Estruturas Algébricas

Lista 3

1) Determine $a \in \mathbb{Z}$ tal que o polinômio $x^4 - ax^3 + 8x^2 - 8x + a$ seja o quadrado de um polinômio em $\mathbb{Z}[x]$. .

2) Sejam A um anel, $a \in A$ e x uma indeterminada sobre A. Mostre que a *função avaliação em a*

$$\begin{array}{rccc} v_a\colon & A[x] & \longrightarrow & A \\ & p(x) & \longmapsto & p(a) \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.

3) Seja $p(x) \in A[x]$, onde A é um anel e seja v_1 a função avaliação em 1. Mostre que $v_1(p(x)) = p(1)$ é a soma dos coeficientes de $p(x)$.

4) Determine a soma dos coeficientes do polinômio em $\mathbb{Z}[x]$:

$(x^n - 4x^3 + 3x + 1)^{364}(x^m - 4x^3 + 3x^2 + 1)^{397} - (x^k + x^{k-1} - 2x^2 + 1)$.

5) Determine os valores dos números inteiros a para que o polinômio $a^2x^4 + 4x^3 + 4ax + 7$ seja divisível por $x + 1$ em $\mathbb{Z}[x]$.

6) Sejam A um domínio e $a \in A \setminus \{0\}$.

   a) Sob que condições $x^n + a^n$ é divisível por $x + a$ em $A[x]$?

   b) Sob que condições $x^n - a^n$ é divisível por $x + a$ em $A[x]$?

7) Determine o polinômio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grau 7 tal que

$$p(1) = p(2) = \cdots = p(7) = 8 \quad \text{e} \quad p(0) = 1.$$

8) Seja $h\colon A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que a aplicação definida por

$$\begin{array}{rccc} \tilde{h}\colon & A[x] & \longrightarrow & B[x] \\ & a_0 + \cdots + a_nx^n & \longmapsto & h(a_0) + \cdots + h(a_n)x^n \end{array}$$

é um homomorfismo de anéis.

9) Sejam K um corpo e $p(x) \in K[x]$.

a) Se K é infinito, mostre que a função polinomial associada a $p(x)$ é invertível; isto é, existe um polinômio $q(x) \in A[x]$ tal que $p(q(x)) = q(p(x)) = x$, para todo $x \in A$, se, e somente se, $p(x) = ax + b$, com $a, b \in K$ e $a \neq 0$. Neste caso, qual é a função inversa de $p(x)$?

b) Se $K = \mathbb{Z}_2$, mostre que a função polinomial associada ao polinômio $p(x) = x^2$ é a função identidade, logo invertível.

10) Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o número 1 é raiz dupla do polinômio $x^{n+1} - n(x-1) - x \in \mathbb{Z}[x]$.