Coloration et Chaînes.

Jérémy Rouot

e-mail: jeremy.rouot@yncrea.fr

bureau 332

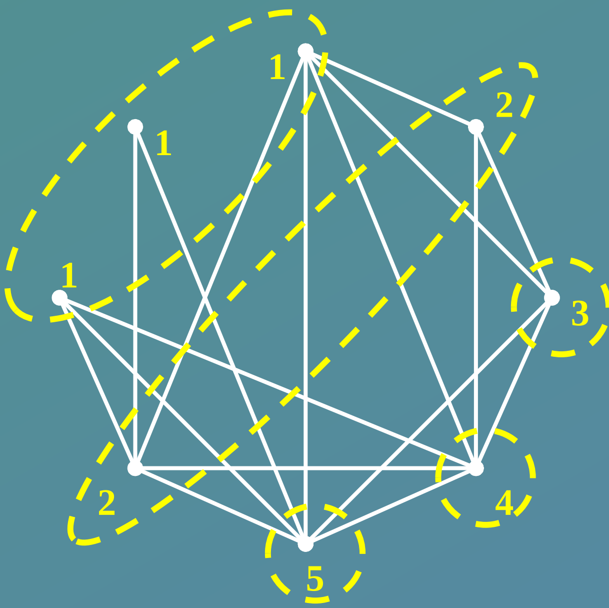
Soit $G=(X, E)$ un graphe non-orienté. Etant donné un entier k, une *k-coloration* des sommets de G est une application c: $X \rightarrow \{1, 2,..., k\}$ telle que, pour chaque arête (x, y) de G, on ait $c(x) \neq c(y)$.

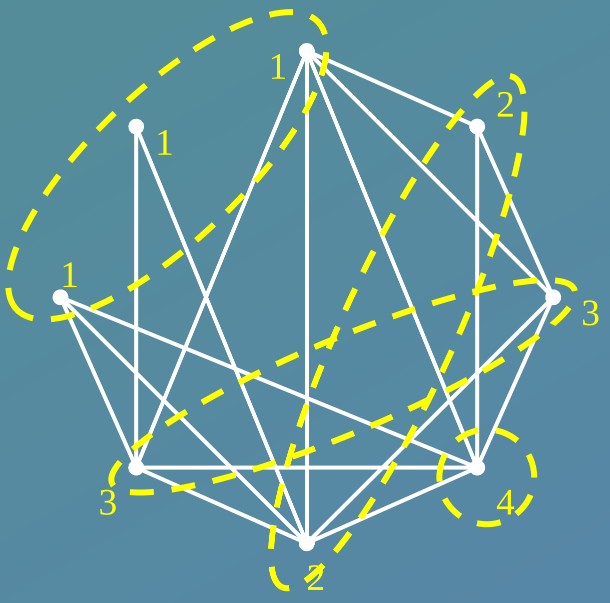
Lorsque $c(x)=i$, nous dirons que le sommet x reçoit la couleur i, ou que la couleur i est affectée à x.

On remarque que l'ensemble $\{x \mid c(x)=i\}$ des sommets de couleur i (i=1,..., k) est un stable de G (sous-ensemble ne contenant aucune arête); une k-coloration peut donc être vue aussi comme une partition de l'ensemble des sommets de G en (au plus) k stables.

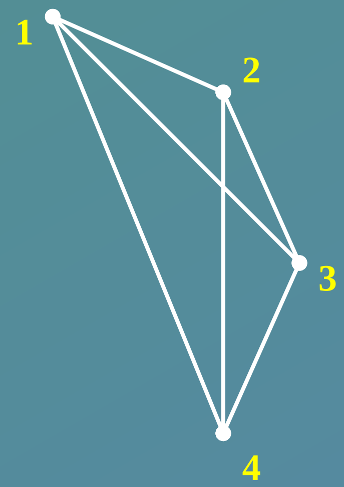
Si G admet une k-coloration on dit qu'il est *k-colorable*. On cherche généralement à trouver une coloration aussi économique que possible, c'est-à-dire qui minimise le nombre de couleurs utilisées. On définit ainsi le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe G par:

$$\chi(G) = \min \{ k, \ G \text{ est } k\text{-colorable} \}.$$


1
1
1
2
2
3
4
5

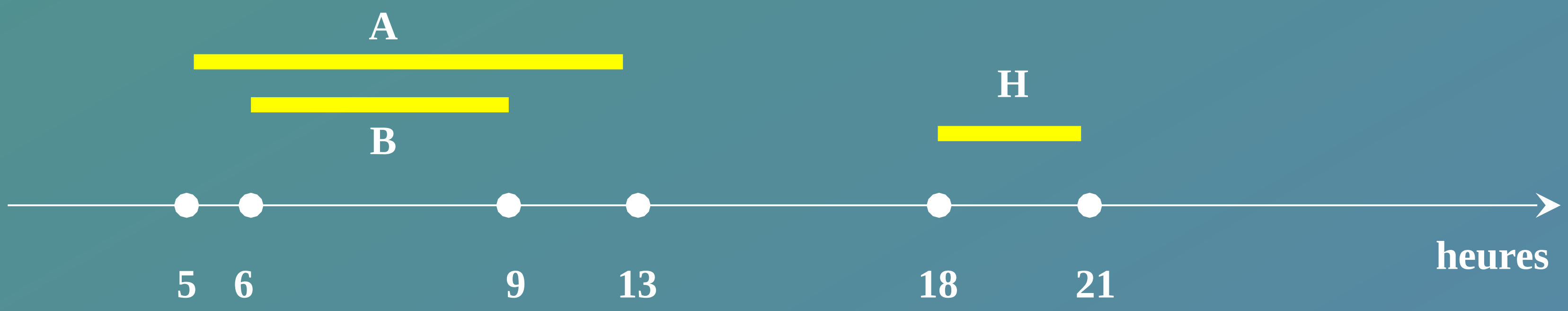

1
1
1
2
3
3
4
2

K_4

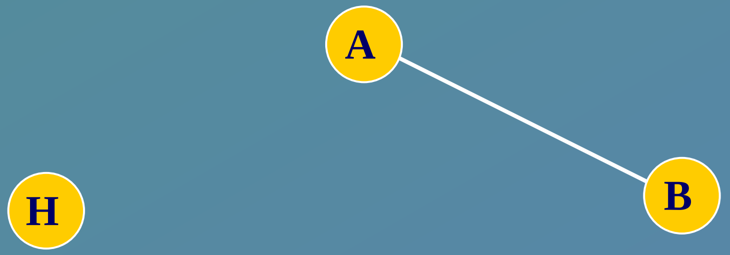


Ordonnancement

Considérons le planning de tâches A,B,H suivant :



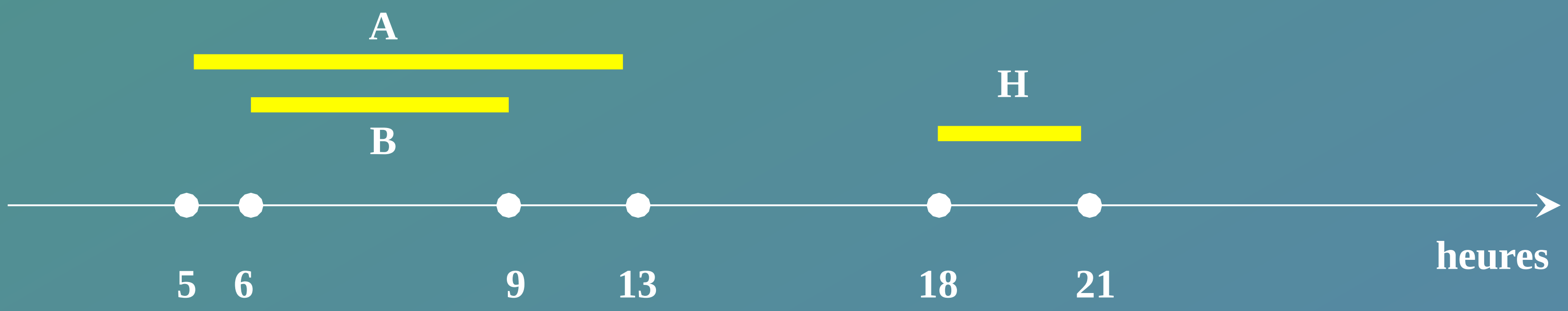
A ces tâches on peut associer le *graphe d'intervalles* suivant :



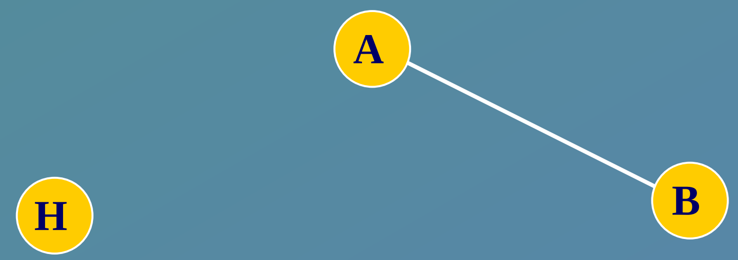
Problématique : *Partitionner ces 3 tâches en le minimum de vacations tel que les tâches de chacune ne se recouvrent pas entre elles et que le nombre de tâches qu'elles contiennent soit limité à k.*

Ordonnancement

Considérons le planning de tâches A,B,H suivant :



A ces tâches on peut associer le *graphe d'intervalles* suivant :

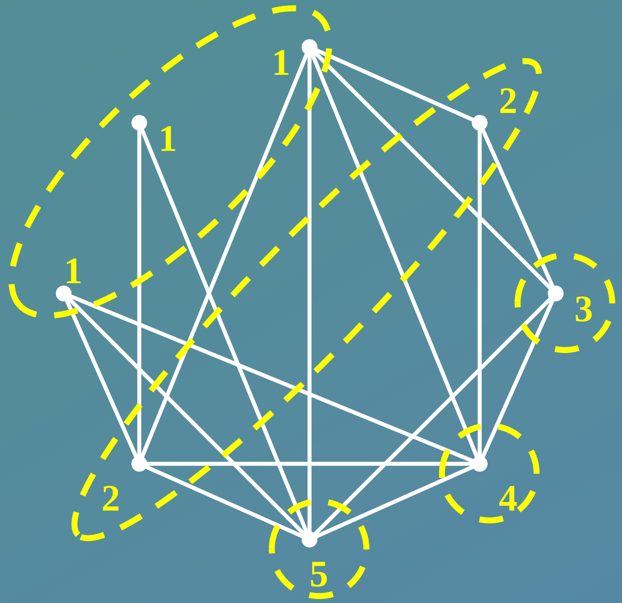


Solution: *ici, c'est simple le nombre de vacations minimal est* **2**.

Supposons maintenant que la planification des tâches dans une usine est donnée par le graphe suivant :

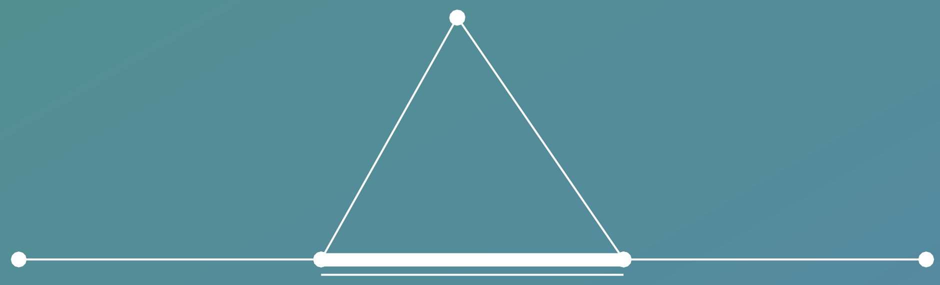
Problématique : *Partitionner ces 8 tâches en le minimum de vacations tel que les tâches de chacune ne se recouvrent pas entre elles et que le nombre de tâches qu'elles contiennent soit limité à k.*

Supposons maintenant que la planification des tâches dans une usine est donnée par le graphe suivant :

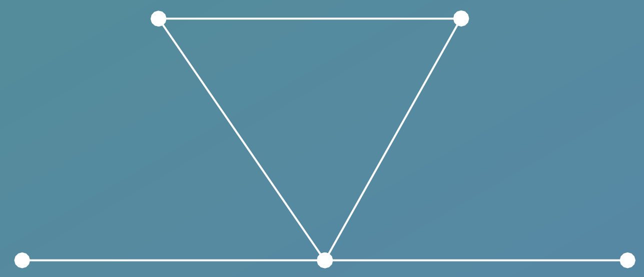


Solution: *il s'agit de trouver une coloration minimum du graphe de sorte que chaque couleur marque au plus k sommets. Une couleur correspond alors à une vacation.*

Une ***chaîne*** *de longueur* k est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $\Gamma=(x_0, e_1, x_1, e_2,\ldots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ telle que, pour tout i, les extrémités de e_i sont x_{i-1} et x_i.



Si e_i sont distincts Γ est une ***chaîne simple***.



Si x_i sont distincts Γ est une ***chaîne élémentaire***.

Lorsque $k>0$ et $x_0 = x_k$ Γ est une ***chaîne fermée***.

