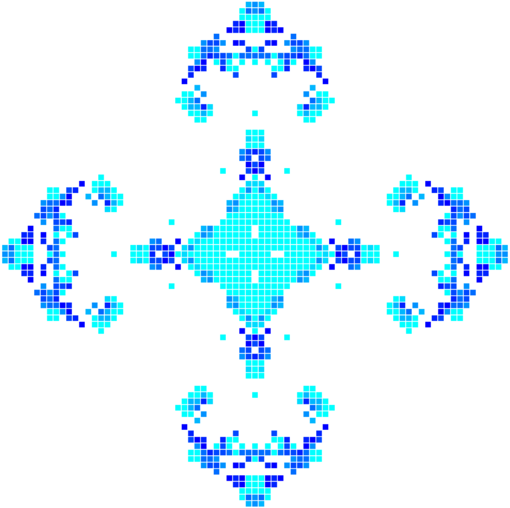
Monades, Comonades et Automates cellulaires

Jérémy S. Cochoy

INRIA Paris-Saclay

Octobre 2015



Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \ldots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \ldots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \ldots\}$
- $[a]$

Les types

Qu'est-ce qu'un type ?

C'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Int = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $Bool = \{True, False\}$
- $Char = \{'a', 'b', 'c', \dots\}$
- $[Bool] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$
- $[a]$

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les types

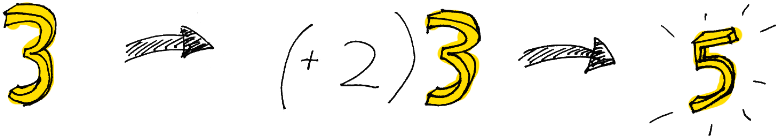
Construire son type :

- Trival = Plus | Minus | Zero
- Box a = InABox a
- Maybe a = Just a | Nothing
- Either a b = Left a | Right b

Just, Nothing, InABox etc portent le doux nom de *constructeur de type*. C'est aussi le cas de *[]*.

Les fonctions

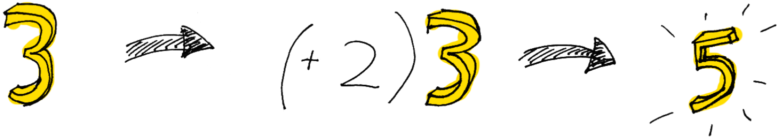
Ce sont les traitements que l'on peut implémenter.



Une fonction ne lance pas de missile.

Les fonctions

Ce sont les traitements que l'on peut implémenter.



Une fonction ne lance pas de missile.

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a -> b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Une fonction a aussi un type : *a -> b*

- floor : : Float -> Int
- (+2) : : Int -> Int
- id : : a -> a
- map : : (a -> b) -> [a] -> [b]

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les fonctions

Ça se compose

- f1 : : a -> b
- f2 : : b -> c
- f2 . f1 : : a -> c
- . : : (a -> b) -> (b -> c) -> (a -> c)

La collection de tous les types forme une catégorie. Les flèches sont les fonctions implémentables. On l'appelle la catégorie des types.

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

Les foncteurs

Un foncteur F agit sur les types ...

- a => F a

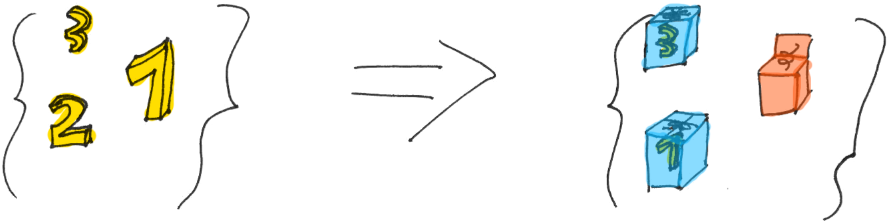
- a => Maybe a
- a => [a]

... et sur les fonctions

- a -> b => F a -> F b

- fmap (+2) : : F Int -> F Int
- fmap id : : F a -> F a

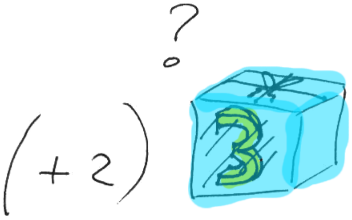
Donnée dans un contexte



Un foncteur permet de passer d'un monde (les types a) vers un autre (les types F a).

