

Foncteurs, Monades et Zippers

Jérémy Cochoy

Paris RB

Février 2018



1 Foncteurs applicatifs

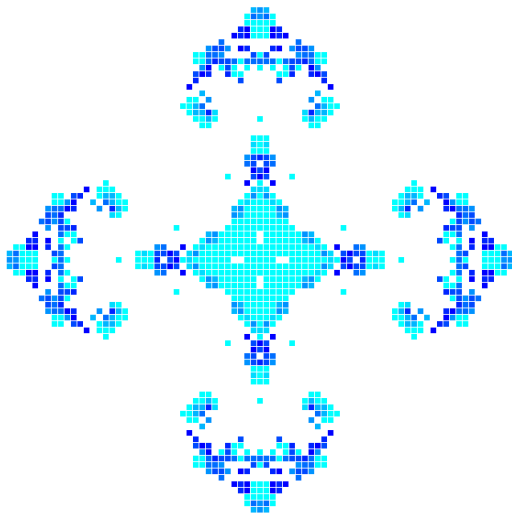
- Fonctions
- Types
- Foncteurs

2 Monades

- Construction
- Théorie

3 Applications In Real Life

- Monade de listes
- La Monade Maybe de Ruby



Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord



```
def add2(n)  
  n + 2  
end
```

Les fonctions

On considère des fonctions *pures* :

- déterministe
- sans effet de bord



```
def add2(n)  
  n + 2  
end
```

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$

Les types

Qu'appelons nous un type ?

Pour nous, c'est un *ensemble* de valeurs.

Exemples :

- $Integer = \{-2147483648, \dots, 2147483647\}$
- $NilClass = \{nil\}$
- $Boolean = \{True, False\}$
- $[Boolean] = \{[], [True], [False], [True, False], [False, True], \dots\}$

Les types

Les fonctions sont de type : $a \rightarrow b$

- $\text{floor} :: \text{Float} \rightarrow \text{Integer}$
- $2.\text{method}(:+) :: \text{Integer} \rightarrow \text{Integer}$

Les fonctions se composent

- $f1 :: a \rightarrow b$
- $f2 :: b \rightarrow c$
- $\{ |x| f2(f1(x)) \} :: a \rightarrow c$

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

```
irb> sum.(2,3)
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>
irb> sum.curry.(1).(2)
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

```
irb> sum.(2,3)  
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)  
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>  
irb> sum.curry.(1).(2)  
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

```
irb> sum.(2,3)
=> 5
```

```
irb> sum.curry.(1)
=> #<Proc:0x000000000288c3c0 (lambda)>
irb> sum.curry.(1).(2)
=> 3
```

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

Curryfication

- $\text{sum} :: (a, b) \rightarrow c$
- $\text{sum.curry} :: a \rightarrow (b \rightarrow c)$

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do  
  a + b  
end
```

Curryfication

- $\text{sum} :: (a, b) \rightarrow c$
- $\text{sum.curry} :: a \rightarrow b \rightarrow c$

Exercice

$\text{compose} :: (a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Fonctions à plusieurs paramètres

