

# Estruturas Algébricas

## Lista 1

- 1) Sejam  $A$  um anel e  $a, b, c \in A$ . Mostre que
  - a)  $-b = (-1)b$ ;
  - b)  $(-1)^2 = 1$ ;
  - c)  $(-a)^2 = a^2$
  - d)  $(-b)c = -bc$ ;
  - e)  $(a - b)c = ac - bc$ ;
  - f)  $-(a + b) = -a - b$ ;
  - g) a subtração não é comutativa nem associativa.
- 2) Mostre que se o produto de dois elementos de um anel é invertível, então cada um desses elementos é invertível.
- 3) Sejam  $X$  um conjunto com mais de um elemento e  $A$  um anel. Mostre que o anel  $\mathcal{F}(X, A)$  das funções de  $X$  em  $A$  não é um domínio.
- 4) Prove as propriedades da norma em  $\mathbb{Z}[i]$  enunciadas em aula; ou seja, dados  $z, z' \in \mathbb{Z}[i]$ , mostre que
  - a)  $N(z) = 0$  se, e somente se,  $z = 0$ ;
  - b)  $N(z) = 1$  se, e somente se,  $z \in \mathbb{Z}[i]^*$ ;
  - c)  $N(zz') = N(z)N(z')$ ;
  - d) Se  $z' \neq 0$ , então  $N(zz') \geq N(z)$ .
- 5) Um número natural  $a$  é dito soma de dois quadrados se existirem dois números naturais  $b$  e  $c$  tais que  $a = b^2 + c^2$ . Mostre que o produto de dois números que são somas de dois quadrados é soma de dois quadrados.
- 6) Mostre que  $\mathbb{Z}_2$  não é subanel de  $\mathbb{Z}_4$ .
- 7) Um anel  $(A, +, \cdot)$  é dito *um anel Booleano* se  $a^2 = a$ , para todo  $a \in A$ . Mostre que
  - a)  $-a = a$ , para todo  $a \in A$ ;

b) todo anel booleano é comutativo.

**Sugestão para b):** Use o fato de que  $(a + b)^2 = a + b$  e desenvolva o quadrado.

- 8) Seja  $X$  um conjunto não vazio qualquer, vamos munir o conjunto das suas partes  $\mathcal{P}(X)$  com as seguintes operações:

$$A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad \text{e} \quad A \cdot B = A \cap B.$$

Mostre que  $\mathcal{P}(X)$  com essas operações é um anel booleano.

- 9) Mostre que os elementos invertíveis do anel dos inteiros Gaussianos  $\mathbb{Z}[i]$  são  $\pm 1$  e  $\pm i$ .
- 10) Mostre que o corpo de frações do anel dos inteiros Gaussianos  $\mathbb{Z}[i]$  é

$$\mathbb{Q}(i) = \{x + yi; \ x, y \in \mathbb{Q}\}.$$