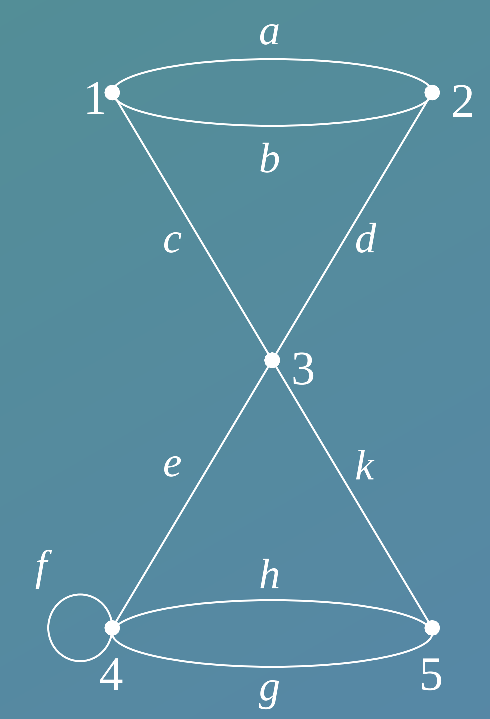
Un ***cycle*** est une chaîne fermée simple.

chaîne simple : $4e3c1a2d3k5$;

chaîne élémentaire : $1a2d3e4h5$;

cycle : $1c3e4g5\mathrm{k}3d2a1$;

cycle élémentaire : $1c3d2b1$.



Chaque “objet” *élémentaire* est *simple* mais la réciproque n’est pas vraie comme le montre l’exemple précédent.

Problème du loup, de la chèvre et du chou.

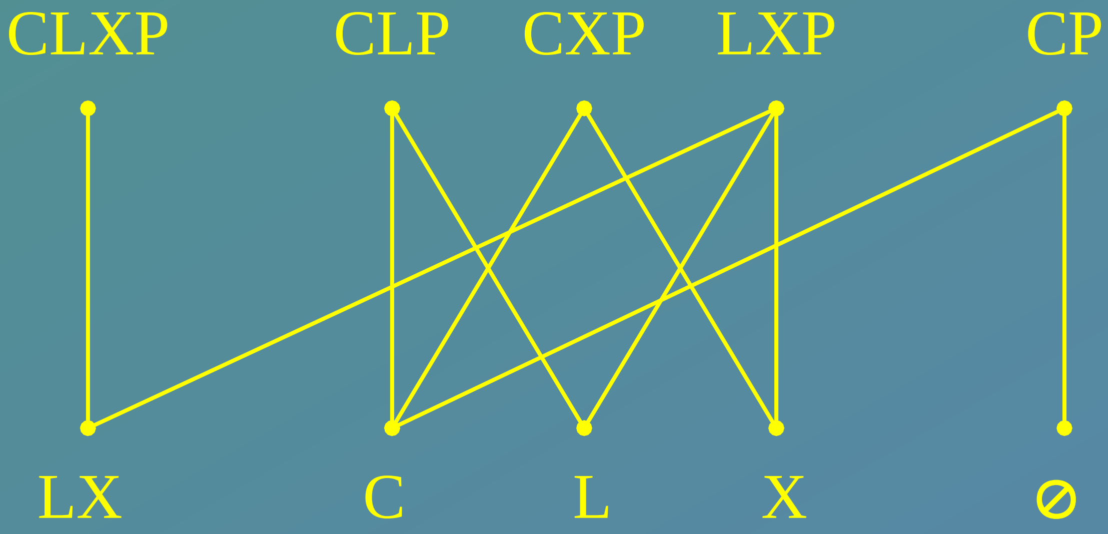
Ils se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) veut les changer de rive, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul entre eux à la fois. Pour des raisons évidentes, on ne peut laisser sans surveillance le loup (L) en compagnie de la chèvre (C) ou la chèvre en compagnie du chou (X).

Comment le passeur doit-il s'y prendre ?

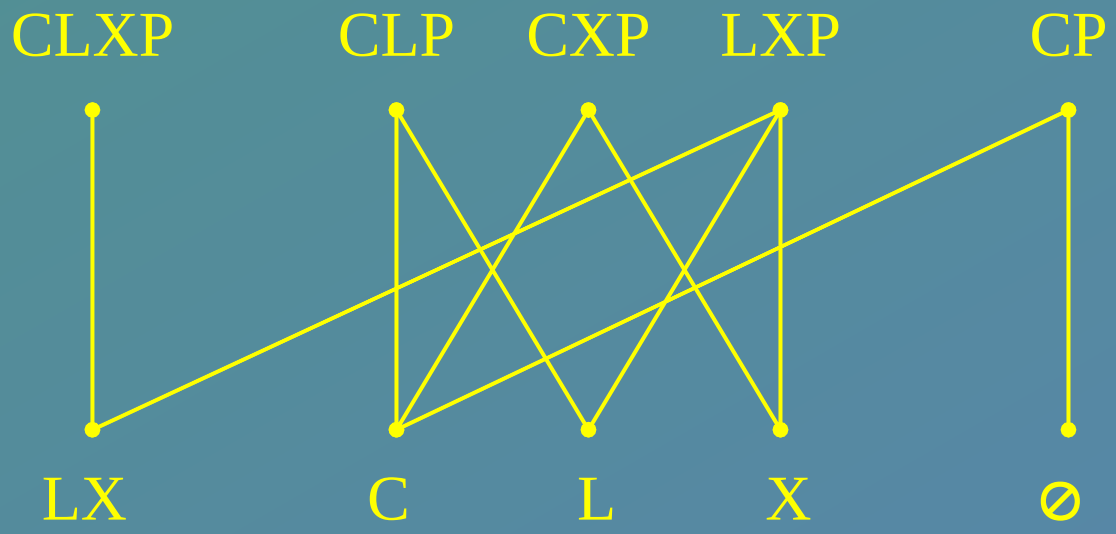
Etats admissibles de la berge initiale :

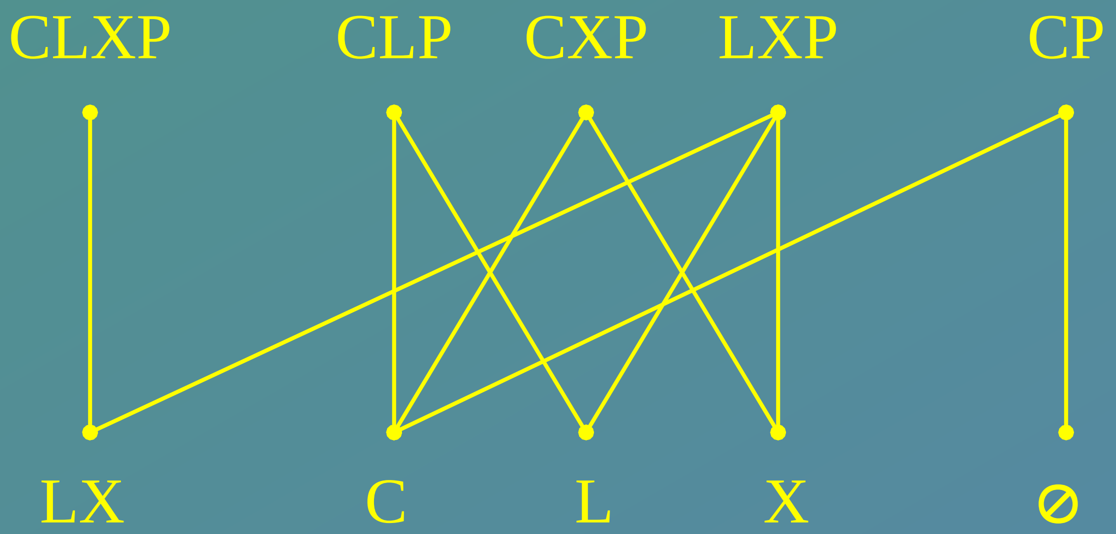
CLXP	~~CLX~~	CLP	CXP	LXP	~~CL~~	~~CX~~	CP
LX	~~P~~	C	L	X	~~XP~~	~~LP~~	∅

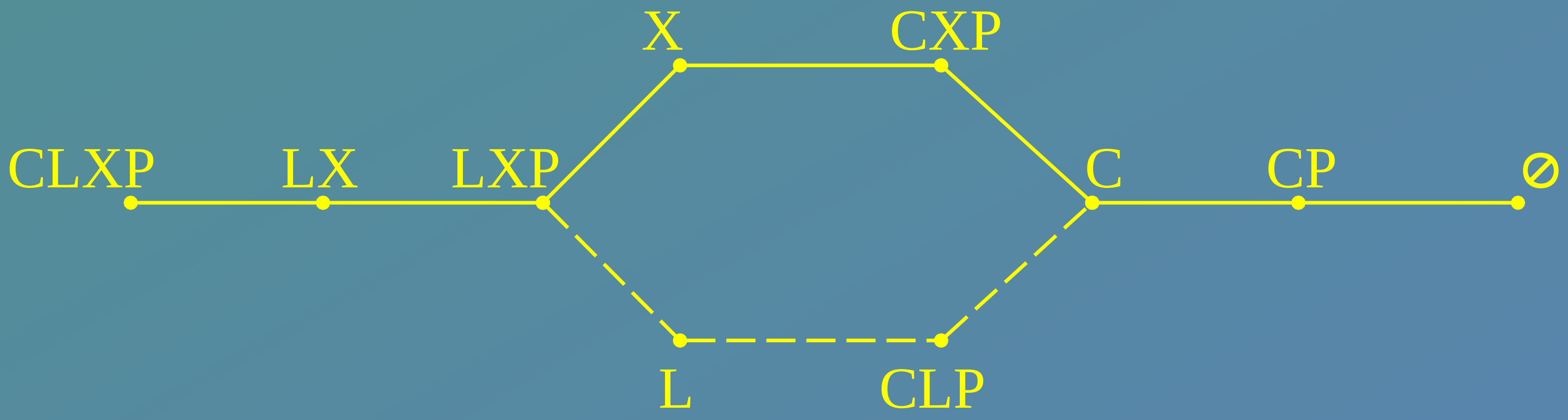
A quoi correspond une arête ?



Une arête entre i et j signifie que le passeur peut mettre la berge de l'état i à l'état j en effectuant un passage avec la barque en respectant la contrainte de taille.




CLXP
CLP
CXP
LXP
CP
LX
C
L
X
⌀


X
CXP
CLXP
LX
LXP
C
CP
⌀
L
CLP

Dans un graphe de n sommets, une ***chaîne*** *élémentaire* de longueur $n–1$ est dite ***hamiltonienne*** (elle comporte donc $n–1$ arêtes et n sommets).

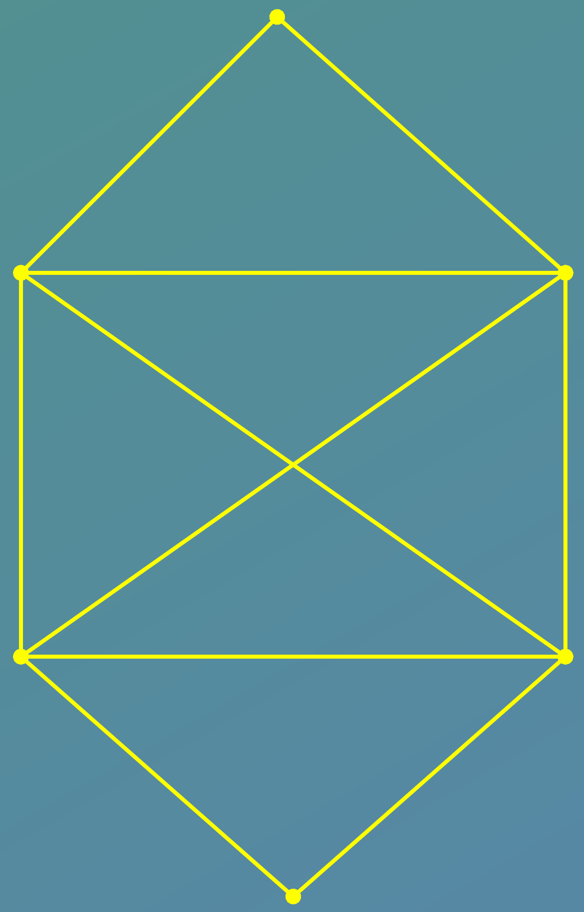
Un ***cycle hamiltonien*** est un cycle élémentaire de longueur n.

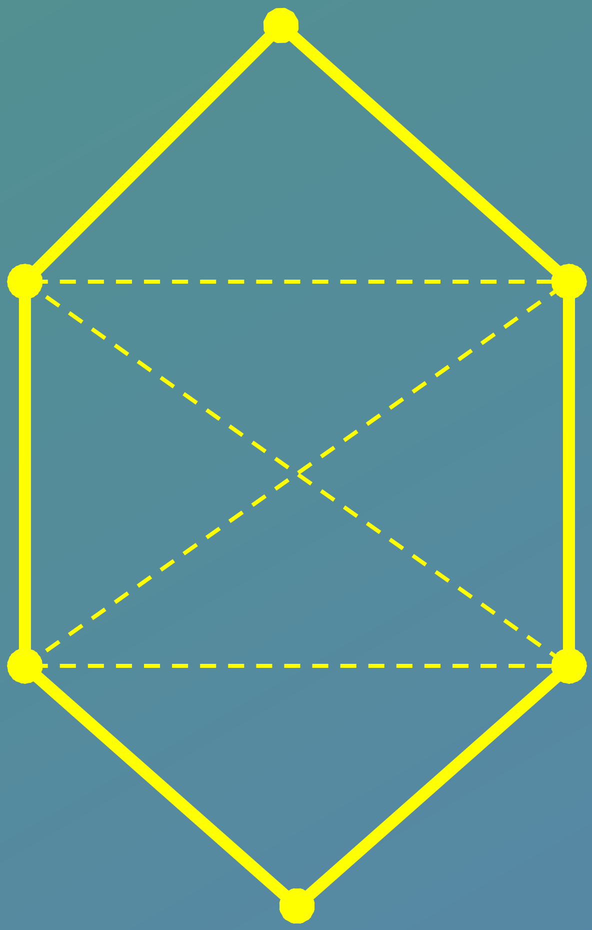
Un ***graphe*** est dit ***hamiltonien*** s’il possède un cycle hamiltonien.

