Fiche démonstration second degré

On commence avec un trinôme du second degré de forme $a.x^2+b.x+c$

1 *On débute par Factoriser par a* $a.\left[x^2+\frac{b}{a}.x+\frac{c}{a}\right] = a.x^2+b.x+c$

Carré complet du degré zéro

2 *On Factorise les termes des degrés 1 et 2 puis on retire le carré du degré 0* $a.[(x+\frac{b}{2a})^2 - \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}}] = a.x^2+b.x+c$

Ici on retrouve la différence entre le carré complet du degré 0 et C (sous la factorisation par a)

On prend garde au changement de signe

3 *On met les deux termes sur le dénominateur* $a.[(x+\frac{b}{2a})^2 - \underbrace{\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}}] = a.x^2+b.x+c$

On met les deux termes au meme dénominateur.

4 *On regroupe les deux termes sous la même parenthèse* $a.[\underbrace{(x+\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b^2-4ac}{4a^2})}] = a.x^2+b.x+c$

On va utiliser l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

5 *On pose* $\Delta = b^2-4ac$

Que ce soit grâce a l'identité remarquable ou grâce a la forme canonique pour trouver une valeur de x pour laquelle l'équation vaut zéro ,

il faut que la racine carré de delta soit calculable

5a *Cas 1 delta vaut zéro*

Dans ce cas on voit bien grâce a la forme canonique que si Delta vaut zéro , Beta vaut zéro et que l'équation s'annule lorsque x est égal à Alpha

$$a.(x-\propto)^2+\cancel{\beta}=0 \qquad X=\propto=-\frac{b}{2a}$$

5b *Cas 2 delta est négatif*

Dans ce cas on voit bien grâce a la forme canonique que si Delta est négatif , il n'existe pas de valeur de x pour laquelle l'équation s'annulle

$$a.(x+\underbrace{\frac{b}{2a}}_{-\propto})^2 \underbrace{-(\frac{b^2-4ac}{4a})}_{+\beta} = a.x^2+b.x+c$$

Valeur négative

$$a.(x-\propto)^2+\beta=0 \Rightarrow (x-\propto)^2=-\frac{\beta}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \Rightarrow x-\propto=\cancel{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}$$

Toutefois , il est possible de déduire que l'équation possède un minimum / maximum (selon le signe de a) en :

Si a est négatif

$$\max=(\alpha,\beta)=(-\frac{b}{2a},-(\frac{b^2-4ac}{4a}))$$

Si a est positif

$$\min=(\alpha,\beta)=(-\frac{b}{2a},-(\frac{b^2-4ac}{4a}))$$

5c *Cas 3 delta est Positif*

Dans ce cas il existe deux valeurs de x pour lesquelles l'équation vaut zéro

<u>*On peut trouver ces valeurs depuis la forme canonique*</u>

Forme Canonique

$$\overbrace{a.(x+\underbrace{\frac{b}{2a}}_{-\propto})^2 \underbrace{-(\frac{b^2-4ac}{4a})}_{+\beta}} = a.x^2+b.x+c$$

$$a.(x-\propto)^2+\beta = a.x^2+b.x+c$$

$$a.(x-\propto)^2+\beta=0$$

$$x=_{\pm}\propto \pm\sqrt{\frac{-\beta}{a}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

<u>*On peut aussi trouver ces valeurs en factorisant grâce à l'identité remarquable*</u>

$$a.[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2})] = a.x^2+b.x+c$$

$$a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\right)\right] = a.x^2+b.x+c$$

$$a.\left[\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right] = a.x^2+b.x+c$$

$$X_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad X_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\underbrace{a.[(x-X_1).(x-X_2)]}_{\textit{Forme factorisée}} = \underbrace{a.x^2+b.x+c}_{\textit{Forme développée}} = \underbrace{a.[(x+\frac{b}{2a})^2]-(\frac{b^2-4ac}{4a})}_{\textit{Forme canonique}}$$