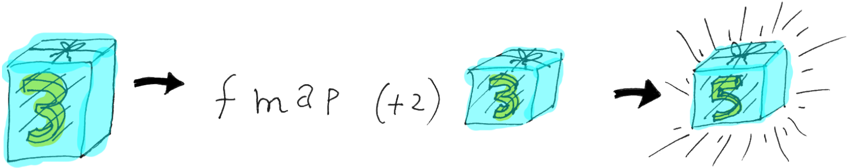
Functorial mapping

On ne peut plus appliquer la fonction telle quelle :



Functorial mapping

Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- fmap id = id
- fmap (p . q) = (fmap p) . (fmap q)

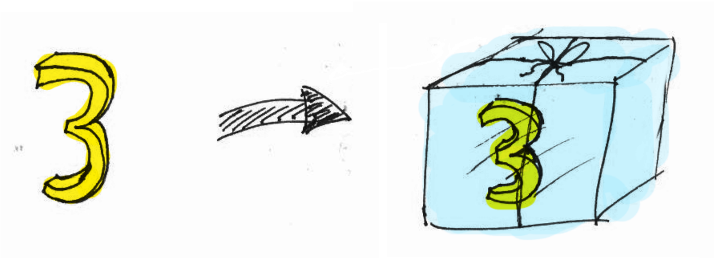
Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Monades


A MONAD IS JUST A MONOID
IN THE CATEGORY OF
ENDOFUNCTORS.
WHAT'S THE PROBLEM ?

Donnée dans un contexte

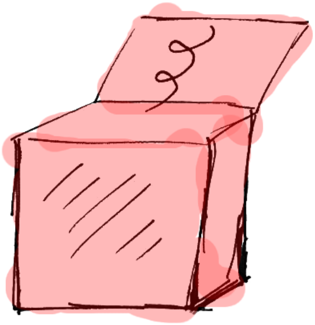
Une monade place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : `Just 3`

Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : `Nothing`

Placer une donnée dans un contexte

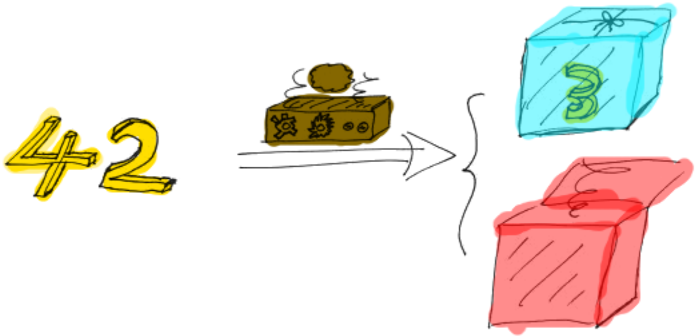
L'opérateur *pure*

```
pure :: a -> F a
```

Quelques cas particuliers

- Just
- (: [])
- Right

Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type *Int -> Maybe Int*.

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si M est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

Composer des traitements avec échec

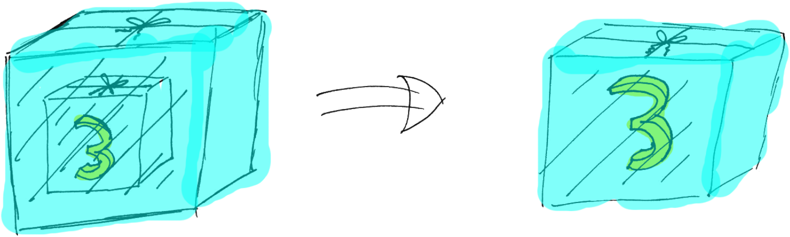
Comment composer `f :: a -> M b` et `g :: b -> M c` ?

Si *M* est un foncteur, on peut composer `f :: a -> M b` avec `fmap g :: M b -> M (M c)`.

Que faire d'un `M (M c)` ?