On doit le tout premier résultat dans cette matière

à sir William R. Hamilton (1805-1865) - mathématicien irlandais.

Le problème de l’existence d’élément hamiltonien dans un graphe quelconque est très difficile.





cycle hamiltonien

Voici le graphe de ***Petersen***, qui

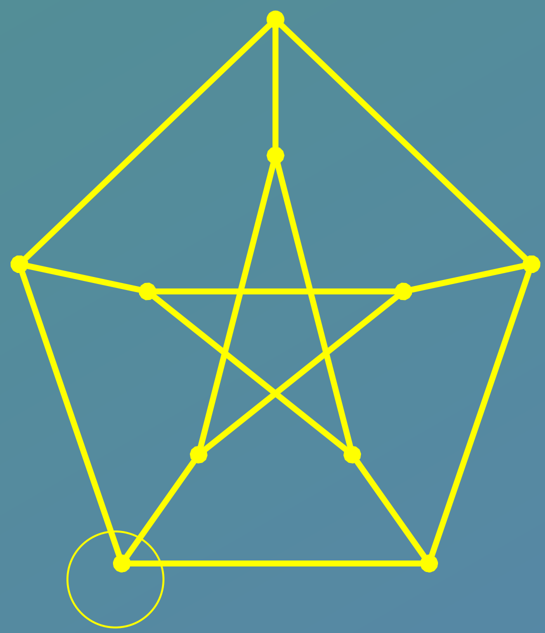
contient une chaîne hamiltonienne

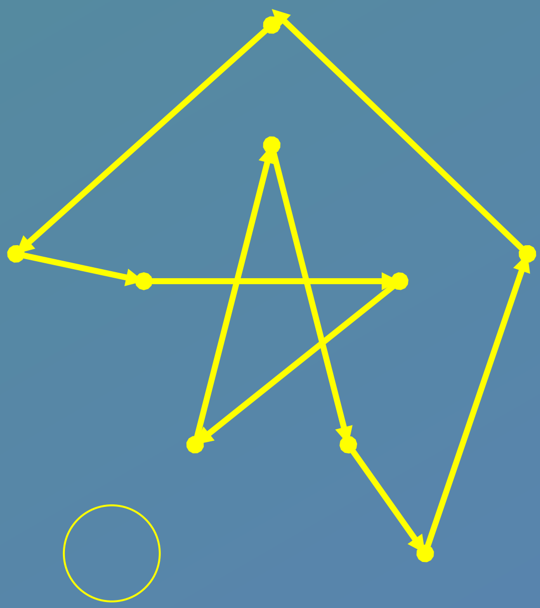
mais

ne contient pas de cycle hamiltonien

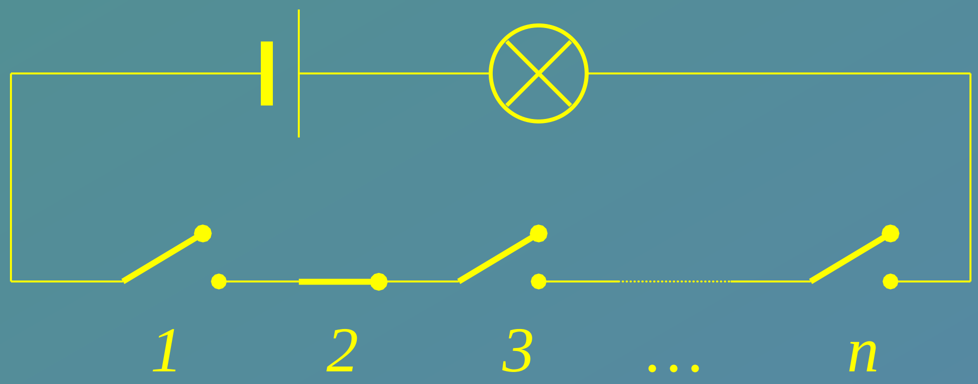
et

∀x, G\{x} contient un cycle hamiltonien.





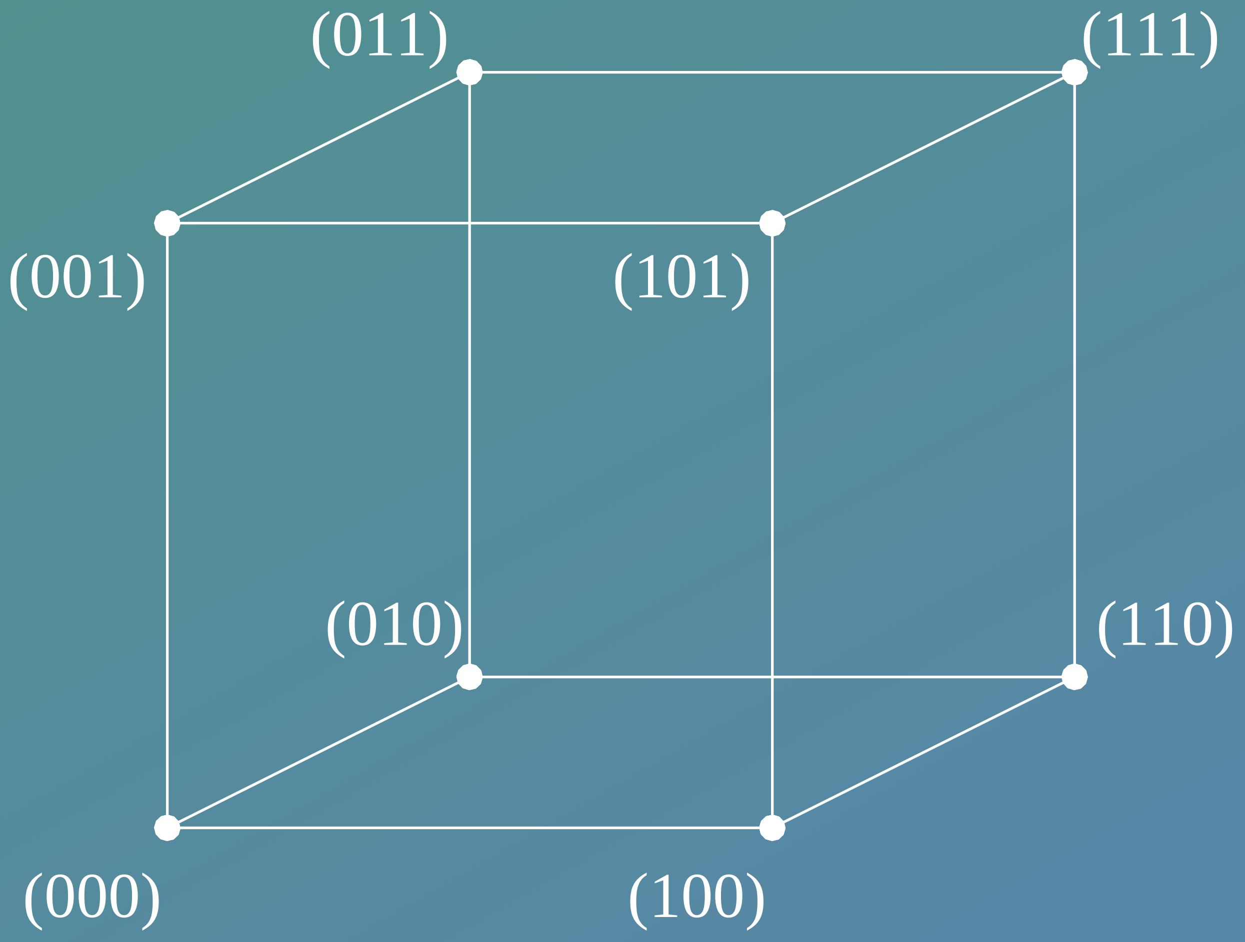
Soit le circuit électrique :



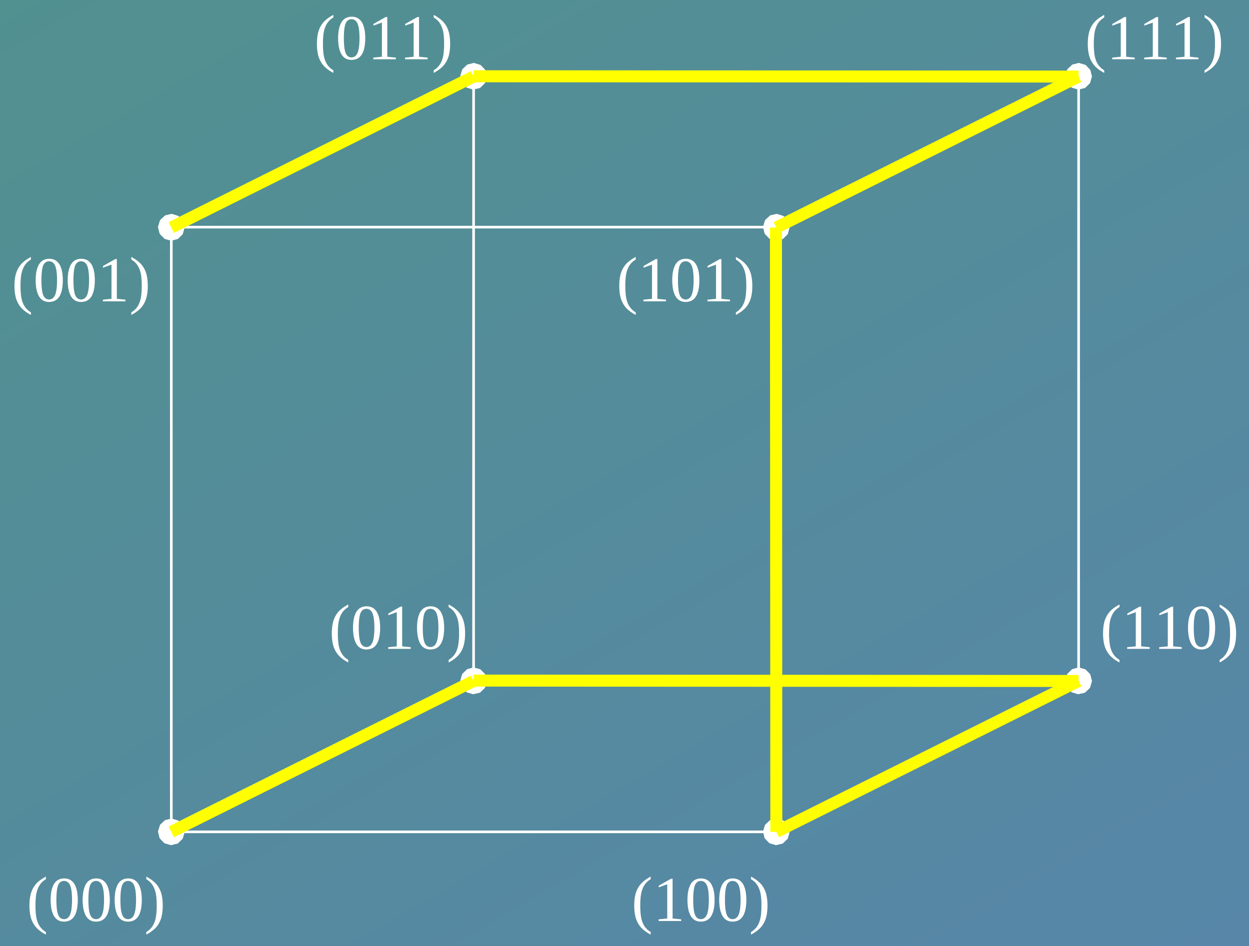
Les interrupteurs sont de type ***poussoir***. Comment peut-on procéder pour allumer la lampe en actionnant les interrupteurs un à un ? Donner une majoration du nombre d'opérations.

Codage par 2^n *mots binaires de longueur* n *:* *(0 1 0…0)*

n=3



n=3



une ***chaîne hamiltonienne*** permettra de tomber sur un état des boutons qui allumera nécessairement la lampe.

Dans un graphe avec *m* arêtes,

une ***chaîne*** simple de longueur *m* est dit ***eulérienne***.

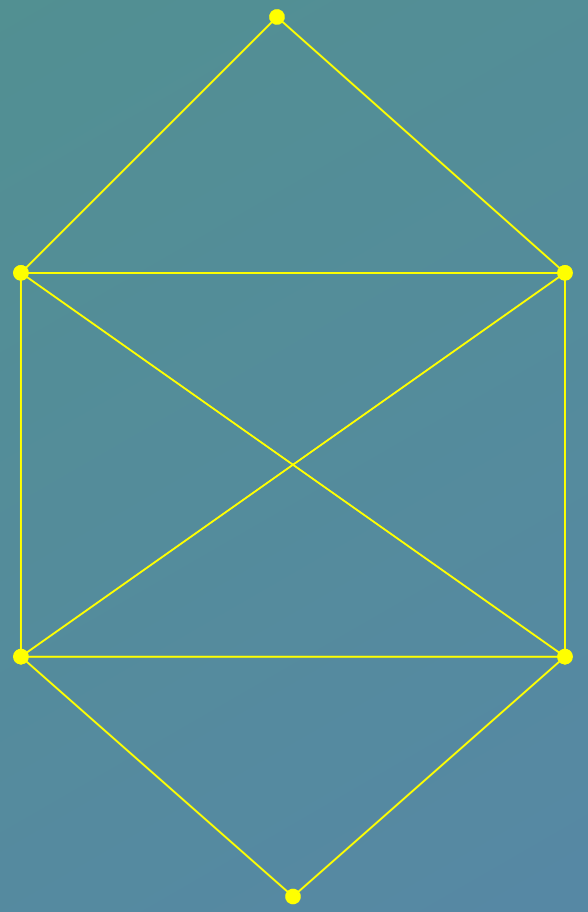
– chaque arête est utilisée une et une seule fois.

