Estruturas Algébricas
Lista 6

1- Mostre que se A é um domínio principal e
$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset \cdots$$
é uma cadeia ascendente de ideais, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $I_m = I_{m+1} = \cdots$

2- Seja A um anel e I e J são ideais de A. Mostre que

a) $I \cap J$ é um ideal de A

b) $I \cup J$ nem sempre é um ideal de A

c) $I + J = \{x + y \,;\, x \in I \text{ e } y \in J\}$ é um ideal de A.

3. Mostre que todo ideal maximal é primo.

4. Mostre que $\mathbb{Z}_n$ é um corpo se, e somente se, n é um número primo

5) Tente provar que todo domínio finito é um corpo.

6) Suponha que $p(x) \in K[x]$ é um polinômio irred. de grau n. Mostre que $K[x]/I(p(x))$ é um K-esp. vetorial gerado por
$$[1], [x], \ldots, [x^{n-1}].$$
Conclua que se K é um corpo com p elementos, então $K[x]/I(p(x))$ tem p^n elementos

7) Considere o polinômio $p(x) = x^2 + [2]x + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$.
Mostre que $p(x)$ é irredutível.
Construa as tabelas de adição e multiplicação do corpo $\mathbb{Z}_3[x]/I(p(x))$. Quantos elementos tem este corpo?