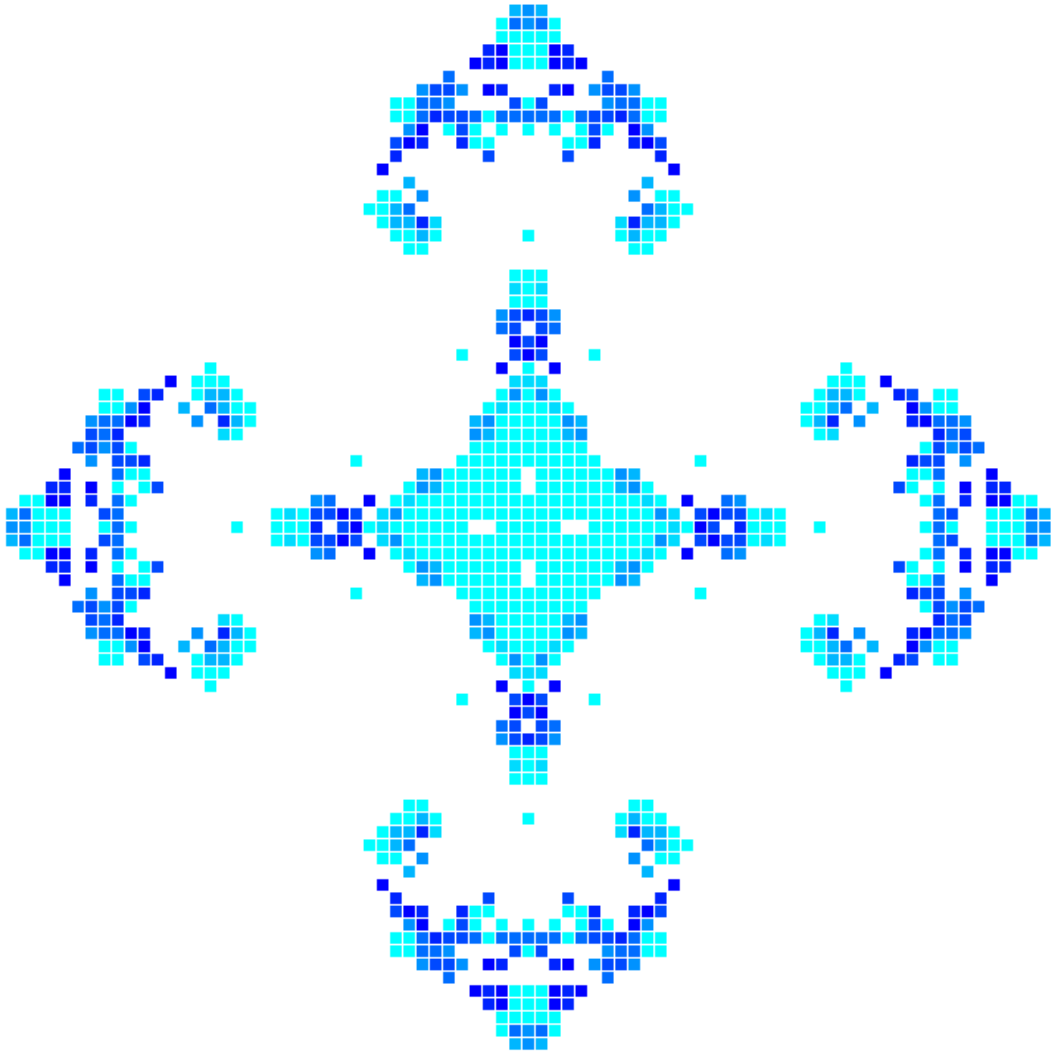
Foncteurs, Monades et Zippers

Jérémy Cochoy

Paris RB

Février 2018



Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord


```
def add2(n)
  n + 2
end
```

Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord


```
def add2(n)
  n + 2
end
```

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Nilclass] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Nilclass] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Nilclass] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$

Les types

Les fonctions sont de type : *a -> b*

- floor : : Float -> Integer
- 2.method(:+) : : Integer -> Integer

Les fonctions se composent

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- { |x| f2(f1(x)) } : : a -> c

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

```
irb> sum.(2,3)
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)
=> #<Proc:0x0000000000288c3c0 (lambda)>
irb> sum.curry.(1).(2)
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

```
irb> sum.(2,3)
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)
=> #<Proc:0x0000000000288c3c0 (lambda)>
irb> sum.curry.(1).(2)
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

```
irb> sum.(2,3)
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)
=> #<Proc:0x0000000000288c3c0 (lambda)>
irb> sum.curry.(1).(2)
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

Curryfication

- sum : : (a, b) -> c
- sum.curry : : a -> (b -> c)

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

Curryfication

- sum : : (a, b) -> c
- sum.curry : : a -> b -> c

Exercice

compose : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

Curryfication

- sum : : (a, b) -> c
- sum.curry : : a -> b -> c

Exercice

compose : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

Les foncteurs applicatifs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => [a]
- a => Tree a
- a => Maybe a

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap 2.method(:+2) : : F Int -> F Int
- fmap floor : : F Float -> F Int

Les foncteurs applicatifs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

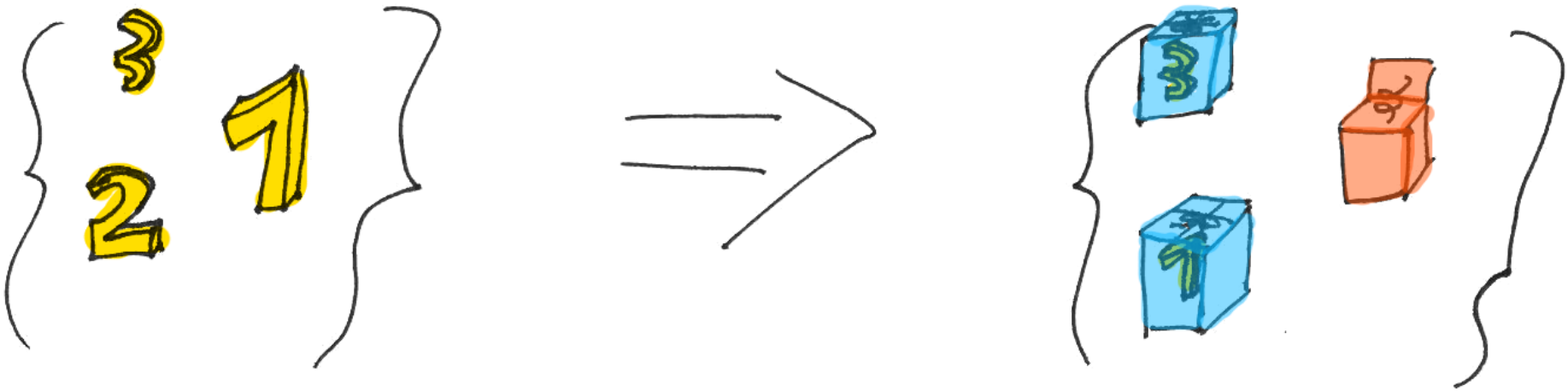
- a => [a]
- a => Tree a
- a => Maybe a

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

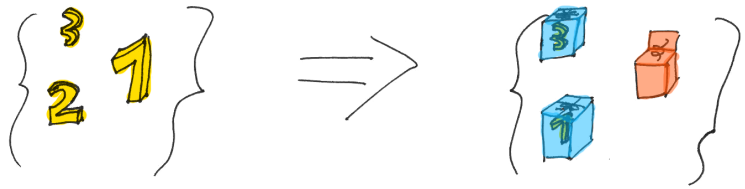
- fmap 2.method(:+2) : : F Int -> F Int
- fmap floor : : F Float -> F Int

Donnée dans un contexte



Un foncteur permet de passer d'un monde (les types a) vers un autre (les types F a).

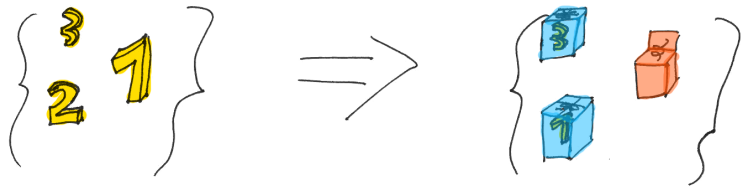
Maybe : Une implémentation



