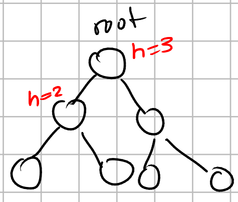
Árboles Binarios

h: altura



$d=0 \quad 2^0$ nodos

$d=1 \quad 2^1$ nodos

$d=2 \quad 2^2$ nodos

• # a prof i es 2^i

Conceptos:

- Profun: Se mide desde la raiz.
- Altura: Se mide a partir de las hojas.

altura arbol = altura raiz

se tiene k hojas:

$\rightarrow h = \lg k$

$\rightarrow k = 2^h$

• n nodos, altura h

$$\underbrace{2^0+2^1+2^2+\ldots+2^h}_{n \text{ nodos}} = 2^{h+1}-1$$

$$n = 2^{h+1}-1$$

$$n+1 = 2^{h+1}$$

$$\lg(n+1) = h+1$$

$$\lg(n+1)-1 = h$$

$$\lg(n+1)-1 = h$$

Por inducción en n. Cuando $n=1$, tenemos que

$$\lg(n+1)-1 = \lg(2)-1 = 0 = h$$

$n=1$

$h=0$

Cuando $n>1$, por h.i., tenemos que

Análisis

- → Correctitud
- → Tiempo

inducción <=> invariante.

Invariante: Propiedad que se cumple siempre en algún punto del algoritmo.

↳ Debería tenerse una invariante para cada bucle.

3) Manutención: se cumple la propiedad en la iteración i.

Inv: Al inicio del for ... $A[1...j-1]$ está ordenado.

D/ Inicialización: Al inicio de la 1ra iteración, $j=2$ y $A[1..j-1] = A[1]$, está ordenado trivialmente.

Manutención: Debemos

Terminación: Al inicio de la última iteración, se tiene que $j=n+1$. Luego, por invariante $A[1...n]$ está ordenado.

Insertion - Sort :

$$T(n) = c_1 n + c_2 (n-1) + c_4 (n-1) + c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \cdot \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8 (n-1)$$

$$= (c_1 + c_2 + c_4 + c_8) n - (c_2 + c_4 + c_8) + c_5 \cdot \sum_{j=2}^{n} t_j + (c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} t_j - (n-1)((c_6 + c_7)$$

$$= (c_5 + c_6 + c_7) \sum_{j=2}^{n} t_j + n (c_1 + c_2 + c_4 + c_8 - c_6 - c_7) + (c_6 + c_7 - c_2 - c_4 - c_8)$$

$$= a \sum_{j=2}^{n} t_j + bn + c \qquad a > 0 \qquad 1 \leq t_j \leq j$$

$$T(n) = a \sum_{j=2}^{n} t_j + bn + c \leq a \sum_{j=2}^{n} j + bn + c$$

$$= a \left(\frac{n^2 + n - 2}{2} \right) + bn + c = \frac{a}{2} n^2 + n \left(\frac{a}{2} + b - 1 \right) + c$$

$$= O(n^2)$$