Optimisation linéaire – Méthode de l'Ellipsoïde

OMI-2 — *1 feuille A4 recto/verso manuscrite par élève* — EPF 2A

Pas de machines – 1h30

1 Problème d'optimisation des ressources

Dans le tableau suivant on donne la quantité de matière parmi des ressources R_1, R_2, R_3 nécessaires pour produire un produit (I) et un produit (II). La dernière colonne donne les prix de vente des produits (I) et (II) et la dernière ligne contient les stocks pour chaque ressource R_1, R_2, R_3.

	R_1	R_2	R_3	Prix de vente
Produit (I)	1	0	2	7
Produit (II)	1	1	3	9
Stock	8	4	19	

On note respectivement par x, y (non nécessairement entiers) la quantité de produits (I) et de produits (II).
Le problème est alors de trouver la valeur du couple optimal $(x^\star, y^\star)$ de sorte que les recettes soient maximales en prenant en compte le stock disponible.
Vous trouverez en section 4.1 un problème simplifié où l'on considère qu'un seul produit.

1. Écrire la fonction $C(x, y)$ qui donne les recettes dégagées par la vente de x produits (I) et y produits (II).
   Justifier que $C : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto C(x,y) \end{array} \right.$ est une application linéaire.

2. Écrire les inégalités entre x, y qui correspondent aux contraintes sur les ressources disponibles.
   Mettre ce système d'inégalités sous la forme $A\,v \leqslant b$ où A est une matrice avec 2 colonnes à définir, et b est un vecteur colonne à définir et $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

2 Résolution géométrique et algorithmique

Mathématiquement, notre problème s'écrit

$$\begin{array}{lll} \text{maximiser} & C(v) & \leftarrow \text{ recettes} \\ \text{sous les contraintes} & A\,v \leqslant b, & \leftarrow \text{ contraintes sur les stocks} \\ & v \in \mathbb{R}^2_+, & \leftarrow \text{ variable du problème} \end{array} \tag{1}$$

où C, A, b sont fixés et ont été définis dans les questions 1 et 2. Le vecteur $v^\star$ est solution optimale du problème (1) si

- $A\,v^\star \leqslant b$,
- $\forall v \in \mathbb{R}^2,\ A\,v \leqslant b \Rightarrow C(v) \leqslant C(v^\star)$.

Autrement dit, si $v^\star = \begin{pmatrix} x^\star \\ y^\star \end{pmatrix}$ est la solution optimale alors elle vérifie les contraintes sur le stock et les recettes maximales seront obtenues en vendant $x^\star$ produits (I) et $y^\star$ produits (II).

2.1 Ensemble admissible

3. En utilisant la section 4.2, représenter graphiquement le polyèdre $\mathcal{P} = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid Av \leqslant b\}$.

Cet ensemble $\mathcal{P}$ correspond à l'**ensemble admissible** pour le problème (1), i.e. un point $v \in \mathbb{R}^2$ qui n'est pas dans $\mathcal{P}$ ne peut pas être solution optimale car v ne satisfait pas la contrainte $A\,v \leqslant b$.

2.2 Intuition géométrique

Lemme 1. *La solution optimale $v^\star$ du problème (1) est en fait un des sommets du polyèdre $\mathcal{P}$.*

4. Justifier le lemme 1. Pour cela, vous pouvez réfléchir sur les points suivant :

- Dans $\mathbb{R}^3$, quelle est la nature de l'objet géométrique d'équation cartésienne $z = C(x, y)$ où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- En quel point (x, y) de $\mathcal{P}$ la valeur de $z = C(x, y)$ est-elle maximale ? (on pourra faire un croquis).

