

Déterminants

Jérémy Meynier

Exercice 1

Calculer $\begin{vmatrix} b & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & b \end{vmatrix}$

Exercice 2

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant D_n de la matrice de terme général $|i - j|$, $1 \leq i, j \leq n$

Exercice 3

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & 1 \end{vmatrix}$

Exercice 4

Exprimer $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$ en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

Exercice 5

1. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

2. En déduire $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$

Exercice 6

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que $U = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$.

Exercice 7

Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ de rang 1. Montrer que $\det(A + H) \det(A - H) \leq \det(A^2)$