Un ***cycle eulérien*** est un cycle de longueur *m*.

Un ***graphe*** est dit ***eulérien*** s'il possède un cycle eulérien.

Ces objets ont été étudiés par

Leonhard Euler (1707-1783) – mathématicien suisse.



Trouver un cycle eulérien

Théorème:

Un graphe connexe admet un cycle eulérien

si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

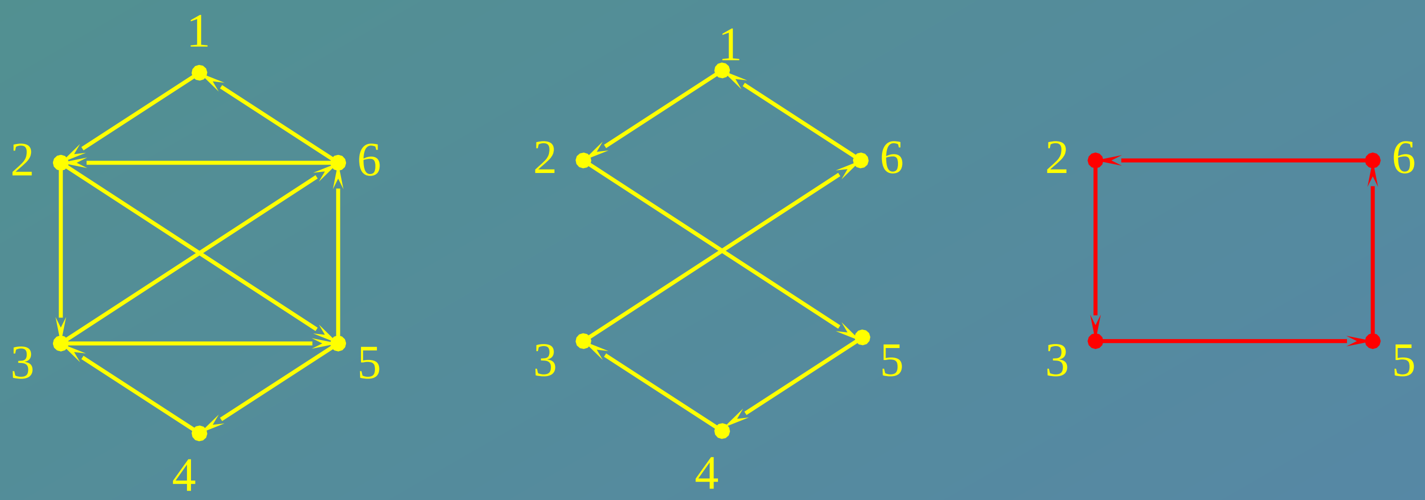
Corollaire :

Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne

si et seulement si

le nombre des sommets de degré impair est 0 ou 2.

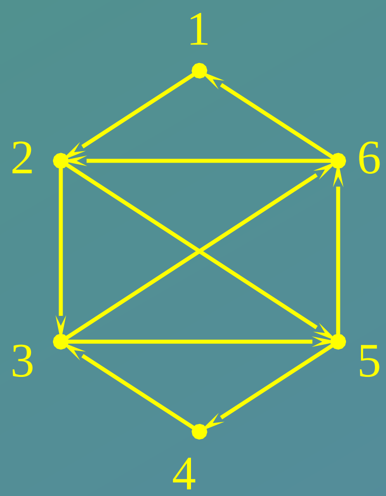
Comment construire un cycle eulérien ?

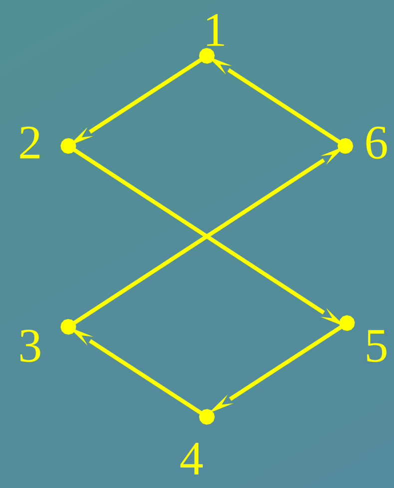


4-3-6-1-2-5-4

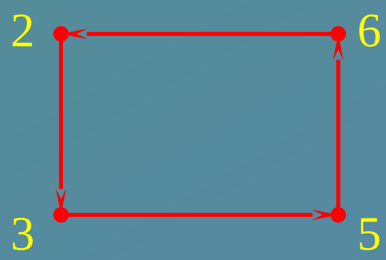
2-3-5-6-2

Supposons que, dans un premier temps, on arrive seulement à déterminer un cycle quelconque en oubliant quelques arêtes, par exemple 1254361. Le graphe partiel composé des arêtes oubliées est connexe et on retrouve son cycle eulérien 23562. En réunissant ces deux cycles en leur premier sommet commun (ici 2) on obtient le cycle eulérien du graphe : 123562 54361.

