Probabilités

Jérémy Meynier

Exercice 1

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de lois binomiales $B(n,p)$ et $B(m,p)$ respectivement. On pose $S = X + Y$. Calculer $\mathrm{P}(X = x|S = s)$

Exercice 2

Lors d'une rencontre d'athlétisme, la barre est montée d'un cran après chaque saut réussi par le concurrent. Quand un saut est raté, la compétition d'arrête pour le sauteur. Celui-là a, pour le saut n, une chance sur n de réussir le saut. On appelle X le rang du dernier saut réussi.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Vérifier qu'il s'agit d'une variable aléatoire
3. Calculer l'espérance et la variance de X

Exercice 3

Soit $\lambda > 0, a > 0$ et $a \neq 1$. On suppose que (X,Y) a une loi de probabilité définie par $\mathrm{P}(X = i \cap Y = j) = \dfrac{\lambda a^i}{j!}$, $0 \leq i \leq j$

1. Déterminer la loi de Y
2. Déterminer λ pour qu'il s'agisse bien d'une loi de couples.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. $Y \sim P(\lambda), X$ suit une loi uniforme sur $\{1,2\}$, et $Z = XY$.

1. Déterminer la loi de Z
2. Calculer $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathrm{Var}(Z)$
3. Calculer la probabilité que Z soit paire

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi géométrique de paramètres respectifs a et b, et $Z = Y - X$.

1. Trouver la loi de Z
2. Calculer $\mathrm{P}(X \leq Y)$

Exercice 6

On lance une pièce équilibrée consécutivement. On s'arrête dès que deux piles successifs sont apparus. X est le nombre de lancers jusqu'à l'arrêt. Trouver la loi de X

Exercice 7

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer la fonction génératrice de X et $3Y$
2. En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$
3. En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$
4. X et Z sont-elles indépendantes ? Donner alors le coefficient de correlation linéraire $\rho(X, Z)$
5. Montrer que la loi de Z s'écrit $\mathbb{P}(Z = n) = A_n e^{-2\lambda}$ avec A_n ne faisant pas intervenir d'exponentielle.
6. Trouver le minimum de $f(t) = \mathbb{V}(X + tZ)$

Exercice 8

Un point M se déplace dans un plan muni d'un repère$(O, \vec{i}, \vec{j}$. Au départ, M est au point O. À chaque instant il se déplace d'un pas dans l'une des quatres directions $(\vec{i}, \vec{-i}, \vec{j}, \vec{-j})$. Ses coordonnées après n déplacements sont des variables aléatoires réelles X_n, Y_n.

1. Calculer $\mathbb{P}(X_n = n), \mathbb{P}(Y_n = n), \mathbb{P}(Y_n = n \cap X_n = n)$. X_n et Y_n sont-elles indépendantes ?
2. Trouver une relation entre $\mathbb{E}(X_{n+1}^2)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$. Calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$.
3. Calculer $\mathbb{P}(Y_n = 0 \cap X_n = 0)$