Algèbre de Boole

1. Montrer comment l'opérateur **et** peut être obtenu à partir des opérateurs **ou** et **non**. De même pour l'opérateur **ou** avec les opérateurs **et** et **non**.

2. On note respectivement les opérateurs **ou**, **et**, **xor** et **non** par $+, \cdot, \oplus$ et $\overline{}$. Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = \overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$ et que $A \oplus B = (A+B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \oplus B$	$\overline{A} \cdot B$	$A \cdot \overline{B}$	$\overline{A} \cdot B + A \cdot \overline{B}$
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \oplus B$	$A+B$	$\overline{A} + \overline{B}$	$(A+B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

3. Montrer que $A + (\overline{A} \cdot B) = A + B$ et que $A \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot B$

4. Déterminer le complément de l'expression $A + \overline{B} \cdot C$

5. Écrire l'expression $\overline{A \oplus B}$ uniquement avec les opérateurs **ou**, **et** et **non**

6. Simplifier au maximum les expressions logiques suivantes.

(a) $\overline{A} \cdot B + A \cdot B$

(b) $(A+B) \cdot (A+\overline{B})$

(c) $A + A \cdot B$

(d) $A \cdot (A+B)$

(e) $\overline{A} \cdot \overline{B} + \overline{A+B+C+D}$

(f) $A + B \cdot \overline{C} + \overline{A} \cdot (\overline{B \cdot \overline{C}}) \cdot (A \cdot D + B)$

7. **Génération et simplification d'expressions logiques**

Considérer la fonction définie par la table de vérité ci-dessous :

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(a) Générer une expression logique correspondante :

i. sous forme de sommes de produits ;

ii. sous forme de produits de sommes.

(b) Simplifier les deux expressions en utilisant les règles de l'algèbre de Boole.

i.

ii.

8. . Considérer les fonctions logiques suivantes. Pour chacune d'elles,
- construire le diagramme de Karnaugh ;
- utiliser le diagramme pour simplifier les expressions.

(a) $F_1(A,B,C) = A\cdot\overline{B}\cdot C + A\cdot B\cdot\overline{C} + A\cdot B\cdot C$

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A				
$\overline{A}$				

FIG. 1 – Table de Karnaugh pour $F_1(A,B,C)$.

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A				
$\overline{A}$				

FIG. 2 – Table de Karnaugh pour $F_2(A,B,C)$.

(b) $F_2(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B} + A\cdot B\cdot C$

(c) $F_3(A,B,C) = \overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C} + \overline{B}\cdot\overline{C} + A\cdot\overline{B}\cdot C$

(d) $F_4(A,B,C,D) = B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{D} + A\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}$

A \ BC	BC	$\overline{B}C$	$\overline{B}\,\overline{C}$	$B\overline{C}$
A				
$\overline{A}$				

FIG. 3 – Table de Karnaugh pour $F_3(A,B,C)$.

AB \ CD	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB				
$\overline{A}B$				
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$A\overline{B}$				

FIG. 4 – Table de Karnaugh pour $F_4(A,B,C,D)$.

(e) $F_5(A,B,C,D) = \overline{A} + A \cdot B + A \cdot \overline{B} \cdot C + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot D$

$AB \backslash CD$	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB				
$\overline{A}B$				
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$A\overline{B}$				

FIG. 5 – Table de Karnaugh pour $F_5(A,B,C,D)$.

$AB \backslash CD$	CD	$\overline{C}D$	$\overline{C}\,\overline{D}$	$C\overline{D}$
AB				
$\overline{A}B$				
$\overline{A}\,\overline{B}$				
$A\overline{B}$				

FIG. 6 – Table de Karnaugh pour $F_6(A,B,C,D)$.

(f) $F_6(A,B,C,D) = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + \overline{A} \cdot B \cdot C \cdot \overline{D} + A \cdot B \cdot D + \overline{B} \cdot \overline{C} \cdot \overline{D} + A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{D}$