L'opérateur join

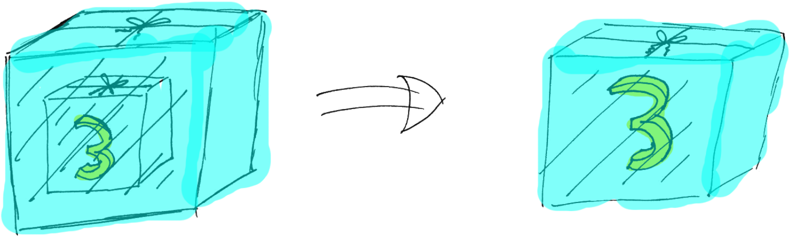
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

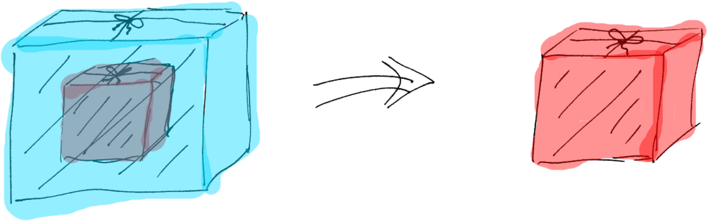
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Just 3).
```

L'opérateur join

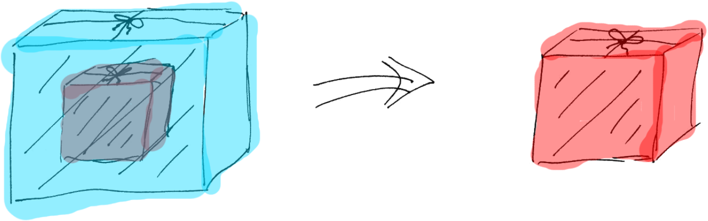
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join $ Just (Nothing).
```

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

`(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)`

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer *f* et *g*.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f.`