```
class Just < Maybe
  def self.call(value)
    new [value]
  end
end
```

```
irb> Just.(3)
=> #<Just:0x0000000000359c010 @content=[3]>
```

Maybe : Une implémentation

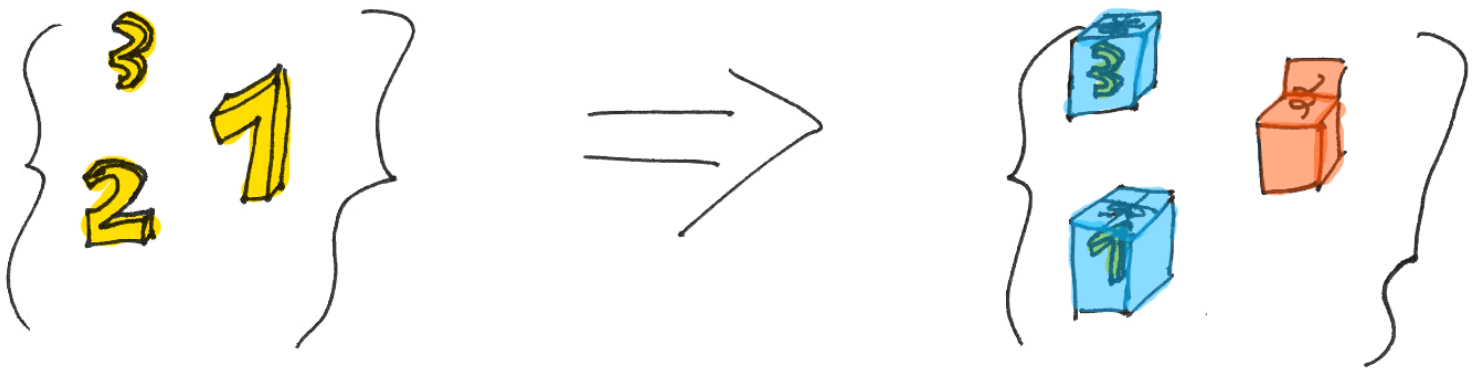


```
class Nothing < Maybe
  def self.call()
    new []
  end
end
```

```
irb> Nothing.()
=> #<Nothing:0x00000002d97d38 @content=[]>
```

Maybe : Une implémentation

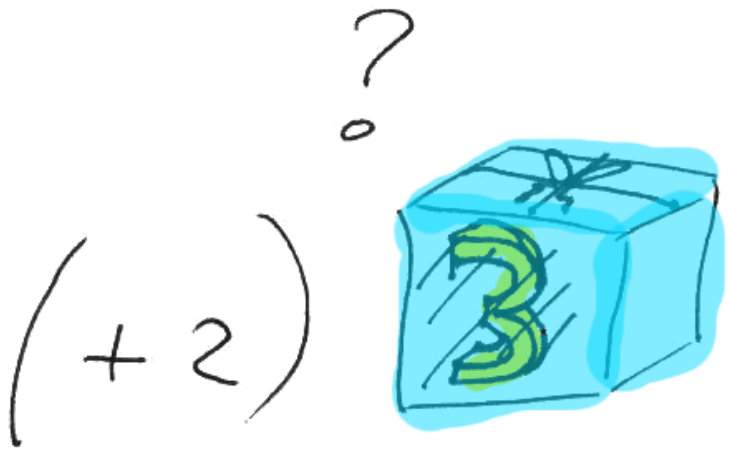
```ruby
class Maybe
  private_class_method :new

  def initialize(content)
    @content = content
  end
  def from_maybe(default_value)
    return default_value if @content.empty?
    @content.first
  end
end
```



```
irb> Just.(3).from_maybe
=> 3
irb> Nothing.().from_maybe
=> nil
```

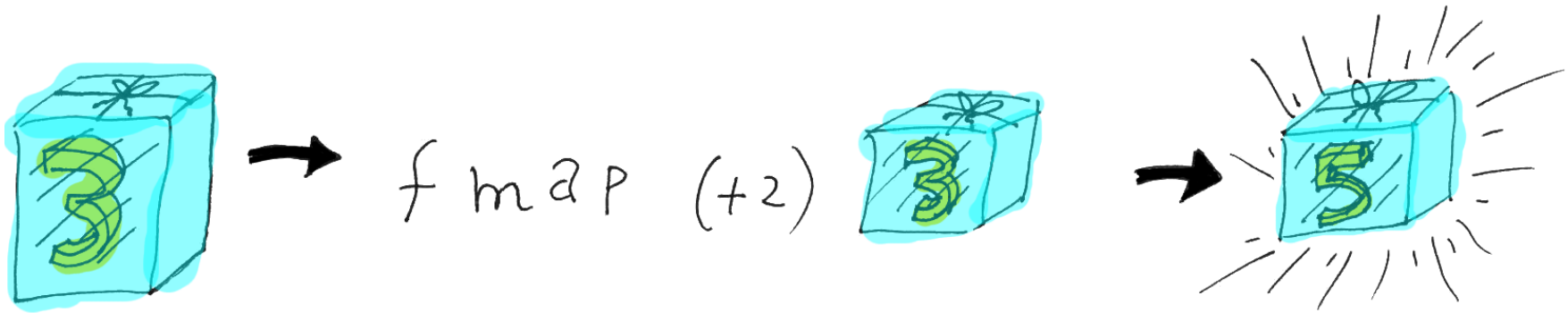
Functorial mapping

On ne peut plus appliquer la fonction telle quelle :

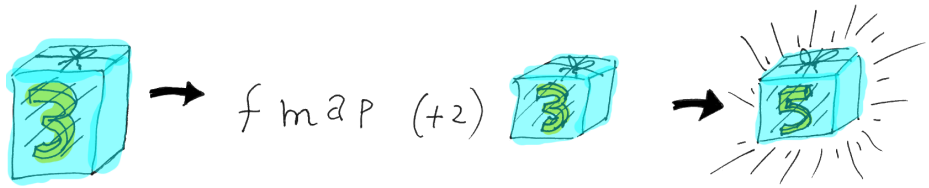


Functorial mapping

Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



Functorial mapping




```
add2 = ->(x) {x + 2}
```

```
add2.call Just.(3)
# NoMethodError (undefined method `+' for
#   #<Just:0x0000000003485280 @content=[3]>)

(fmap add2).call Just.(3)
# => #<Just:0x00000000036f8ff8 @content=[5]>
```

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p ∘ q) = (fmap p) ∘ (fmap q)

```
id = ->(x) {x}

(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p ∘ q) = (fmap p) ∘ (fmap q)

```
id = ->(x) {x}

(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

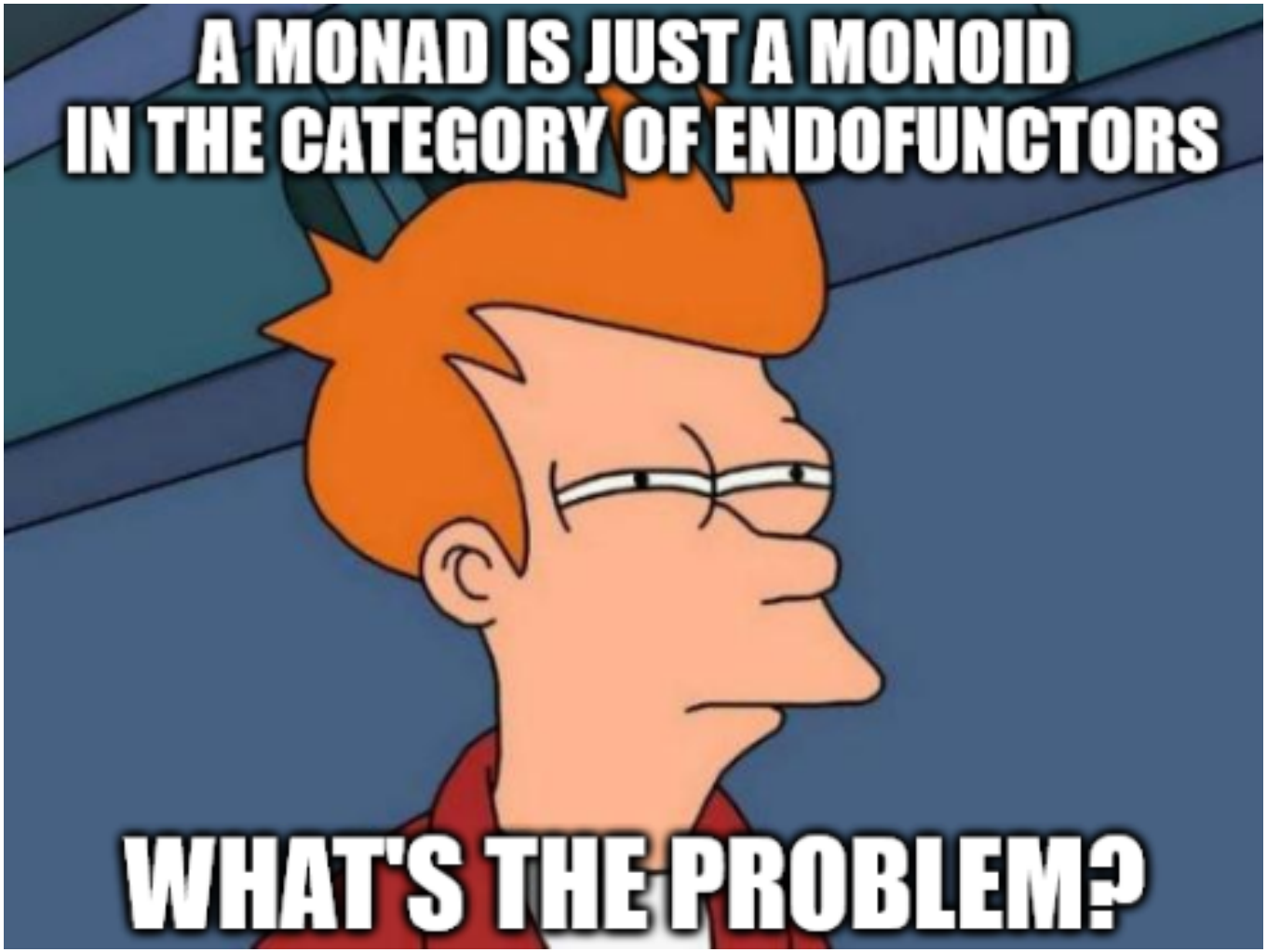
Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p ∘ q) = (fmap p) ∘ (fmap q)

