Espaces vectoriels normés

Jérémy Meynier

Exercice 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f, g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que $\forall x \in [a, b], f(x) > g(x)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall x \in [a, b], f(x) > g(x) + \lambda$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé, et $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de E.

Montrer que $\{x \in E, \prod_{k=1}^{n} ||x - a_k|| = 1\}$ est fermé borné dans E

Exercice 3

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Z_0 = (U_0, V_0, W_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6}W_n + \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{6}V_n + \frac{1}{3}W_n \\ W_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3}V_n + \frac{1}{6}W_n - \frac{7}{6} \end{cases} \qquad \text{et } Z_n = (U_n, V_n, W_n)$$

1. Montrer que (Z_n) vérifie une relation matricielle de la forme $Z_{n+1} = AZ_n + B$
2. Montrer que $\exists k \in]0, 1[/ \ \forall X \in \mathbb{R}^3, \ ||AX||_\infty \leq k||X||_\infty$
3. Montrer que $X = AX + B$ a une solution L dans $\mathbb{R}^3$, puis montrer que (Z_n) converge après avoir majoré $||Z_n - L||_\infty$ à l'aide de $||Z_0 - L||_\infty$, de k et n

Exercice 4

Soit A un convexe d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et $n \in \mathbb{N}/ \ n \geq 2$. Montrer que si $x_1, \cdots, x_n$ sont dans A et si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in A$

Exercice 5

Soient $A, B \in M_p(\mathbb{K})$ et (A_n) une suite de $GL_p(\mathbb{K})$ tel que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ et $\lim_{n\to\infty} A_n^{-1} = B$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = B$. On admettra que pour la norme $||A|| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$, $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$

Exercice 6

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.