```
sum = ->(a, b) do
  a + b
end
```

Curryfication

- $\text{sum} :: (a, b) \rightarrow c$
- $\text{sum.curry} :: a \rightarrow b \rightarrow c$

Exercice

$\text{compose} :: (a \rightarrow b) \rightarrow (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$

Les foncteurs applicatifs

Un foncteur F agit sur les types ...

- $a \Rightarrow F\ a$

- $a \Rightarrow [a]$

- $a \Rightarrow \text{Tree } a$

- $a \Rightarrow \text{Maybe } a$

... et sur les fonctions

- $a \rightarrow b \Rightarrow F\ a \rightarrow F\ b$

- `fmap 2.method(:+2) :: F Int -> F Int`

- `fmap floor :: F Float -> F Int`

Les foncteurs applicatifs

Un foncteur F agit sur les types ...

- $a \Rightarrow F\ a$

- $a \Rightarrow [a]$

- $a \Rightarrow \text{Tree } a$

- $a \Rightarrow \text{Maybe } a$

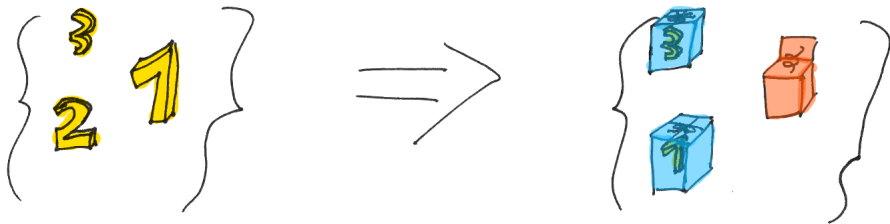
... et sur les fonctions

- $a \rightarrow b \Rightarrow F\ a \rightarrow F\ b$

- `fmap 2.method(:+2) :: F Int -> F Int`

- `fmap floor :: F Float -> F Int`

Donnée dans un contexte



Un foncteur permet de passer d'un monde (les types a) vers un autre (les types $F a$).

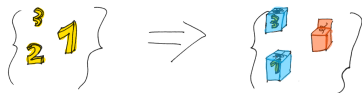
Maybe : Une implémentation



```
class Just < Maybe
  def self.call(value)
    new [value]
  end
end
```

```
irb> Just.(3)
=> #<Just:0x000000000359c010 @content=[3]>
```

Maybe : Une implémentation



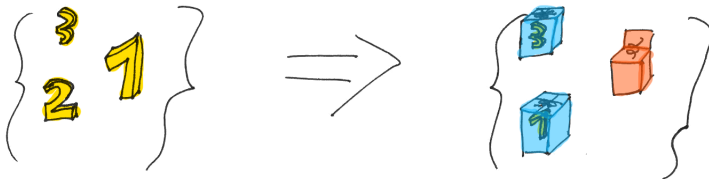
```
class Nothing < Maybe
  def self.call()
    new []
  end
end
```

```
irb> Nothing.()
=> #<Nothing:0x0000000002d97d38 @content=[] >
```

Maybe : Une implémentation

```
class Maybe
  private_class_method :new

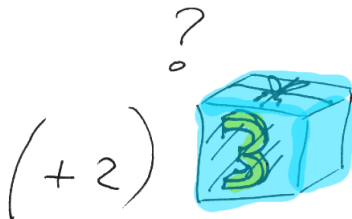
  def initialize(content)
    @content = content
  end
  def from_maybe(default_value)
    return default_value if @content.empty?
    @content.first
  end
end
```



```
irb> Just.(3).from_maybe  
=> 3  
irb> Nothing.().from_maybe  
=> nil
```

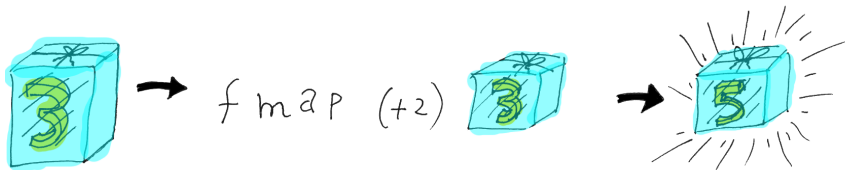
Functorial mapping

On ne peut plus appliquer la fonction telle quelle :



Functorial mapping

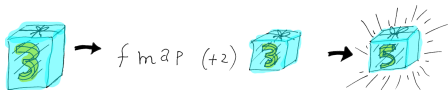
Mais le foncteur nous donne une nouvelle flèche.



Implémentation de fmap

```
def fmap(f)
  ->(box) do
    case box
    when Nothing
      return Nothing.()
    when Just
      r = f.(box.from_maybe)
      Just.(r)
    end
  end
end
```

Functorial mapping