```
id = ->(x) {x}

(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

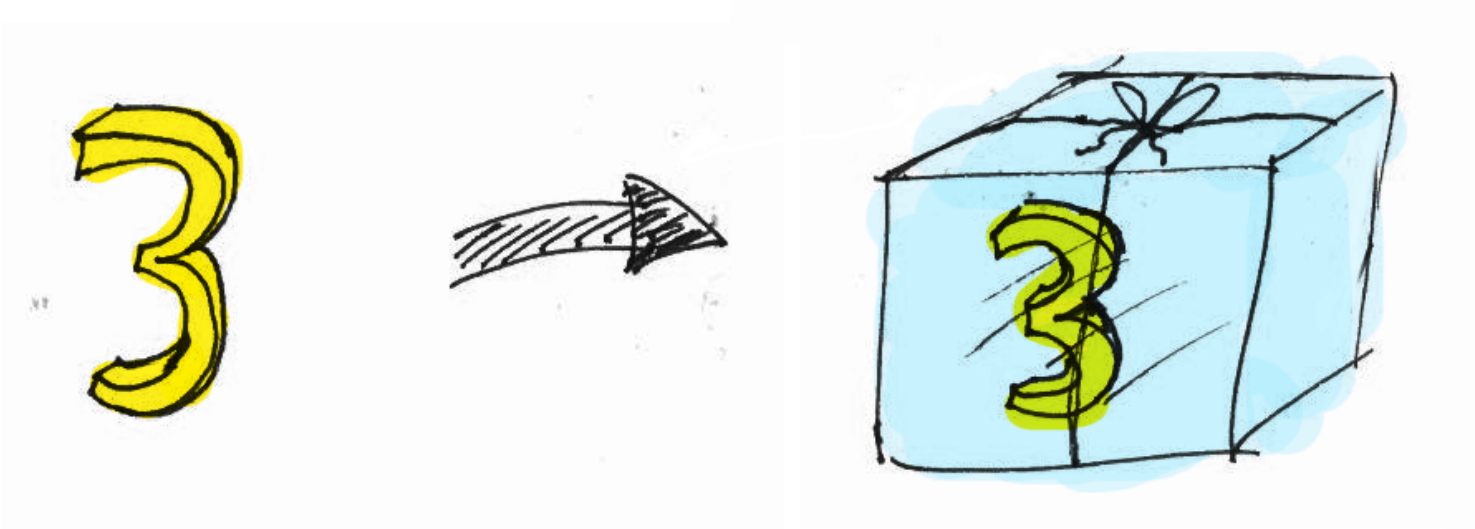
Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Monades


A MONAD IS JUST A MONOID
IN THE CATEGORY OF ENDOFUNCTORS
WHAT'S THE PROBLEM?

Donnée dans un contexte

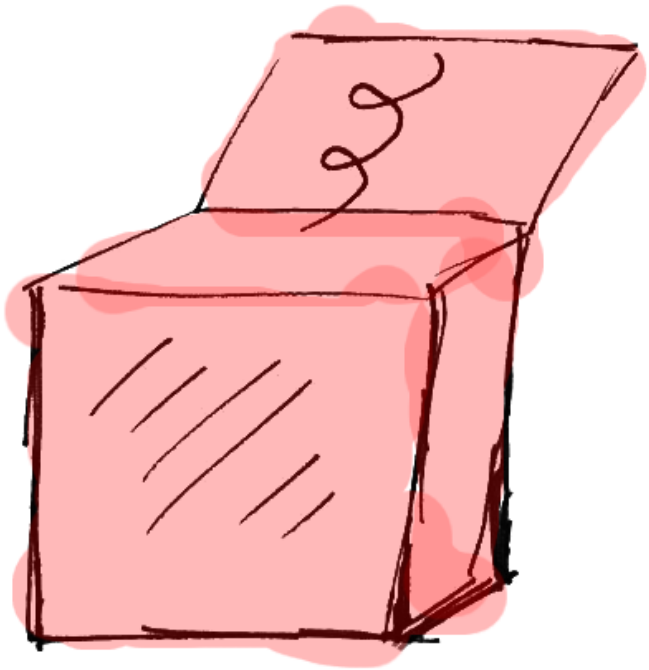
Une monade place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : `Just 3`

Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : `Nothing`

Placer une donnée dans un contexte

L'opérateur *pure*

```
pure :: a -> F a
```

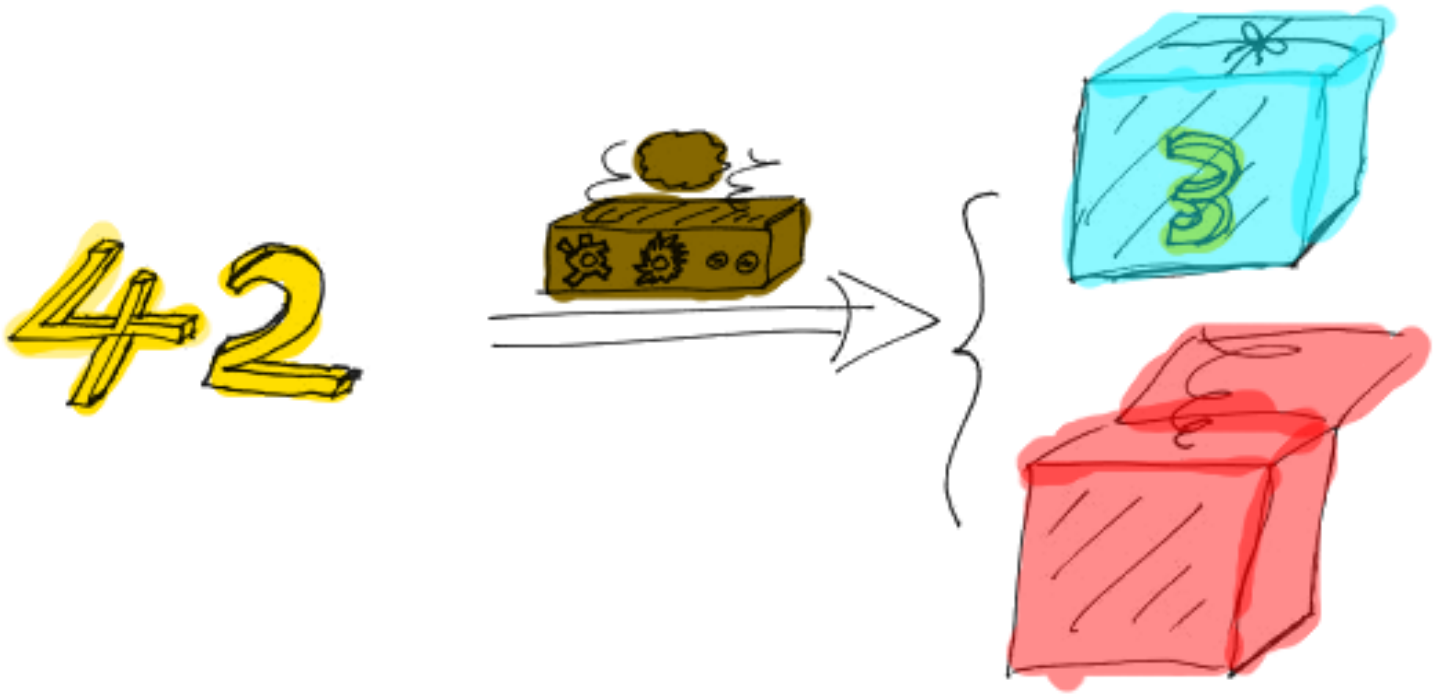
Quelques cas particuliers

- `Just`
- `[] <<`

D'autres types

- Maybe = Nothing | Just a
- Tree = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
- Either = Left a | Right b

Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type *Int -> Maybe Int*.

