Espaces euclidiens

Jérémy Meynier

Exercice 1

Soit E un espace euclidien et $f : E \mapsto E$ une application vérifiant $f(0) = 0$ et, $\forall (x,y) \in E^2$, $||f(x) - f(y)|| = ||x - y||$

1. Montrer que $\forall x \in E, ||f(x)|| = ||x||$
2. Montrer que $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$
3. Montrer que $\forall (x,y) \in E^2, < f(x), f(y) >=< x, y >$
4. Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\forall x \in E$,
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x > f(e_k)$$
5. En déduire que f est un automorphisme orthogonal de E

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, on donne F : $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$

1. Déterminer une baser orthonormée de F.
2. Donner la matrice dans $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale de p_F sur F.
3. Calculer $d(u, F)$ où $u = (1, 1, 1, 1)$

Exercice 3

Soit E un espace euclien, E_1 et E_2 deux sous-espaces de E. Montrer que $(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$ et $(E_1 \cap E_2)^\perp = E_1^\perp + E_2^\perp$

Exercice 4

Déterminer $I = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\{ \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 \mathrm{d}t \right\}$

Exercice 5

Montrer que $< A, B > = \mathrm{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$, puis déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \left\{ ||M - aI - bJ||^2 \right\}$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soient $(E, <,>)$ un espace euclidien et $a \in E$ tel que $||a|| = 1$. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha(x) = x + \alpha < a, x > a$

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α f_α est-il bijectif ?
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les éléments propres de f_α
3. Pour quels α f_α est-il un automorphisme orthogonal de E ?
4. Pour quels α f_α est-il un endomorphisme symétrique de E ?

Exercice 7

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité et rangées en ordre croissant.

Montrer que $\forall x \in E$, $\lambda_1 ||x||^2 \leqslant < u(x), x > \leqslant \lambda_n ||x||^2$

Exercice 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $A^T A$ est diagonalisable à valeurs propres positives