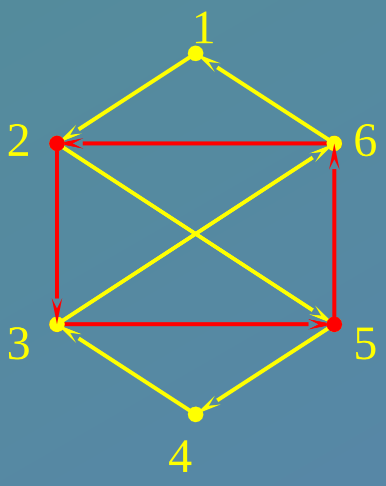




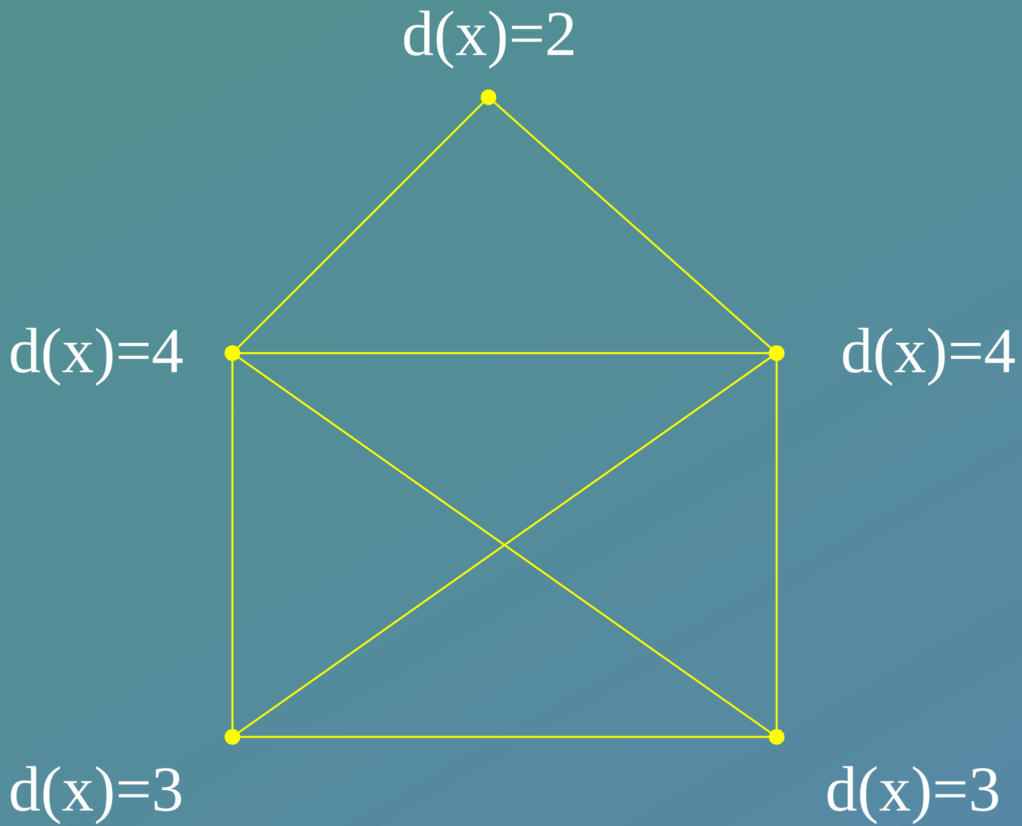
4-3-6-1-2-5-4

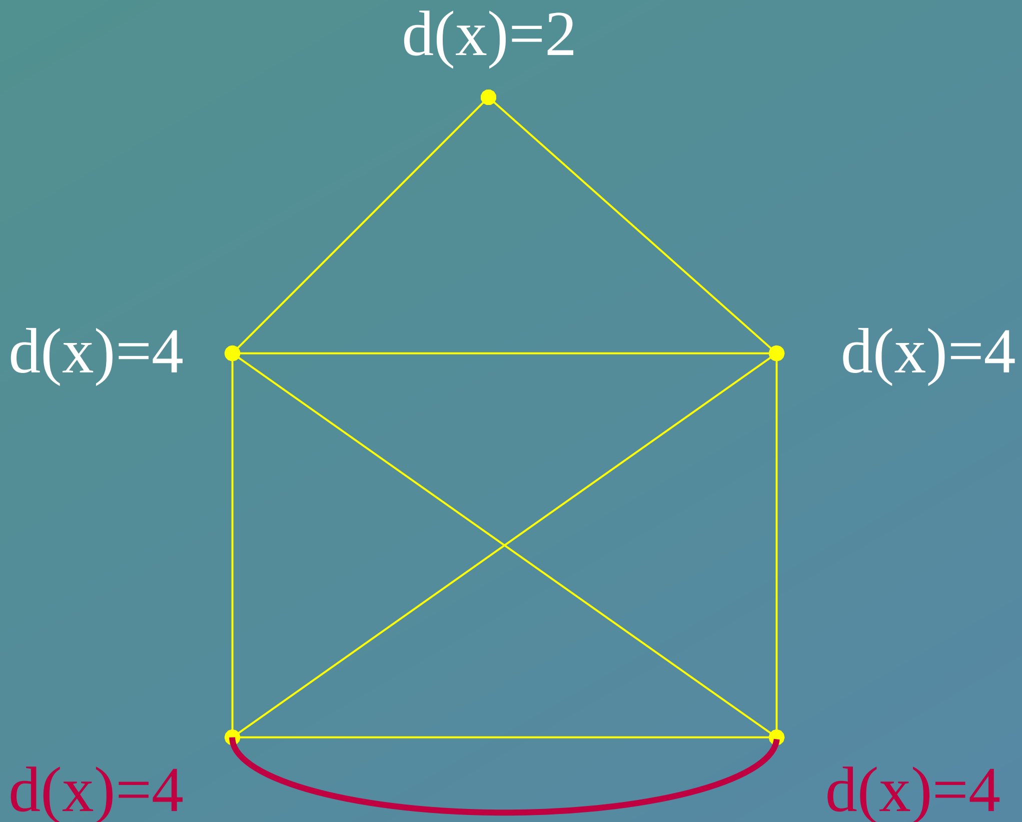


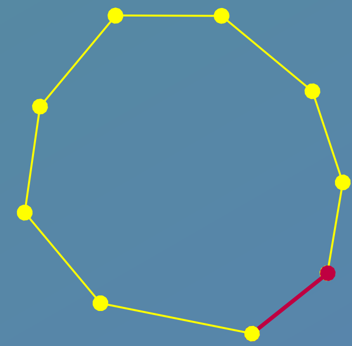
2-3-5-6-2



4-3-5-6-2-3-6-1-2-5-4

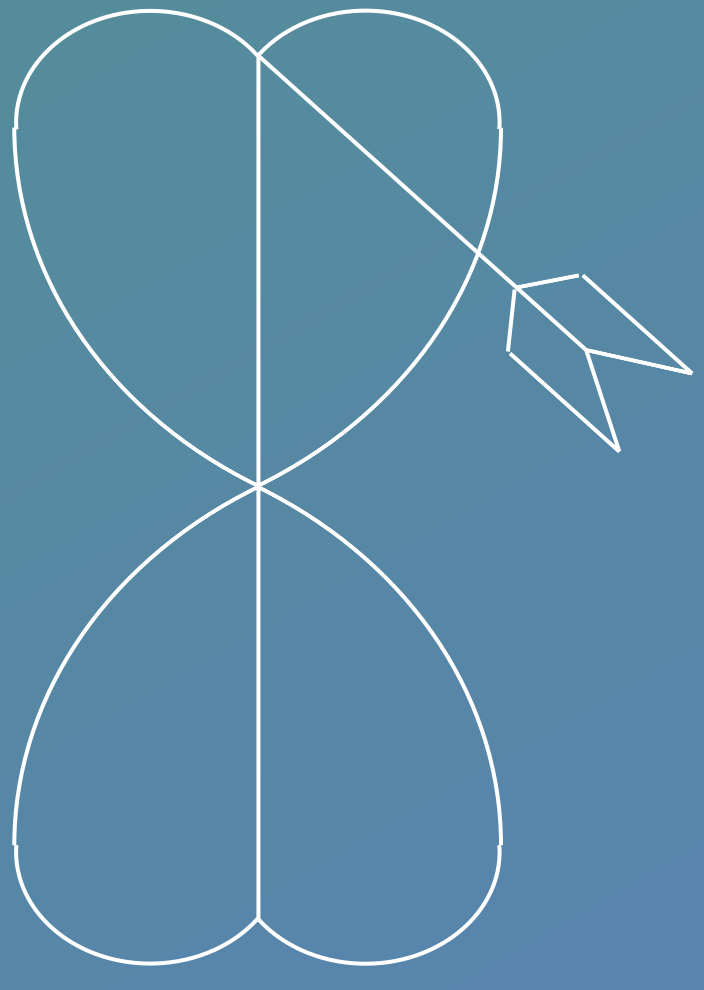

d(x)=2
d(x)=4
d(x)=4
d(x)=3
d(x)=3



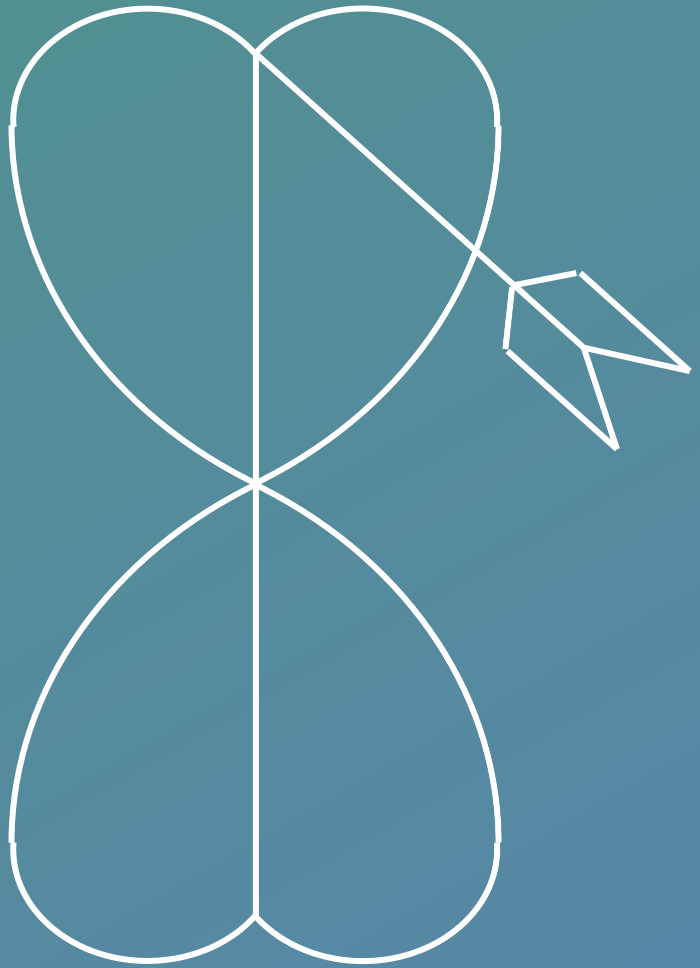


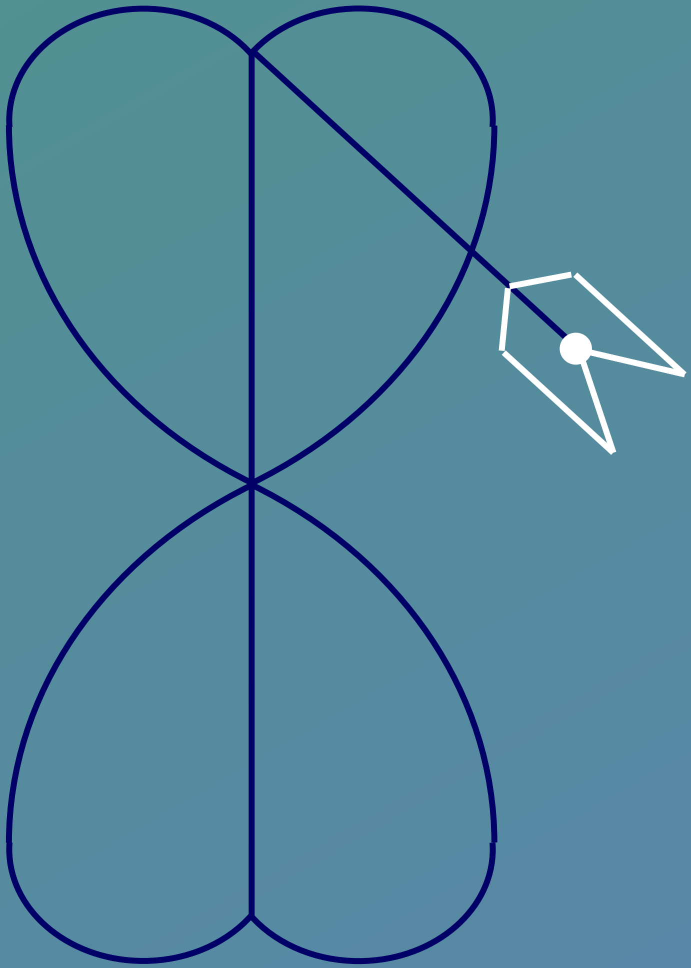
une chaîne eulérienne

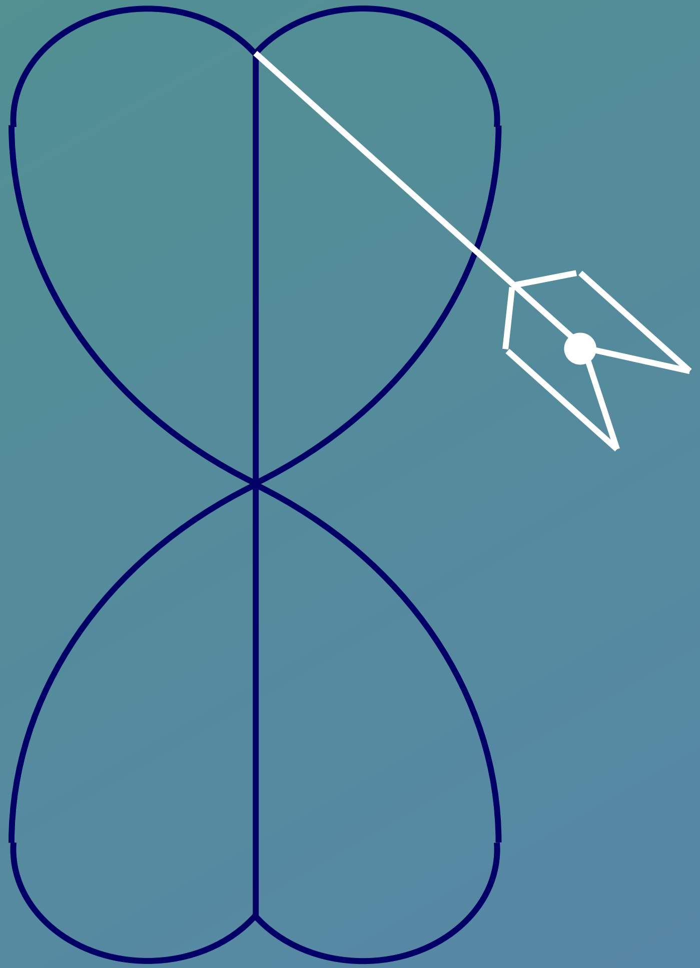
Pouvez vous réaliser ce dessin en continu en passant une seule fois sur chacun de tous les traits ?

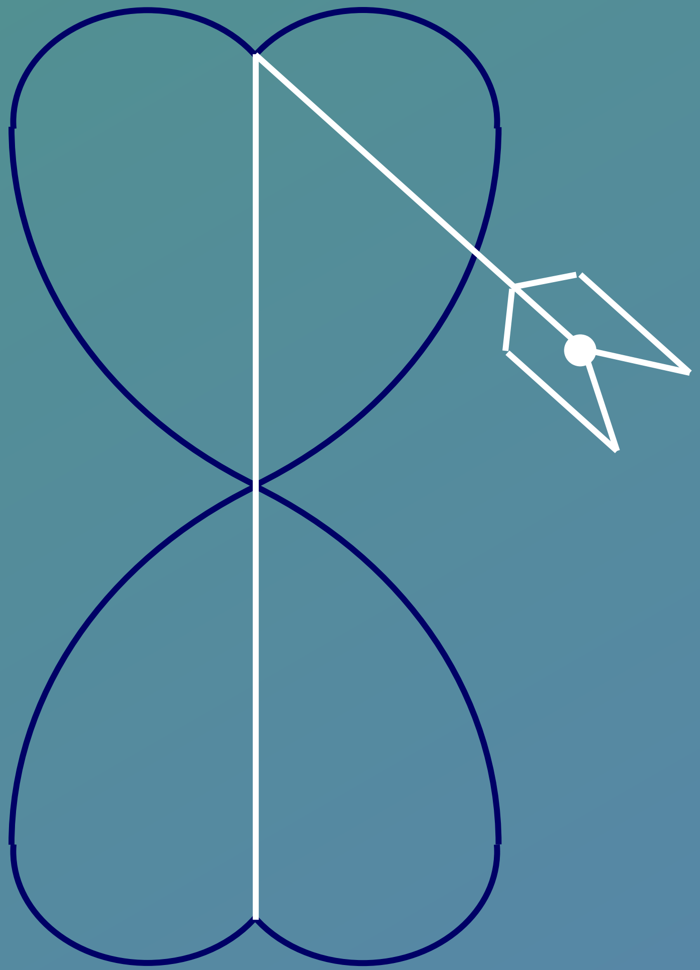


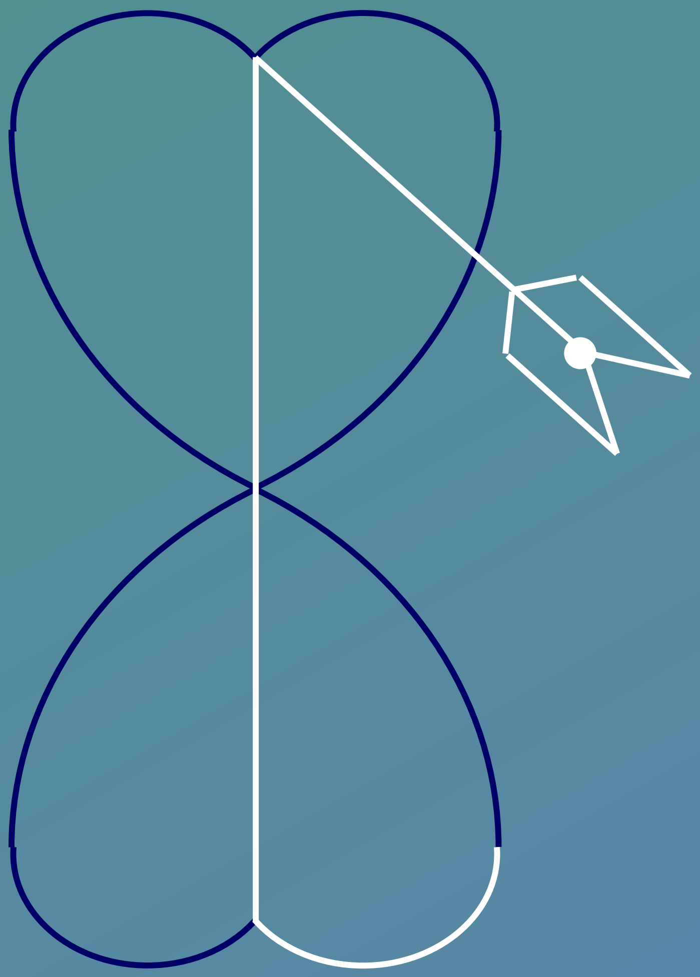
Trouver une *chaîne eulérienne* dans le graphe ci-dessous:

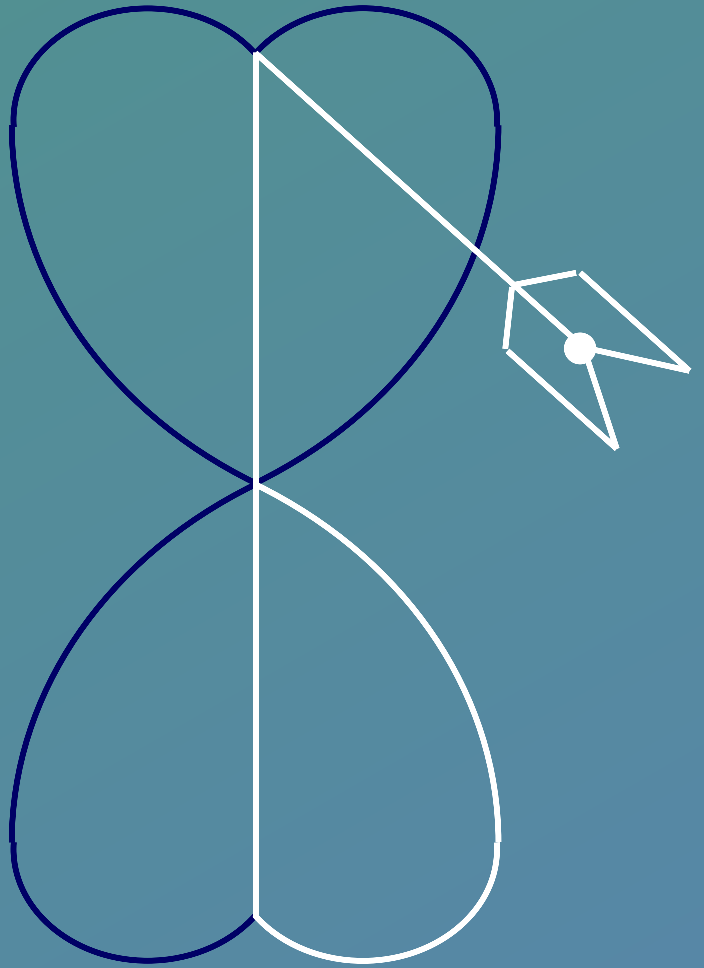


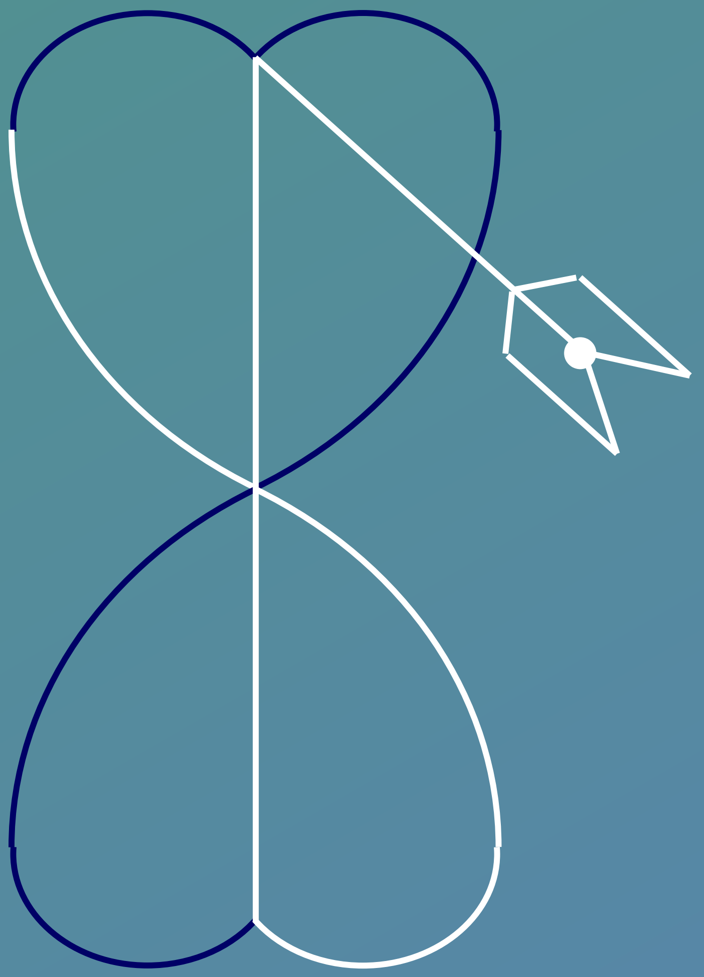


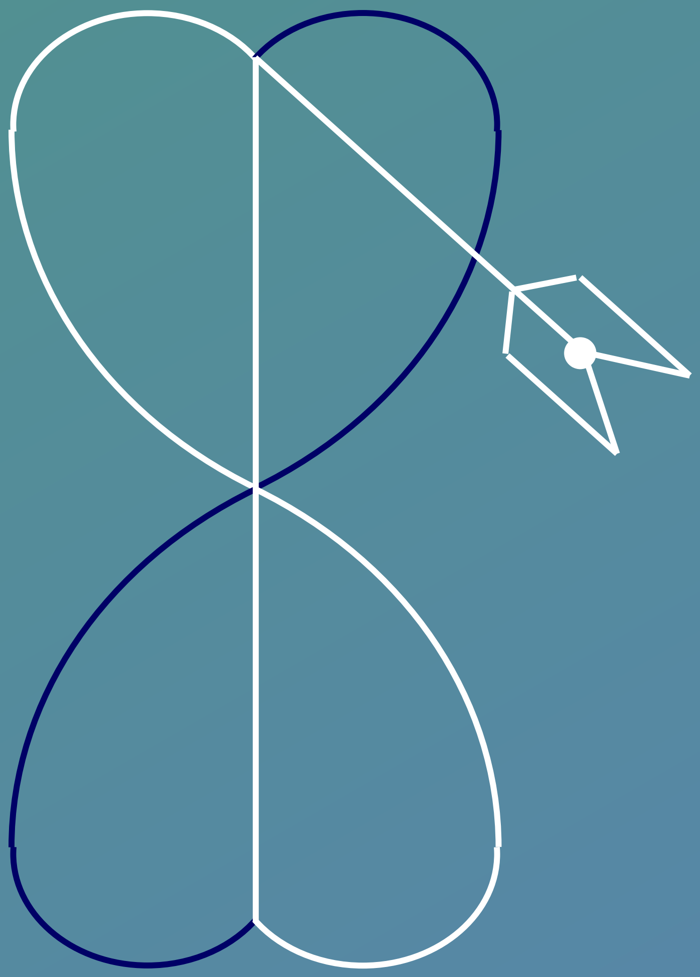


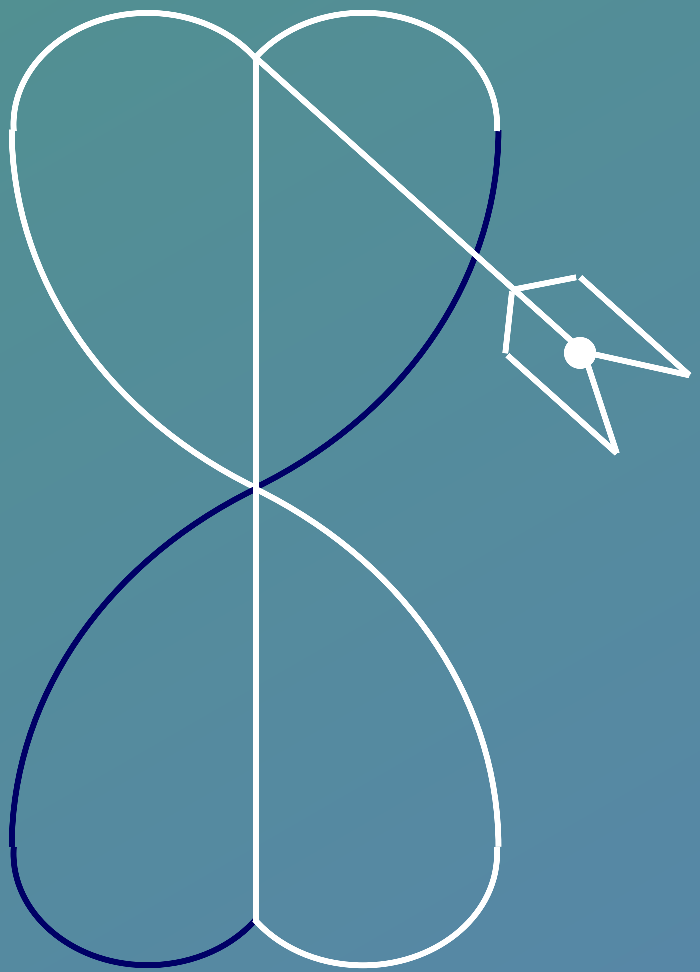


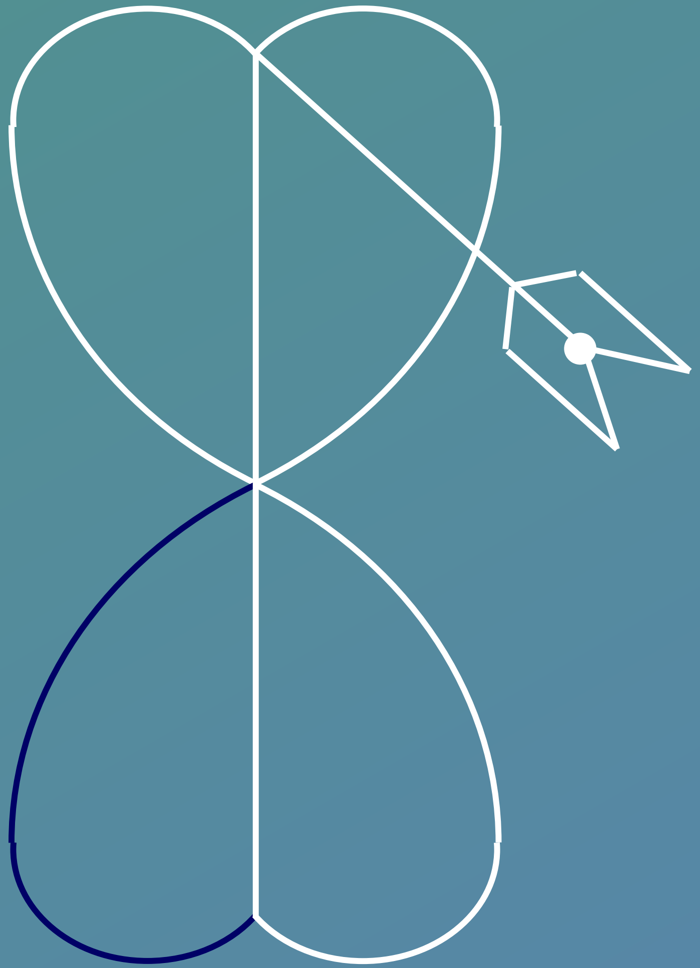


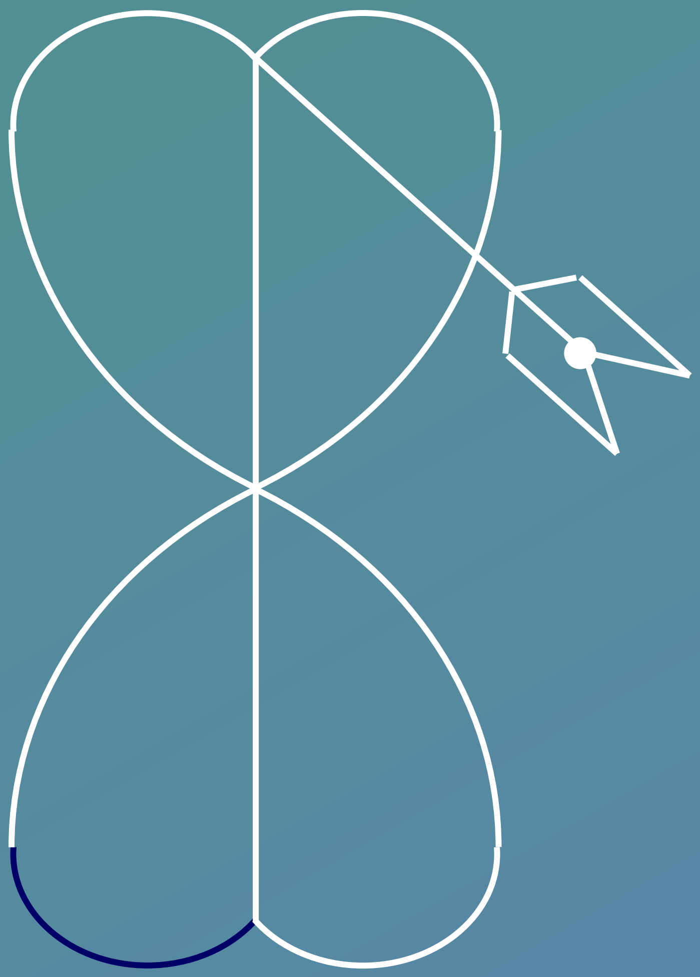


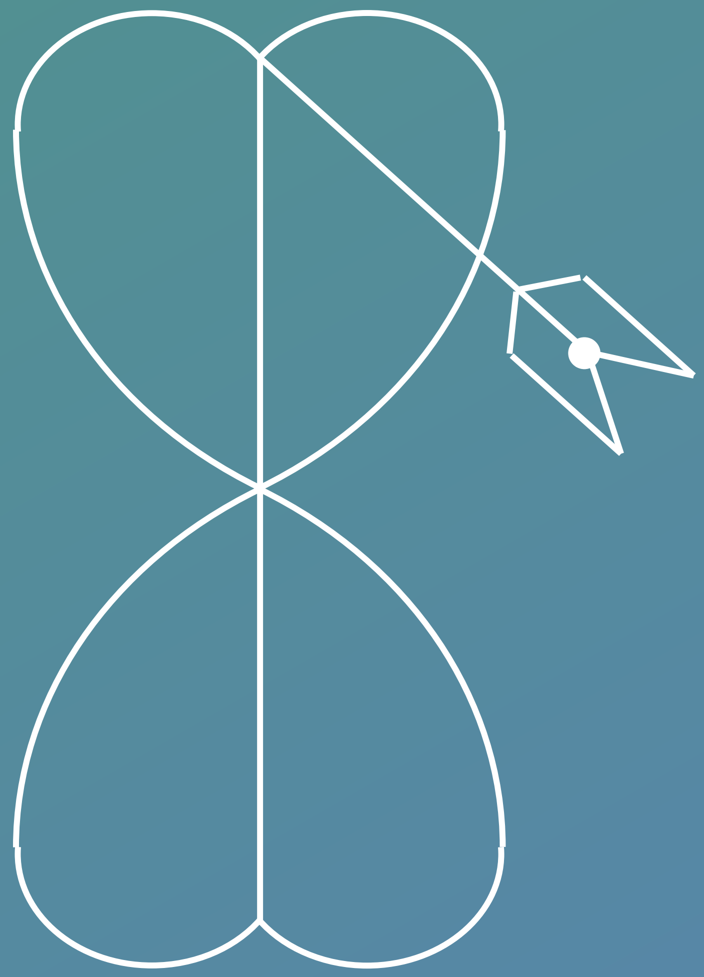






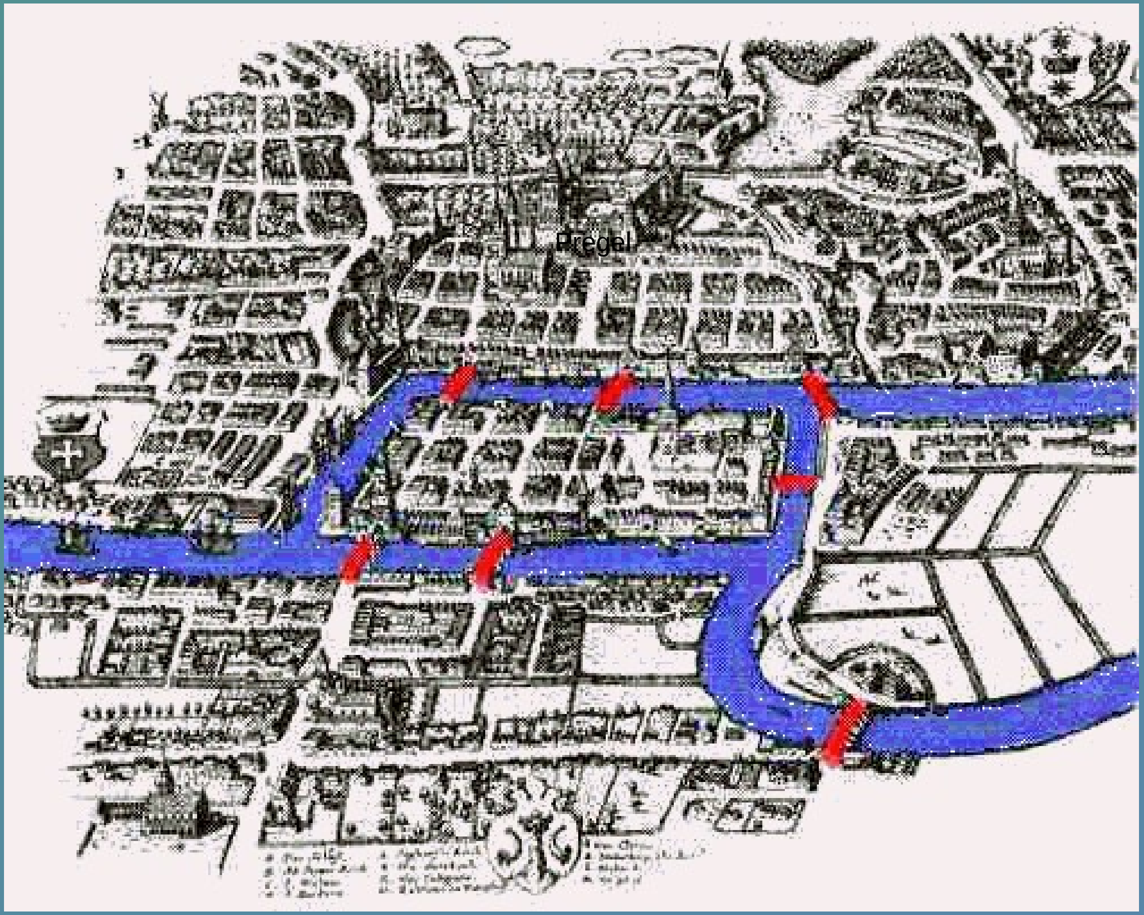




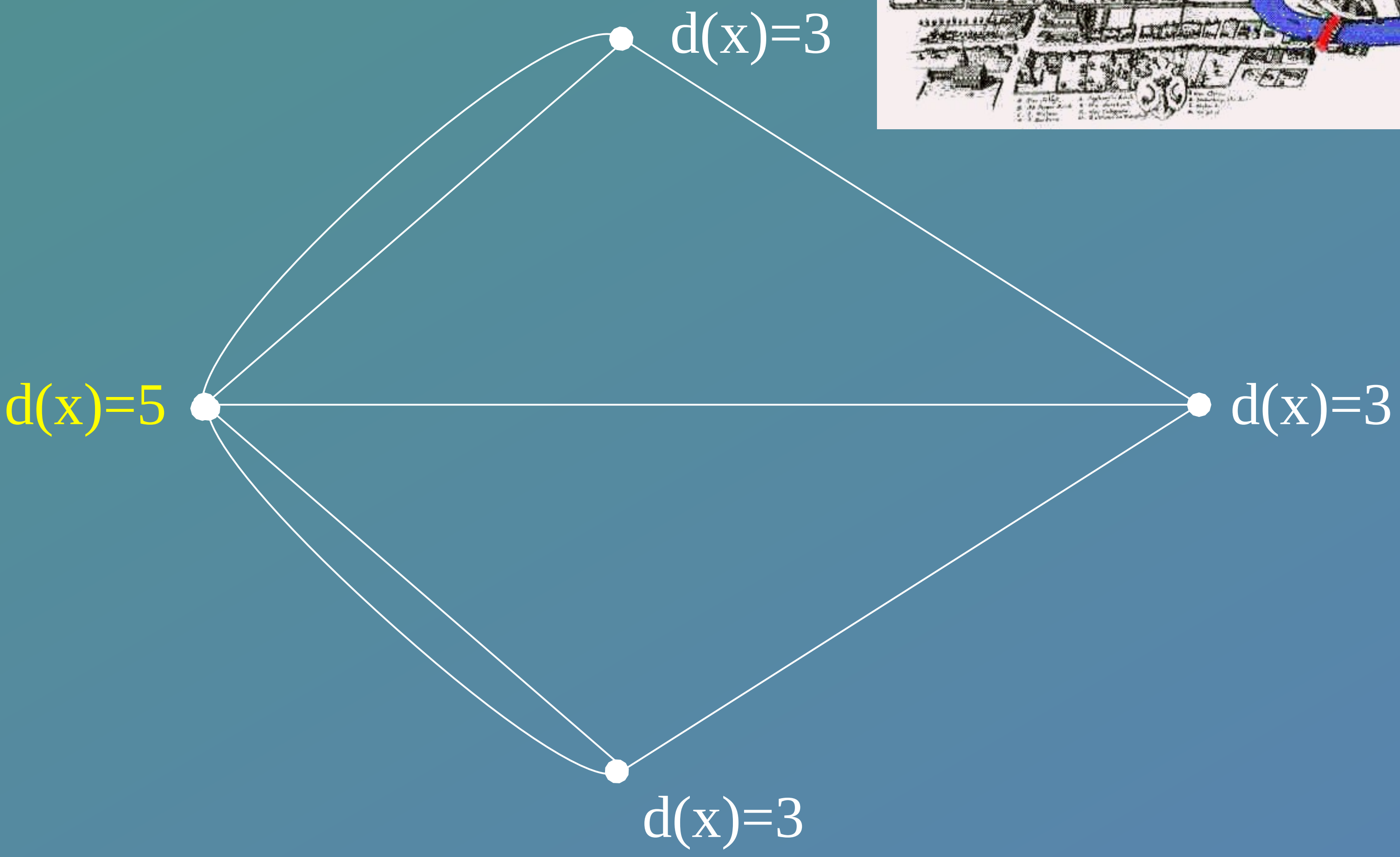


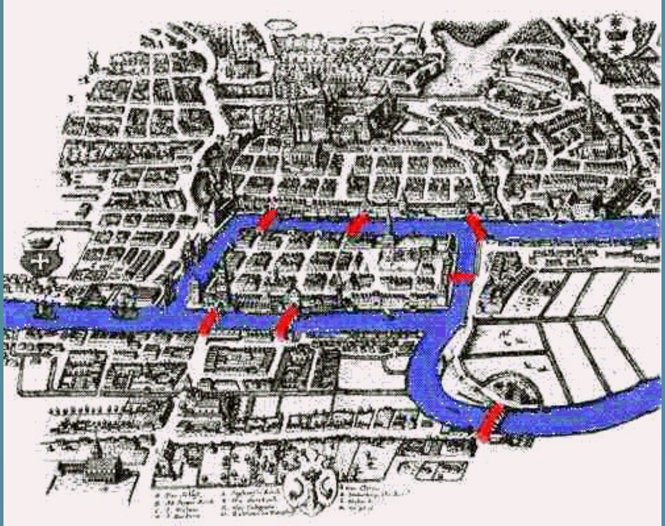

Königsberg i. Pr.
Schloßteichbrücke

Fleuve : Pregel

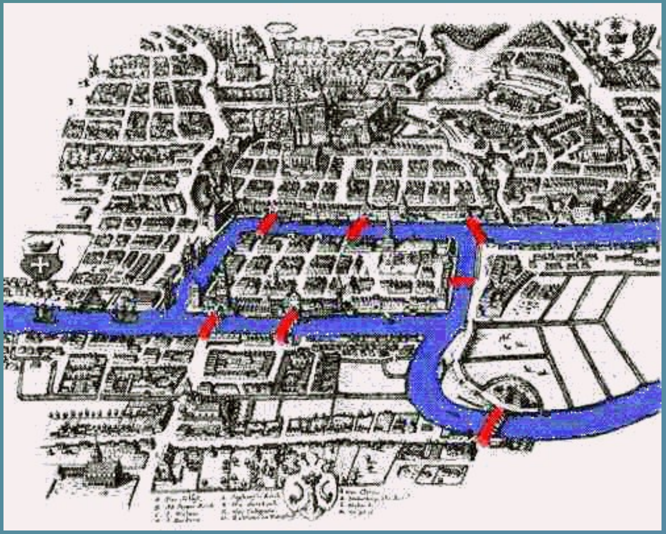


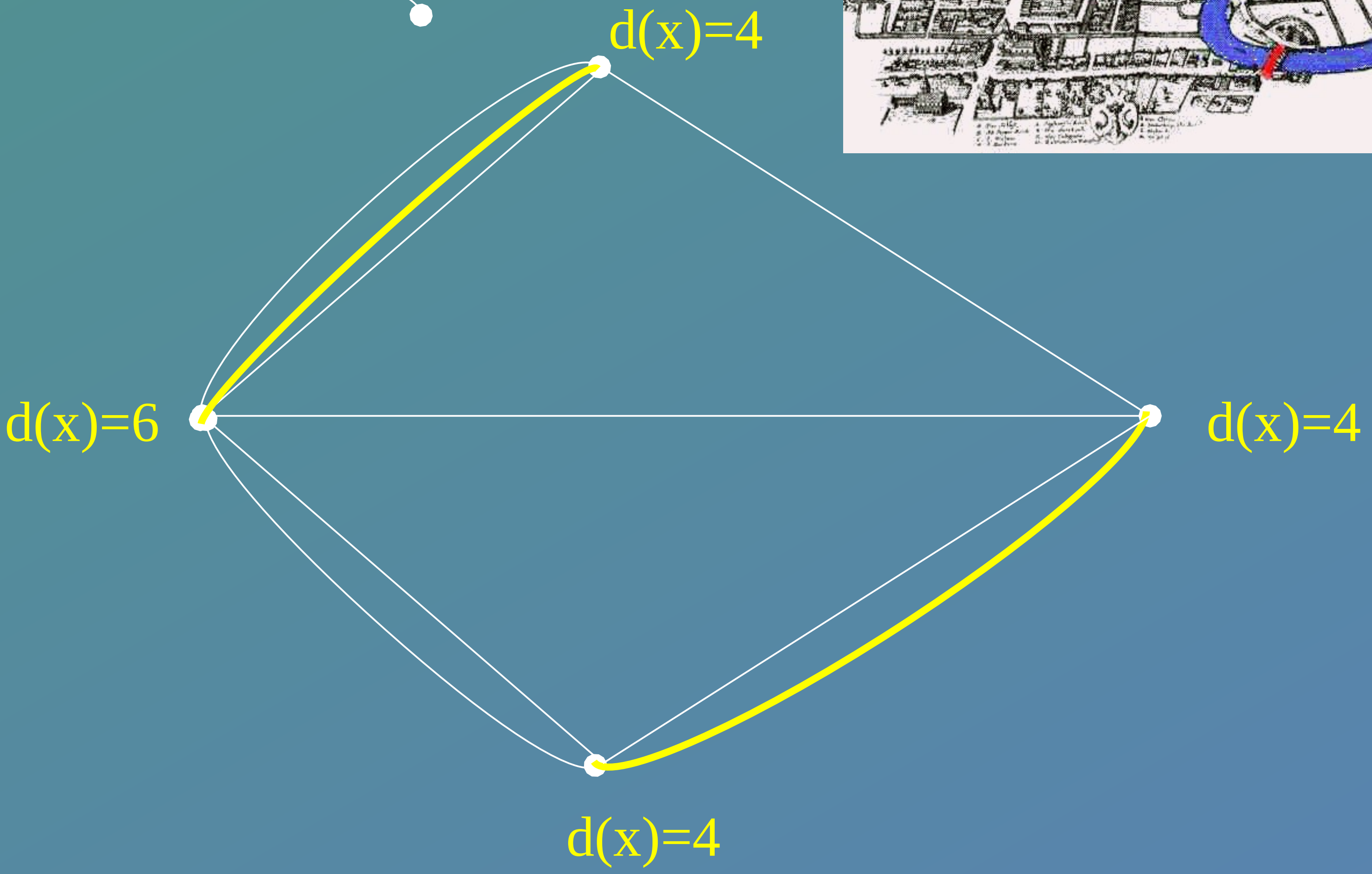
un pont = une arête





un pont = une arête

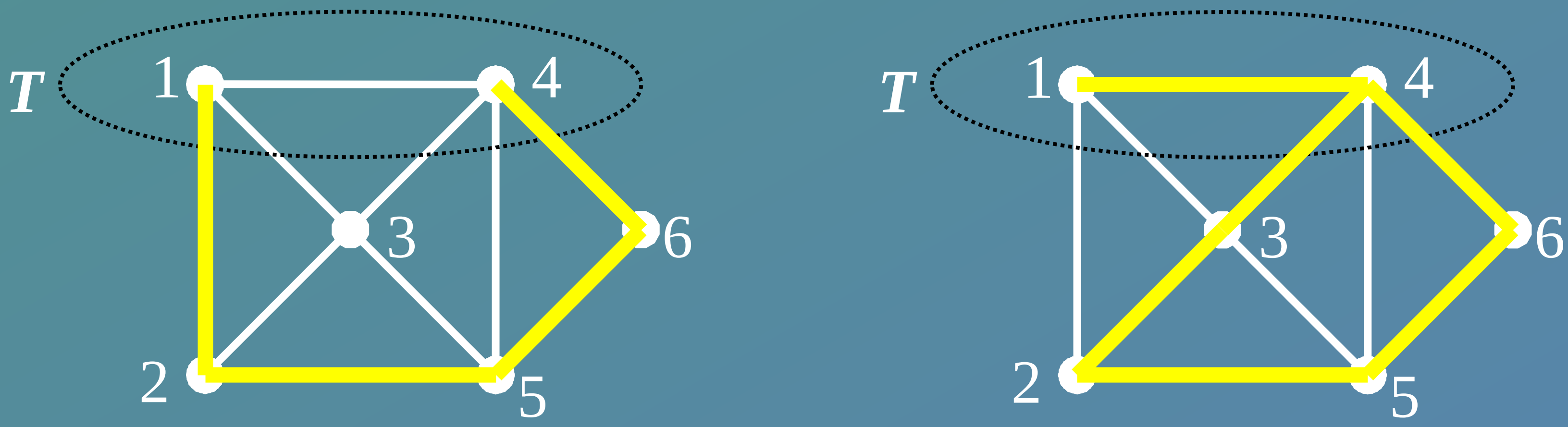


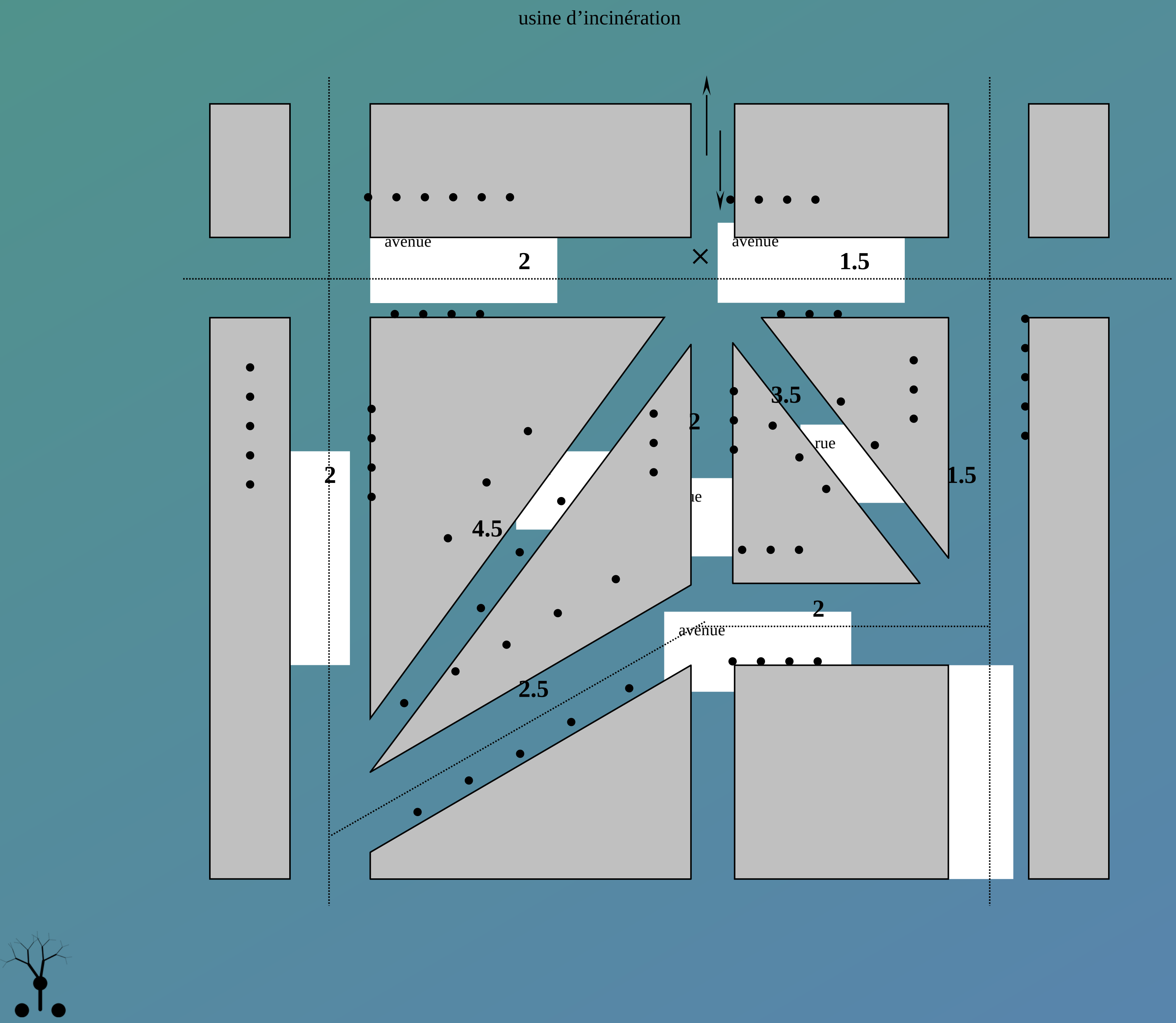


Soit $T \subset X$ un sous-ensemble de sommets du graphe $G=(X, E)$.

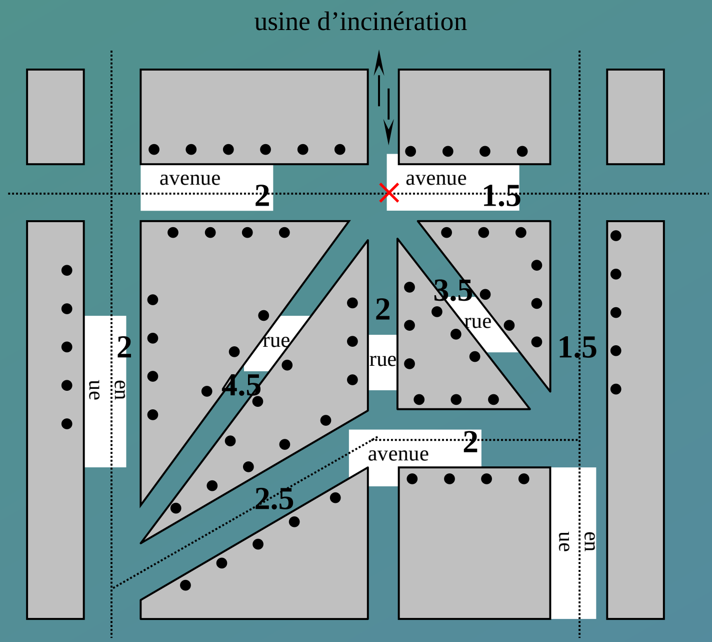
On appelle ***T–joint*** le sous-ensemble d'arêtes $J \subset E$ tel que T est exactement l'ensemble des sommets de degré impair du graphe partiel $G'=(X, J)$.