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

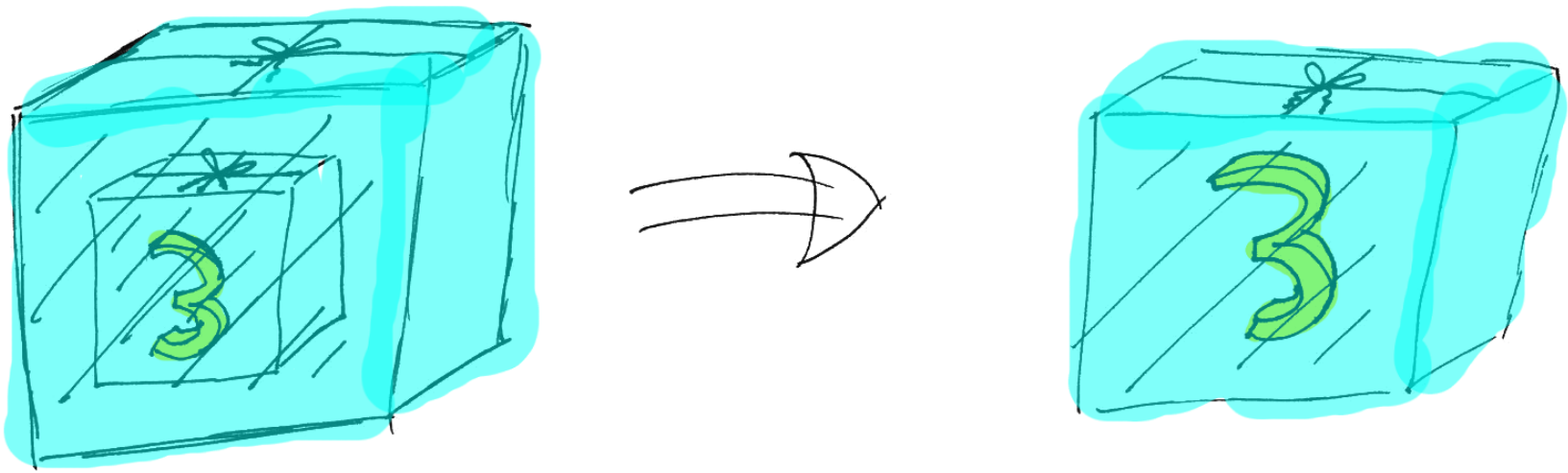
Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

L'opérateur join

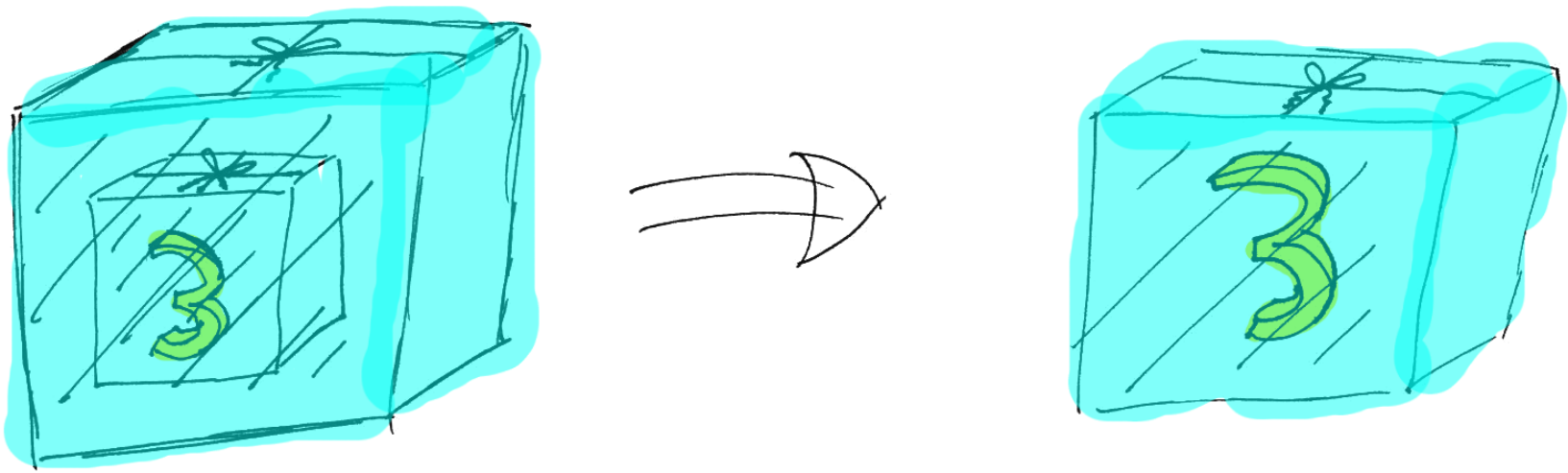
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Just.(3)).
```

L'opérateur join

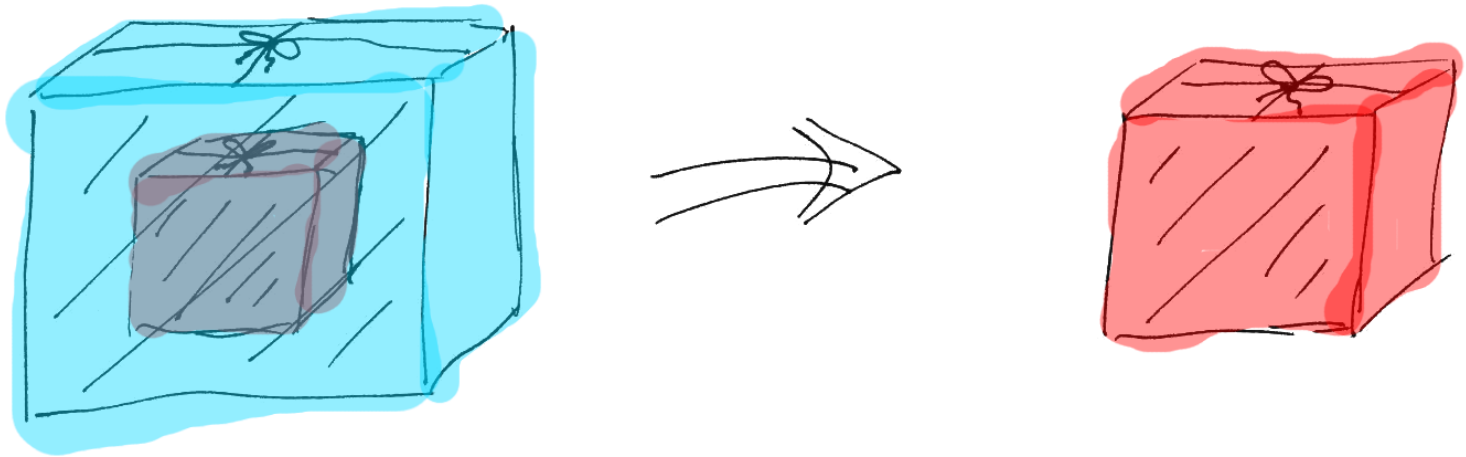
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Just.(3)).
```

