

# Foncteurs et Monades

Jérémy Cochoy

Paris RB

Février 2018



# Programming Style

## Impératif

```
first_names = []  
for user in users do  
  first_names << user.name  
end
```

## Fonctionnel

```
first_names = users.map(&:name)
```

# Programming Style

## Impératif

```
nodes = [root]
for node in nodes do
  node.value = node.value.to_json
  nodes += node.children
end
```

## Fonctionnel

```
root.map!(&:to_json)
```

## 1 Foncteurs

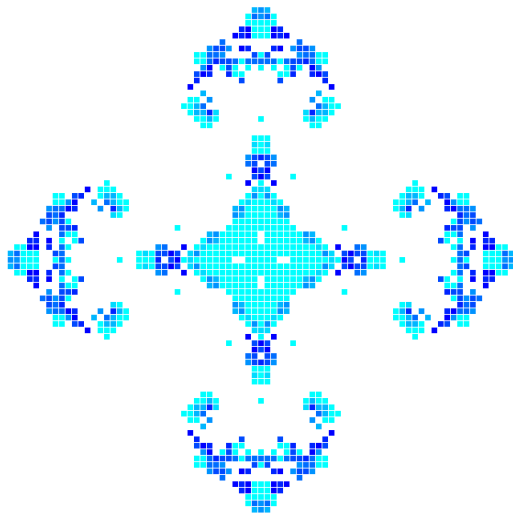
- Fonctions
- Types
- Foncteurs

## 2 Monades

- Construction
- Théorie

## 3 Applications In Real Life

- Monade de listes
- La Monade Maybe de Ruby



# Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord



```
def add2(n)  
  n + 2  
end
```

# Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord



```
def add2(n)  
    n + 2  
end
```

# Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$



# Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$

# Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$

# Les types

Les fonctions sont de type :  $a \rightarrow b$

- `floor :: Float -> Integer`
- `2.method( :+ ) :: Integer -> Integer`

Les fonctions se composent

- `f1 :: a -> b`
- `f2 :: b -> c`
- `{ |x| f2(f1(x)) } :: a -> c`

# Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

```
irb> sum.(2,3)  
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)  
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>  
irb> sum.curry.(1).(2)  
=> 3
```

# Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

```
irb> sum.(2,3)  
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)  
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>  
irb> sum.curry.(1).(2)  
=> 3
```

# Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

```
irb> sum.(2,3)  
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)  
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>  
irb> sum.curry.(1).(2)  
=> 3
```

# Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

## Curryfication

- $\text{sum} :: (a, b) \rightarrow c$
- $\text{sum.curry} :: a \rightarrow (b \rightarrow c)$

# Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

## Curryfication

- $\text{sum} :: (a, b) \rightarrow c$
- $\text{sum.curry} :: a \rightarrow b \rightarrow c$



# Les foncteurs applicatifs

Un foncteur  $F$  agit sur les types ...

- $a \Rightarrow F\ a$

- $a \Rightarrow [a]$

- $a \Rightarrow \text{Tree } a$

- $a \Rightarrow \text{Maybe } a$

... et sur les fonctions

- $a \rightarrow b \Rightarrow F\ a \rightarrow F\ b$

- `fmap 2.method( :+2) :: F Int -> F Int`

- `fmap floor :: F Float -> F Int`

# Les foncteurs applicatifs

Un foncteur  $F$  agit sur les types ...

