Applications linéaires

Jérémy Meynier

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et u et v deux endomorphismes de E. Montrer que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, f et g deux endomorphismes de E tel que $f \circ g = id$

1. Démontrer que $\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker}(f)$
2. Démontrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im}(g)$
3. Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(g)$

Exercice 3

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n.

1. Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) \Rightarrow \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2)$
2. (a) Démontrer que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f^2)$
   (b) En déduire $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(f^2) \Leftrightarrow E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$

Exercice 4

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et f un endomorphisme nilpotent d'indice p ($f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$)

1. Montrer que $\exists x \in E$ tel que $(x, f(x), f^2(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ soit libre.
2. En déduire $f^n = 0$

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie n, et f un endomorphisme de E. Montrer que $Ker(f) = Im(f) \Leftrightarrow f^2 = 0$ et $n = 2\operatorname{rg}(f)$

Exercice 6

Soit $E = Im(u) + Im(v) = Ker(u) + Ker(v)$, E de dimension finie n. Montrer que $Im(u)$ et $Im(v)$ sont supplémentaires dans E, tout comme $Ker(u)$ et $Ker(v)$.

Exercice 7

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ espaces vectoriels, et $u \in L(E,F)$, $v \in L(F,G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme $\Leftrightarrow$ u est injective, v est surjective et $Im(u) \oplus Ker(v) = F$

Exercice 8

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, $f \in L(E)$, p un projecteur. Montrer $p \circ f = f \circ p \Leftrightarrow Im(p)$ et $Ker(p)$ sont stables par f

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n, $u, v \in L(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leq \mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$

Exercice 10

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \to \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \to (P(1), P'(1), \cdots, P^{(n)}(1)) \end{cases}$
Montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, p et q deux projecteurs de E

1. Montrer que $Im(p) = Im(q) \Leftrightarrow p \circ q = q$ et $q \circ p = p$
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $Ker(p) = Ker(q)$
3. Montrer que $p + q$ est un projecteur $\Leftrightarrow p \circ q = q \circ p = 0$
4. Montrer alors, si $p + q$ est un projecteur, que $Im(p+q) = Im(p) \oplus Im(q)$ et $Ker(p+q) = Ker(p) \cap Ker(q)$

Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in L(E)$ vérifiant $f^2 - 5f + 6Id_E = 0$. Montrer que $Ker(f - 2Id) \oplus Ker(f - 3Id) = E$

Exercice 13

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $p, q \in L(E)$ tel que $p + q = Id$ et $\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leq \dim(E)$. Montrer que p et q sont des projecteurs.