L'opérateur join

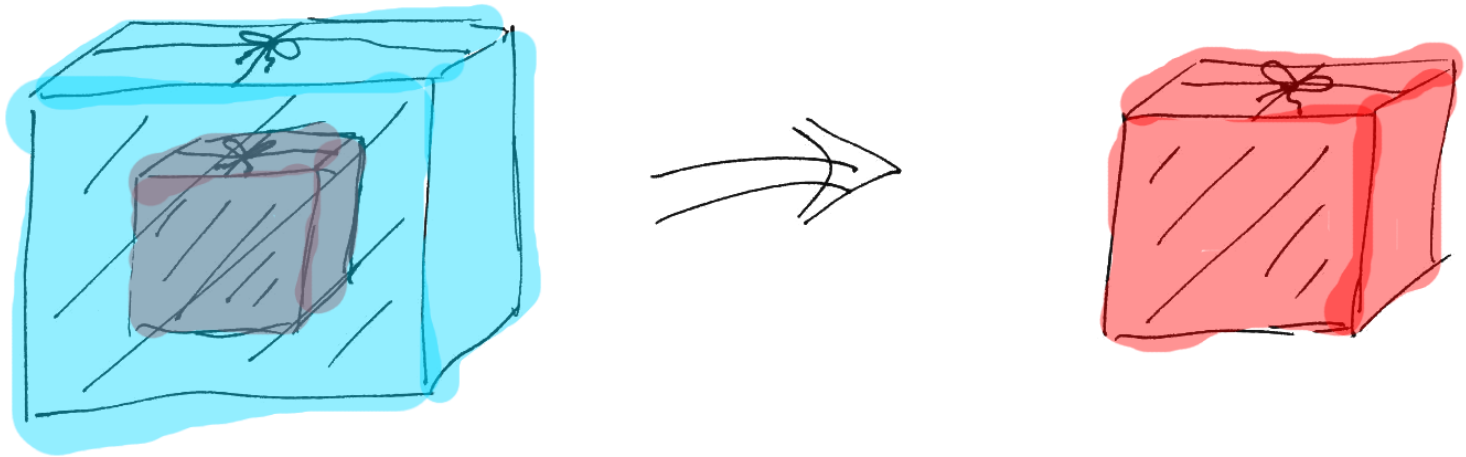
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

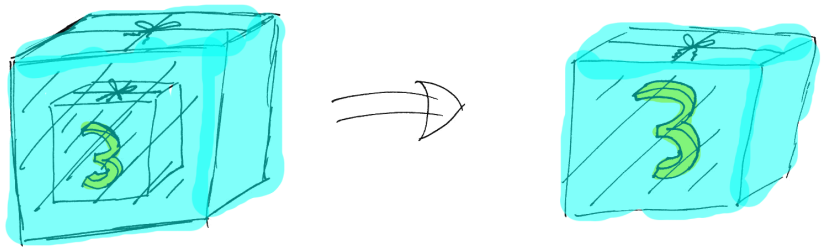
L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

L'opérateur *join*



Une implémentation de join :

```
def join(bbox)
  case bbox
  when Nothing
    Nothing.()
  when Just
    bbox.from_maybe
  end
end
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
bind :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) o f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

```
def bind(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
bind :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) o f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

```
def bind(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
bind :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) o f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

```
def bind(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

Récapitulatif

Une monade, c'est

- pure : : a -> M a
- fmap : : (a -> b) -> (M a -> M b)
- join : : M (M a) -> M a


A must read
Haskell
The understandable parts

Dura lex sed lex

Une monade doit respecter des lois

- `pure o f ≡ (fmap f) o pure`
- `join o fmap (fmap f) ≡ (fmap f) o join`

- `join o fmap join ≡ join o join`
- `join o fmap pure ≡ join o pure = id`

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{array}{ccc} T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{T(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle T(\eta_X)} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X) \end{array}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas C la catégorie des types.

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{array}{ccc} T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{T(X)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle T(\eta_X)} & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \mu_X} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[\mu_X]{} & T(X) \end{array}$$

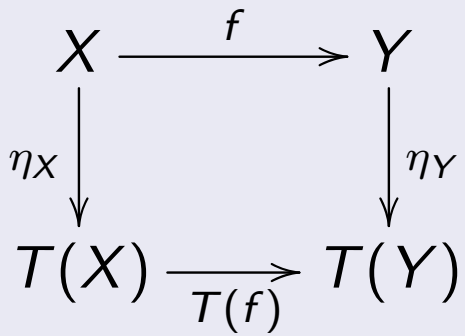
c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas C la catégorie des types.

A chaque loi son diagramme

pure est une T.N.

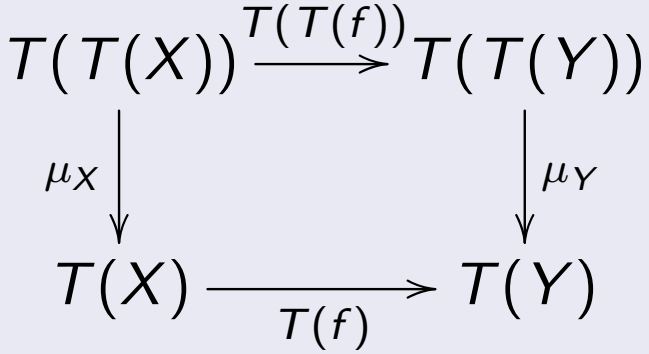
```
pure . f ≡ (fmap f) . pure
```



A chaque loi son diagramme

join est une T.N.

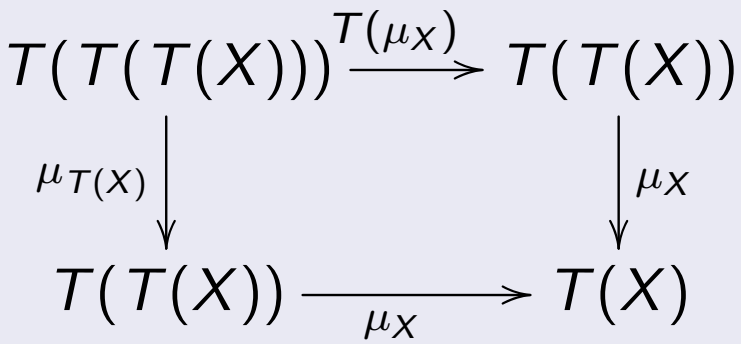
```
join . fmap (fmap f) ≡ (fmap f) . join
```



A chaque loi son diagramme

Associativité

```
join . fmap join ≡ join . join
```

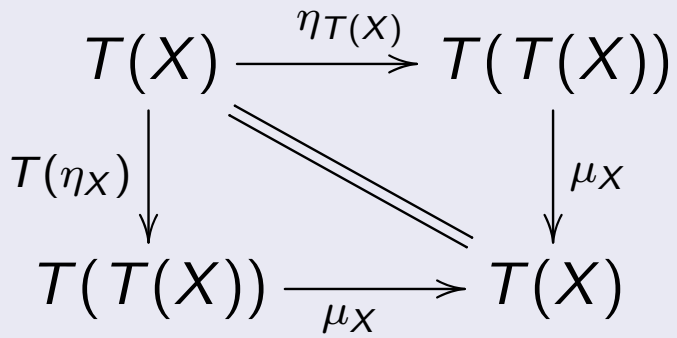


$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$$

A chaque loi son diagramme

Existence d'un neutre

```
join . fmap pure ≡ join . pure = id
```



$$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$$

Et dans la vraie vie ?

Tout ça, à quoi ça sert ?

List : calcul non déterministe

Type UnionDisjointe nil

Automates cellulaires

Toison d'or

Qu'est-ce qu'un automate cellulaire ?

Un automate cellulaire, c'est :

- Un nombre fini d'états S,
- Une grille de cellules,
- La notion de voisinage d'une cellule V_c,
- Une fonction de transition qui à une cellule associe son nouvel état.

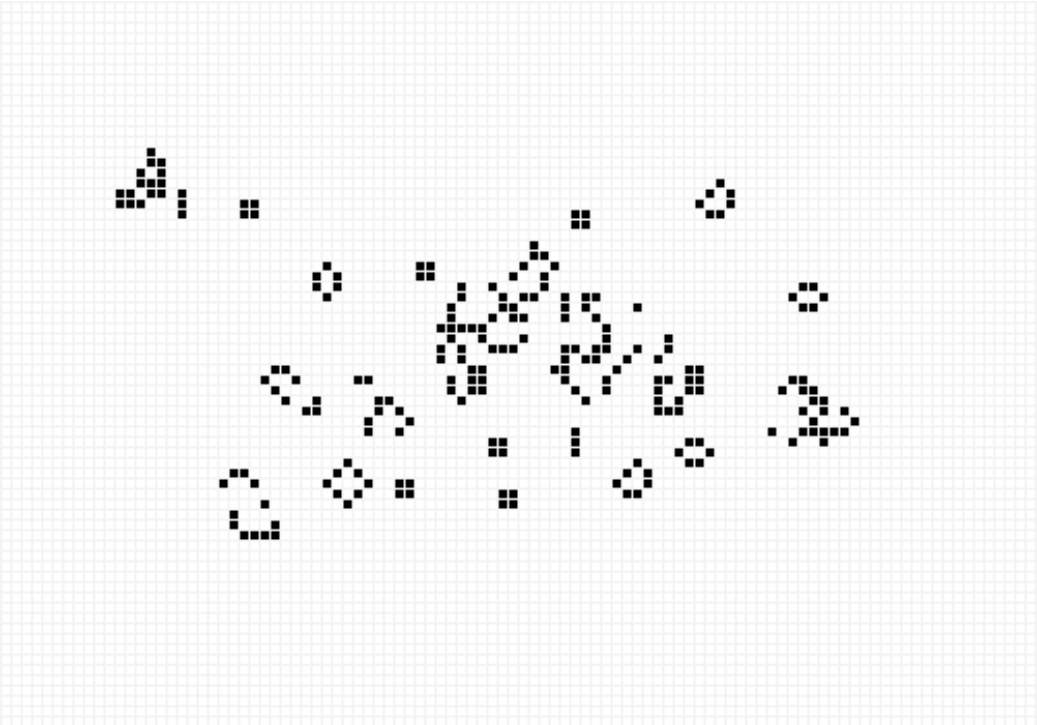
Combien d'automates cellulaires différents ?

