Série numérique

Jérémy Meynier

Exercice 1

Nature de la série de terme général $u_n = \sin(\dfrac{\pi n^2}{n+1})$

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ la série de terme général $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ est-elle convergente ?
2. Calculer la somme de cette série

Exercice 3

Nature des séries suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{4}} \ln^2(n)}$
2. $u_n = (1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}})^{-n}$
3. $u_n = \ln(\dfrac{2 + \sin(\frac{1}{n})}{2 - \sin(\frac{1}{n})})$
4. $u_n = \dfrac{\ln^2(n)}{n^{\frac{5}{4}}}$

Exercice 4

Nature de la série de terme général $u_n = \ln(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}),\ \alpha > 0$

Exercice 5

Soit $u_n > 0$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$. On suppose que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

Donner la nature des séries de termes généraux $\dfrac{u_n}{S_n}$ et $\dfrac{u_n}{S_n^2}$

Exercice 6

1. Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$
2. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

Exercice 7

Nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^\alpha \ln(n)^n}{n!}, \alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 8

Caluler $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Exercice 9

1. Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}, n \geq 2$

   Montrer que $\sum u_n$ diverge si $\alpha \geq 1$ et converge si $\alpha > 1$
   Indication : même démonstration que pour la série de Riemann
2. En déduire la nature de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(e-(1+\frac{1}{n})^n)e^{\frac{1}{n}}}{\ln^2(n^2+n)}$