Projet de Simulations et Monte Carlo

Wall Street

Margot Etève, Aymeric Floyrac, Jérémy Marck

ENSAE ParisTech

Introduction

- Objectif : Evaluer le prix d'une option asiatique
  $C = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S(t_i) - K\right)^{+}\right]$

- Processus de Black et Scholes $S(t) = S_0 exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)$ solution de $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$

- On suppose que $S_0 = K$

- (W_t) le mouvement brownien standard

Introduction

Mouvement brownien:

- $\forall s < t,\ W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$
- Les acroissements sont indépendants, i.e.
  $\forall t_1 < t_2 < t_3,\ W_{t_2} - W_{t_1} \perp W_{t_3} - W_{t_2}$
- $W_0 = 0$ (convention)

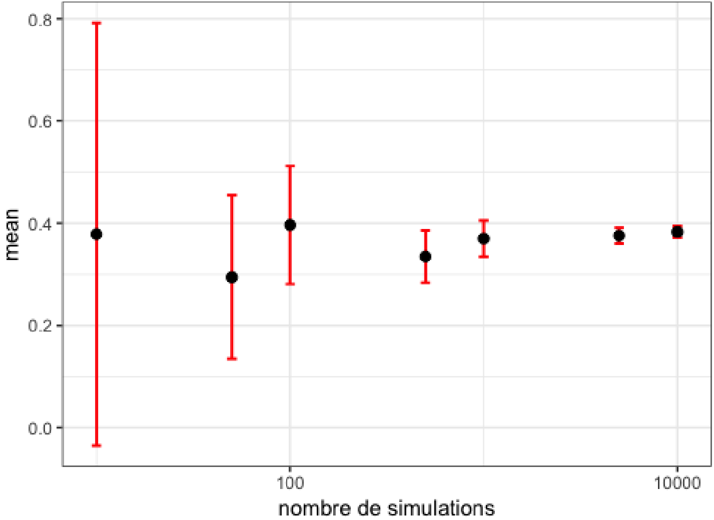
Construction par marche aléatoire : simulation des accroissements gaussiens puis W_T est la somme cumulative des accroissements.

Monte Carlo standard

- Idée : simuler un mouvement brownien à k pas, calculer le processus de Black-Scholes et $e^{-rT}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_n(t_i) - K\right)^+$, puis répèter ceci N fois
- N: nombre de trajectoires browniennes simulées,
  k: nombre de pas de ces trajectoires
- $\hat{C} = \frac{1}{N}\left[e^{-rT}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_n(t_i) - K\right)^+\right]$
- Les éléments stochastiques sont les W_{t_i} dans les $S_n(t_i)$

Représentation de la méthode Monte Carlo

Figure 1: Moyenne et IC pour la méthode Monte Carlo

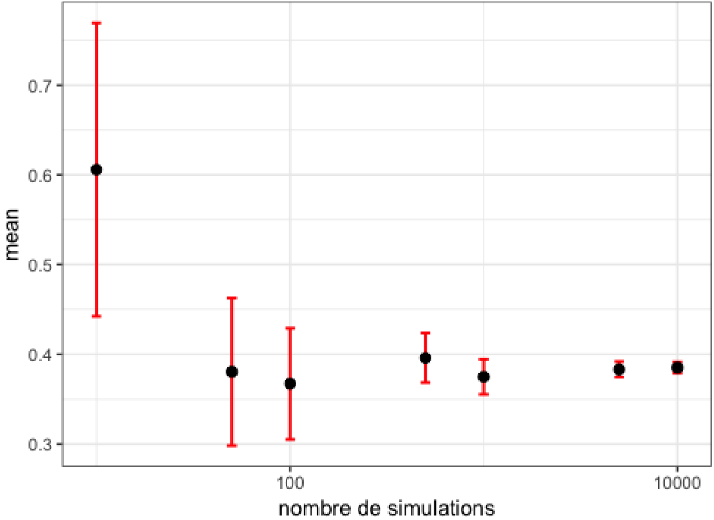


Variables antithétiques

- Idée : réduire la variance sans avoir besoin de simuler à nouveau, en utilisant $W \overset{\mathcal{L}}{=} -W$
- Démarche :
  - On simule un mouvement brownien
  - On calcule
  $$\begin{cases} S_n^{SA}(t_i) = S_0 exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}\right), & \text{sans antithétique} \\ S_n^{A}(t_i) = S_0 exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t_i - \sigma W_{t_i}\right), & \text{avec antithétique} \end{cases}$$
  - $\begin{cases} \hat{C}_N^{SA}, \text{ sans antithétique} \\ \hat{C}_N^{A}, \text{ avec antithétique} \end{cases}$ et $\hat{C}_N = \frac{1}{2}(\hat{C}_N^{SA} + \hat{C}_N^{A})$

Représentation de la méthode Monte Carlo

Figure 2: Moyenne et IC pour la méthode MC avec variables antithétiques



Variables de contrôle

- Idée : réduire la variance en introduisant une **variable de contrôle**.