On a le choix :

- De la dimension de la grille,
- Des lois,
- Du nombres d'états (couleurs),
- De la forme du voisinages (boules de rayon r, etc.),
- De ne pas être déterministe.

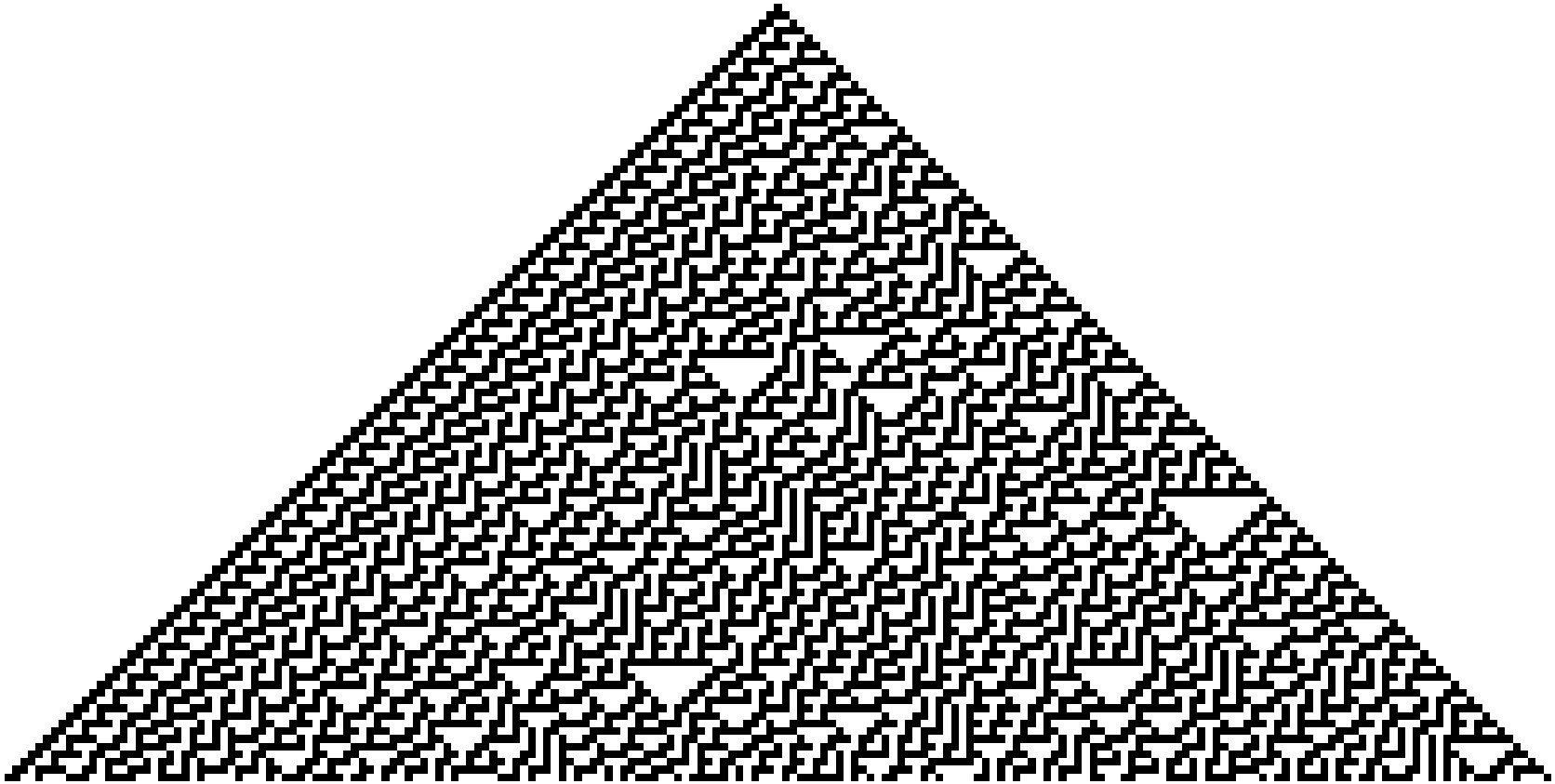
The "Game of Life"

Jeu de la vie (J. H. Conway)



Étude d'un cas : Rule 30

Rule 30



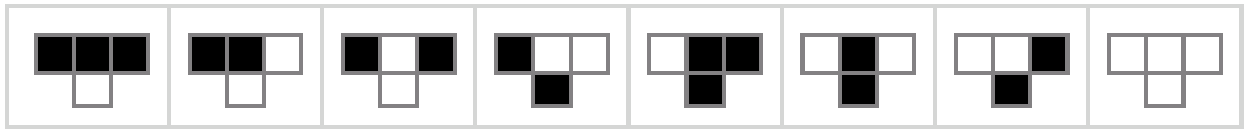
La grille

La grille de l'automate

- Une grille 1D
- Deux états (Blanc / Noir)

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

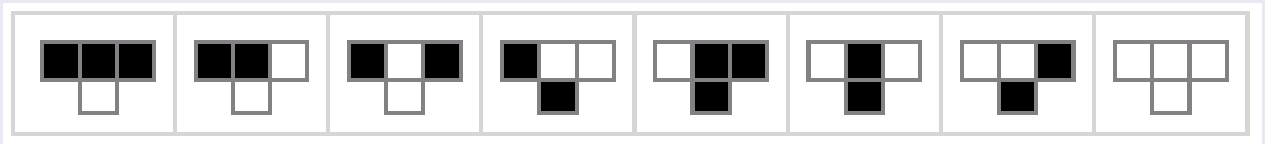


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

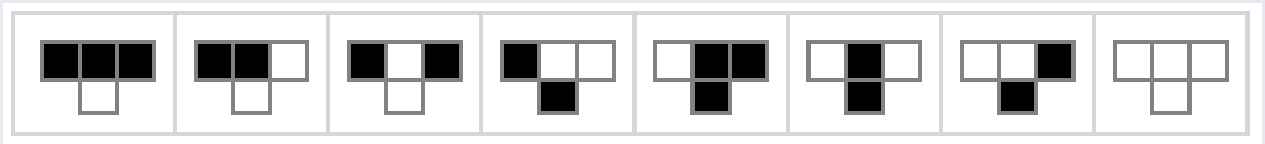


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles



On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Comonades

C'est le dual d'une monade

- C'est un foncteur M
- extract (copure) (co uinit) : : M a -> a
- duplicate (cojoin) (co product δ) : : M a -> M (M a)

Dura lex sed lex

Une comonade doit respecter des lois

- `(fmap (fmap f)) . duplicate ≡ duplicate . fmap f`
- `duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate`

- `duplicate . duplicate ≡ fmap duplicate . duplicate` (commut)
- `fmap extract . duplicate ≡ extract . duplicate ≡ id` (co unit)

Comonades - Catégories

Une comonade (T, δ, ϵ) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\Delta : T \to T \circ T$ et $\epsilon : T \to 1_C$ telles que :

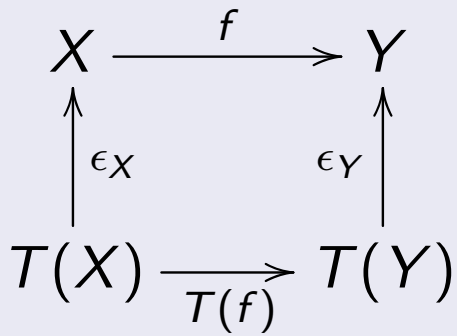
$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\Delta_X} & T(T(X)) \\ {\scriptstyle \Delta_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta_{T(X)}} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[T(\Delta_X)]{} & T(T(T(X))) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\Delta_X} & T(T(X)) \\ {\scriptstyle \Delta_X}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_{T(X)}} \\ T(T(X)) & \xrightarrow[T(\epsilon_X)]{} & T(X) \end{array}$$

c'est à dire $\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$ et $T\epsilon \circ \Delta = \epsilon_T \circ \Delta = id$.

A chaque loi son diagramme

extract est une T.N.