```
add2 = ->(x) {x + 2}
```

```
add2.call Just.(3)
```

```
# NoMethodError (undefined method '+' for  
#   #<Just:0x0000000003485280 @content=[3]>)
```

```
(fmap add2).call Just.(3)
```

```
# => #<Just:0x00000000036f8ff8 @content=[5]>
```

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Dura lex sed lex

Un foncteur doit respecter des lois

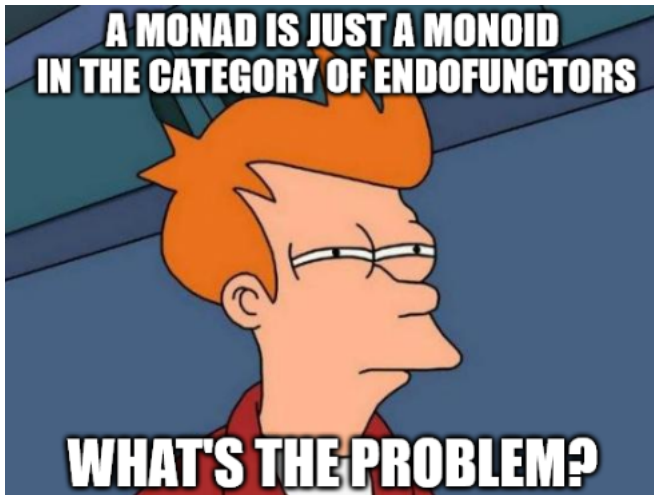
- $\text{fmap id} = \text{id}$
- $\text{fmap } (p \circ q) = (\text{fmap } p) \circ (\text{fmap } q)$

