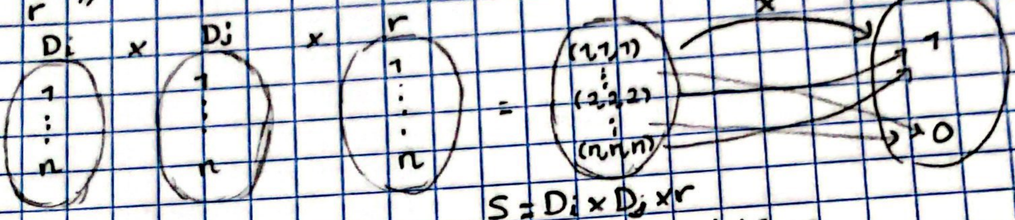
a) Sea D_i el conjunto de días donde puede nacer i
D_j " " j
r " " cualquier persona



$S = D_i \times D_j \times r$

Sea X_{ijr} la v.a que determina si i,j nacen en el día r

$\underbrace{P\{X_{ijr}=1\}}_{\text{esto sucede cuando en el conjunto } S,\ i=j=r \text{, sería } n \text{ casos de los } n^3 \text{ posibles}} = \frac{n}{n^3} = 1/n^2$

Entonces $E[X_{ijr}] = 1 \cdot Pr\{X_{ijr}=1\} + \cancel{0 \cdot Pr\{X_{ijr}=0\}}$

$= 1 \cdot 1/n^2$

$E[X_{ijr}] = 1/n^2$

b) Sea $Pr\{X_{ijr}=1\} = \frac{1}{n^2}$ la prob. de que i, j nazcan en el día r

r va de 1 a n entonces i, j pueden coincidir en n días

$Pr\{X_{ij}$: i, j nazcan en el mismo día$\} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$

$E[X_{ij}] = 1 \cdot Pr\{X_{ij}=1\} + \cancel{0 \cdot Pr\{X_{ij}=0\}}$

$E[X_{ij}] = 1/n$

a) $E[X_{i,j,r}] = 1 \cdot Pr\{$el i y el j cumplan en el día r$\} + 0 \cdot \cancel{Pr\{cc\}}$

$= 1/n^2$

b) $E[X_{i,j}] = 1 \cdot Pr\{$i, j cumplan el mismo día$\} + 0 \cdot \cancel{Pr\{cc\}}$

$= 1/n$

c) $E[X] = \sum_{i \neq j}^{K} E[X_{i,j}] = \sum_{i=1}^{K-1} \underbrace{\sum_{j=i+1}^{K}}_{K-i} Pr\{i,j$ cumplen años el mismo día$\}$

$=$

$$\sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^{K} 1/n$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K-1} K-i = \frac{1}{n} \frac{(K-1)K}{2} = \frac{(K-1)K}{2n} = E[X]$$

Scanned with CamScanner

d) $E[X] = 2 \leq \frac{(K-1)K}{2n}$

365

$4n \leq (K-1)K$

$1460 \leq (K-1)(K)$

$K = 39$

$\frac{(K-1)(K)}{2n} \geq 2$

$(K-1)K \geq 4n$

$\downarrow$

n

$2n$

$(2n-1)\,2n$

$4n^2 - 2n$

$K^2 - K \geq 4n$

$K' = K+1$

$K'(K'+1) \geq 4n$

$K' = 2\sqrt{n}$

$K = 2\sqrt{n} - 1$

Scanned with CamScanner