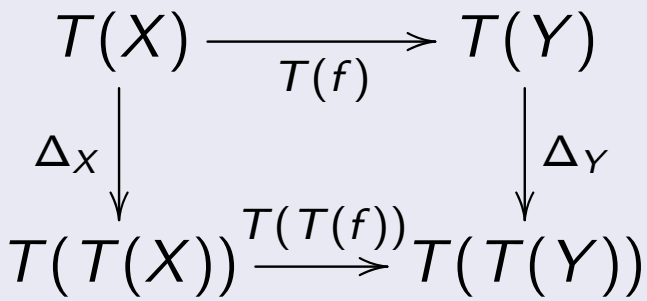
```
f . extract ≡ extract . (fmap f)
```



A chaque loi son diagramme

duplicate est une T.N.

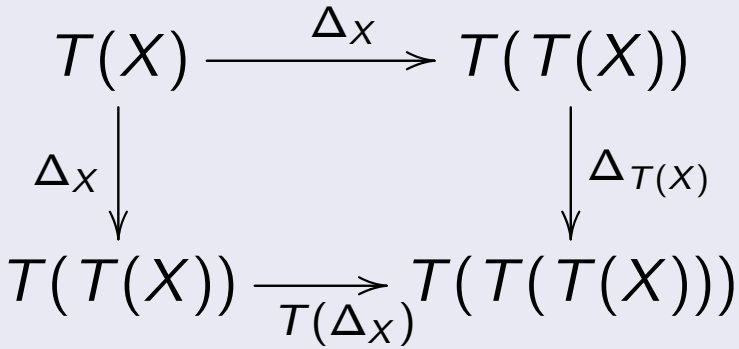
```
(fmap (fmap f)) . duplicate ≡ duplicate . fmap f
```



A chaque loi son diagramme

Coassociativité

```
duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate
```

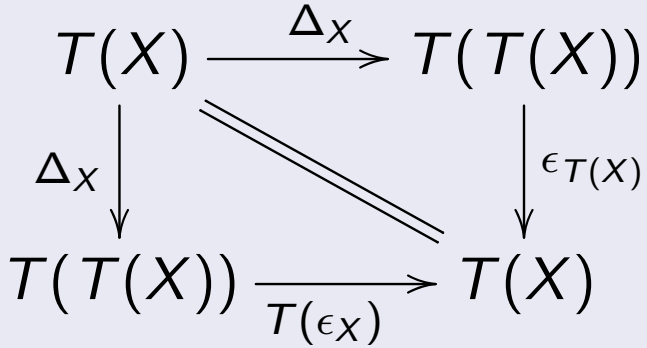


$$\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$$

A chaque loi son diagramme

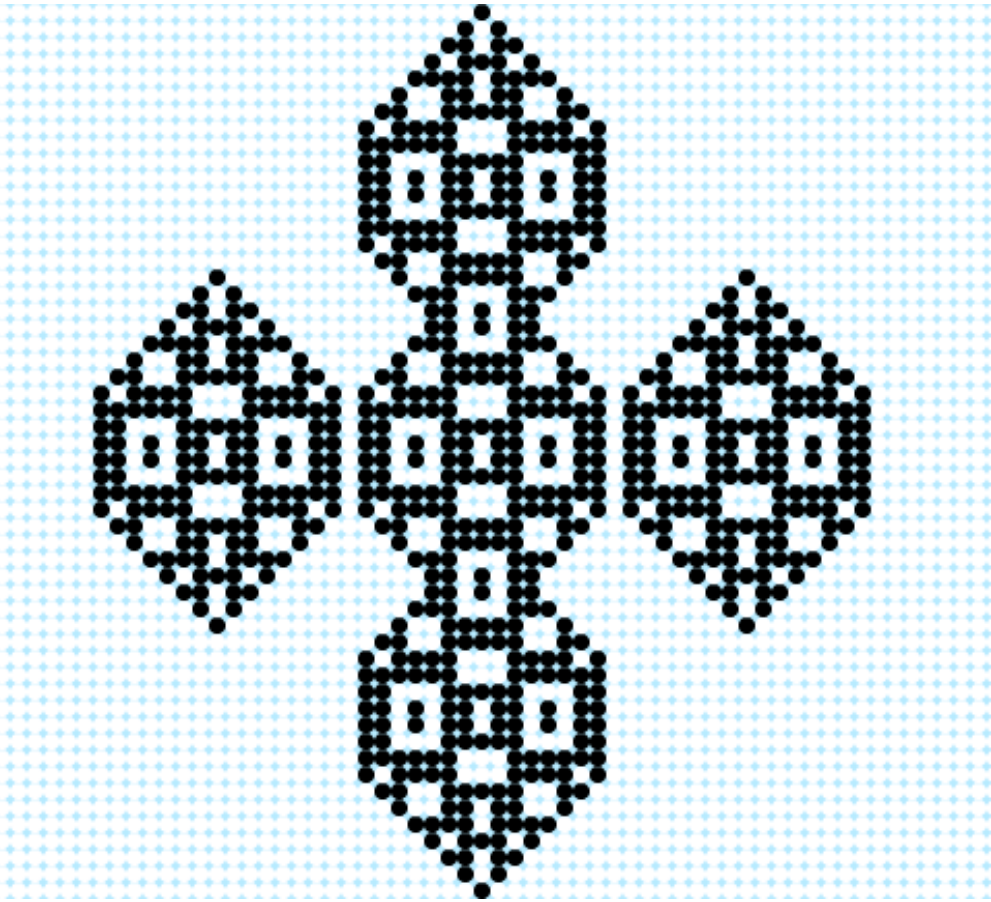
Existence d'une counité

```
extract . duplicate = fmap extract . duplicate = id
```



$$\epsilon_T \circ \Delta = T\epsilon \circ \Delta = id_T$$

Evaluer un automate est comonadique



L'univers

Un ruban

On représente l'univers dans lequel vit notre automate par un ruban, que l'on voit comme trois parties :

- La partie infinie à gauche
- La case observée
- La partie infinie à droite

```
data Universe a = Universe [a] a [a]
```

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

```
left, right : : Universe a -> Universe a
```

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

```
left, right : : Universe a -> Universe a
```

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

```
left, right : : Universe a -> Universe a
```

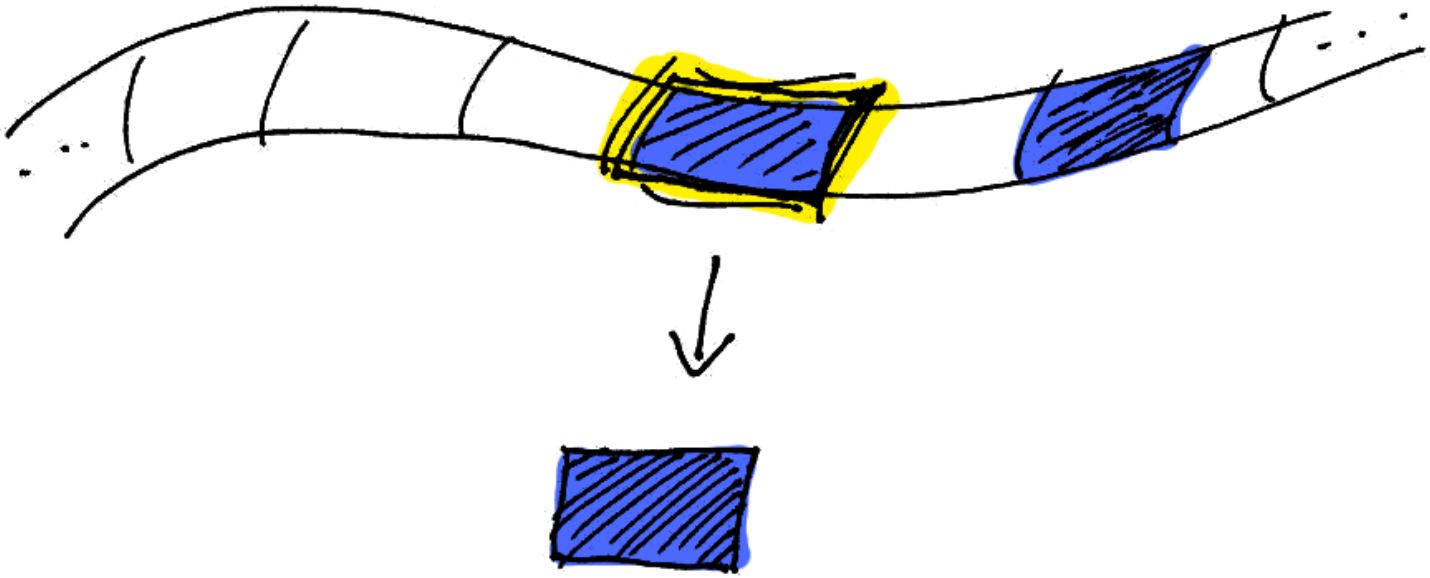
L'univers est fonctoriel

Un foncteur

Notre ruban est naturellement un foncteur : il suffit d'appliquer à notre `Universe a` une fonction `a -> b` sur chacune des cellules pour obtenir un `Universe b`.

```
fmap : : (a -> b) -> Universe a -> Universe b
```