```
id = ->(x) {x}
```

```
(p o q) = ->(x) { p.(q.(x)) }
```

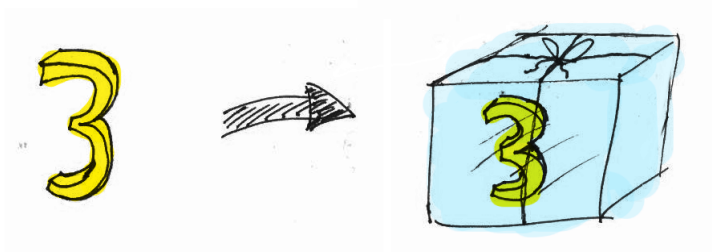
Un foncteur est un endofoncteur de la catégorie des types.

Monades



Donnée dans un contexte

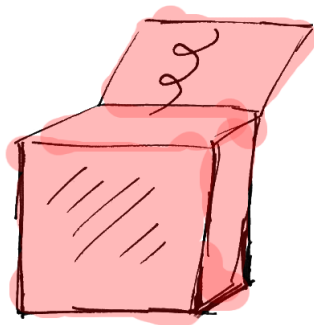
Une monade place une valeur dans un contexte.



L'exemple de Maybe : Just 3

Donnée dans un contexte

Un contexte peut aussi ne pas contenir de valeur.



L'exemple de Maybe : Nothing

Placer une donnée dans un contexte

L'opérateur *pure*

$$\text{pure} :: a \rightarrow F a$$

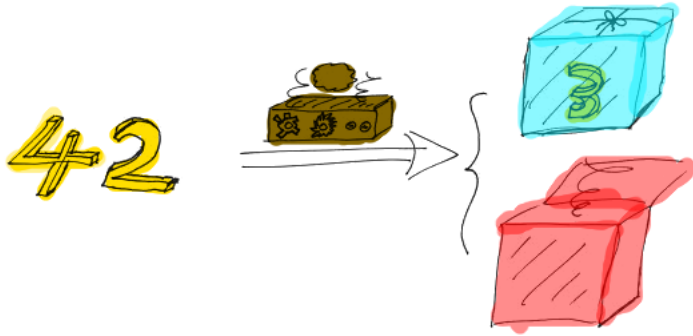
Quelques cas particuliers

- Just
- [] <<

D'autres types

- Maybe = Nothing | Just a
- Tree = Leaf | Node a (Tree a) (Tree a)
- Either = Left a | Right b

Un traitement qui peut échouer



Une fonction de type $Int \rightarrow Maybe\ Int$.

Composer des traitements avec échec

Comment composer $f :: a \rightarrow M\ b$ et $g :: b \rightarrow M\ c$?

Si M est un foncteur, on peut composer $f :: a \rightarrow M\ b$ avec $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$.

Que faire d'un $M\ (M\ c)$?

Composer des traitements avec échec

Comment composer $f :: a \rightarrow M\ b$ et $g :: b \rightarrow M\ c$?

Si M est un foncteur, on peut composer $f :: a \rightarrow M\ b$ avec $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$.

Que faire d'un $M\ (M\ c)$?

Composer des traitements avec échec

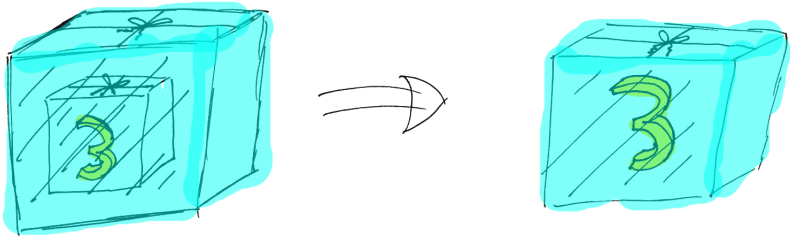
Comment composer $f :: a \rightarrow M\ b$ et $g :: b \rightarrow M\ c$?

Si M est un foncteur, on peut composer $f :: a \rightarrow M\ b$ avec $\text{fmap } g :: M\ b \rightarrow M\ (M\ c)$.

Que faire d'un $M\ (M\ c)$?

L'opérateur join

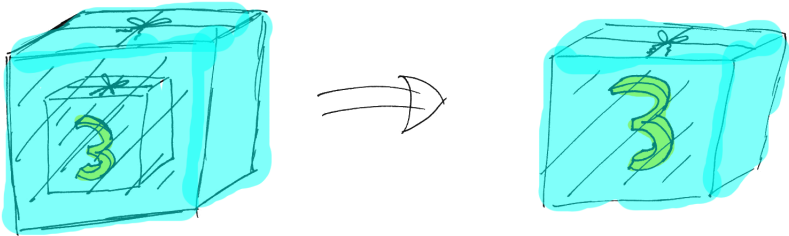
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Just.(3)).
```

L'opérateur join

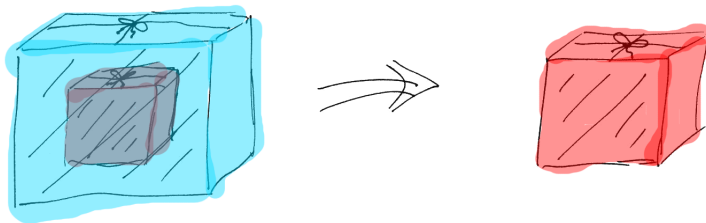
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Just.(3)).
```

L'opérateur join

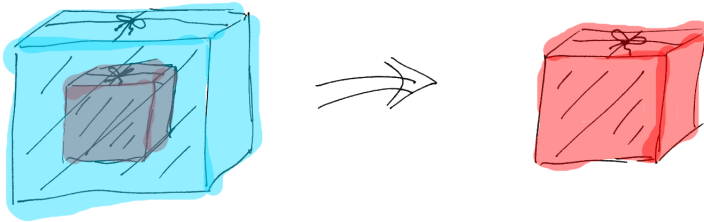
```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

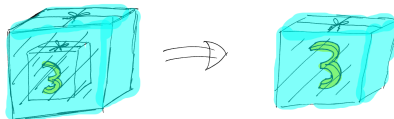

L'opérateur join

```
join :: M (M a) -> M a
```



```
join Just.(Nothing.()).
```

L'opérateur *join*



Une implémentation de join :

```
def join(bbox)
  case bbox
  when Nothing
    Nothing.()
  when Just
    bbox.from_maybe
  end
end
```

L'opérateur *rfish*

On cherche à définir la composition.