- $a \Rightarrow F\ a$

- $a \Rightarrow [a]$

- $a \Rightarrow \text{Tree } a$

- $a \Rightarrow \text{Maybe } a$

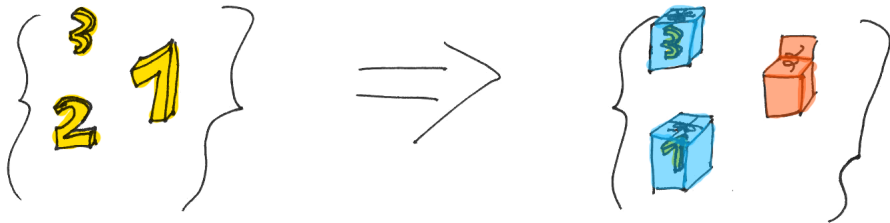
... et sur les fonctions

- $a \rightarrow b \Rightarrow F\ a \rightarrow F\ b$

- `fmap 2.method( :+2) :: F Int -> F Int`

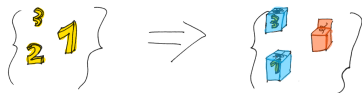
- `fmap floor :: F Float -> F Int`

# Donnée dans un contexte



Un foncteur permet de passer d'un monde (les types  $a$ ) vers un autre (les types  $F a$ ).

# Maybe : Une implémentation



```
class Just < Maybe
  def self.call(value)
    new [value]
  end
end
```

```
irb> Just.(3)
=> #<Just:0x000000000359c010 @content=[3]>
```

# Maybe : Une implémentation



```
class Nothing < Maybe
  def self.call()
    new []
  end
end
```

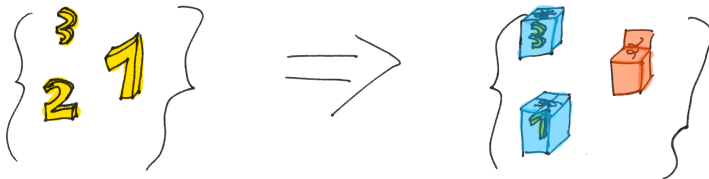
```
irb> Nothing.()
=> #<Nothing:0x0000000002d97d38 @content=[] >
```

# Maybe : Une implémentation

```
class Maybe
  private_class_method :new

  def initialize(content)
    @content = content
  end

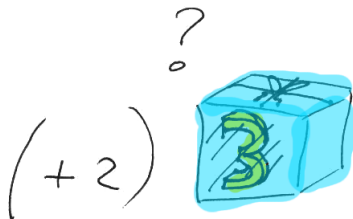
  def from_maybe
    @content.first
  end
end
```



```
irb> Just.(3).from_maybe  
=> 3  
irb> Nothing.().from_maybe  
=> nil
```

# Functorial mapping

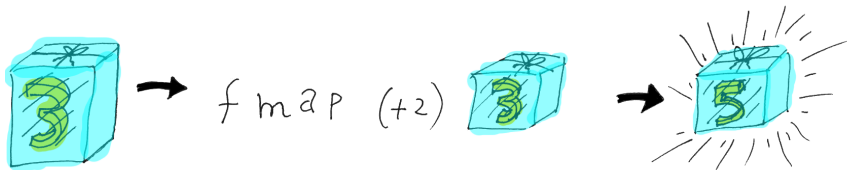
On ne peut plus appliquer la fonction telle quelle :





# Functorial mapping

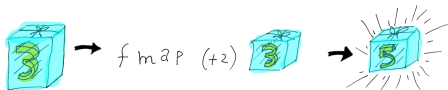
Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



# Implémentation de fmap

```
def fmap(f)
  ->(box) do
    case box
    when Nothing
      return Nothing.()
    when Just
      r = f.(box.from_maybe)
      Just.(r)
    end
  end
end
```

# Functorial mapping



```
add2 = ->(x) {x + 2}
```

```
add2.call Just.(3)
```

```
# NoMethodError (undefined method '+' for
#   #<Just:0x0000000003485280 @content=[3]>)
```

```
(fmap add2).call Just.(3)
```

```
# => #<Just:0x00000000036f8ff8 @content=[5]>
```

