Estruturas Algébricas

Lista 2

1) Seja $f\colon A \to B$ um homomorfismo de anéis. Mostre que

   a) f é injetor se, e somente se, $f^{-1}(0) = \{0\}$;

   b) se a é invertível, então $f(a)$ é invertível. Qual é o inverso de $f(a)$?

2) Sejam A um anel, K um corpo e $f\colon K \to A$ um homomorfismo de anéis. Mostre que

   a) f é injetor;

   b) $f(K)$ é um corpo.

3) Mostre que a relação $\leq$ definida em $\mathbb{Z}$ é uma relação de ordem.

4) Demonstre a compatibilidade da relação de ordem em $\mathbb{Z}$ com as operações de adição e de multiplicação.

5) Sejam A um anel ordenado e $a, b, c \in A$. Mostre que

   a) se $a > 0$, então $-a < 0$;

   b) se $a \leq b$ e $c \leq 0$, então $ac \geq bc$.

6) Seja A um anel totalmente ordenado. Mostre que

   (a) $a^2 \geq 0$ para todo $a \in A$;

   (b) $1 > 0$ e $-1 < 0$.

   (c) $|a| = 1$ se, e somente se, $a = 1$ ou $a = -1$.

7) Seja A um domínio totalmente ordenado com uma relação de ordem $\leq$ e K seu corpo de frações. Mostre que todo elemento de K se escreve na forma $\dfrac{a}{b}$, com $b > 0$. Supondo que todos os elementos de K sejam escritos dessa forma, mostre que a relação

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc$$

define uma relação de ordem total em K.

8) Prove por indução que

   a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

   b) $n! \geq 3^n$ para todo número natural $n \geq 7$

9) Seja A um anel e $h\colon \mathbb{Z} \to A$ uma função tal que $h(a+b) = h(a) + h(b)$, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$. Mostre que

   a) $h(0) = 0$;

   b) $h(n) = nh(1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$;

   c) $h(-n) = -h(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

   d) Conclua que $h(n) = nh(1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

   Portanto, basta supor que $h(a+b) = h(a) + h(b)$ para todos $a, b \in A$ e que $h(1) = 1$, para que h seja o homomorfismo característico de A.

10) (Desigualdade de Bernoulli) Seja A um domínio ordenado e seja $c \in A$ tal que $c \geq -1$. Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, vale a seguinte desigualdade:

$$(1+c)^n \geq 1 + nc.$$

11) Neste exercício você vai provar que o Princípio de Indução Matemática implica o Princípio da Boa Ordem, seguindo o roteiro abaixo:

    Note que o Princípio da Boa ordem pode ser formulado como segue:

    Dado $a \in \mathbb{Z}$, todo subconjunto T do conjunto $S = \{k \in \mathbb{Z};\ a \leq k\}$ possui um menor elemento.

    Suponha por absurdo que algum subconjunto T não vazio de S não possua um menor elemento.

    Você vai provar que $S \setminus T = S$, logo T é vazio, uma contradição.

    Defina o conjunto $I_n = \{k \in \mathbb{Z};\ a \leq k \leq n\} \subset S$ e considere a sentença aberta em S

$$P(n):\ I_n \subset S \setminus T.$$

   a) Note que $a \notin T$, pois seria o menor elemento de T, logo $I_a = \{a\} \subset S \setminus T$. Portanto, $P(a)$ é verdade.

b) Suponha que $P(n)$ seja verdade, você vai provar que $P(n+1)$ é verdade: Se $P(n)$ é verdade, então $I_n \subset S \setminus T$. Se $n+1 \in T$, como nenhum elemento de I_n está em T, teríamos que $n+1$ seria o menor elemento de T, contradição. Portanto, $P(n+1) : I_{n+1} \subset S \setminus T$.

Pelo Princípio de Indução Matemática, teríamos para todo $n \in S$, que $I_n \subset S \setminus T$, o que mostraria que $S = S \setminus T$; ou seja, $T = \emptyset$ (contradição).