5. Quelle est la solution optimale $v^\star$ du problème (1).

2.3 Méthode de l'ellipsoïde

Le problème (1) est de dimension 2 (l'usine fabrique seulement deux produits), ce qui permet de trouver la solution graphiquement comme proposé en section 2.2.
Qu'en est-il si on utilise un (grand) nombre $r \in \mathbb{N}$ de ressources $R_1, \dots, R_r$ et un (grand) nombre $m \in \mathbb{N}$ de produits à fabriquer ? Alors, la méthode intuitive de la section 2.2 s'avère généralement laborieuse et nous explorons dans cette section une méthode systématique (algorithmique) pour résoudre un tel problème : la méthode de l'ellipsoïde. Bien que l'on connaisse maintenant la solution optimale $v^\star$, on va illustrer cette méthode sur le problème (1).

6. En utilisant la section 4.3, représenter dans un repère orthonormé du plan l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\mathrm{Id}_2, (0, 0))$ et l'ellipse délimitant l'ellipsoïde $\mathcal{E}(\mathrm{Id}_2, (2, 0))$ (Id_2 dénote la matrice identité de taille 2×2).

Dans la suite, $M = (m_{ij})_{ij}$ est une matrice 2×2 avec $m_{11} > 0$, $m_{22} > 0$ et $m_{12} = 0$ et $\omega \in \mathbb{R}^2$.

7. Montrer que l'équation cartésienne de l'ellipse délimitant l'ellipsoïde $\mathcal{E}(M, 0_{\mathbb{R}^2})$ est :
$$x^2/m_{11} + y^2/m_{22} = 1$$
où $x \in \left[-\sqrt{m_{11}}, \sqrt{m_{11}}\right]$ et $y \in \left[-\sqrt{m_{22}}, \sqrt{m_{22}}\right]$.

8. En déduire par un calcul d'intégrale que l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, 0_{\mathbb{R}^2}))$ est donnée par la formule :
$$\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, 0_{\mathbb{R}^2})) = 2\sqrt{m_{11}} \int_{-\sqrt{m_{22}}}^{\sqrt{m_{22}}} \sqrt{1 - y^2/m_{22}}\, \mathrm{d}y$$
et qu'un changement de variables approprié permet d'obtenir
$$\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, 0_{\mathbb{R}^2})) = \pi \sqrt{m_{11} m_{22}}.$$

Remarque 2. *Si $m_{12} \neq 0$, les mêmes calculs conduisent à $\mathcal{A}(\mathcal{E}(M, 0_{\mathbb{R}^2})) = \pi \sqrt{m_{11} m_{22} - m_{12}^2}$.*

La méthode de l'ellipsoïde consiste à construire une suite d'ellipsoïdes $(\mathcal{E}(M_n, \omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'aire intérieure décroît et converge vers le singleton $\{v^\star\}$ (qui est la solution optimale du problème (1)).
Pour cela, on définit par récurrence deux suites $(\omega_n)_n$ et $(M_n)_n$ par

- M_0 est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, et $\omega_0 \in \mathbb{R}^2$. L'ellipsoïde $\mathcal{E}(M_0, \omega_0)$ est généralement assez grand pour contenir le polyèdre $\mathcal{P}$.
- Pour $n \geqslant 0$,
  (i) si $\omega_n \in \mathcal{P}$, alors $g_n \leftarrow -\frac{1}{\delta_n}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ où $\delta_n = \sqrt{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} M_n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$ et $c_1 = C(1, 0)$, $c_2 = C(0, 1)$.
  (ii) sinon, il existe une ligne i de A, notée $L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, telle que $L_i\, \omega_n > b_i$, alors $g_n \leftarrow \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix}$.

  On pose alors :
  $$\omega_{n+1} = \omega_n - 1/3\, M_n g_n$$
  $$M_{n+1} = 4/3\,(M_n - 2/3\, M_n \Gamma_n M_n) \text{ avec } \Gamma_n = \begin{pmatrix} g_{n1} \\ g_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{n1} & g_{n2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$
  g_{n1}, g_{n2} étant les deux composantes de g_n que l'on obtient à partir du cas (i) ou (ii).

