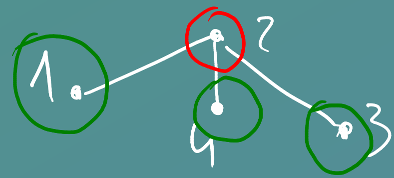
# ***Coloration et Chaînes.***

Jérémy Rouot

e-mail: jeremy.rouot@yncrea.fr

bureau 332

pb : Trouver le nombre de couleur minimal.




: 2-coloriage

Soit $G=(X, E)$ un graphe non-orienté. Etant donné un entier $k$, une *k-coloration* des sommets de $G$ est une application $c$: $X \rightarrow \{1, 2,..., k\}$ telle que, pour chaque arête $(x, y)$ de $G$, on ait $c(x) \neq c(y)$.

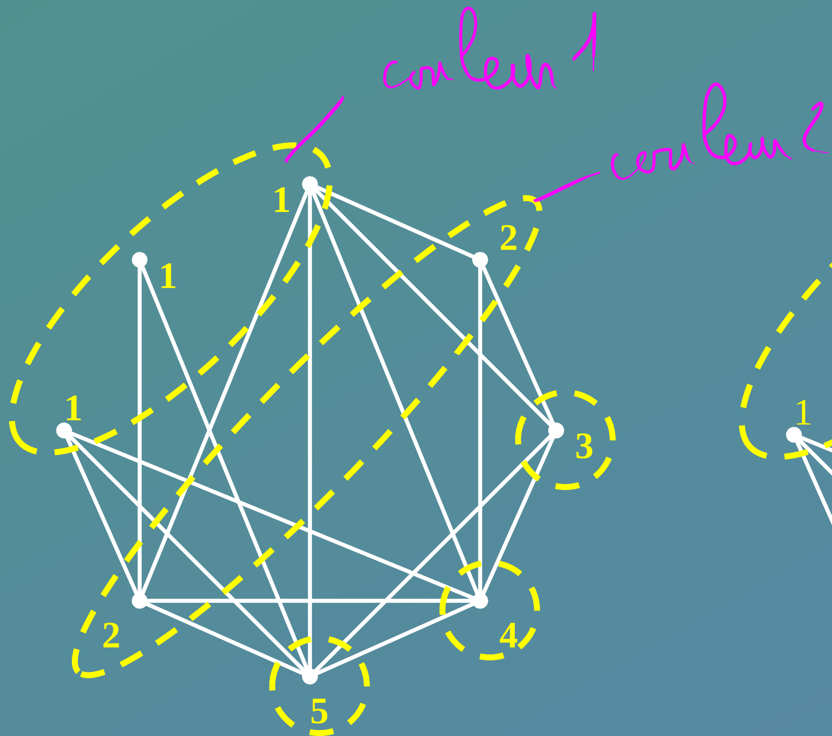
Lorsque $c(x)=i$, nous dirons que le sommet $x$ reçoit la couleur $i$, ou que la couleur $i$ est affectée à $x$.

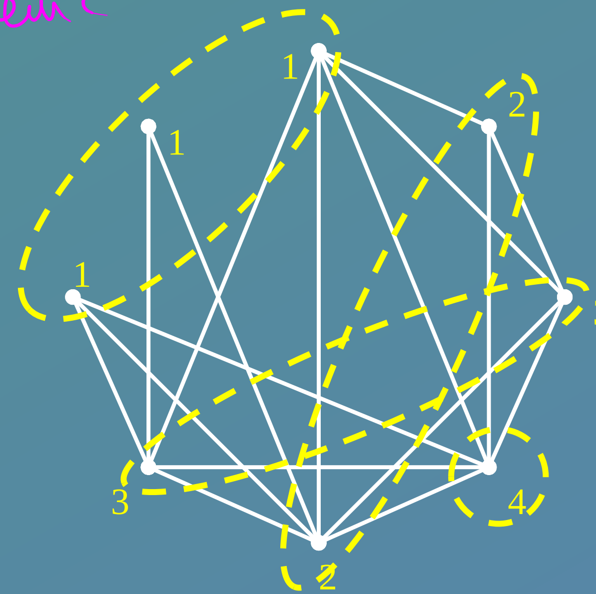
ens. sommet d'une même couleur

On remarque que l'ensemble $\{x \mid c(x)=i\}$ des sommets de couleur $i$ ($i$=1,..., $k$) est un stable de $G$ (sous-ensemble ne contenant aucune arête); une $k$-coloration peut donc être vue aussi comme une partition de l'ensemble des sommets de $G$ en (au plus) $k$ stables.

Si $G$ admet une $k$-coloration on dit qu'il est *k-colorable*. On cherche généralement à trouver une coloration aussi économique que possible, c'est-à-dire qui minimise le nombre de couleurs utilisées. On définit ainsi le *nombre chromatique* $\chi(G)$ d'un graphe $G$ par:

$$\chi(G) = \min \{ k,\ G \text{ est } k\text{-colorable} \}.$$



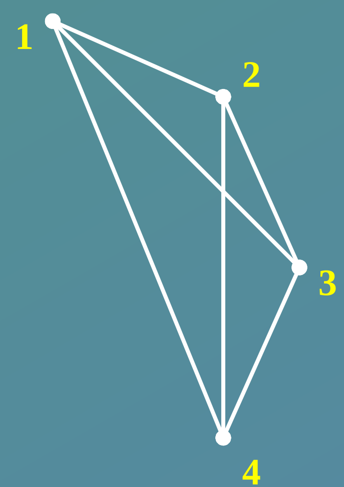

5 stables

⇒ 5-coloration

4 stables

⇒ 4-coloration.

$K_4$

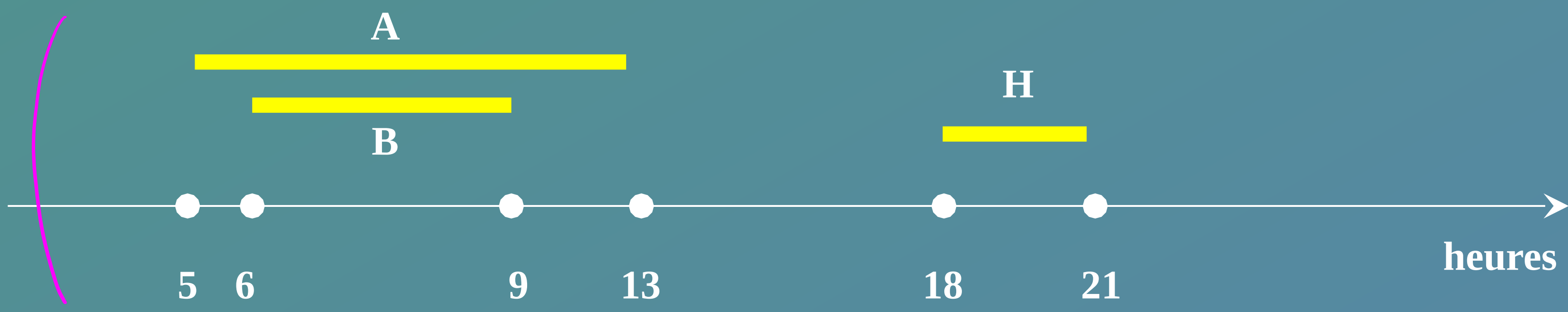




Il faut nécessairement 4 couleurs pour colorier $K_4$ donc $G$.

# *Ordonnancement*

Considérons le planning de tâches A,B,H suivant :

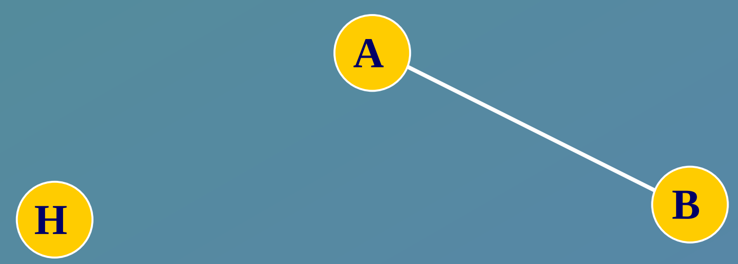



A ces tâches on peut associer le *graphe d'intervalles* suivant :

sommets = tâches

arête entre i et j

i et j se ⟺ chevauchent.

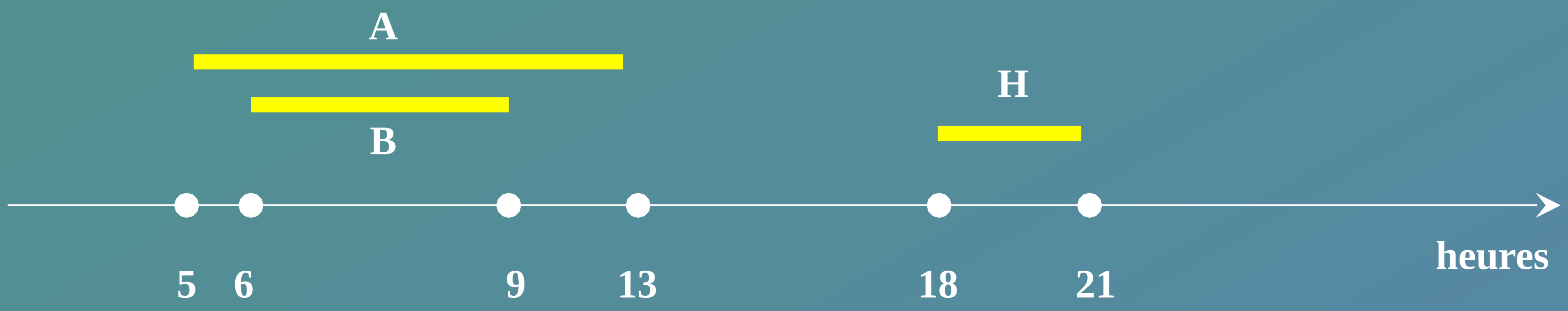



jour de travail

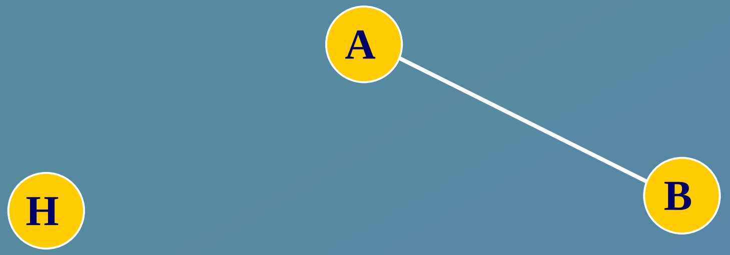
**Problématique** : *Partitionner ces 3 tâches en le minimum de vacations tel que les tâches de chacune ne se recouvrent pas entre elles et que le nombre de tâches qu'elles contiennent soit limité à k.*

# Ordonnancement

Considérons le planning de tâches A,B,H suivant :

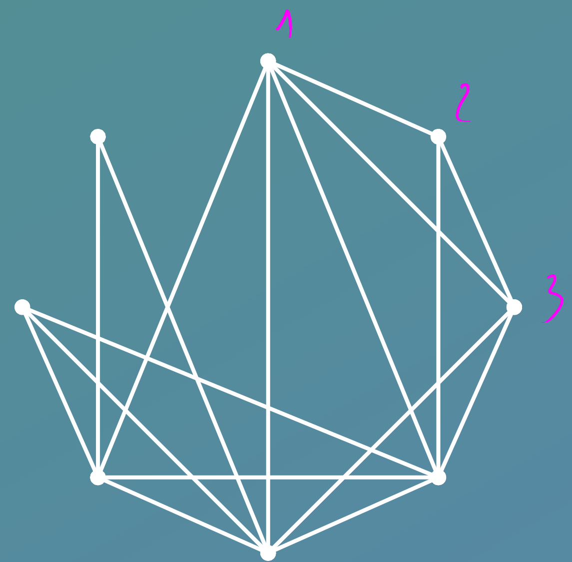



A ces tâches on peut associer le *graphe d'intervalles* suivant :