L'opérateur *bind*

On cherche à définir la composition.

```
(>=>) :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- `(fmap g) . f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer f et g.

`f >=> g` $\equiv$ `join . (fmap g) . f`.

Récapitulatif

Une monade, c'est

- fmap : : (a -> b) -> (M a -> M b)
- pure : : a -> M a
- join : : M (M a) -> M a

Dura lex sed lex

Une monade doit respecter des lois

- `pure . f ≡ (fmap f) . pure`
- `join . fmap (fmap f) ≡ (fmap f) . join`

- `join . fmap join ≡ join . join`
- `join . fmap pure ≡ join . pure = id`

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$
\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas, C est la catégorie des types.

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \to T$ et $\eta : 1_C \to T$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X)
\end{tikzcd}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas, C est la catégorie des types.

A chaque loi son diagramme

pure est une T.N.

`pure . f ≡ (fmap f) . pure`

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_X"'] & Y \arrow[d, "\eta_Y"] \\
T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y)
\end{tikzcd}
$$

A chaque loi son diagramme

join est une T.N.

`join . fmap (fmap f) ≡ (fmap f) . join`

$$\begin{tikzcd} T(T(X)) \arrow[r, "T(T(f))"] \arrow[d, "\mu_X"'] & T(T(Y)) \arrow[d, "\mu_Y"] \\ T(X) \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

Associativité

`join . fmap join` $\equiv$ `join . join`

$$\begin{tikzcd} T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$$

A chaque loi son diagramme

Existence d'un neutre

`join . fmap pure` $\equiv$ `join . pure = id`

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\eta_{T(X)}"] \arrow[d, "T(\eta_X)"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$$

Automates cellulaires

Toison d'or

Qu'est-ce qu'un automate cellulaire ?

Un automate cellulaire, c'est :

- Un nombre fini d'états S,
- Une grille de cellules,
- La notion de voisinage d'une cellule V_c,
- Une fonction de transition qui à une cellule associe son nouvel état.

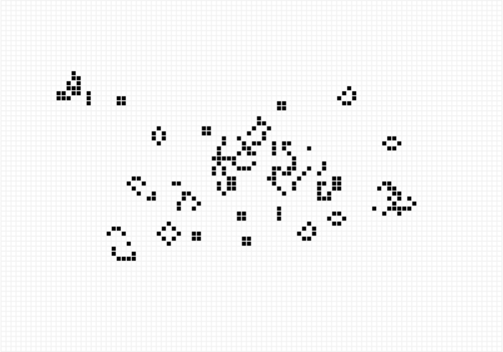
Combien d'automates cellulaires différents ?

On a le choix :

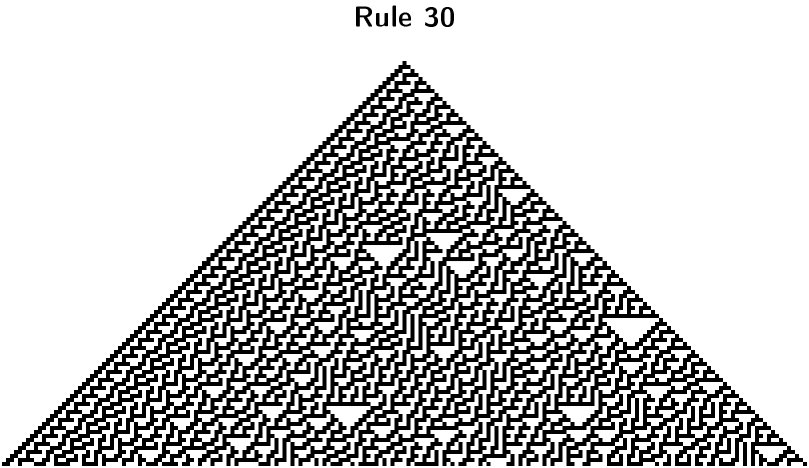
- De la dimension de la grille,
- Des lois,
- Du nombres d'états (couleurs),
- De la forme du voisinages (boules de rayon r, etc.),
- De ne pas être déterministe.

The "Game of Life"

Jeu de la vie (J. H. Conway)



Étude d'un cas : Rule 30



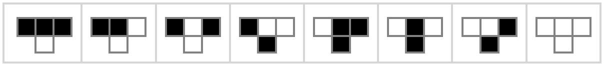
La grille

La grille de l'automate

- Une grille 1D
- Deux états (Blanc / Noir)

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

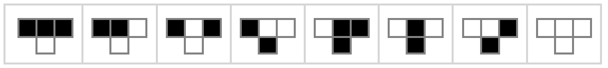


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles

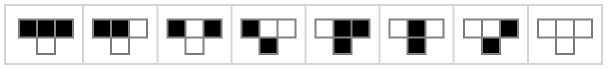


On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Un voisinage de 3 cellules.

Les règles



On peut aussi écrire :

Ancien état	111	110	101	100	011	010	001	000
Nouvel état	0	0	0	1	1	1	1	0

Comonades

C'est le dual d'une monade

- C'est un foncteur M
- extract (copure) (co uinit) : : M a -> a
- duplicate (cojoin) (co product δ) : : M a -> M (M a)

Dura lex sed lex

Une comonade doit respecter des lois

- `(fmap (fmap f)) . duplicate` $\equiv$ `duplicate . fmap f`
- `duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate`

- `duplicate . duplicate` $\equiv$ `fmap duplicate . duplicate` (commut)
- `fmap extract . duplicate` $\equiv$ `extract . duplicate` $\equiv$ `id` (co unit)

Comonades - Catégories

Une comonade (T, δ, ϵ) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \to C$ et de deux transformations naturelles $\Delta : T \to T \circ T$ et $\epsilon : T \to 1_C$ telles que :

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\Delta_{T(X)}"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(\Delta_X)"'] & T(T(T(X))) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\epsilon_{T(X)}"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(\epsilon_X)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

c'est à dire $\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$ et $T\epsilon \circ \Delta = \epsilon_T \circ \Delta = id$.

A chaque loi son diagramme

extract est une T.N.

`f . extract ≡ extract . (fmap f)`

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \\
T(X) \arrow[u, "\epsilon_X"'] \arrow[r, "T(f)"'] & T(Y) \arrow[u, "\epsilon_Y"]
\end{tikzcd}
$$

A chaque loi son diagramme

duplicate est une T.N.

`(fmap (fmap f)) . duplicate` $\equiv$ `duplicate . fmap f`

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(f)"'] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(Y) \arrow[d, "\Delta_Y"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(T(f))"] & T(T(Y)) \end{tikzcd}$$

A chaque loi son diagramme

Coassociativité

```
duplicate . duplicate = fmap duplicate . duplicate
```

$$
\begin{tikzcd}
T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\Delta_{T(X)}"] \\
T(T(X)) \arrow[r, "T(\Delta_X)"'] & T(T(T(X)))
\end{tikzcd}
$$

$$\Delta_T \circ \Delta = T\Delta \circ \Delta$$

A chaque loi son diagramme

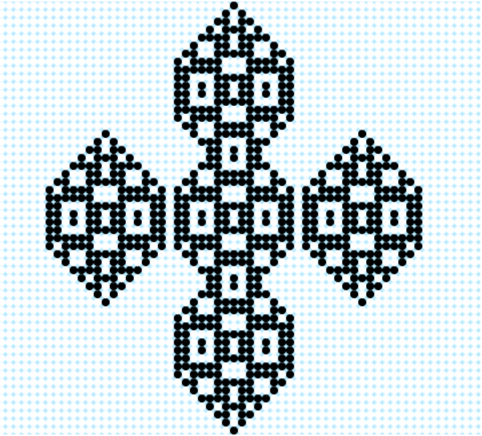
Existence d'une counité