Ci-dessous nous illustrons deux T–joints pour $T=\{1, 4\}$.





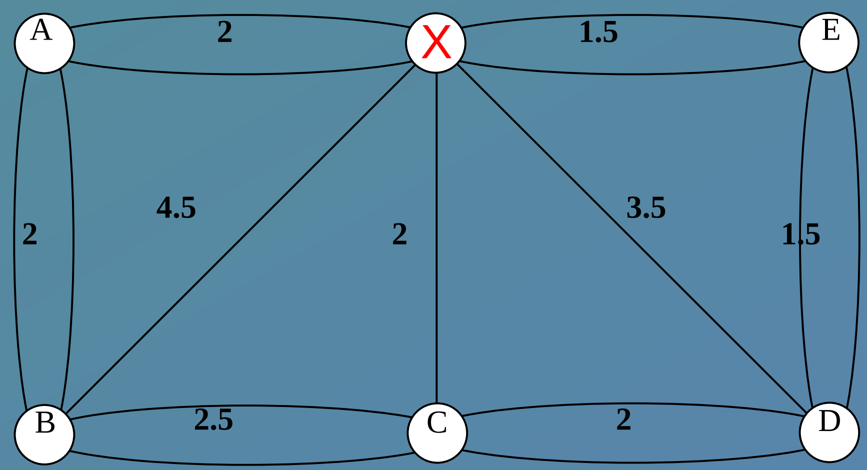
usine d'incinération
avenue
2
avenue
1.5
2
4.5
2
3.5
rue
1.5
ue
2.5
2
avenue

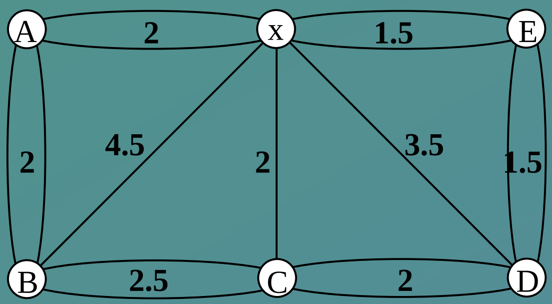


Le temps total du parcours =

temps de ramassage (34 min.) +

le temps nécessaire pour traverser un circuit qui commence et finit en X.





le temps total pour traverser une seule
fois chaque segment = 33 min.
\+ ramassage 34 min.

total = 67 min.

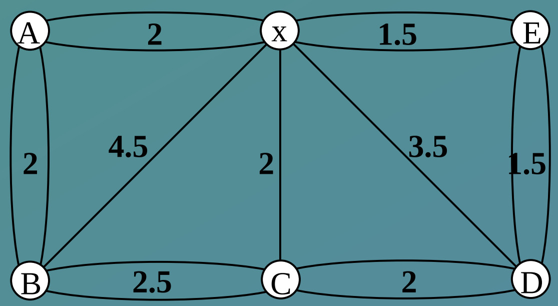
Le ***cycle eulérien*** (qui traverse chaque arête une seule fois) n'existe pas car le graphe possède 4 sommets de degrés impairs (d(x)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5).

... moins contraint : Problème du postier chinois :

Trouver une ***chaîne fermé de longueur totale minimale*** qui traverse chaque arête au moins une fois.

Problème du postier chinois :

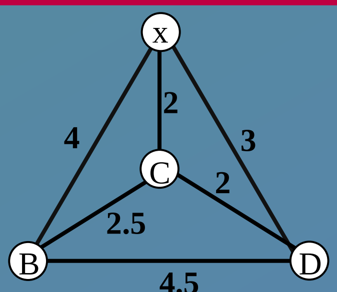