**Solution**: *ici, c'est simple le nombre de vacations minimal est* **2**.

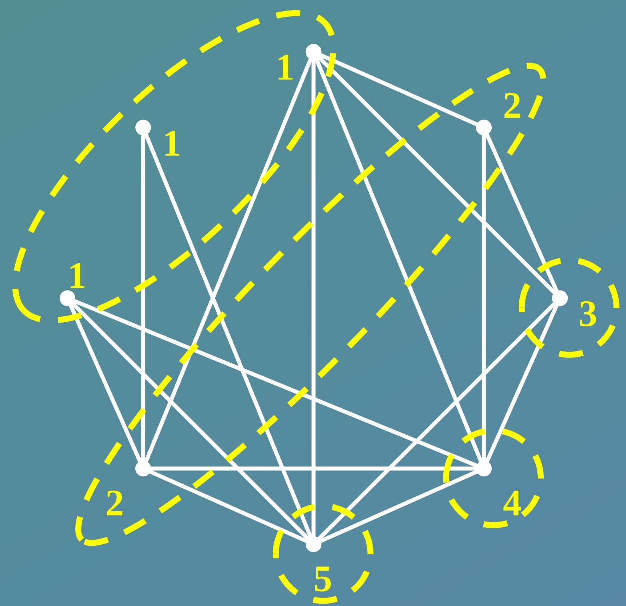
Supposons maintenant que la planification des tâches dans une usine est donnée par le graphe suivant :




**Problématique** : *Partitionner ces 9 tâches en le minimum de vacations tel que les tâches de chacune ne se recouvrent pas entre elles et que le nombre de tâches qu'elles contiennent soit limité à k.*

Supposons maintenant que la planification des tâches dans une usine est donnée par le graphe suivant :

si k ≤ 3, un coloriage possible est :




5 vacations sont nécessaires avec ce coloriage

1 couleur = 1 vacation

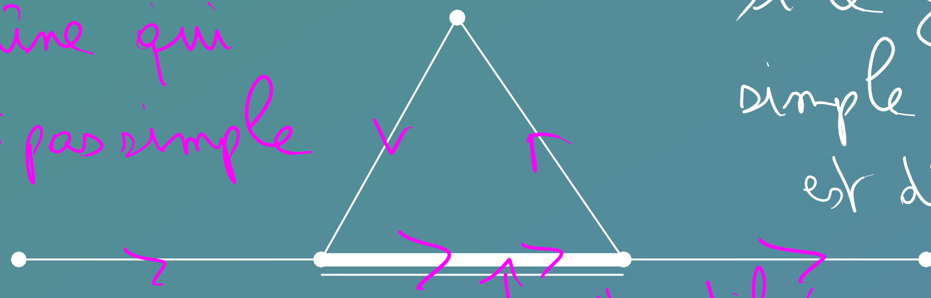
**Solution**: *il s'agit de trouver une coloration minimum du graphe de sorte que chaque couleur marque au plus k sommets. Une couleur correspond alors à une vacation.*

au plus k tâches

Une ***chaîne*** *de* *<u>longueur</u>* *$k$* est une séquence alternée de sommets et d'arêtes $\Gamma=(x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, x_{k-1}, e_k, x_k)$ telle que, pour tout $i$, les extrémités de $e_i$ sont $x_{i-1}$ et $x_i$.

chaîne qui n'est pas simple

Si le graphe est simple, la chaîne est définie par les sommets successifs

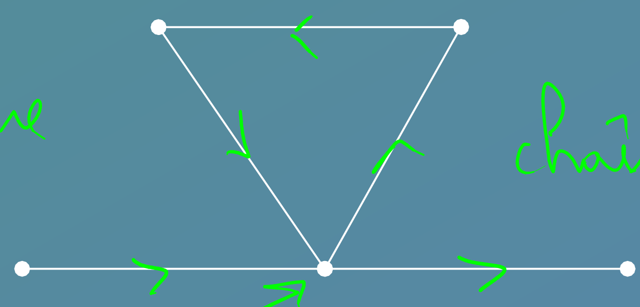


l'arête utilisée deux fois

Si $e_i$ sont distincts $\Gamma$ est une ***chaîne simple***.

chaîne pas élémentaire car

chaîne simple



Si $x_i$ sont distincts $\Gamma$ est une ***chaîne élémentaire***.

Lorsque $k>0$ et $x_0 = x_k$ $\Gamma$ est une ***chaîne fermée***.

Un ***cycle*** est une chaîne fermée simple.

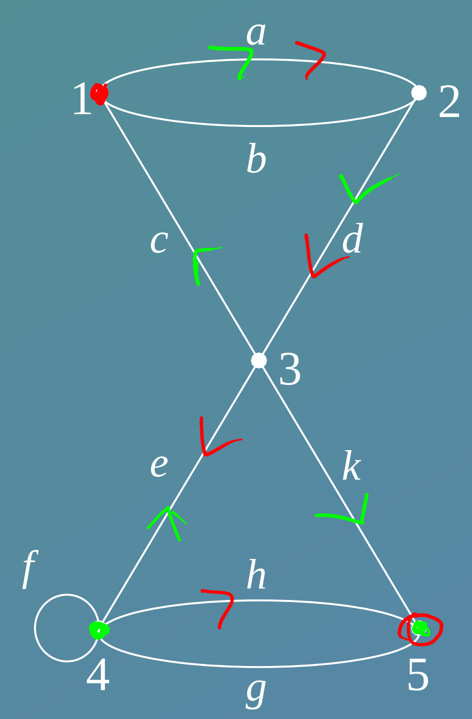
Pas élémentaire

chaîne simple : 4*e*3*c*1*a*2*d*3*k*5 ;

chaîne élémentaire : 1*a*2*d*3*e*4*h*5 ;

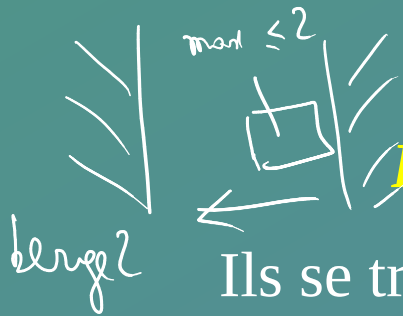
cycle : 1*c*3*e*4*g*5k3*d*2*a*1 ;

cycle élémentaire : 1*c*3*d*2*b*1.




Chaque “objet” *élémentaire* est *simple* mais la réciproque n’est pas vraie comme le montre l’exemple précédent.

berge 1, P, L, C, X




# *Problème du loup, de la chèvre et du chou.*

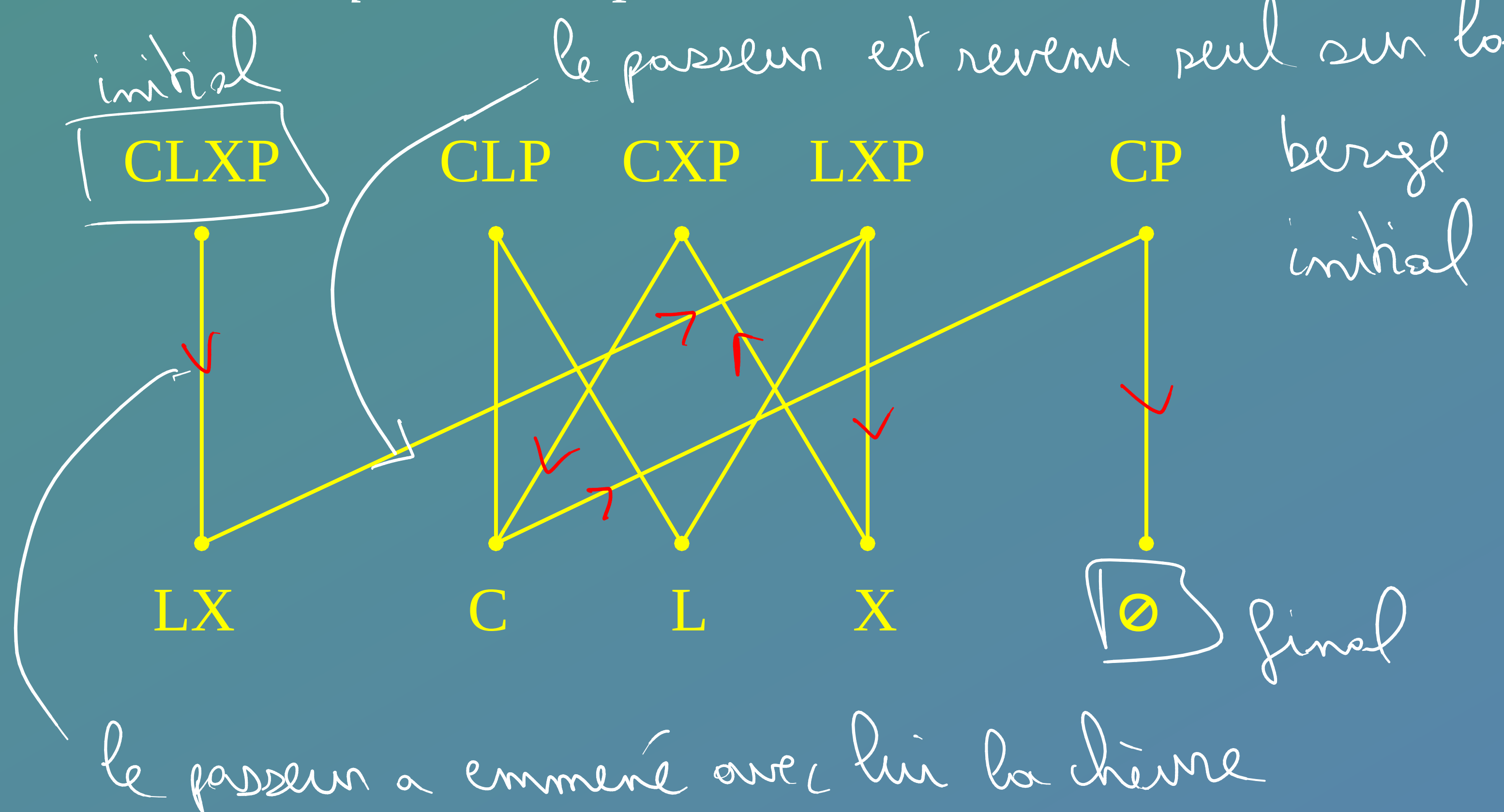
Ils se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur (P) veut les changer de rive, mais sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul entre eux à la fois. Pour des raisons évidentes, on ne peut laisser sans surveillance le loup (L) en compagnie de la chèvre (C) ou la chèvre en compagnie du chou (X).

*Comment le passeur doit-il s'y prendre ?*

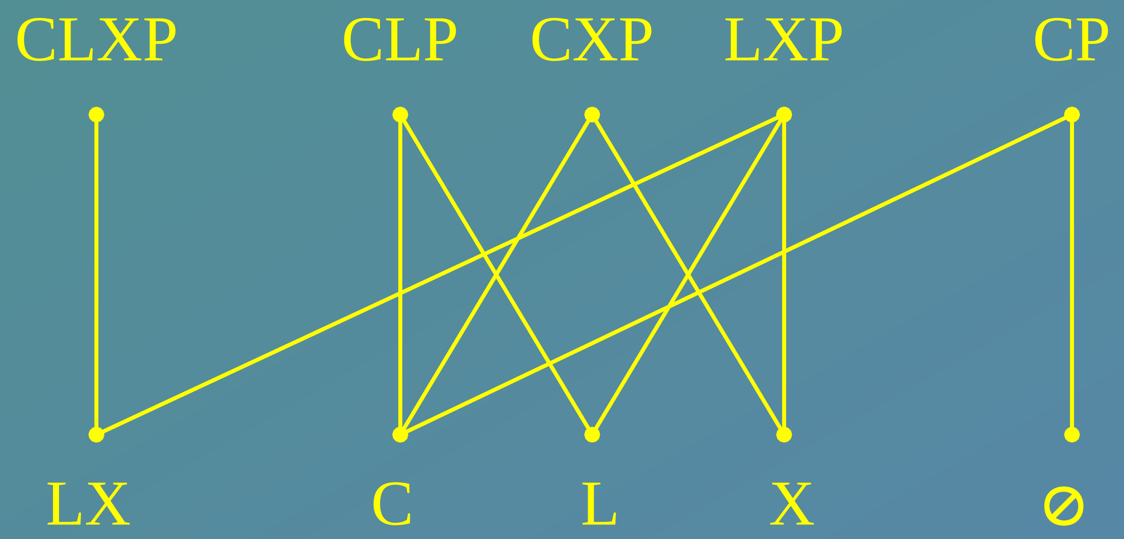
Etats admissibles de la berge initiale :