`rfish :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)`

Nous avons :

- `(fmap g) o f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer *f* et *g*.

```
def rfish(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

L'opérateur *rfish*

On cherche à définir la composition.

`rfish :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)`

Nous avons :

- `(fmap g) o f :: a -> M (M c)`
- `join :: M (M a) -> M a`

On peut maintenant composer *f* et *g*.

```
def rfish(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

L'opérateur *rfish*

On cherche à définir la composition.

```
rfish :: (a -> M b) -> (b -> M c) -> (a -> M c)
```

Nous avons :

- $(\text{fmap } g) \circ f :: a \rightarrow M (M c)$
- $\text{join} :: M (M a) \rightarrow M a$

On peut maintenant composer f et g .

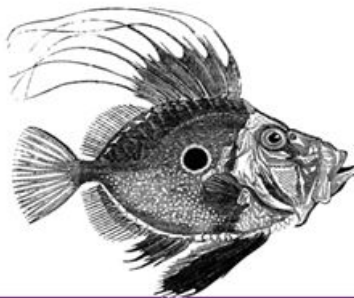
```
def rfish(f, g)
  ->(x) do
    join (fmap g).(f.(x))
  end
end
```

Récapitulatif

Une monade, c'est

- $\text{pure} :: a \rightarrow M\ a$
- $\text{fmap} :: (a \rightarrow b) \rightarrow (M\ a \rightarrow M\ b)$
- $\text{join} :: M\ (M\ a) \rightarrow M\ a$

A must read



Haskell

The understandable parts

O RLY?

Bob Dylan

Dura lex sed lex

Une monade doit respecter des lois

- $\text{pure} \circ f \equiv (\text{fmap } f) \circ \text{pure}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } (\text{fmap } f) \equiv (\text{fmap } f) \circ \text{join}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } \text{join} \equiv \text{join} \circ \text{join}$
- $\text{join} \circ \text{fmap } \text{pure} \equiv \text{join} \circ \text{pure} = \text{id}$

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \rightarrow T$ et $\eta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T$ telles que :

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\
 T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas \mathcal{C} la catégorie des types.

Monades - Catégories

Une monade (T, μ, η) est la donnée d'un endofoncteur $T : C \rightarrow C$ et de deux transformations naturelles $\mu : T \circ T \rightarrow T$ et $\eta : 1_C \rightarrow T$ telles que :

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\
 T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

c'est à dire $\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$ et $\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$.

Dans notre cas C la catégorie des types.

A chaque loi son diagramme

pure est une T.N.

`pure . f ≡ (fmap f) . pure`

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \eta_X \downarrow & & \downarrow \eta_Y \\ T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

A chaque loi son diagramme

join est une T.N.

`join . fmap (fmap f) ≡ (fmap f) . join`

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(X)) & \xrightarrow{T(T(f))} & T(T(Y)) \\
 \mu_X \downarrow & & \downarrow \mu_Y \\
 T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y)
 \end{array}$$

A chaque loi son diagramme

Associativité

`join . fmap join ≡ join . join`

$$\begin{array}{ccc}
 T(T(T(X))) & \xrightarrow{T(\mu_X)} & T(T(X)) \\
 \mu_{T(X)} \downarrow & & \downarrow \mu_X \\
 T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X)
 \end{array}$$

$$\mu \circ T\mu = \mu \circ \mu_T$$

A chaque loi son diagramme

Existence d'un neutre

`join . fmap pure \equiv join . pure = id`

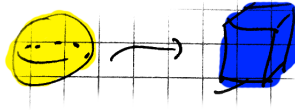
$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{\eta_{T(X)}} & T(T(X)) \\ T(\eta_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \mu_X \\ T(T(X)) & \xrightarrow{\mu_X} & T(X) \end{array}$$

$$\mu \circ T\eta = \mu \circ \eta_T = id_T$$

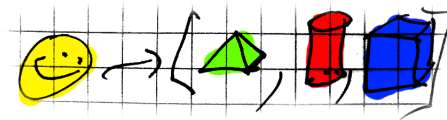
Et dans la vraie vie ?