9. Calculer l'équation cartésienne de l'ellipse qui délimite l'ellipsoïde $\mathcal{E}(M_1, \omega_1)$ dans les deux cas suivants :

   (a) $M_0 = \mathrm{Id}_2$ et $\omega_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $M_0 = \mathrm{Id}_2$ et $\omega_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2.4 Propriété de convergence

10. En vous aidant de la remarque 2, montrer que

$$\mathcal{A}(\mathcal{E}(M_{n+1}, \omega_{n+1})) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \mathcal{A}(\mathcal{E}(M_n, \omega_n)).$$

Que dire de la convergence de la suite $(\mathcal{E}(M_n, \omega_n))_{n \in \mathbb{N}}$?

Proposition 3. *Si $\mathcal{E}(M_0, \omega_0)$ contient $\mathcal{P}$ (non vide), la suite d'ellipsoïde $(\mathcal{E}(M_n, \omega_n))_n$ converge vers la solution optimale de* (1).

3 BONUS : Interprétation graphique sur un autre problème

On considère le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \text{maximiser} & \tilde{C}(v) \\ \text{sous les contraintes} & \tilde{A}\, v \leqslant \tilde{b}, \\ & v \in \mathbb{R}_+^2, \end{array} \tag{2}$$

où $\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{b}$ sont fixés mais inconnus. C'est un problème similaire au problème (1) où l'usine produit un certain nombre m de produits vendus à un certain prix p et utilisant un certain nombre r de ressources. Les valeurs de m, p, r sont inconnues.
On a représenté en figure 1 le polyèdre $\mathcal{P}$ en pointillés dont l'intérieur représente l'ensemble des solutions admissibles et en trait continu sont tracés les trois premières ellipses de la suite $(\mathcal{E}(M_n, \omega_n))_n$ (cf section 2.3) pour le problème (2) avec $M_0 = 1/10\, \mathrm{Id}_2$ et $\omega_0 = (3, 2)$.
Après analyse de la figure 1 :

11. quel est le nombre minimal de lignes de la matrice $\tilde{A}$?

12. déterminer la solution optimale $v^\star$ du problème (2).

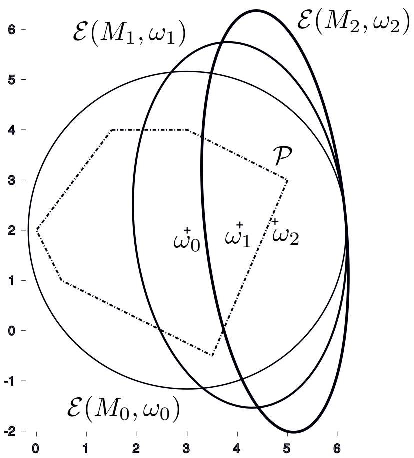

Figure 1: Exemple d'ensemble admissible $\mathcal{P}$ et représentation des frontières (ellipses) des trois premiers termes de la suite $(\mathcal{E}(M_n, \omega_n))_n$.

4 Appendice

4.1 Cas d'école : problème similaire en dimension 1

Une usine conçoit un produit en quantité $v \in \mathbb{R}_+$. Produire une unité de ce produit nécessite 2 unité de bois et 1 unité d'acier. Le prix de vente de ce produit est de 7 unité d'argent.
Les quantités de matière disponibles sont 5 unité de bois et 4 unité d'acier.
Nous pouvons faire les remarques suivantes :

1. Les recettes dégagées par la vente de v produits peuvent être exprimées par $C(v) = 7\,v$.
2. On a les contraintes suivantes :
   - $v \geqslant 0$,
   - les ressources disponibles en bois donne : $2\,v \leqslant 5$,
   - les ressources disponibles en acier donne : $v \leqslant 4$.

   Donc l'**intervalle admissible** pour v est $[0, 5/2]$.
3. Les recettes maximales sont atteintes par la production de $v^\star = 5/2$ produits et valent $7 \times 5/2 = 35/2$ unité d'argent. Notons que $5/2$ est une extrémité de l'intervalle admissible.

4.2 Polyèdre

On se place dans un repère orthonormé du plan (O, i, j) où un point M est représenté par ses coordonnées cartésiennes (x, y).