- Principe : Soit Y une variable aléatoire réelle centrée (variable de contrôle), alors $\forall \beta$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}[X_n - \beta Y_n]$ est un estimateur non biaisé de $\mathbb{E}[X]$.
  On minimise la variance en prenant $\beta = \frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$.

- Ici : $X_t = e^{-rT}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S_n(t_i) - K\right)^+$, W_T comme variable de contrôle et $\hat{C}_N^C = \hat{C}_N - \mathbb{E}[\hat{\beta} W_t]$

Représentation de la méthode avec variables de contrôle :

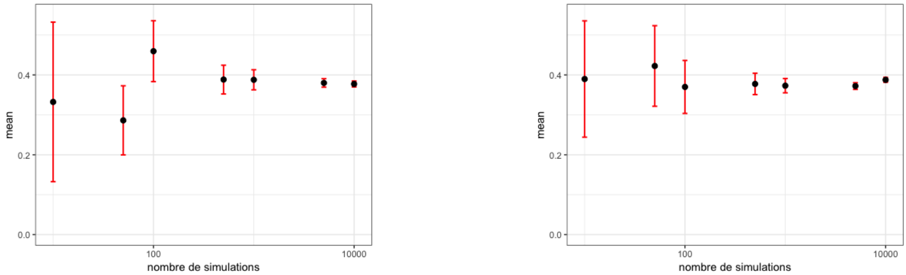


Figure 3: Gauche : sans variables antithétiques. Droite : Avec variables antithétiques.

Quasi-Monte Carlo

- Idée : on ne simule pas de façon totalement aléatoire. On fait une sorte de quadrillage pour "forcer" les simulations.
- Utilisation de la suite de Halton (discrépance faible).
- Discrépance : dans le contexte d'une suite de nombres dans un intervalle, cela mesure l'écart maximal de la suite donnée avec l'équirépartition.
- Package `randtoolbox` dans `R`

Représentation graphique pour le Quasi Monte Carlo

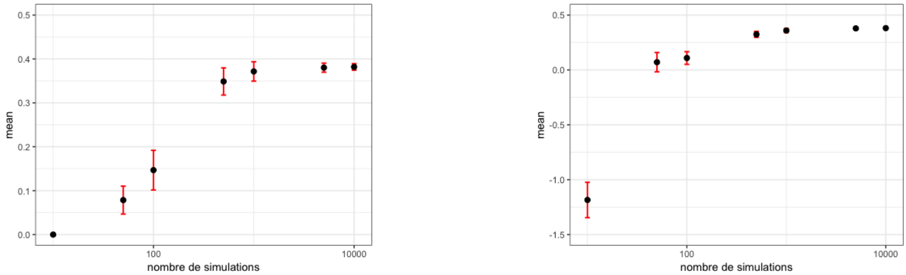
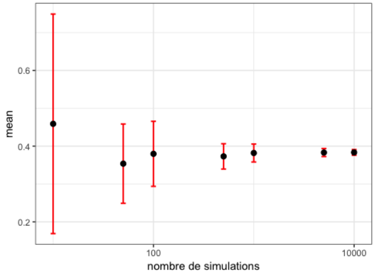


Figure 4: Gauche : sans variables antithétiques. Droite : Avec variables antithétiques.

Randomized Quasi-Monte Carlo

- Variante de Quasi Monte Carlo
- Consiste à générer un ensemble de points à faible discrépance
- Argument `scrambling` de la fonction `sobol` du package `randtoolbox`

Représentation graphique pour le Randomized Quasi Monte Carlo



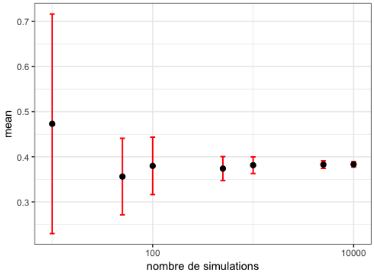


Figure 5: Gauche : sans variables antithétiques. Droite : Avec variables antithétiques.