# Dura lex sed lex

## Un foncteur doit respecter des lois

- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

# Dura lex sed lex

## Un foncteur doit respecter des lois

- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

# Dura lex sed lex

## Un foncteur doit respecter des lois

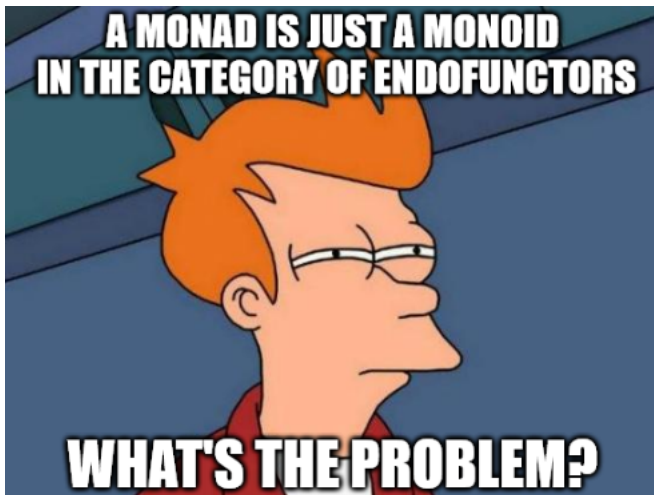
- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

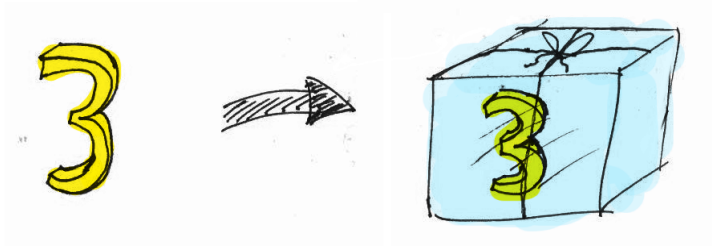
Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

# Monades



# Donnée dans un contexte

Une monade place une valeur dans un contexte.

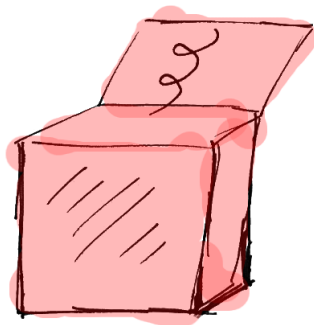


L'exemple de Maybe : `Just 3`



# Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : Nothing

# Placer une donnée dans un contexte

## L'opérateur *pure*

```
pure :: a -> F a
```

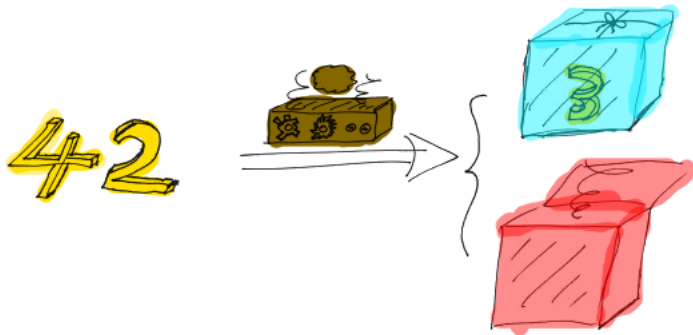
## Quelques cas particuliers

- Just
- [] <<

## D'autres types

- Maybe = Nothing | Just a
- List = Cons a (List a) | Empty
- Tree = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
- Either = Left a | Right b

# Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type  $Int \rightarrow Maybe\ Int$ .

# Chainer des traitements avec échec

Comment composer  $f :: a \rightarrow M\ b$  et  $g :: b \rightarrow M\ c$  ?

Si  $M$  est un foncteur, on peut chainer un appel à  $f :: a \rightarrow M\ b$  avec un appel à  $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$ .

Que faire d'un  $M\ (M\ c)$  ?

# Chainer des traitements avec échec

Comment composer  $f :: a \rightarrow M\ b$  et  $g :: b \rightarrow M\ c$  ?