Définition 4. *Un demi-plan est l'une des deux parties du plan située de part et d'autre d'une droite.*

Exemple 5. *Sur la figure 2, la droite $y = 1$ définie deux demi-plans:*

- *H_+ est l'ensemble des points à ordonnées supérieures à 1,*
- *H_- est l'ensemble des points à ordonnées inférieurs à 1.*

Autrement dit,

$$H_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 1\}, \quad H_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 1\}.$$

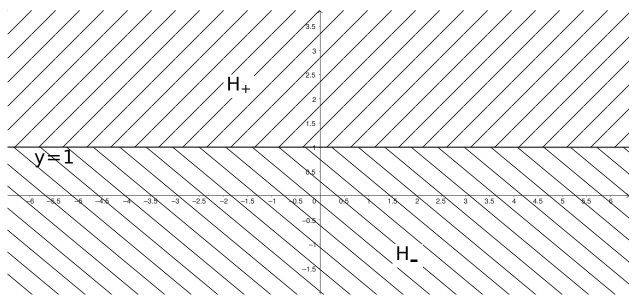

Figure 2: Les deux demi-plans H_+ et H_- définis à partir de la droite $y = 1$.

Définition 6. *Un polyèdre du plan est l'intersection finie de demi-plans.*

Exemple 7. *Le triangle T de sommets $(0, 5), (0, 1)$ et $(2, 1)$ représenté en figure 3 est un polyèdre car il peut s'écrire comme l'intersection de trois demi-plans :*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 1\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant 5 - 2\,x\}.$$

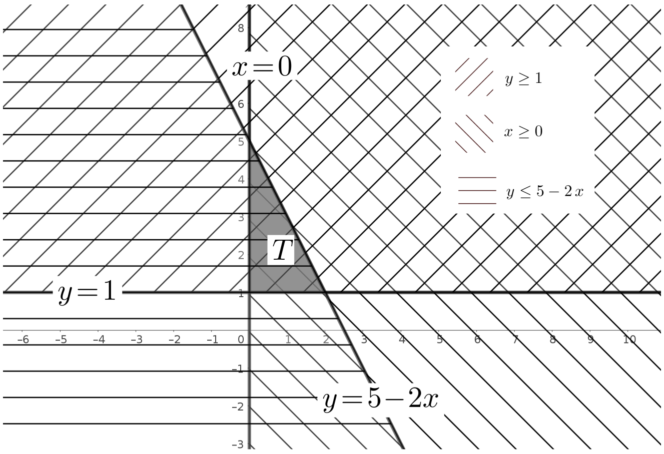

Figure 3: Le triangle T est l'intersection des trois demi-plans : $\{x \geqslant 0\} \cap \{y \geqslant 1\} \cap \{y \leqslant 5 - 2\,x\}$.

4.3 Ellipsoïde et Ellipse

Définition 8. *On appelle ellipsoïde du plan tout ensemble de la forme*

$$\mathcal{E}(Q,\omega) = \{v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid (x-\omega_1 \quad y-\omega_2)\, Q^{-1} \begin{pmatrix} x-\omega_1 \\ y-\omega_2 \end{pmatrix} \leqslant 1\}$$

où $Q = (q_{ij})_{ij}$ est une matrice réelle de taille 2×2 vérifiant

$$q_{21} = q_{12}, \quad q_{11}q_{22} - q_{12}^2 > 0, \quad q_{11} + q_{22} > 0,$$

et $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque 9. *L'ellipsoïde $\mathcal{E}(Q,\omega)$ est délimité par une courbe fermée du plan qui est une ellipse d'équation cartésienne*

$$(x-\omega_1 \quad y-\omega_2)\, Q^{-1} \begin{pmatrix} x-\omega_1 \\ y-\omega_2 \end{pmatrix} = 1.$$

L'aire de l'ellipsoïde $\mathcal{E}(Q,\omega)$ est la surface à l'intérieure de cette ellipse et est notée $\mathcal{A}(\mathcal{E}(Q,\omega))$.