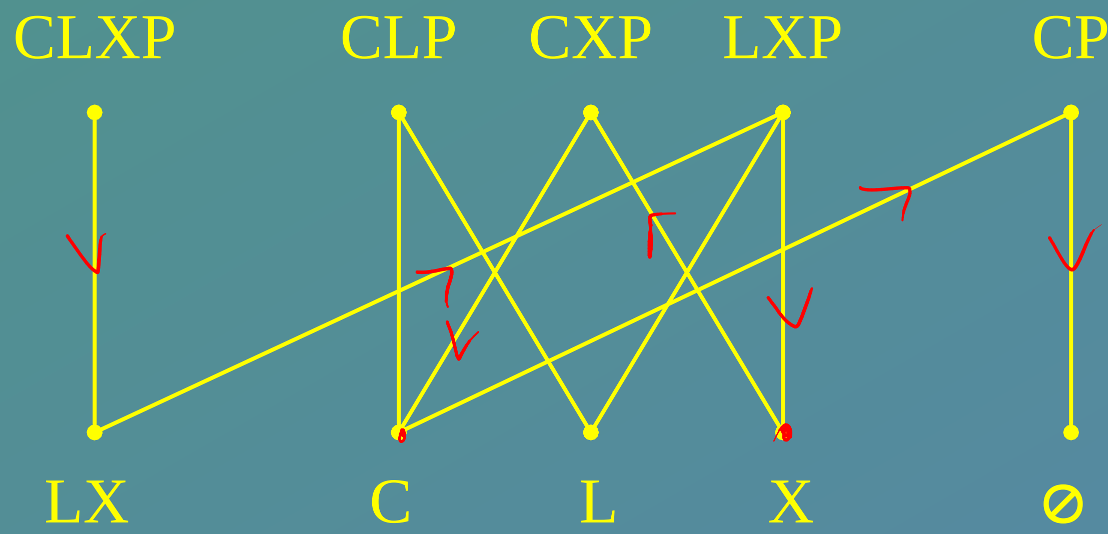
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CLXP | ~~CLX~~ | CLP | CXP | LXP | ~~CL~~ | ~~CX~~ | CP |
| départ | | | | | | | |
| LX | ~~P~~ | C | L | X | ~~XP~~ | ~~LP~~ | ∅ |
| | | | | | | | arrivée |

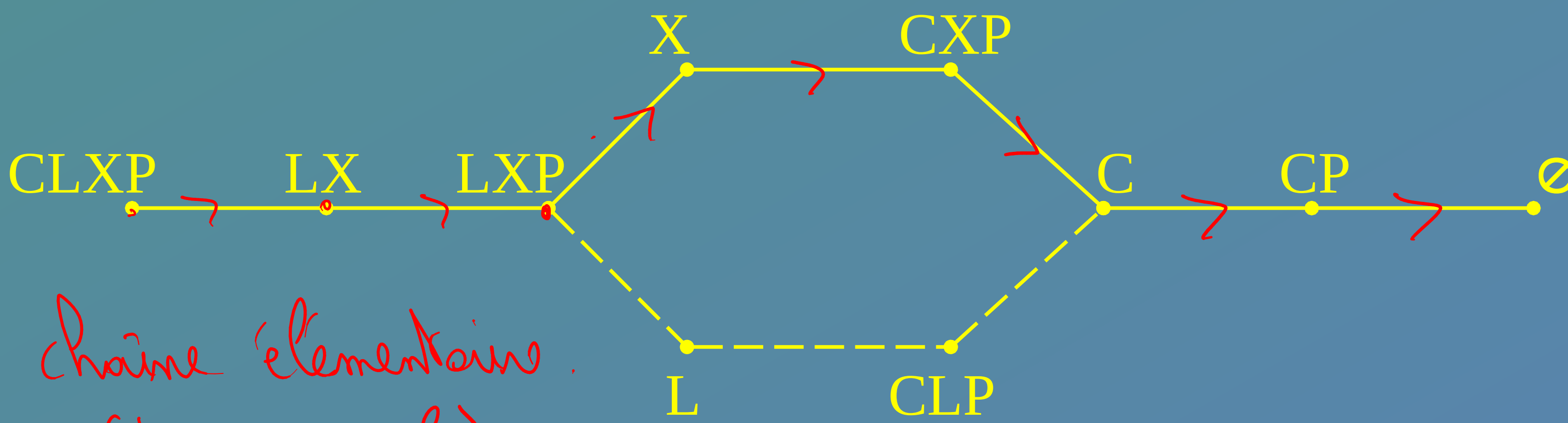
*A quoi correspond une arête ?*



*Une arête entre i et j signifie que le passeur peut mettre la berge de l’état i à l’état j en effectuant un passage avec la barque en respectant la contrainte de taille.*






Chaîne élémentaire
(donc simple)

Chaîne hamiltonienne: passe une unique fois par tous les sommets.

les sommets ne se répètent pas

Dans un graphe de *n* sommets, une ***chaîne*** *élémentaire* de longueur *n–1* est dite ***hamiltonienne*** (elle comporte donc *n–1* arêtes et *n* sommets).

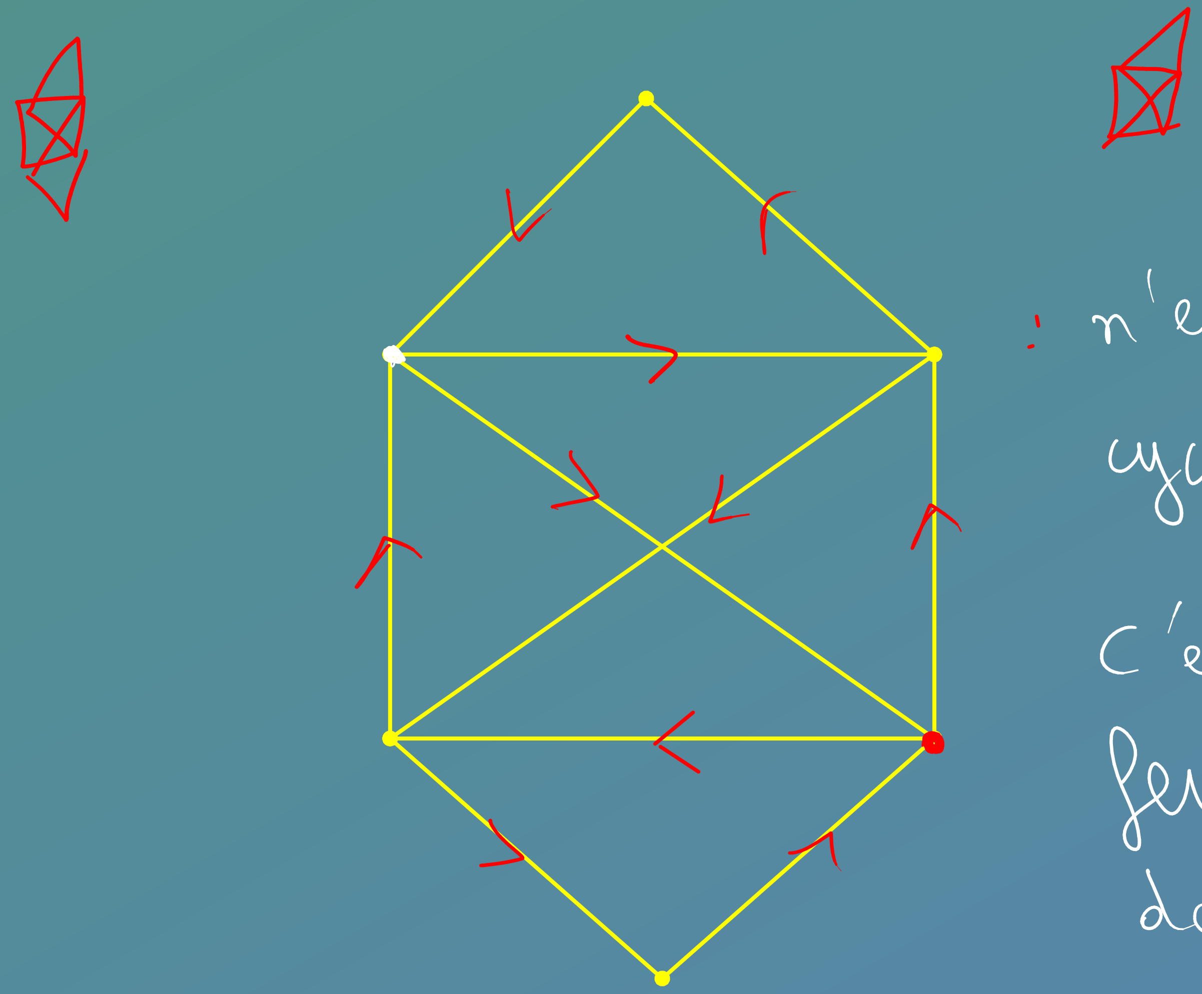
Un ***cycle hamiltonien*** est un cycle élémentaire de longueur *n*.

Un ***graphe*** est dit ***hamiltonien*** s'il possède un cycle hamiltonien.

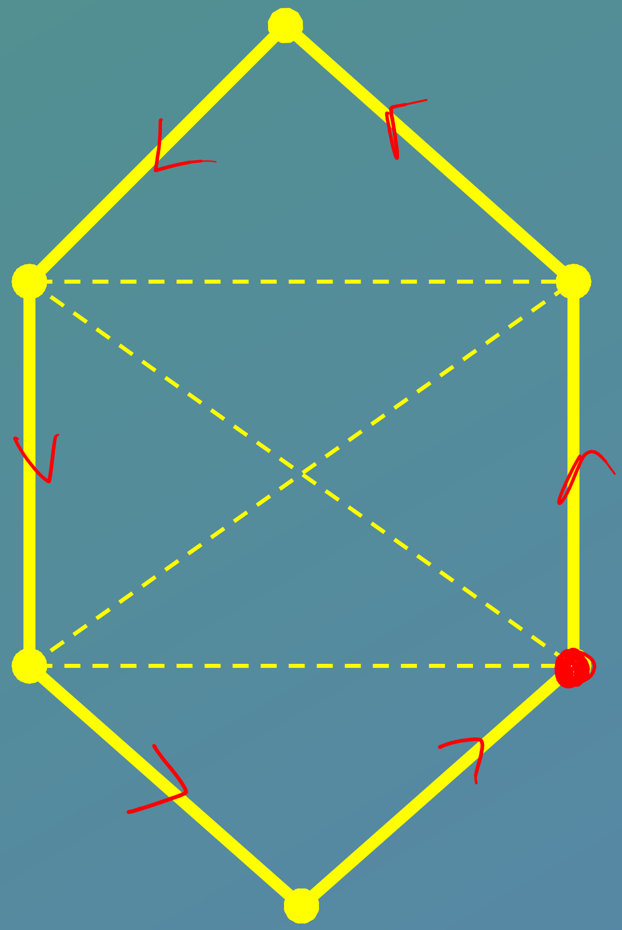
On doit le tout premier résultat dans cette matière

à sir William R. Hamilton (1805-1865) - mathématicien irlandais.

Le problème de l'existence d'élément hamiltonien dans un graphe quelconque est très difficile.



! n'est pas un cycle Hamiltonien, c'est une chaîne fermé simple donc un cycle.



cycle hamiltonien

Voici le graphe de ***Petersen***, qui

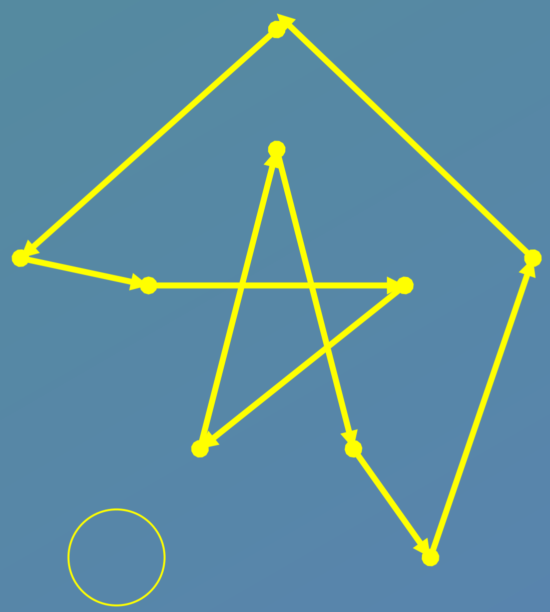
contient une chaîne hamiltonienne

mais

ne contient pas de cycle hamiltonien

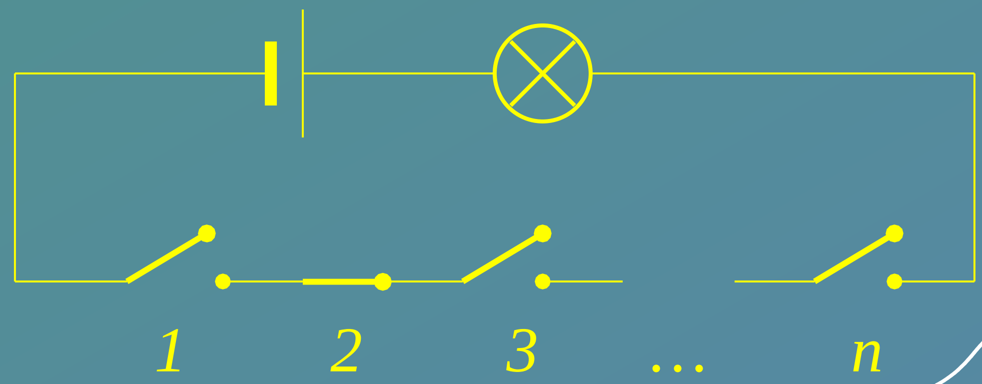
et

$\forall x$, $G\setminus\{x\}$ contient un cycle hamiltonien.



