

Estruturas Algébricas

Lista 4

- 1) Em \mathbb{Z} , quais são os números inteiros que, quando divididos por 4 dão resto igual
 - a) à metade do quociente?
 - b) ao quociente?
 - c) ao dobro do quociente?
 - d) ao triplo do quociente?
- 2) Em \mathbb{Z} , se o quociente e o resto de a por b são respectivamente q e r , quais são o quociente e o resto da divisão de a por $-b$? E de $-a$ por b ?
- 3) Seja a um número inteiro qualquer. Mostre que exatamente um número de cada terna a seguir é múltiplo de 3
 - a) $a, a + 1, a + 2$;
 - b) $a, a + 2, a + 4$;
 - c) $a, a + 5, a + 10$;
 - d) $a, a + 10, a + 20$.
- 4) Note que um inteiro a é divisível por um inteiro $b \neq 0$, se o resto da divisão de a por b for 0. Mostre que se a^2 é divisível por 3, então a é divisível por 3.
- 5) Seja A um anel e $a \in A$. Mostre que o resto da divisão de um polinômio $p(x) \in A[x]$ por $x \pm a$ é $p(\mp a)$.
- 6) Sejam K um corpo, $p(x) \in K[x]$ e $a, b \in K$ com $a \neq b$. Mostre que o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - a)(x - b)$ é
$$\frac{p(a) - p(b)}{a - b}x + \frac{ap(b) - bp(a)}{a - b}.$$
- 7) Seja K um corpo. Mostre que a função $\varphi: K \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ definida por $\varphi(a) = 0$, para todo $a \in K \setminus \{0\}$, confere a K uma estrutura de anel euclidiano.

- 8) Efetue a divisão euclidiana em $\mathbb{Z}[i]$ de
- a) $7 + 12i$ por $3 + 2i$;
 - b) $8 + 3i$ por $1 - 2i$.
- 9) Efetue a divisão euclidiana de
- a) $5 - 2\sqrt{2}$ por $1 + \sqrt{2}$ em $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$;
 - b) $9 - 3\sqrt{-2}$ por $2 + 3\sqrt{-2}$ em $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
- 10) Efetue a divisão euclidiana em $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ de
- a) $5 - 2\sqrt{3}$ por $2 + \sqrt{3}$;
 - b) $9 - 3\sqrt{3}$ por $2 + 3\sqrt{3}$.