Suites numériques

Jérémy Meynier

Exercice 1

1. Déterminer $u_n / \ u_{n+1} = 4u_n + 3$ en fonction de u_0
2. Résoudre $u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 0$
3. Résoudre $u_{n+2} + 2u_{n+1} - 3u_n = 0$
4. Résoudre $u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$

Exercice 2

Démontrer le théorème de Césaro : si $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n\to\infty} v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = l$

Exercice 3

Étudier la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

Exercice 4

Soit $a > 0$, on considère $P_n : x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - a$

1. Montrer que P_n a une seule racine strictement positive, que l'on note U_n.
2. Montrer que (U_n) est décroissante.
3. Montrer que (U_n) converge et calculer sa limite en fonction de a

Exercice 5

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)$

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)$, et $I_n > 0$
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$
3. Exprimer I_n à l'aide de factoriels pour $n = 2p$ et $n = 2p+1$
4. Montrer que $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$
5. Déterminer un équivalent de I_n