Si  $M$  est un foncteur, on peut chainer un appel à  $f :: a \rightarrow M\ b$  avec un appel à  $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$ .

Que faire d'un  $M\ (M\ c)$  ?

# Chainer des traitements avec échec

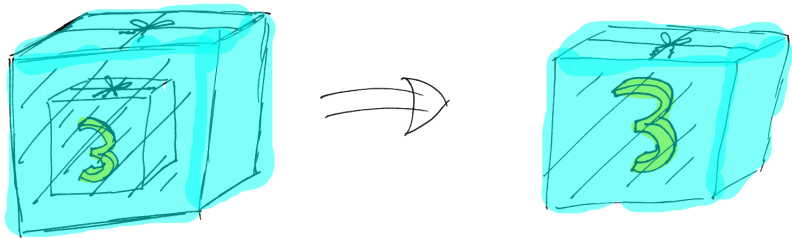
Comment composer  $f :: a \rightarrow M\ b$  et  $g :: b \rightarrow M\ c$  ?

Si  $M$  est un foncteur, on peut chainer un appel à  $f :: a \rightarrow M\ b$  avec un appel à  $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$ .

Que faire d'un  $M\ (M\ c)$  ?

# L'opérateur join

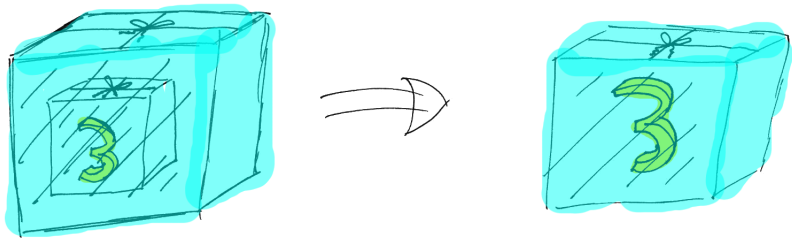
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Just.(3)).
```

# L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```

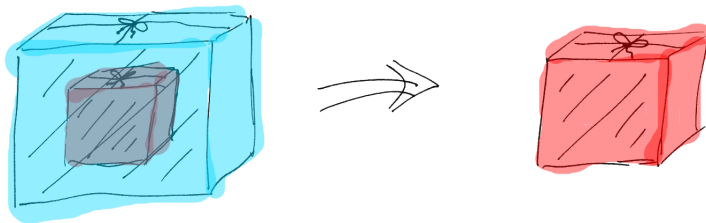


```
join Just.(Just.(3)).
```



# L'opérateur join

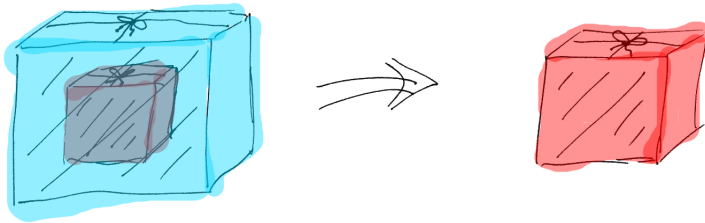
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

# L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

# L'opérateur *join*



Une implémentation de join :

```
def join(bbox)
  case bbox
  when Nothing
    Nothing.()
  when Just
    bbox.from_maybe
  end
end
```

# L'opérateur *join*

On cherche à chainer nos traitements.

```
bind :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

Nous avons :

- `(fmap f) :: M a -> M (M b)`
- `join :: M (M b) -> M b`

On peut maintenant chainer *f* et *g*.

```
def bind(f, v)  
  join ((fmap f).(v))  
end
```

# L'opérateur *join*

On cherche à chainer nos traitements.

```
bind :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

Nous avons :

- $(\text{fmap } f) :: M a \rightarrow M (M b)$
- $\text{join} :: M (M b) \rightarrow M b$

On peut maintenant chainer  $f$  et  $g$ .