Tout ça, à quoi ça sert ?

Calculs non déterministes



- Déterministe : Calcul produisant une valeur.



- Non déterministe : Calcul produisant plusieurs valeurs.

Quelques exemples



```
powers = ->(n) do  
  [n, n*n, n*n*n]  
end
```

```
neighbors = ->(n) do  
  [n-1, n+1]  
end
```

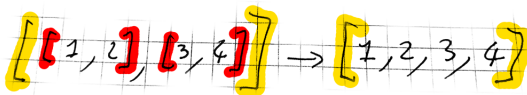
Implémentation de fmap

C'est tout simplement `Array#map`

$$[1, 2, 3] \xrightarrow{\text{fmap } f} [f(1), f(2), f(3)]$$

```
def fmap(f)
  ->(list) { list.map(f) }
end
```

Join et RFish



join

```
def join(llist)
  llist.flatten(1)
end
```

rfish

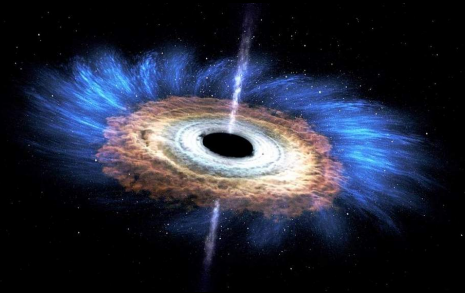
```
def rfish(f, g)
  ->(x) { f.(x).map(&g).flatten }
end
```

Monade de listes

Exemple d'utilisation

```
irb> rfish(neighbors, neighbors).(42)
=> [40, 42, 42, 44]
irb> rfish(powers, powers).(2)
=> [2, 4, 8, 4, 16, 64, 8, 64, 512]
irb> rfish(neighbors, powers).(42)
=> [41, 1681, 68921, 43, 1849, 79507]
irb> rfish(->(x) { [x, -x] }, neighbors).(42)
=> [41, 43, -43, -41]
```

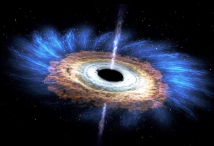
La monade `nil`



En ruby Maybe s'appelle `nil`

Union disjointe $a \sqcup \{\text{nil}\}$.

La monade `nil`



Opérateur `bind &.`

```
some_computation(42)&.get_value("bidirectional")
```

Opérateur `bind &.`

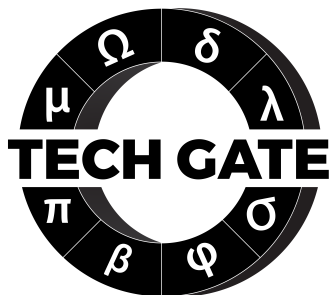
- $\&. :: a \sqcup \{nil\} \rightarrow (a \rightarrow b \sqcup \{nil\}) \rightarrow b \sqcup \{nil\}$
- $bind :: M\ a \rightarrow (a \rightarrow M\ b) \rightarrow M\ b$

On aurait aussi pu parler de...



- Left/Right Fish and Bind
- List comprehension
- Monades transformeurs
- Comonades et zippers
- Application aux automates cellulaires

Qui suis-je ?



Dr. Jérémy Cochoy

jeremy.cochoy@gmail.com

<http://techgate.fr>

Backend Developper





Merci pour votre attention !