Comonades, nous voilà : extract

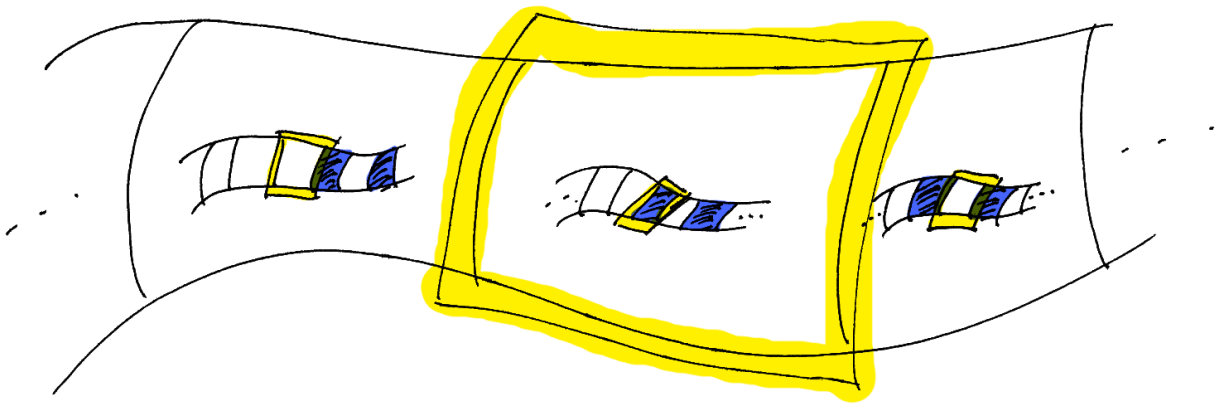


Extraire une information

Depuis notre univers, on peut extraire une valeur : celle de la case que l'on est en train d'observer !

```
extract : : Universe a -> a
```

Comonades, nous voilà : duplicate

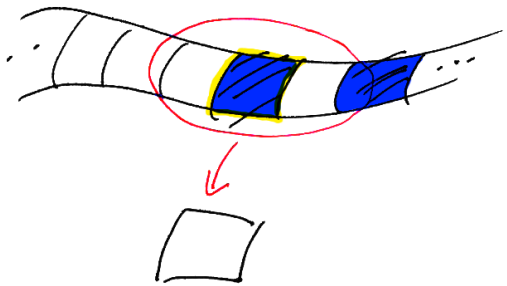


L'opération duplicate

On veut construire un univers où chaque case du ruban contient elle-même... un univers. Il s'agit de contenir tous les shift possible de notre univers de départ.

```
duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
```

Loi de convolution



La loi de notre automate

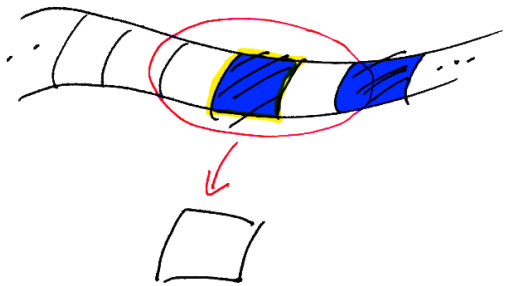
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule : : Universe a -> a
```

Loi de convolution



La loi de notre automate

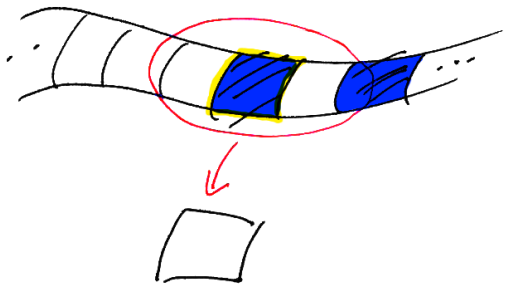
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule : : Universe a -> a
```

Loi de convolution



La loi de notre automate

Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule : : Universe a -> a
```

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)

- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)

- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

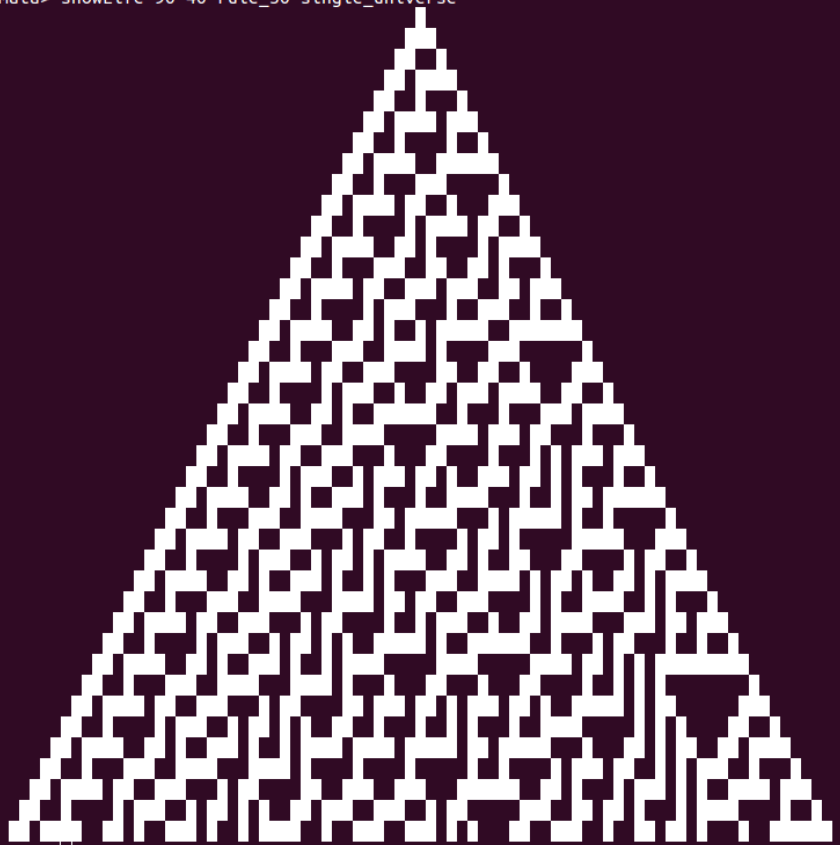
Live démo

Terminal

Fichier Édition Affichage Rechercher Terminal Aide

```
*Automata> showLife 50 10 rule_lr duo_universe
```

```
*Automata> showLife 90 40 rule_30 single_universe
```



```
*Automata>
```

emacs@tahla

File Edit Options Buffers Tools Haskell Help

```
 - COMONADE -
 ------------}

{- Extrait la valeur courante -}
extract :: Universe a -> a
extract (Universe _ v _) = v

{- C'est un foncteur -}
instance Functor Universe where
  fmap f (Universe xs v ys) = Universe (fmap f xs) (f v) (fmap f ys)

{- Construit un univers de tous les univers translaté -}
duplicate :: Universe a -> Universe (Universe a)
duplicate u = Universe (tail $ iterate left u ) u (tail $ iterate right u)

{---------------
 - CONVOLUTION -
 ---------------}

{- Les règles expriment si la case observée doit
   être vivante ou morte à la prochaine itération -}

{- Règle : Vivant si : Gauche != Droite -}
rule_lr :: Universe Bool -> Bool
rule_lr u = lv /= rv
  where
    lv = extract . left  $ u
    rv = extract . right $ u

{- Application d'une règle -}
next :: (Universe a -> a) -> Universe a -> Universe a
next rule universe = fmap rule $ duplicate universe

{- Règle 30 -}
rule_30 :: Universe Bool -> Bool
rule_30 u = toB $ case (toN lv, toN v, toN rv) of
    (1, 1, 1) -> 0
    (1, 1, 0) -> 0
    (1, 0, 1) -> 0
    (1, 0, 0) -> 1
    (0, 1, 1) -> 1
    (0, 1, 0) -> 1
    (0, 0, 1) -> 1
    (0, 0, 0) -> 0
  where
    lv = extract . left  $ u
    v  = extract u
    rv = extract . right $ u


{------------------------------
 Quelques valeurs prédéfinies :
 ------------------------------}

single_universe :: Universe Bool
```

Merci pour votre attention !