Table 1

	moyenne	écart-type	temps de calcul
MC	0.378	0.568	0.066
antithétique	0.379	0.302	0.060
contrôle	0.374	0.372	0.056
contrôle antithétique	0.380	0.304	0.079
QMC	0.382	0.376	0.059
QMC antithétique	0.381	0.300	0.061
Randomized QMC	0.383	0.383	0.066
RQMC antithétique	0.383	0.305	0.0.56

Multi-Level Monte Carlo

T : la maturité qu'on découpe en intervalles de temps.
Au niveau 0, T est découpé en $h_0 = \frac{T}{k}$ intervalles. Au niveau l, T est découpé $h_l = \frac{T}{2^l k}$ intervalles. Et ce jusqu'au niveau L.
M_l : au nombre de tirages effectués au niveau l.
Puis N repétitions de ces tirages.
On pose $f : x \mapsto e^{-rT} (x - K)^+$. La méthode consiste à calculer :

$$\mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_L)}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_0)}\right)\right] + \sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_l)}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_{l-1})}\right)\right]$$

Où

$$X_T^{(h)} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} S^{(h)}(t_i)$$

avec $S^{(h)}$ le processus de Black-Scholes résolu par schéma d'Euler de pas h

Schéma d'Euler

Le processus de Black-Scholes est solution de l'équation

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

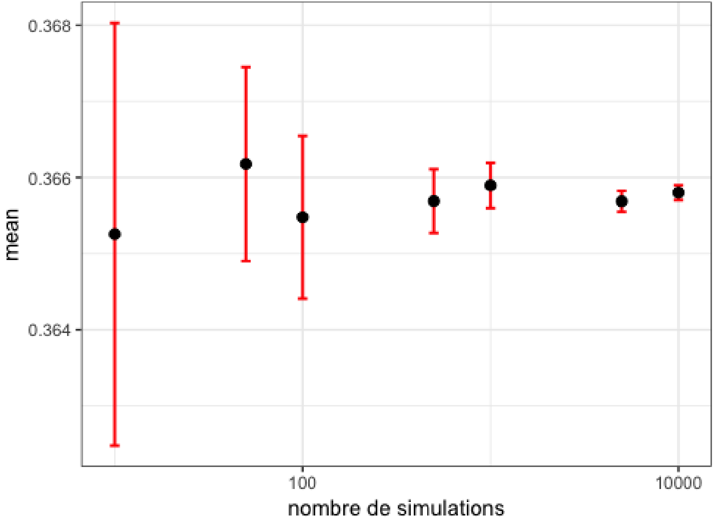
L'équation discrétisée du schéma d'Euler s'écrit

$$S_{t+h} - S_t = \mu S_t \times h + \sigma S_t (W_{t+h} - W_t)$$

et $W_{t+h} - W_t \sim \mathcal{N}(0, h)$
De plus, les 2 composantes du l-ième terme de
$\sum_{l=1}^{L} \mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_l)}\right)\right] - \mathbb{E}\left[f\left(X_T^{(h_{l-1})}\right)\right]$ sont simulés à partir de la même trajectoire brownienne.

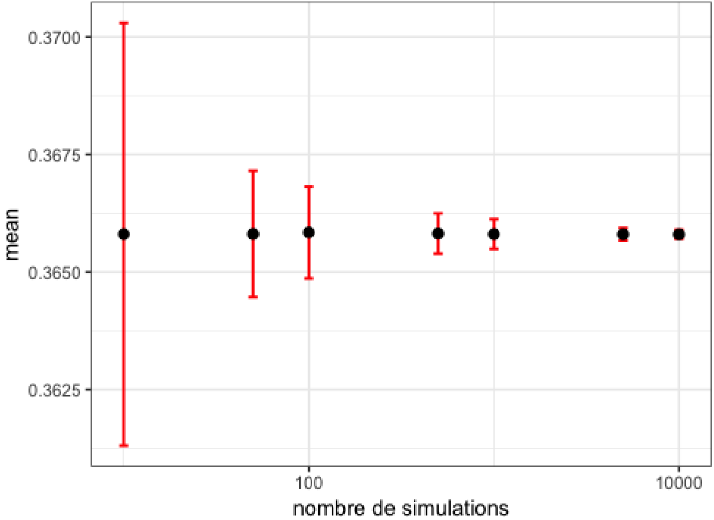
Représentation de la méthode Multi Level Monte Carlo

Figure 6: Moyenne et IC pour la méthode Multi Level Monte Carlo



Multi-Level Quasi Monte Carlo

Figure 7: Moyenne et IC pour la méthode Multi Level Quasi Monte Carlo



Comparaisons

Table 2

	moyenne	écart-type	temps de calcul
MC	0.378	0.568	0.066
antithétique	0.379	0.302	0.060
contrôle	0.374	0.372	0.056
contrôle antithétique	0.380	0.304	0.079
QMC	0.382	0.376	0.059
QMC antithétique	0.381	0.300	0.061
Randomized QMC	0.383	0.383	0.066
RQMC antithétique	0.383	0.305	0.056
Multi-niveaux	0.367	0.011	0.078
QMC Multi-niveaux	0.365	0.011	0.259