```
def bind(f, v)
  join ((fmap f).(v))
end
```

# L'opérateur *join*

On cherche à chainer nos traitements.

```
bind :: M a -> (a -> M b) -> M b
```

Nous avons :

- $(\text{fmap } f) :: M a \rightarrow M (M b)$
- $\text{join} :: M (M b) \rightarrow M b$

On peut maintenant chainer  $f$  et  $g$ .

```
def bind(f, v)
  join ((fmap f).(v))
end
```

# L'opérateur *join*

On peut maintenant chainer  $f$  et  $g$ .

```
Just . ("http://api.com")  
  'bind ' query_http  
  'bind ' parse_string  
  'bind ' json_to_model
```

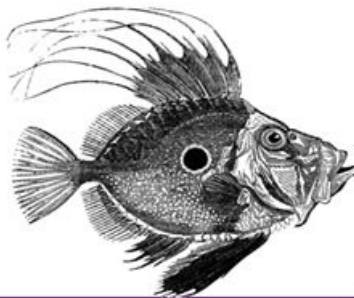
# Récapitulatif

## Une monade, c'est

- $\text{pure} :: a \rightarrow M\ a$
- $\text{fmap} :: (a \rightarrow b) \rightarrow (M\ a \rightarrow M\ b)$
- $\text{join} :: M\ (M\ a) \rightarrow M\ a$



*A must read*



# Haskell

*The understandable parts*

O RLY?

*Bob Dylan*

# Dura lex sed lex

## Une monade doit respecter des lois

- $\text{pure} \circ f \equiv (\text{fmap } f) \circ \text{pure}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } (\text{fmap } f) \equiv (\text{fmap } f) \circ \text{join}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } \text{join} \equiv \text{join} \circ \text{join}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } \text{pure} \equiv \text{join} \circ \text{pure} = \text{id}$

# Monades - Catégories

Une monade  $(T, \mu, \eta)$  est la donnée d'un endofoncteur  $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  et de deux transformations naturelles  $\mu : T \circ T \rightarrow T$  et  $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$  telles que :

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\
 T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

c'est à dire  $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$  et  $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$ .

Dans notre cas  $\mathcal{C}$  la catégorie des types.

# Monades - Catégories

Une monade  $(T, \mu, \eta)$  est la donnée d'un endofoncteur  $T : C \rightarrow C$  et de deux transformations naturelles  $\mu : T \circ T \rightarrow T$  et  $\eta : 1_C \rightarrow T$  telles que :

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\
 T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

c'est à dire  $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$  et  $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$ .

Dans notre cas  $C$  la catégorie des types.

# A chaque loi son diagramme

pure est une T.N.

$\text{pure} \cdot f \equiv (\text{fmap } f) \cdot \text{pure}$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

# A chaque loi son diagramme

join est une T.N.

$\text{join} \circ \text{fmap} (\text{fmap } f) \equiv (\text{fmap } f) \circ \text{join}$

$$\begin{array}{ccc} T(T(X)) & \xrightarrow{T(T(f))} & T(T(Y)) \\ \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\ T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

# A chaque loi son diagramme

## Associativité

`join o fmap join ≡ join o join`

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$$

# A chaque loi son diagramme

## Existence d'un neutre

$\text{join} \circ \text{fmap pure} \equiv \text{join} \circ \text{pure} = \text{id}$

$$\begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\
 T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

$$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = \text{id}_T$$



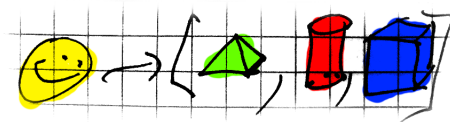
# Et dans la vraie vie ?

Tout ça, à quoi ça sert ?

# Calculs non déterministes

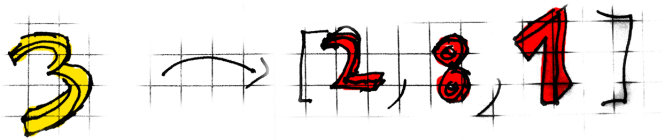


- Déterministe : Calcul produisant une valeur.



- Non déterministe : Calcul produisant plusieurs valeurs.

# Quelques exemples



