Fiche démonstration second degré

On commence avec un trinôme du second degré de forme $a.x^2+b.x+c$

1 On débute par Factoriser par a $\quad a.\left[x^2+\frac{b}{a}.x+\frac{c}{a}\right] = a.x^2+b.x+c$

2 On Factorise les termes des degrés 1 et 2 puis on retire le carré du degré 0 $\quad a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}\right] = a.x^2+b.x+c$

Carré complet du degré zéro

Ici on retrouve la différence entre
le carré complet du degré 0 et C (sous la factorisation par a)

3 On met les deux termes sur le dénominateur $\quad a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}}\right] = a.x^2+b.x+c$

On met les deux termes au meme dénominateur.

On prend garde au changement de signe

4 On regroupe les deux termes sous la même parenthèse $\quad a.\left[\underbrace{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)}\right] = a.x^2+b.x+c$

Voir l'encadré sur le discriminant

On va utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On atteins la forme factorisée grâce a l'identité remarquable

$$a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right)\right] = a.x^2+b.x+c$$

$$a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right] = a.x^2+b.x+c$$

On en deduit les deux racines

$$X_1 = -\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad X_2 = -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\underbrace{a.[(x-X_1).(x-X_2)]}_{\text{Forme factorisée}} = \underbrace{a.x^2+b.x+c}_{\text{Forme littérale}} = \underbrace{a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}_{\text{Forme canonique}}$$

4b $\quad \overbrace{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}^{\text{Forme Canonique}} = a.x^2+b.x+c$

$a.(x+e)^2 - h = a.x^2+b.x+c$

On peut aussi trouver les racines depuis cette forme $\quad x =_{\pm} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Pourquoi b^2-4ac Est il le discriminant ?

Cas 1 a est negatif

$a<0$ si $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{4ac}{4a^2}$ alors $\frac{b^2}{4a} < \frac{4ac}{4a}$

$\underbrace{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a}\right)}$

$a<0$ si $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{4ac}{4a^2}$ alors $\frac{b^2}{4a} > \frac{4ac}{4a}$

$\underbrace{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a}\right)}$

Cas 2 a est positif

$a>0$ si $\frac{b^2}{4a^2} > \frac{4ac}{4a^2}$ alors $\frac{b^2}{4a} > \frac{4ac}{4a}$

$\underbrace{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a}\right)}$

$a>0$ si $\frac{b^2}{4a^2} < \frac{4ac}{4a^2}$ alors $\frac{b^2}{4a} < \frac{4ac}{4a}$

$\underbrace{a.\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} - \underbrace{\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{4ac}{4a}\right)}$