Soit le circuit électrique :

On ne peut dire s'il les interrupteurs sont ouverts ou fermés.




Les interrupteurs sont de type ***poussoir***. Comment peut-on procéder pour allumer la lampe en actionnant les interrupteurs un à un ? Donner une majoration du nombre d'opérations.

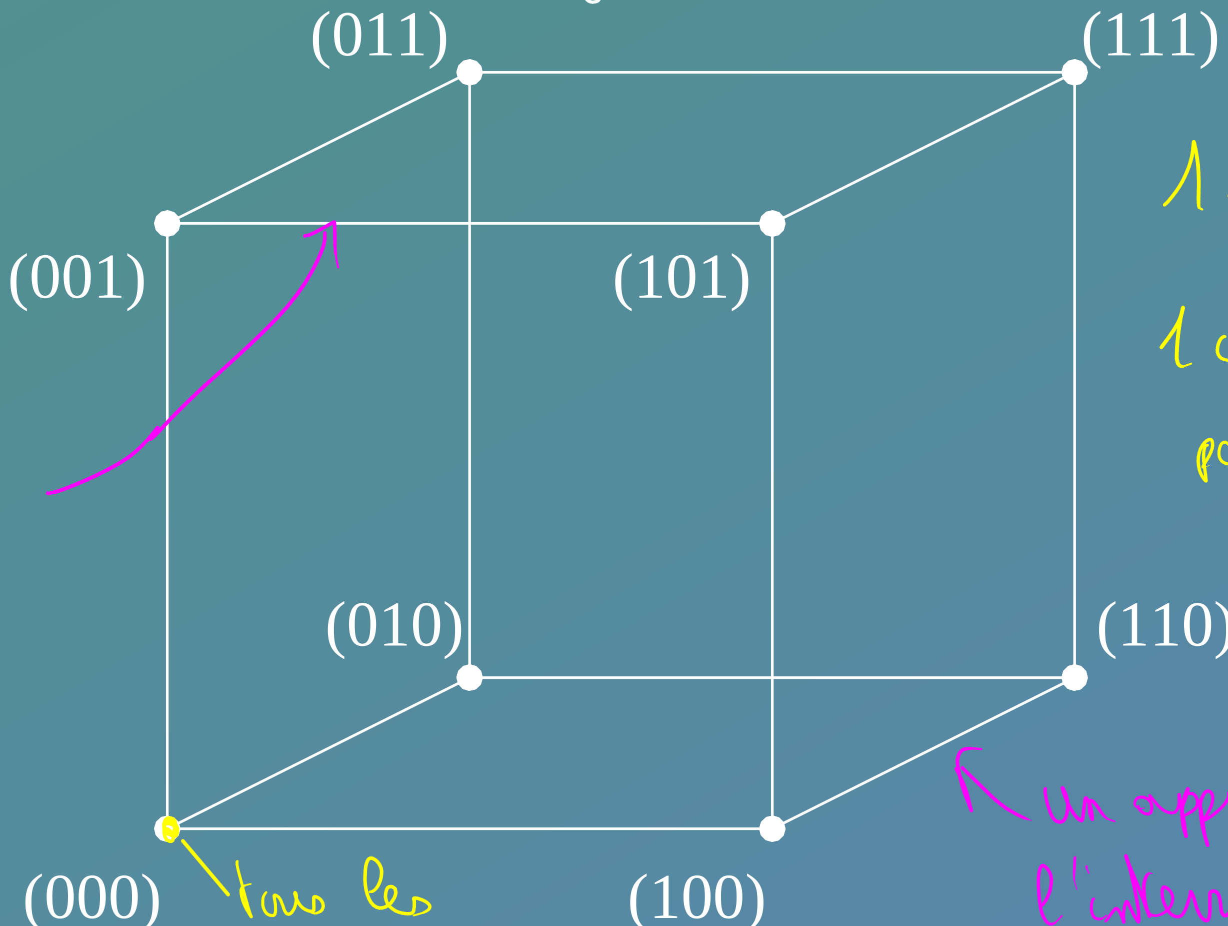
On ne connaît pas la configuration initiale.

*Codage par* $2^n$ *mots binaires de longueur* $n$ : $(0\ 1\ 0 \ldots 0)$

configuration des interrupteurs.

$n=3$

3 interrupteurs : $\underbrace{2^3}_{=8}$ configurations possibles.




1 noeud = 1 configuration possible.

1 appui sur 1.

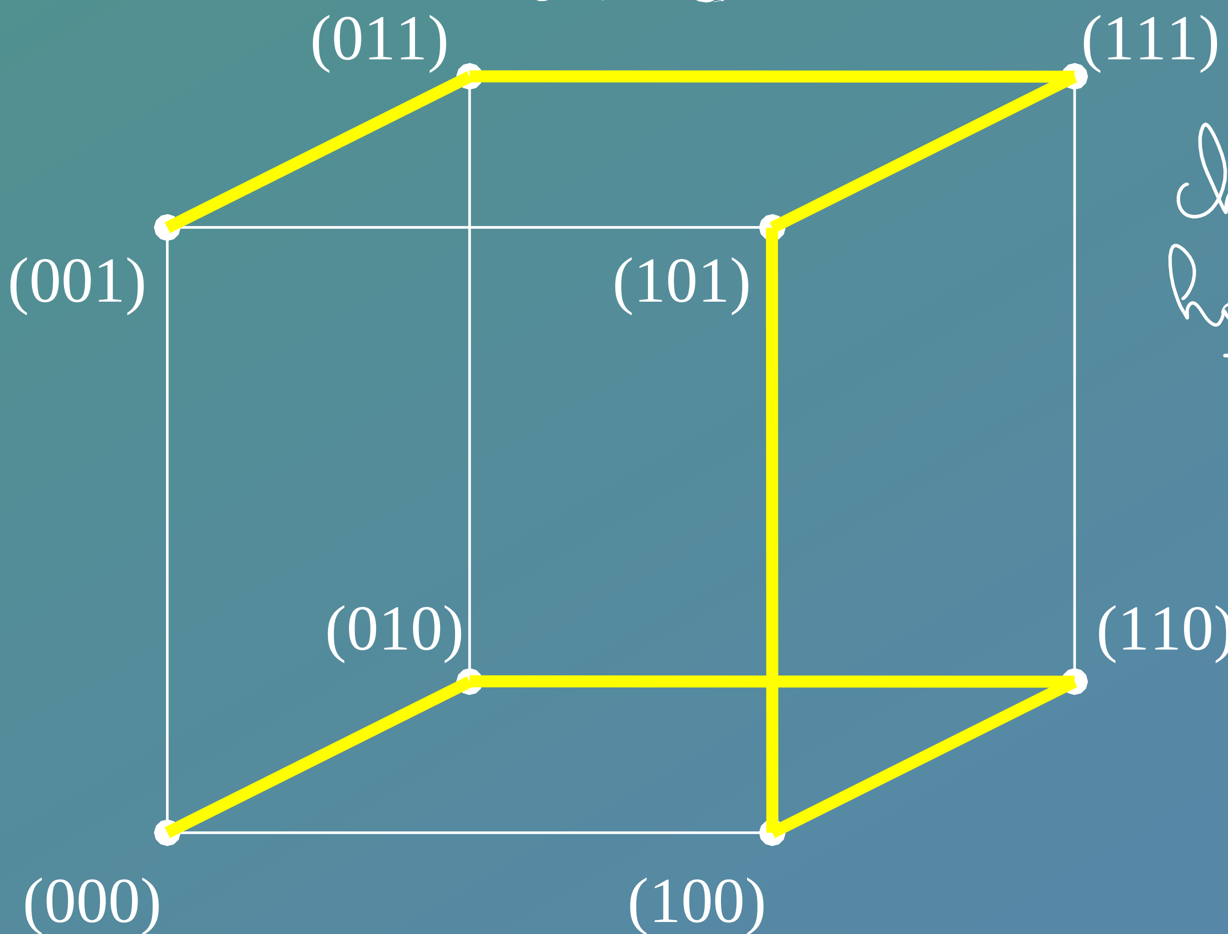
un appui sur l'interrupteur 2

tous les interrupteurs sont bloquants

si circuit fonctionnel : $\exists$ une configuration qui allume la lampe

$n$=3

<u>Solution</u> : Trouver un chemin passant par tous les noeuds. → recherche d'une <u>chaîne hamiltonienne</u>




une ***chaîne hamiltonienne*** permettra de tomber sur un état des boutons qui allumera nécessairement la lampe.

Chaîne eulérienne : passe par toutes les arêtes du graphe une unique fois.

Dans un graphe avec *m* arêtes,

une ***chaîne*** simple de longueur *m* est dit ***eulérienne***.

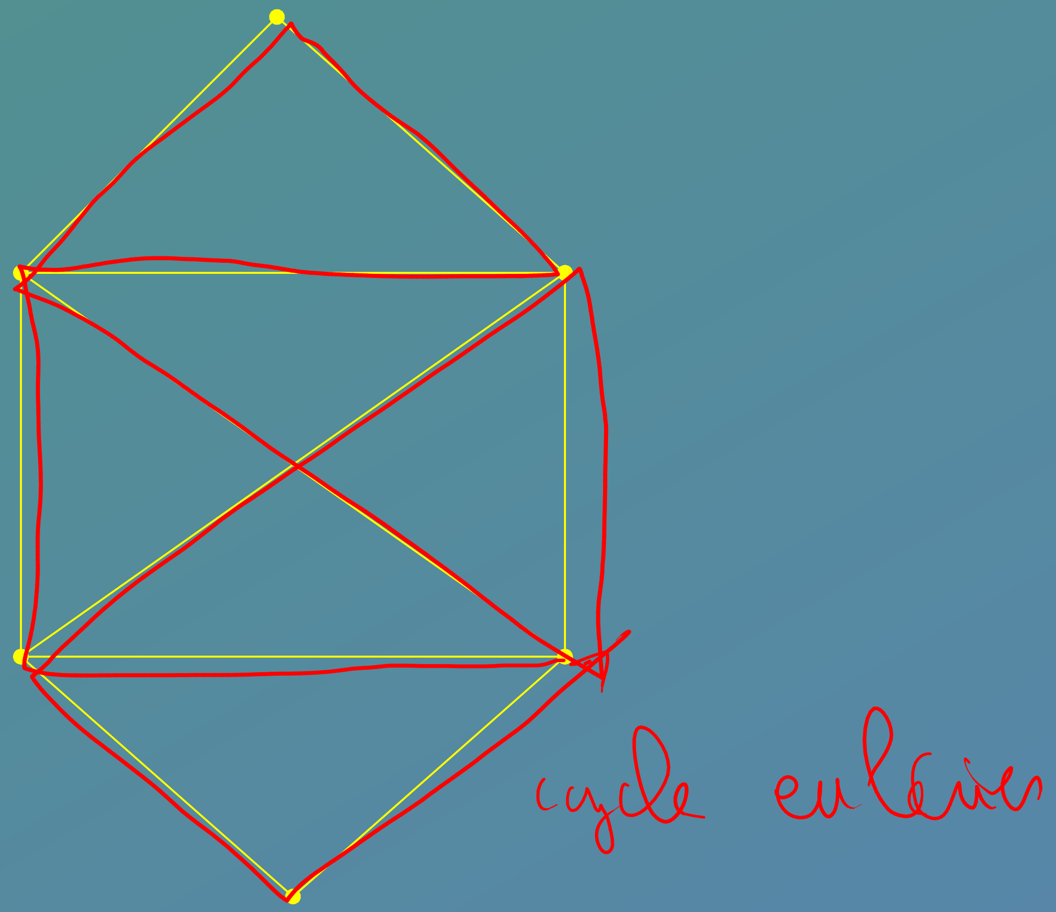
– chaque arête est utilisée une et une seule fois.