```
powers = ->(n) do  
  [n, n*n, n*n*n]  
end
```

```
neighbors = ->(n) do  
  [n-1, n+1]  
end
```

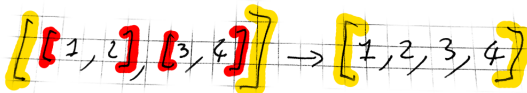
# Implémentation de fmap

C'est tout simplement `Array#map`

$$[1, 2, 3] \xrightarrow{\text{.map}(f)} [f(1), f(2), f(3)]$$

```
def fmap(f)
  ->(list) { list.map(f) }
end
```

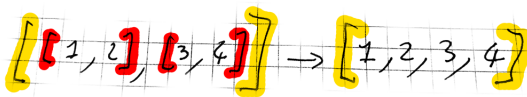
# Join



```
join
```

```
def join(llist)
  llist.flatten(1)
end
```

# Monkey patch pour bind



bind

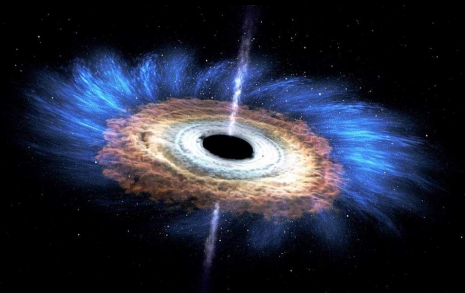
```
class Array
  def bind(&f)
    return self.map(&f).flatten(1)
  end
end
```

# Monade de listes

## Exemple d'utilisation

```
irb> [42].bind(&neighbors).bind(&neighbors)
=> [40, 42, 42, 44]
irb> [2].bind(&powers).bind(&powers)
=> [2, 4, 8, 4, 16, 64, 8, 64, 512]
irb> [42].bind(&neighbors).bind(&powers)
=> [41, 1681, 68921, 43, 1849, 79507]
irb> [42].bind { |x| [x, -x] }.bind(&neighbors)
=> [41, 43, -43, -41]
```

# La monade `nil`

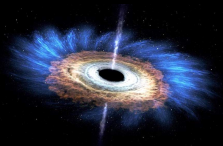


En ruby Maybe s'appelle `nil`

Union disjointe  $a \sqcup \{nil\}$ .



# La monade `nil`



## Opérateur `bind &.`

```
some_computation(42)&.get_value("bidirectional")
```

## Opérateur `bind &.`

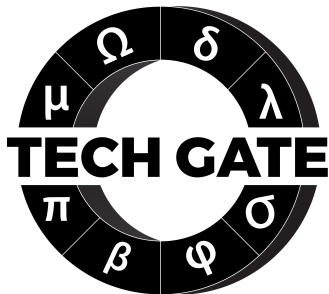
- $\&. :: a \sqcup \{nil\} \rightarrow (a \rightarrow b \sqcup \{nil\}) \rightarrow b \sqcup \{nil\}$
- $bind :: M\ a \rightarrow (a \rightarrow M\ b) \rightarrow M\ b$

# On aurait aussi pu parler de...



- Foncteurs applicatifs
- Left/Right Fish et Bind
- List comprehension
- Monades transformeurs
- Comonades et zippers
- Application aux automates cellulaires

# Qui suis-je ?



Dr. Jérémy Cochoy

[jeremy.cochoy@gmail.com](mailto:jeremy.cochoy@gmail.com)

<http://techgate.fr>

Co-Founder

Symphonia

Auparavant : Backend Developer





Merci pour votre attention !