Intégrales impropres/ Intégrales à paramètres

Jérémy Meynier

Exercice 1

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^4)^n}$. Prouver l'existence et donner la limite de I_n

Exercice 2

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\mathrm{d}x$

1. I est-elle convergente ?
2. I est-elle absolument convergente ?

Exercice 3

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Exercice 4

Soit $f : t \in]0,1[\mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\arctan^2(t)}$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$
2. Donner un équivalent de $\int_x^1 \frac{1}{\arctan^2(t)}\mathrm{d}t$ quand $x \to 0^+$

Exercice 5

Soit $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition de F
2. Étudier la continuité de F
3. Étudier le caractère C^1 de F
4. Trouver F à l'aide d'une décomposition en éléments simples

Exercice 6

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$

1. Chercher $\lim\limits_{x \to +\infty}$
2. À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de f en $+\infty$
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \to 0^+$

Exercice 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$

Exercice 8

Étudier l'intégrabilité de f sur I dans les cas suivants :

1. $f(t) = \dfrac{1}{e^t + t^2 e^{-t}}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$
2. $f(t) = \dfrac{t^\alpha - 1}{\ln(t)}$, $I =]0, 1[$
3. $f(t) = \dfrac{1}{\arccos(t)}$, $I = [0, 1[$
4. $f(t) = \dfrac{\sqrt{t} \sin(\frac{1}{t^2})}{\ln(1+t)}$, $I = \mathbb{R}^{+*}$

Exercice 9

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t^2)^n}$

1. Calculer $I_1(x)$
2. Montrer que $I_n \in C^1(]0, +\infty[)$
3. Calculer $I_n'(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$
4. En déduire $I_n(x)$