```
extract . duplicate = fmap extract . duplicate = id
```

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "\Delta_X"] \arrow[d, "\Delta_X"'] \arrow[dr, equal] & T(T(X)) \arrow[d, "\epsilon_{T(X)}"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "T(\epsilon_X)"'] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\epsilon_T \circ \Delta = T\epsilon \circ \Delta = id_T$$

Evaluer un automate est comonadique



L'univers

Un ruban

On représente l'univers dans lequel vit notre automate par un ruban, que l'on voit comme trois parties :

- La partie infinie à gauche
- La case observée
- La partie infinie à droite

```
data Universe a = Universe [a] a [a]
```

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

Quelques opérations sur notre univers

Voyageons

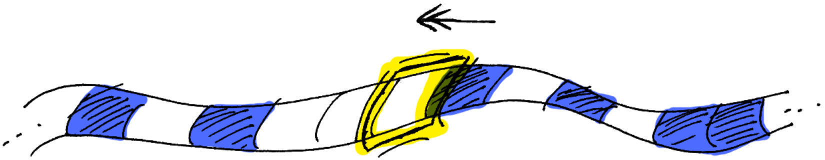
On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

Quelques opérations sur notre univers



Voyageons

On s'autorise à effectuer quelques opérations raisonnables sur notre univers :

- Regarder à gauche (left shift)
- Regarder à droite (right shift)

Moralement, on *translate* notre ruban.

left, right : : Universe a -> Universe a

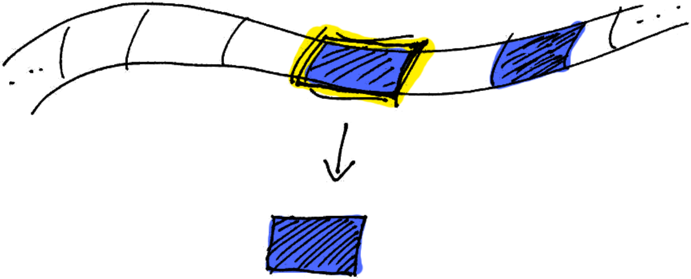
L'univers est fonctoriel

Un foncteur

Notre ruban est naturellement un foncteur : il suffit d'appliquer à notre `Universe a` une fonction `a -> b` sur chacune des cellules pour obtenir un `Universe b`.

```
fmap :: (a -> b) -> Universe a -> Universe b
```

Comonades, nous voilà : extract

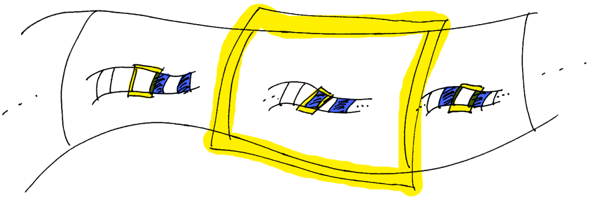


Extraire une information

Depuis notre univers, on peut extraire une valeur : celle de la case que l'on est en train d'observer !

extract : : Universe a -> a

Comonades, nous voilà : duplicate

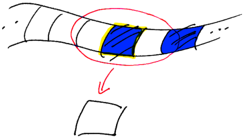


L'opération duplicate

On veut construire un univers où chaque case du ruban contient elle-même... un univers. Il s'agit de contenir tous les shift possible de notre univers de départ.

duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)

Loi de convolution



La loi de notre automate

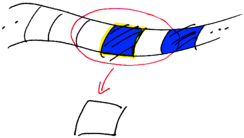
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

rule : : Universe a -> a

Loi de convolution



La loi de notre automate

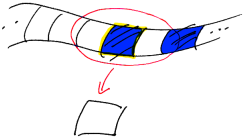
Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

rule : : Universe a -> a

Loi de convolution



La loi de notre automate

Notre automate est décrit par une fonction qui, à un univers, associe l'état de la cellule observé à la prochaine itération. On a donc accès à tout l'univers.

Rule 30

Pour Rule 30, on a besoin de la cellule couramment observée, et de ses voisines de droite et de gauche.