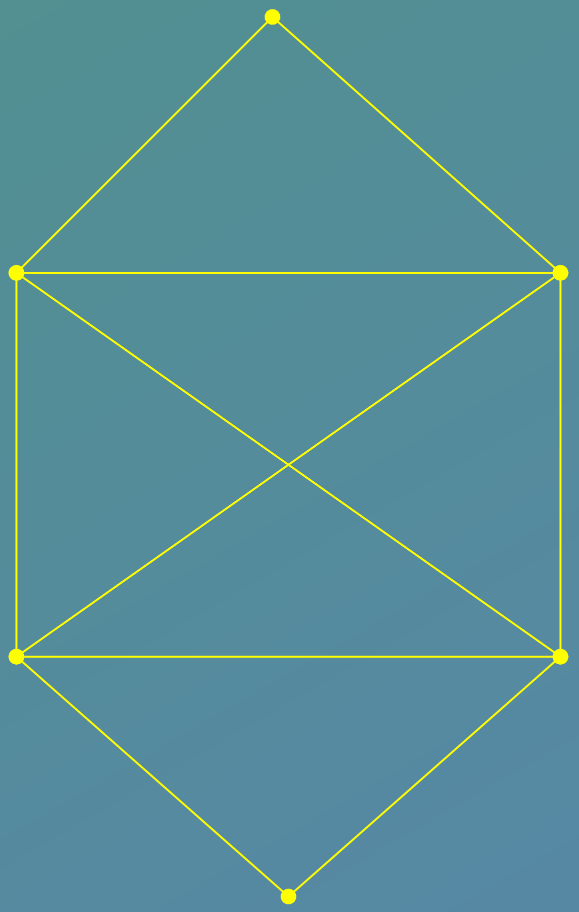
Un ***cycle eulérien*** est un cycle de longueur *m*.

Un ***graphe*** est dit ***eulérien*** s'il possède un cycle eulérien.

Ces objets ont été étudiés par

Leonhard Euler (1707-1783) – mathématicien suisse.


cycle eulérien



un cycle eulérien

**Théorème:**

*Un graphe connexe admet un cycle eulérien*

*si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

**Corollaire :**

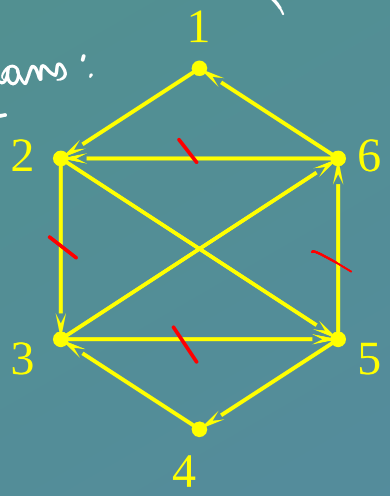
*Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne*

*si et seulement si*

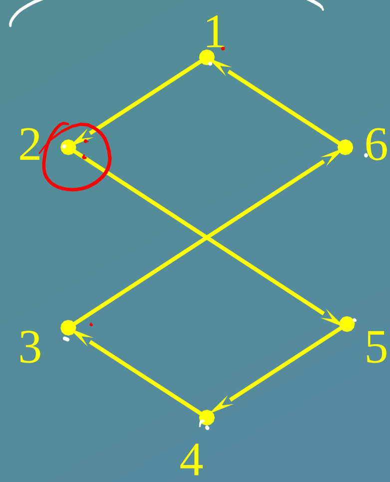
*le nombre des sommets de degré impair est 0 ou 2.*

# Comment construire un cycle eulérien ?

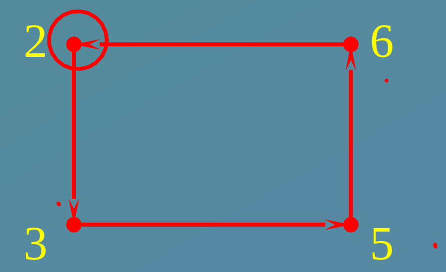
But : trouver un cycle eulérien dans :




cycle non eulérien.

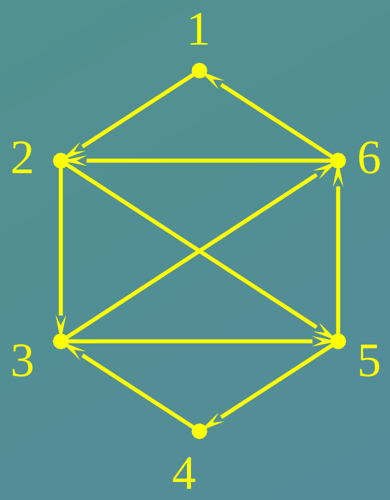


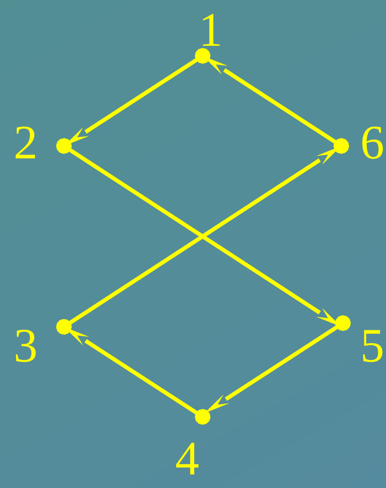

4-3-6-1-2-5-4




2-3-5-6-2

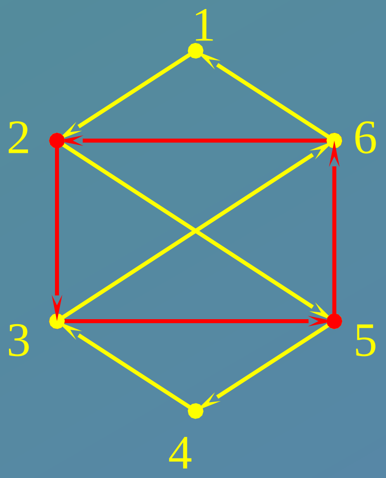
Supposons que, dans un premier temps, on arrive seulement à déterminer un cycle quelconque en oubliant quelques arêtes, par exemple 1254361. Le graphe partiel composé des arêtes oubliées est connexe et on retrouve son cycle eulérien 23562. En réunissant ces deux cycles en leur premier sommet commun (ici 2) on obtient le cycle eulérien du graphe : 123562254361.



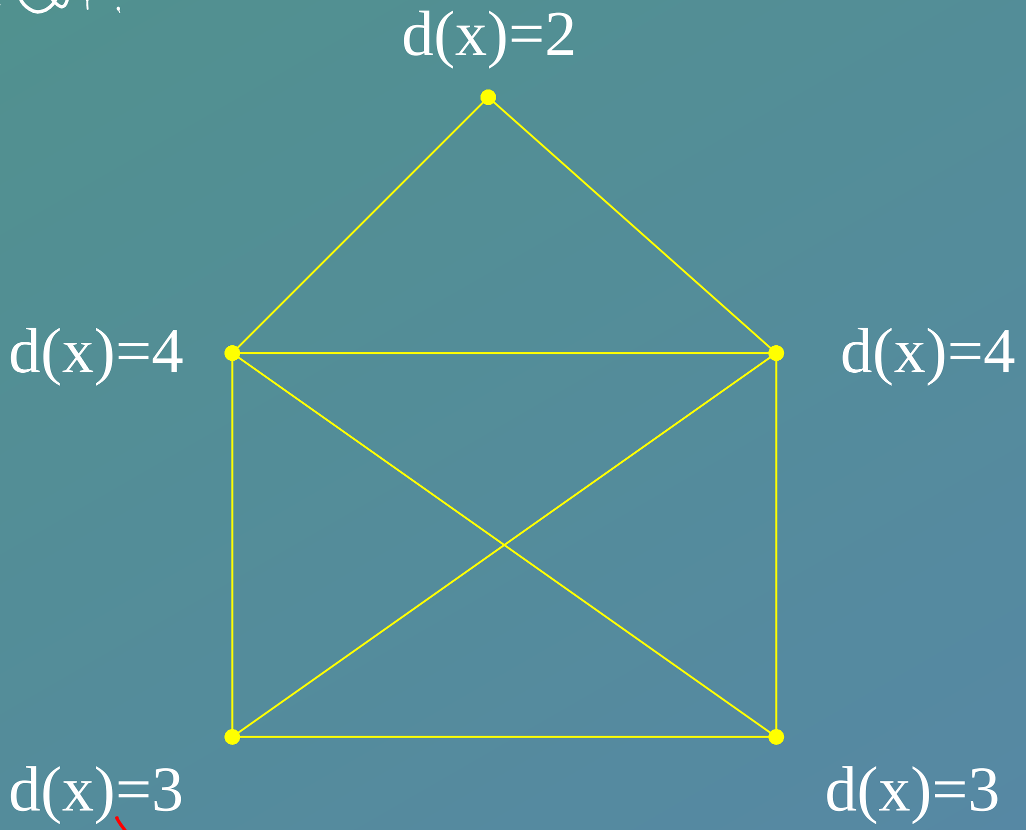

4-3-6-1-2-5-4


2-3-5-6-2



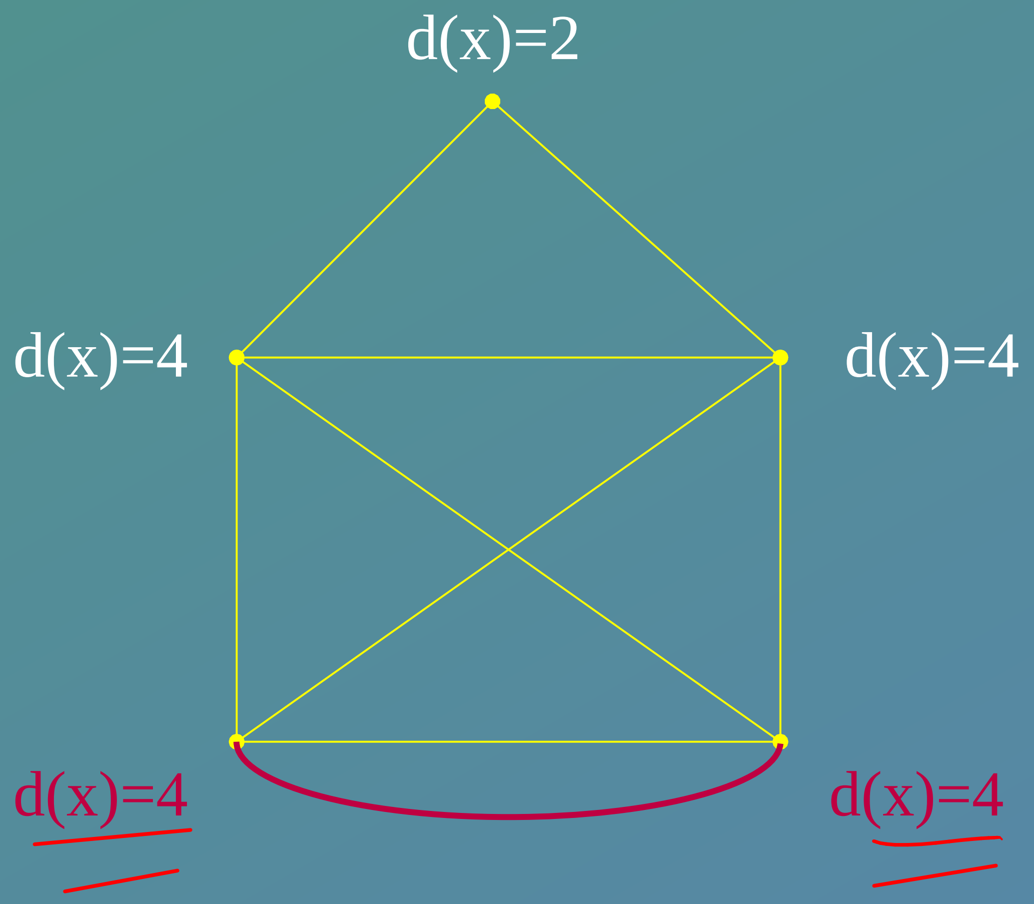

4-3-5-6-2-3-6-1-2-5-4

Thm: Euler.

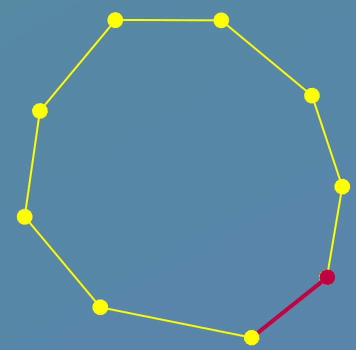



Impair: pas de cycle eulérien.

