Suites et series de fonctions

Jérémy Meynier

Exercice 1

Étudier les convergences (simples, uniformes, normales) des suites et séries de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

1. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $I = [0,1]$
2. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$, $I = \mathbb{R}^+$
3. $f_n(x) = n\ln(1+\dfrac{1}{nx})$, $I =]0,+\infty[$

Exercice 2

Étudier les convergences (simples, uniformes, normales) des séries de fonctions suivantes

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n \ln^2(x)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n \ln(x)$

Exercice 3

Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$

1. Étudier les convergences de f_n
2. Montrer que $\forall a > 0$ $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$
3. Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$

Exercice 4

Soit $f_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$. Étudier les convergences de $(f_n)_{n\geq 1}$, puis de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$

Exercice 5

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie sur $[0,2]$ par $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$.

1. Étudier les variations de f_n sur $[0,2]$
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$

3. Étudier les convergences de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0,1]$
4. Montrer que $\forall a \in]0,1[$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[a, 2-a]$

Exercice 6

Soit $\phi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$

1. Montrer que ϕ converge uniformément sur tout segment de $]0,+\infty[$
2. Montrer que ϕ est continue sur $]0,+\infty[$
3. Montrer que ϕ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$

Exercice 7

soit $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1. Donner le domaine de définition de ζ
2. Étudier la convergence normale et la converge uniforme de ζ
3. Montrer que $\zeta \in C^0(]1,+\infty[)$
4. Déterminer un équivalent de ζ en 1^+
5. Déterminer la limite de ζ en $+\infty$