum_{k=0}^{n+1}(3^k) \leq c3^{n+1}$ para alguna constante $c \geq 1$

(*b*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq n \cdot \max_{1\leq k\leq n} a_k$

(*c*) Suponga que $a_{k+1}/a_k \leq r$ para todo $k \geq 0$. Muestre que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq a_0 \frac{1}{1-r}$.

(*d*) Usando el ejercicio anterior, muestre que $\sum_{k=1}^{\infty}(k/3^k) \leq 1$.

(*e*) Muestre que $\sum_{k=1}^{n} k \geq (n/2)^2$ $\sum_{k=1}^{n}(1/k^2) \leq c$ para alguna constante c

Ejercicio 5. ¿Cuantas hojas tiene un árbol binario completo con n nodos ? Demuestre por inducción.

Ejercicio 6. Demuestre que la altura de un árbol binario completo con k hojas es $\lg k$.