Mais une chaîne eulérienne.

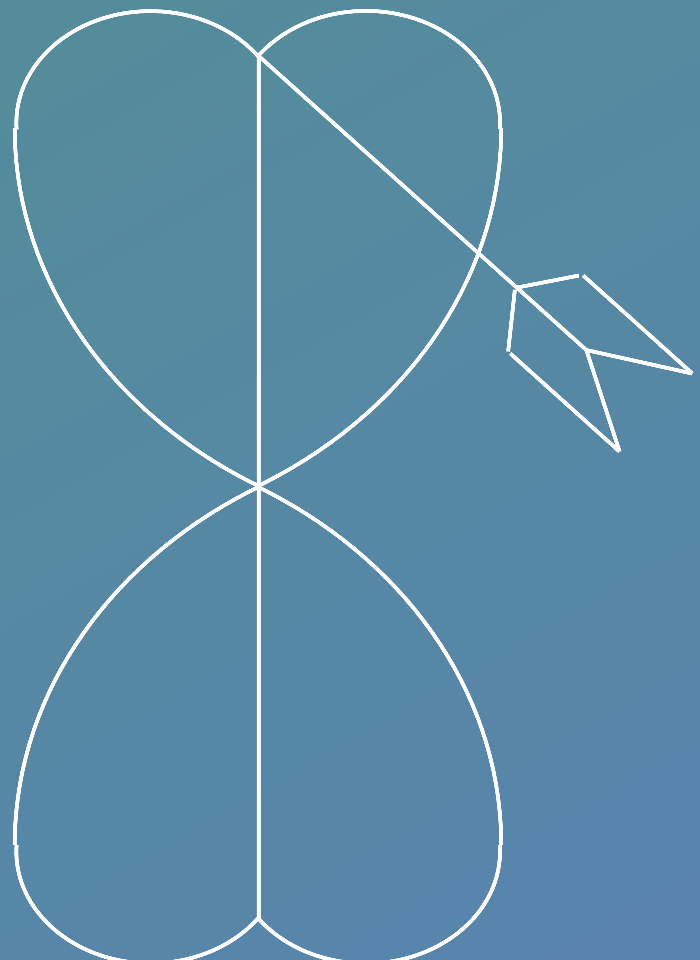



⇒ Existence d'un cycle eulérien.

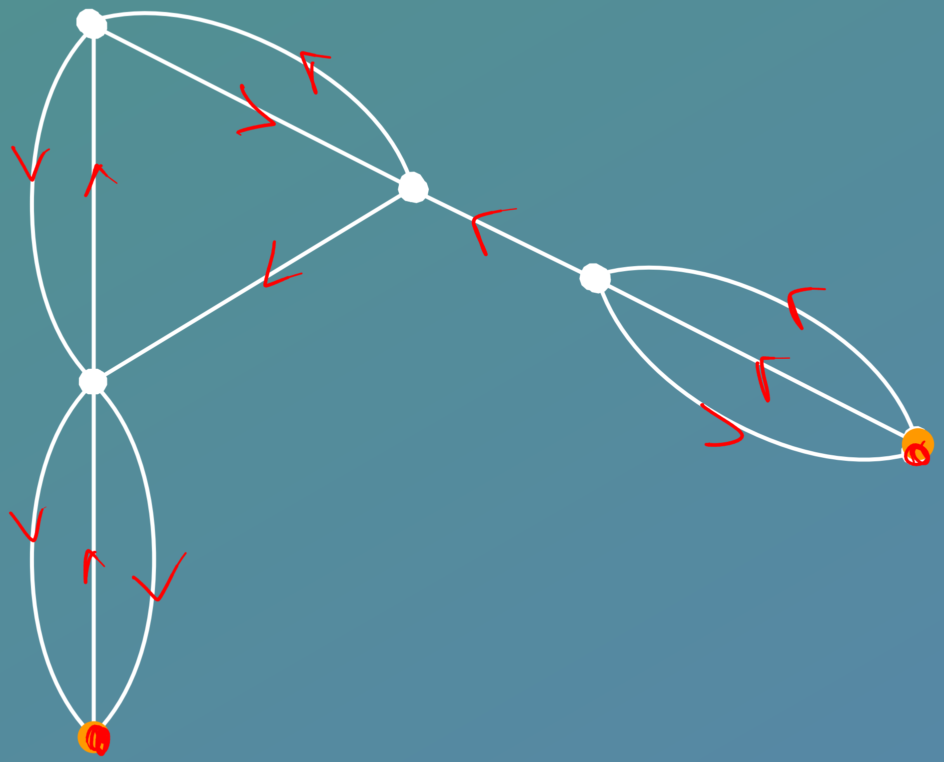


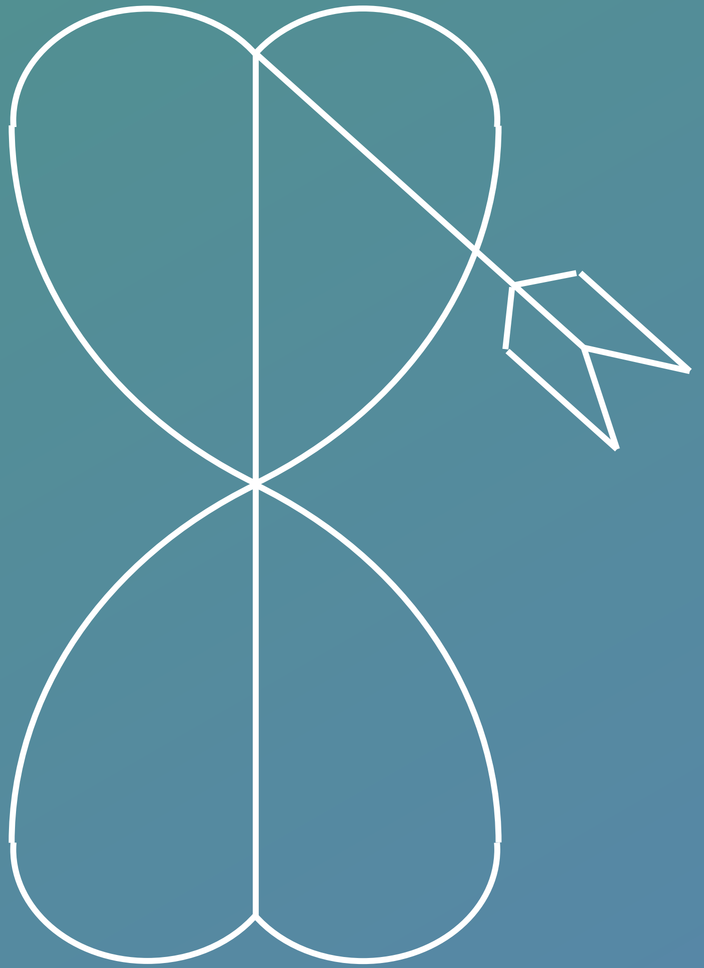
une chaîne eulérienne

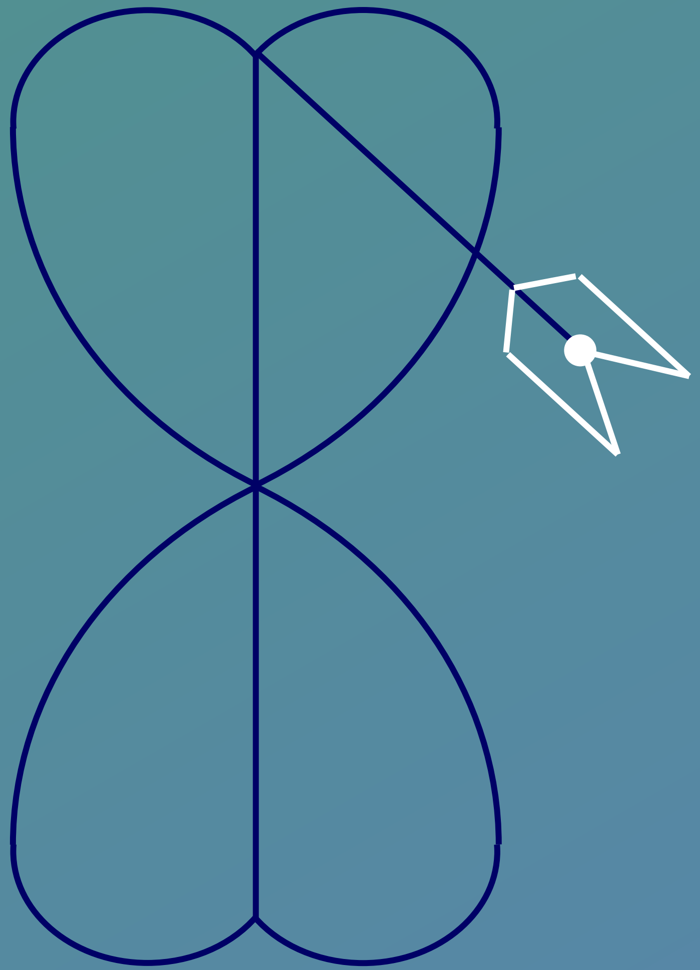
Pouvez vous réaliser ce dessin en continu en passant une seule fois sur chacun de tous les traits ?

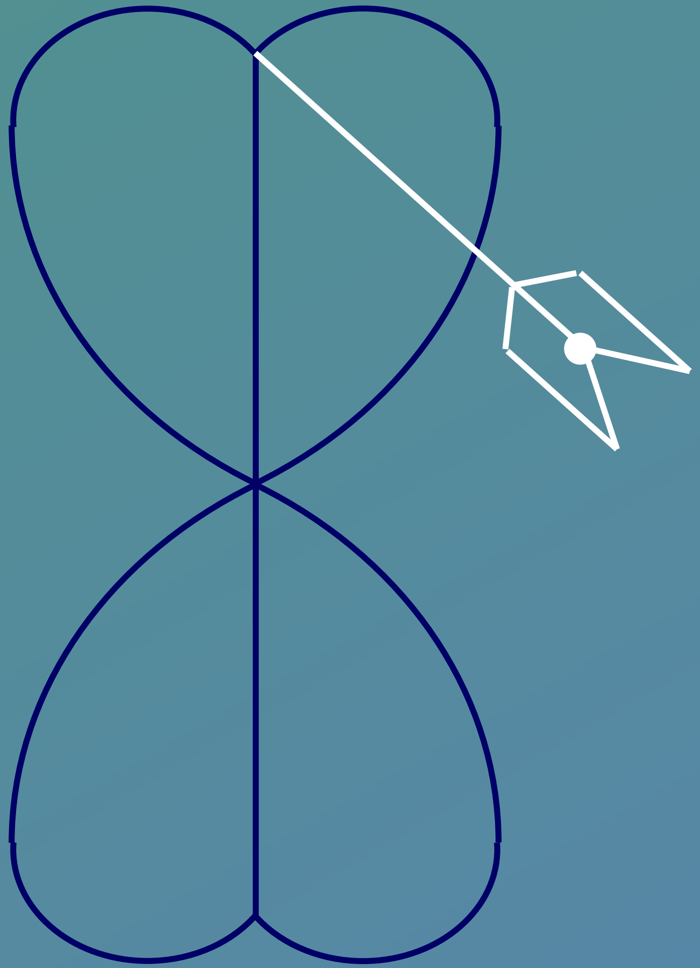


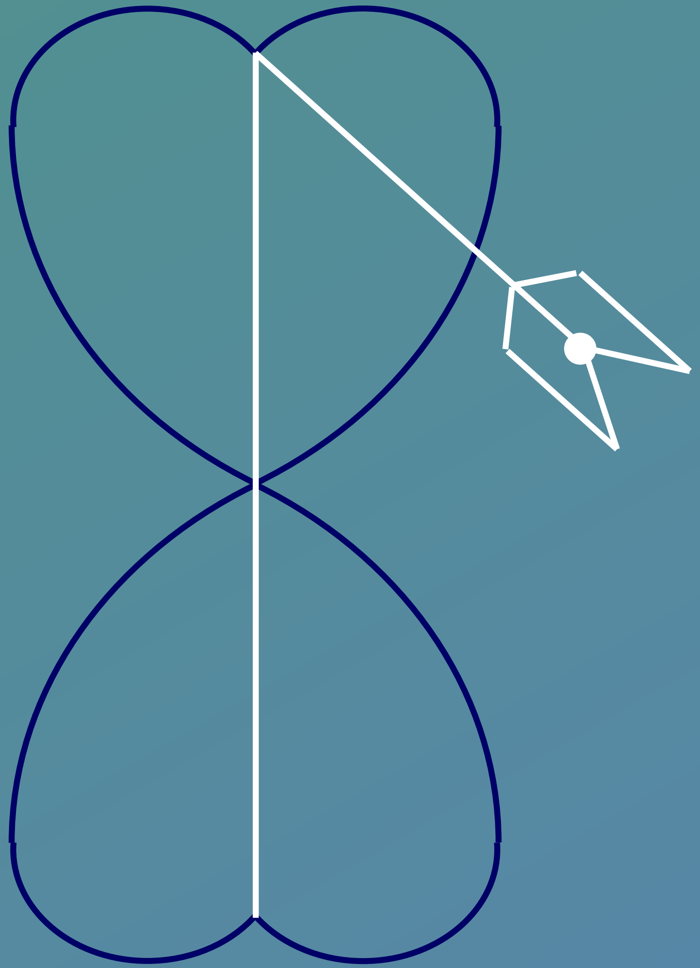
Trouver une *chaîne eulérienne* dans le graphe ci-dessous:

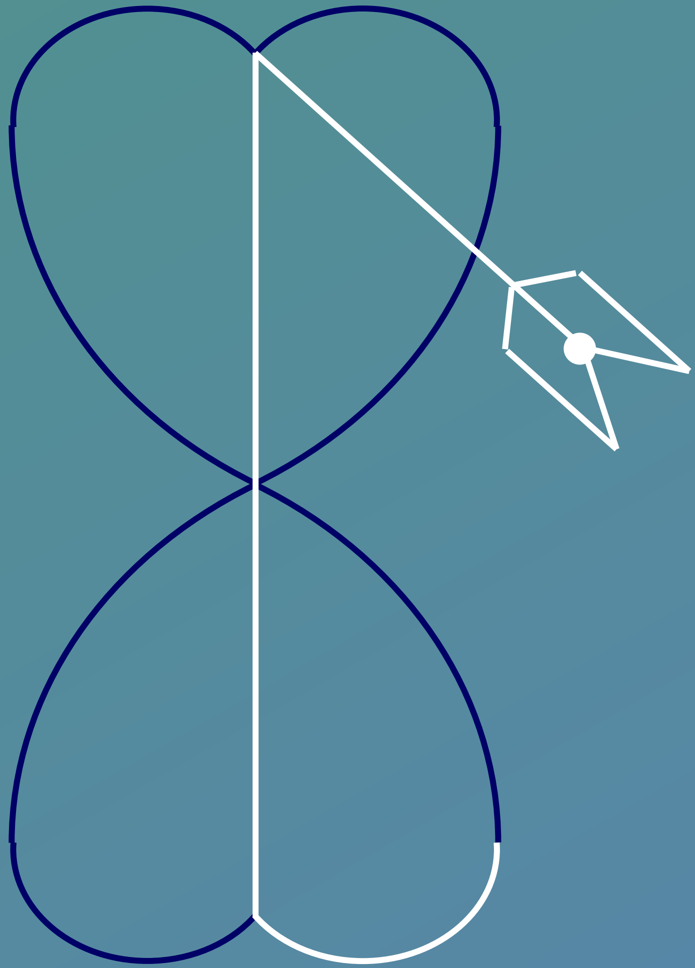


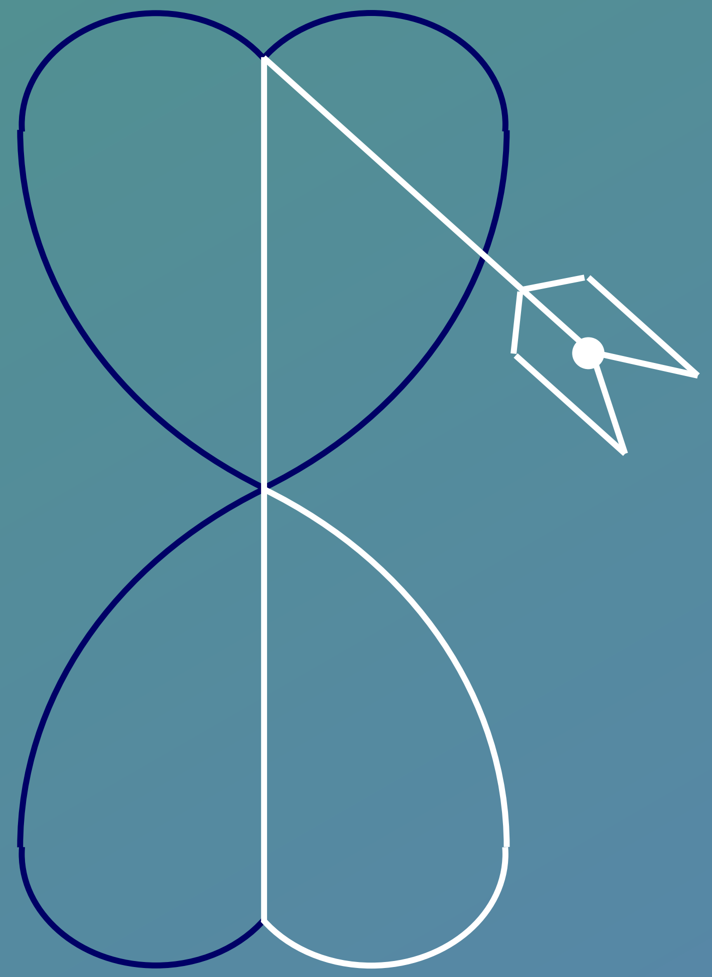


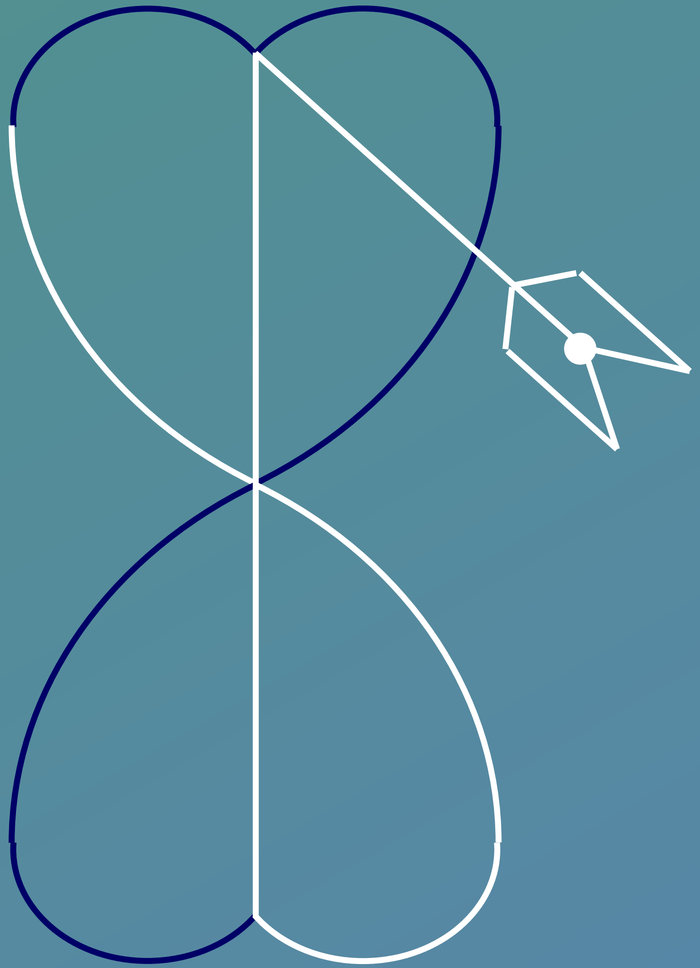


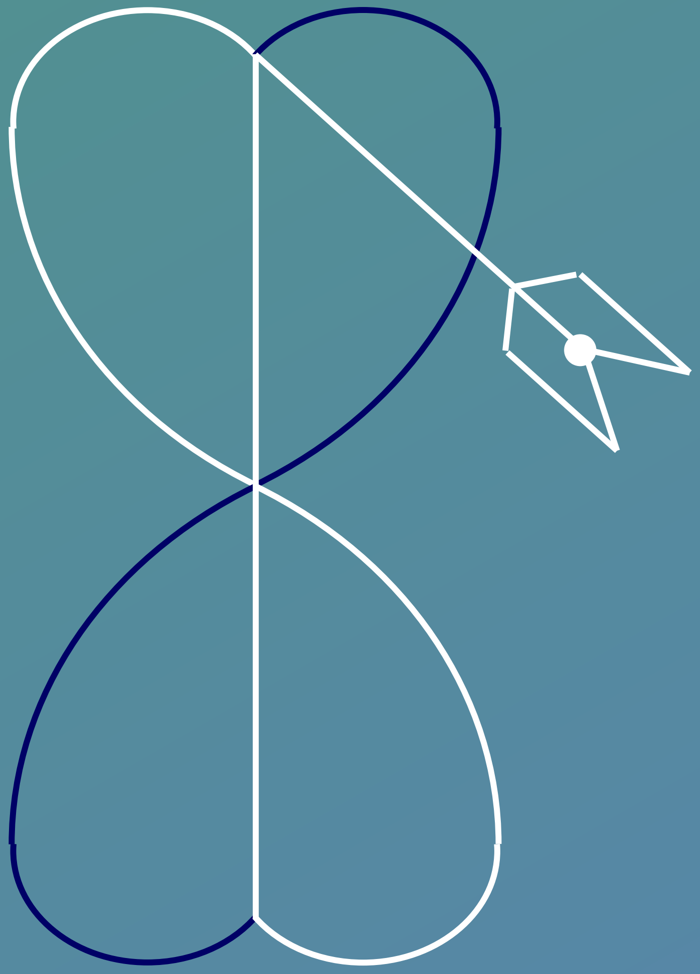


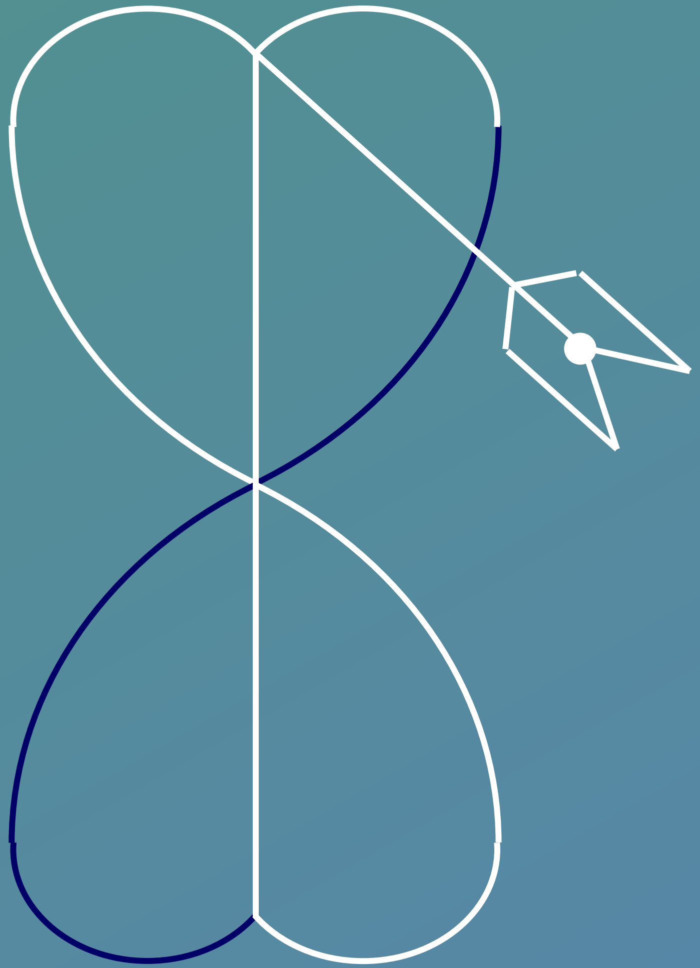


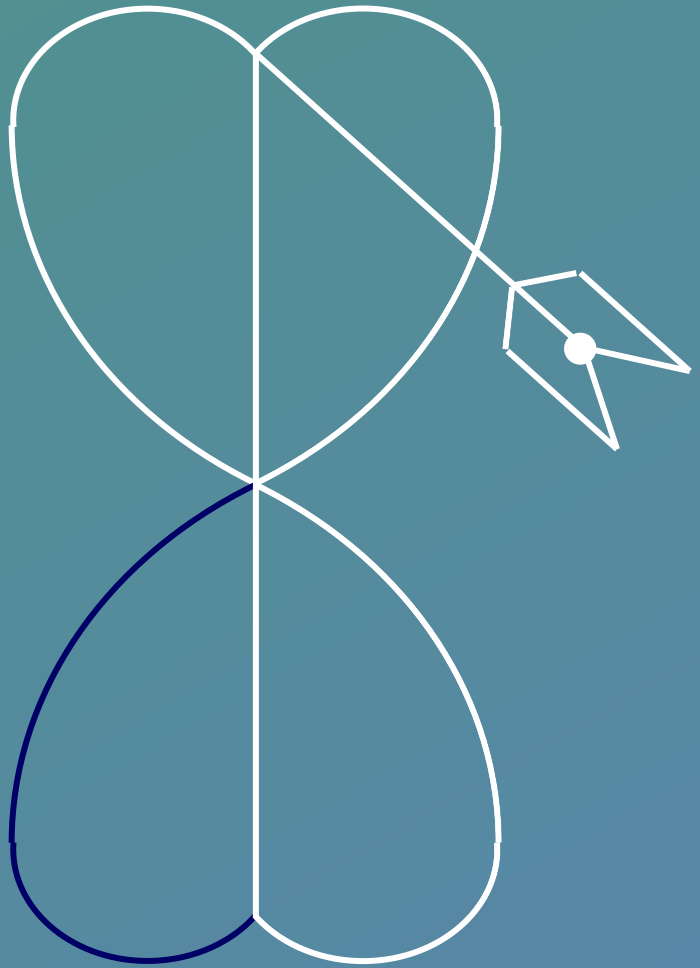