```
rule : : Universe a -> a
```

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

L'évaluation est comonadique

Comment obtenir l'itération n+1 depuis l'itération n ?

Nous disposons maintenant de tous les outils pour, en une ligne, décrire l'itération au rang $n+1$ depuis l'univers au rang n.

La pipeline :

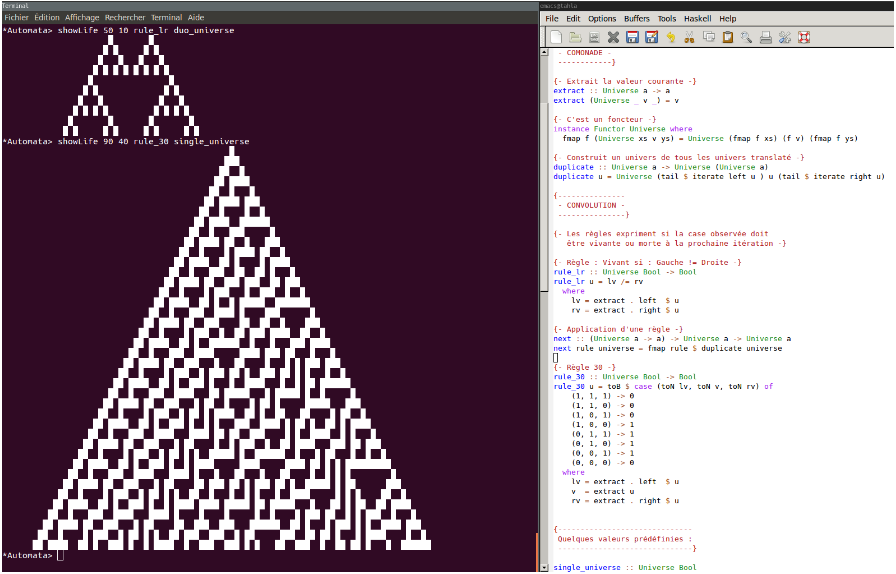
- On duplique notre univers :

  duplicate : : Universe a -> Universe (Universe a)
- On map notre règle sur chaque case :

  fmap rule : : Universe (Universe a) -> Universe a

fmap rule . duplicate : : Universe a -> Universe a

Live démo


Terminal
Fichier Édition Affichage Rechercher Terminal Aide
*Automata> showLife 50 10 rule_lr duo_universe
*Automata> showLife 90 40 rule_30 single_universe
*Automata>
emacs@tahla
File Edit Options Buffers Tools Haskell Help
- COMONADE -
-----------}
{- Extrait la valeur courante -}
extract :: Universe a -> a
extract (Universe _ v _) = v
{- C'est un foncteur -}
instance Functor Universe where
fmap f (Universe xs v ys) = Universe (fmap f xs) (f v) (fmap f ys)
{- Construit un univers de tous les univers translaté -}
duplicate :: Universe a -> Universe (Universe a)
duplicate u = Universe (tail $ iterate left u) u (tail $ iterate right u)
{--------------
- CONVOLUTION -
--------------}
{- Les règles expriment si la case observée doit
être vivante ou morte à la prochaine itération -}
{- Règle : Vivant si : Gauche != Droite -}
rule_lr :: Universe Bool -> Bool
rule_lr u = lv /= rv
where
lv = extract . left $ u
rv = extract . right $ u
{- Application d'une règle -}
next :: (Universe a -> a) -> Universe a -> Universe a
next rule universe = fmap rule $ duplicate universe
{- Règle 30 -}
rule_30 :: Universe Bool -> Bool
rule_30 u = toB $ case (toN lv, toN v, toN rv) of
(1, 1, 1) -> 0
(1, 1, 0) -> 0
(1, 0, 1) -> 0
(1, 0, 0) -> 1
(0, 1, 1) -> 1
(0, 1, 0) -> 1
(0, 0, 1) -> 1
(0, 0, 0) -> 0
where
lv = extract . left $ u
v = extract u
rv = extract . right $ u
{----------------------------
Quelques valeurs prédéfinies :
----------------------------}
single_universe :: Universe Bool

Merci pour votre attention !