Solucionario ADA

⊙ Pruebe que $\sum_{i=0}^{\lg n}(n/2^i) = 2n-1$ cuando n es potencia de 2. (2ptos)

Sol $\sum_{i=0}^{\lg n}(n/2^i) = \sum_{i=0}^{\lg n}(2^{\lg n}/2^i) = \sum_{i=0}^{\lg n} 2^{\lg n - i} = \sum_{i=0}^{\lg n} 2^i = \frac{2^{\lg n+1}-1}{2-1} = 2\cdot 2^{\lg n}-1 = 2n-1$ //

⊙ Pruebe que el # nodos a profundidad k es 2^k.

Sol Inducción en k. Si $k=0$, el único nodo a profundidad 0 es la raíz. Suponga que $k>0$. Por h.i., el # nodos a profundidad $k-1$ es 2^{k-1}. Como el arbol es binario y completo, cada nodo a profundidad $k-1$ tiene dos hijos a profundidad k, luego el # nodos a profundidad k es $2\cdot 2^{k-1} = 2^k$.

- Pruebe que $n^2 - 100n - 200\sqrt{n} = \Theta(n^2)$ (3ptos)

Note que, cuando $n \geq 200$, tenemos que $\frac{n^2}{2} \geq 100n$.
Además, cuando $n \geq 100$, $n^{3/2} \geq 10^3 = 200 \times 5$; es decir $\frac{n^2}{5} \geq 200\sqrt{n}$.
Entonces, para $n \geq 200$,

$$0 \leq \frac{3n^2}{10} = n^2 - \frac{n^2}{2} - \frac{n^2}{5} \leq n^2 - 100n - 200\sqrt{n} \leq n^2 \quad //$$

- Pruebe por inducción que $T(n) = \Omega((\frac{3}{2})^n)$. (3ptos)

Probaremos por inducción en n, que para todo $n \geq 2$, se tiene $T(n) \geq \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^n \geq 0$
Cuando $n=2$, $T(2) = T(1) + T(0) + 1 = 1 \geq 1 = \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^2$. Suponga ahora que $n > 2$.
En este caso, $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1$. Por h.i, $T(n-1) \geq \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^{n-1}$ y $T(n-2) \geq \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^{n-2}$.
Luego, $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + 1 \geq \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^{n-1} + \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^{n-2} + 1 = \frac{8}{27}(\frac{3}{2})^n + \frac{16}{81}(\frac{3}{2})^n + 1 \geq \frac{4}{9}(\frac{3}{2})^n$ //

• Desarrolle la recurrencia (4 ptos)

Primero supongamos que n es potencia de 2 (3 ptos)

$$
\begin{aligned}
T(n) &= 2T(n/2) + n\lg n \\
&= 2\left(2T(n/4) + \tfrac{n}{2}\lg\left(\tfrac{n}{2}\right)\right) + n\lg n \\
&= 2^2 T(n/4) + n\lg(n/2) + n\lg n \\
&= 2^2\left(2T(n/8) + n/4\, \lg\left(\tfrac{n}{4}\right)\right) + n\lg\left(\tfrac{n}{2}\right) + n\lg n \\
&= 2^3 T(n/8) + n\lg\left(\tfrac{n}{4}\right) + n\lg\left(\tfrac{n}{2}\right) + n\lg n \\
&\;\;\vdots \\
&= 2^{\lg n} T(1) + n\lg 2 + n\lg 4 + \dots + n\cdot\lg n \\
&= n + n(\lg 2 + \lg 4 + \dots + \lg n) \\
&= n + n\lg(2 \times 4 \times \dots \times n) \\
&= n + n\cdot\lg(2^1 \times 2^2 \times \dots \times 2^{\lg n}) \\
&= n + n\lg\left(2^{\lg n(\lg n+1)/2}\right) = n + \tfrac{n}{2}\cdot\lg n(\lg n+1)
\end{aligned}
$$

Ahora suponga n es un nro cualquiera. (1 pto)

Entonces $2^k \le n < 2^{k+1}$ para algún k.

Luego, como T es creciente,

$$
\begin{aligned}
T(n) &< T(2^{k+1}) \\
&= 2^{k+1} + 2^k(k+1)(k+2) \\
&\le 2\cdot 2^k + 2^k(2k)(3k) \\
&\le 2n + 6\lg^2 n\cdot n.
\end{aligned}
$$

También,

$$
\begin{aligned}
T(n) &\ge T(2^k) \\
&= 2^k + 2^{k-1}\cdot k(k+1) \\
&\ge \tfrac{1}{2}\cdot 2^{k+1} + \tfrac{1}{4}\cdot 2^{k+1}\cdot\tfrac{(k+1)}{2}\cdot(k+1) \\
&\ge \tfrac{1}{2}\cdot n + \tfrac{1}{8}\, n\cdot\lg^2 n.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$\tfrac{1}{2}n + \tfrac{1}{8}n\lg^2 n \le T(n) \le 2n + 6\lg^2 n\cdot n$$

Algoritmo (2 ptos)

// Recibe un arreglo A[p..r] con $n = r-p+1$ potencia de 3 y devuelve el mayor valor de un elemento en dicho arreglo

MAXIMO(A, p, r)

		costo	# veces
1.	Si $p = r$ retornar $A[p]$	c_1	1
2.	$q_1 = (2p+r+1)/3$	c_2	1
3.	$q_2 = (p+2r+2)/3$	c_3	1
4.	$m_1 = \text{MAXIMO}(A, p, q_1 - 1)$	$T(n/3)$	1
5.	$m_2 = \text{MAXIMO}(A, q_1, q_2 - 1)$	$T(n/3)$	1
6.	$m_3 = \text{MAXIMO}(A, q_2, r)$	$T(n/3)$	1
7	retornar $\max\{m_1, m_2, m_3\}$	c_7	1

$T(n) = 3T(n/3) + c_1 + c_2 + \cancel{C} + C_3$

Ignorando valores de ctes:

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/3) + 1 & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

Por T. Maestro, $a = 3, b = 3$

$\log_b a = \log_3 3 = 1 > 0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$