Trouver une ***chaîne fermée de longueur totale minimale*** qui traverse chaque arête au moins une fois.



$\Rightarrow$

Il existe 4 sommets de degrés impairs
d(X)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5

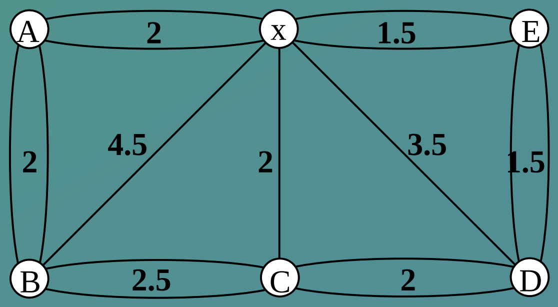
$\Downarrow$



Graphe simple (invariance parité des degrés)

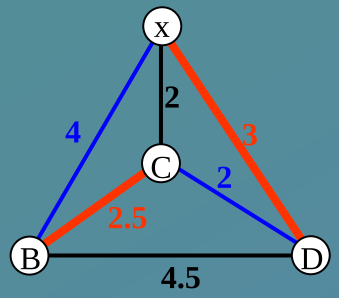
On rajoute des arêtes sur des sommets de degré impair de sorte que le théorème d'Euler soit applicable.

Pb: Où ajouter des arêtes ?



il existe 4 sommets de degrés impairs
d(X)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5

Définition : *Couplage = Ensemble d'arêtes non adjacentes*

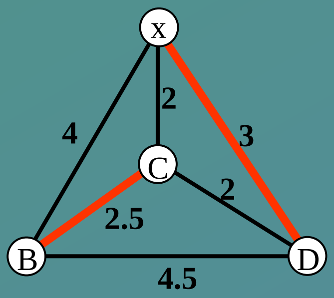


couplage {XC; BD} de poids 6,5

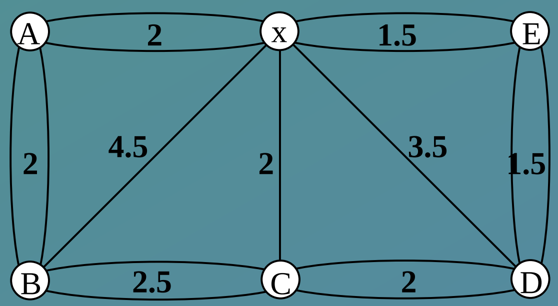
couplage {XB; CD} de poids 6

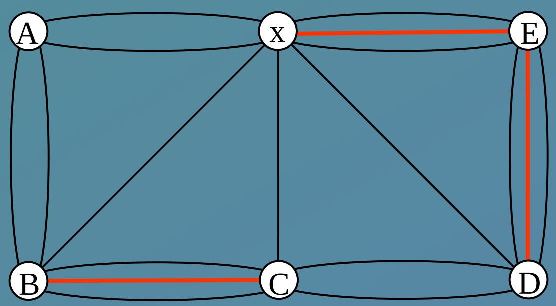
couplage {XD; BC} de poids 5,5

le couplage de poids minimum



le couplage de poids minimum {XD; BC}





X ⇒ A ⇒ B ⇒ C ⇒ D ⇒ E ⇒ X ⇒ B ⇒ C ⇒ X ⇒ E ⇒ D ⇒ C ⇒ B ⇒ A ⇒ X ⇒ D ⇒ E ⇒ X