Séries entières

Jérémy Meynier

Exercice 1

Trouver le rayon de convergence R de $\sum_{n\geq 1} \frac{\sinh(n)}{n(n+1)} x^n$, puis calculer la somme pour $x \in]-R, R[$

Exercice 2

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^{(-1)^n} x^n$. Calculer le rayon de convergence et la somme sur le bon intervalle.

Exercice 3

Soit $S(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!}$. Donner l'ensemble de définition de S et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum e^{-n} z^{2n}$
2. $\sum \sin(n) z^n$
3. $\sum z^{n^2}$
4. $\sum a_n z^n$ avec $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}$ et $a_0 = a_1 = 1$

Exercice 5

Déterminer le développement en séries entières en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$
2. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
3. $f(x) = \frac{2x-1}{(2+x-x^2)^2}$

Exercice 6

Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1,1[$
2. Montrer que f est solution de $(1-x^2)y' - xy = 1$
3. En déduire le développement en série entière de f sur $]-1,1[$