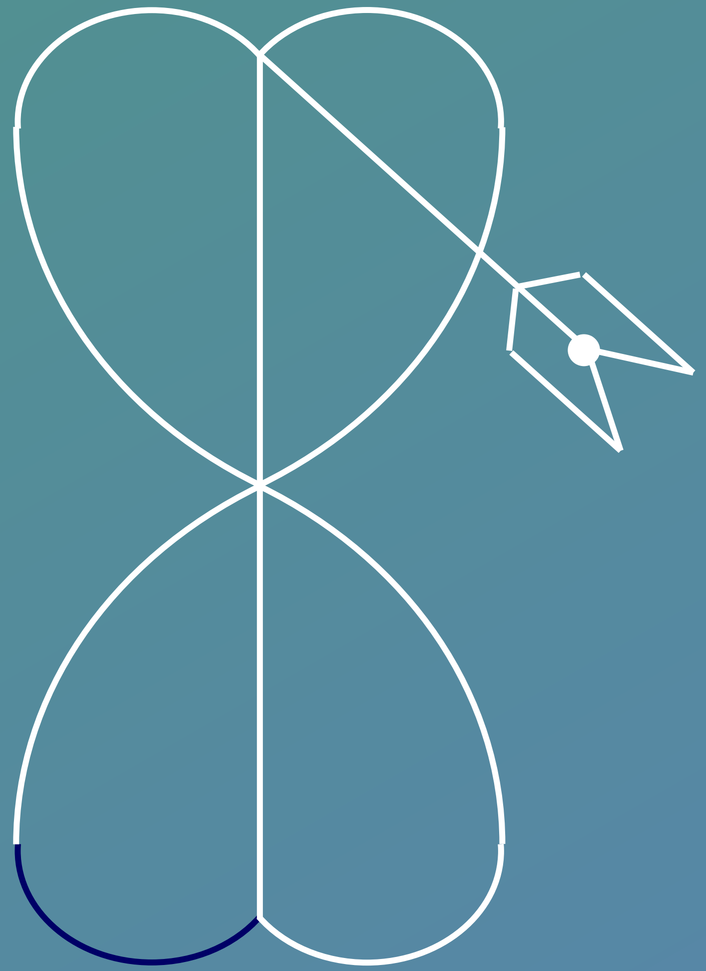


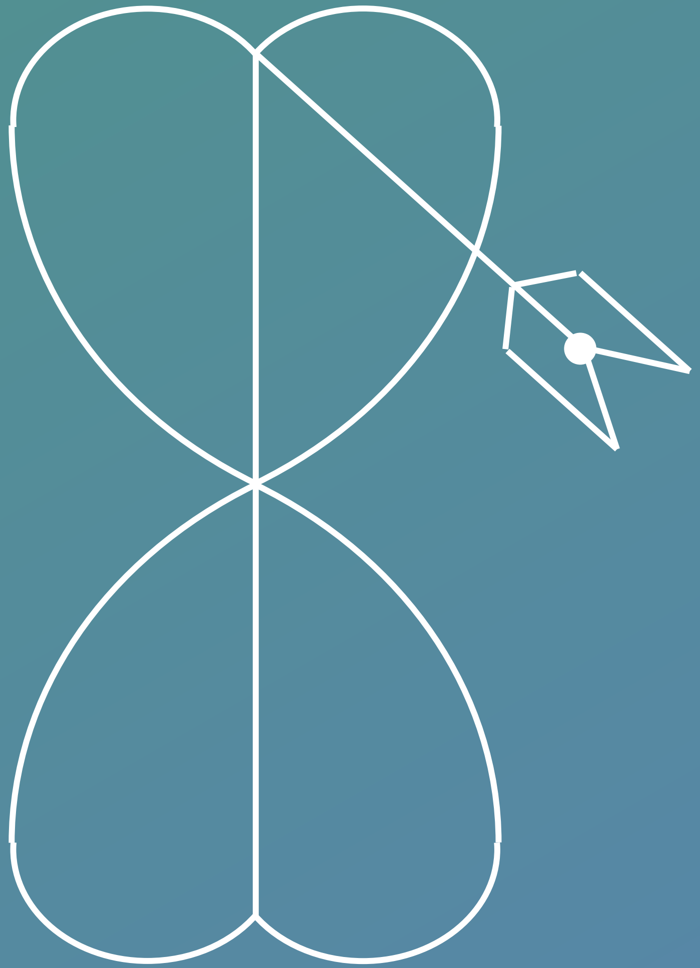












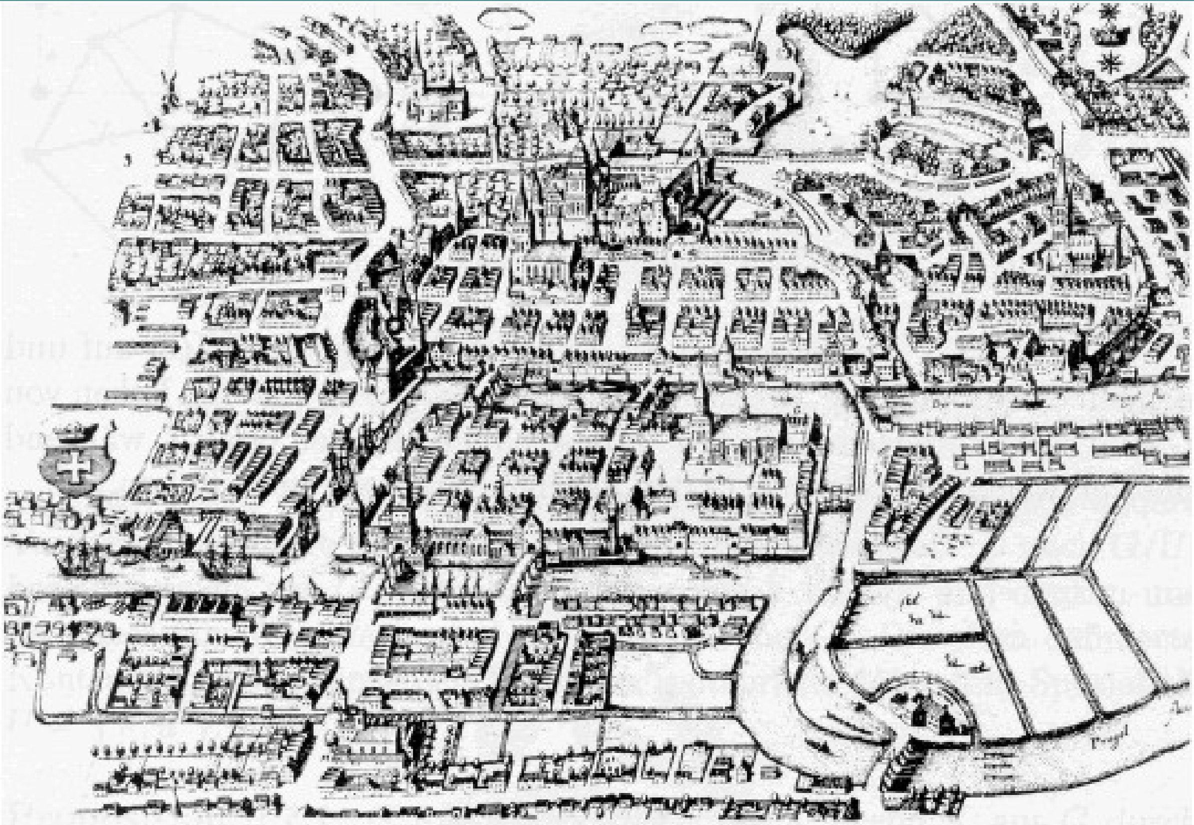
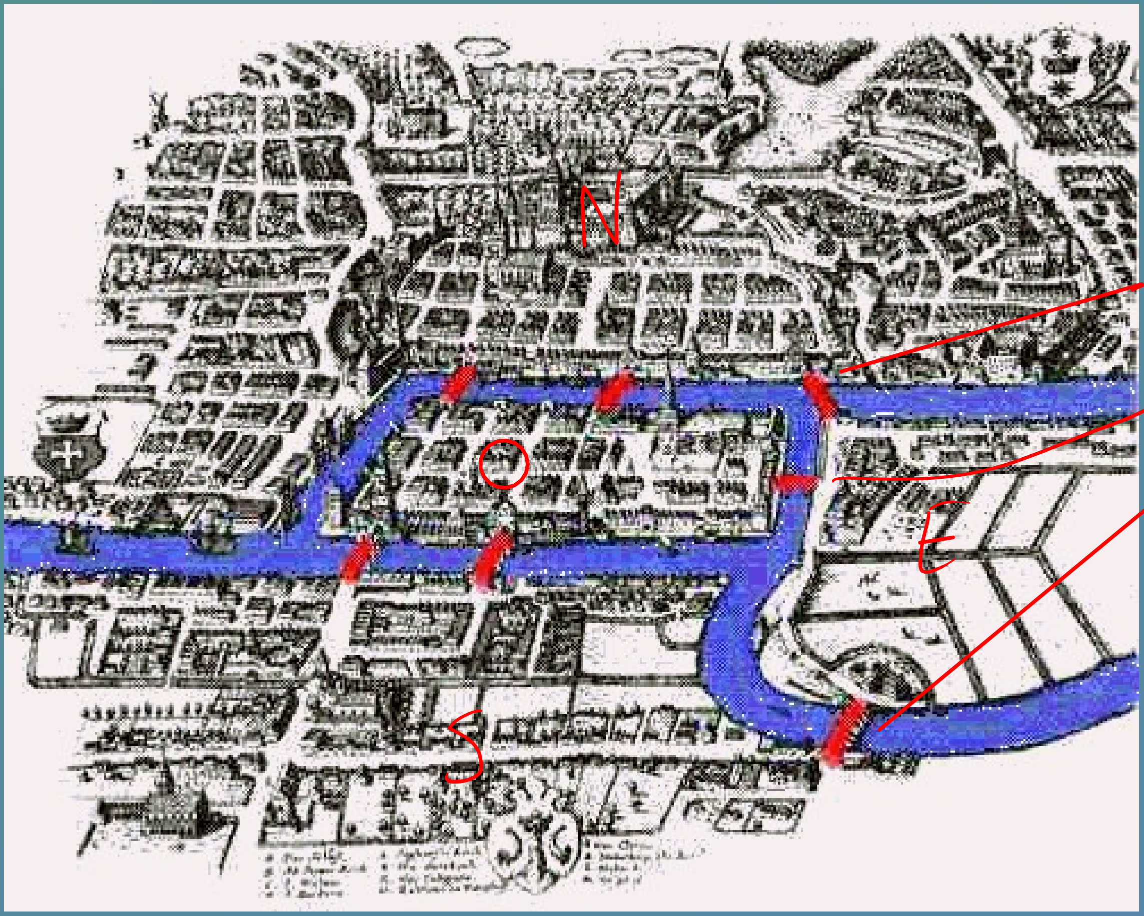


*Abb. 0.8.1.* Die Königsberger Brücken (anno 1736)

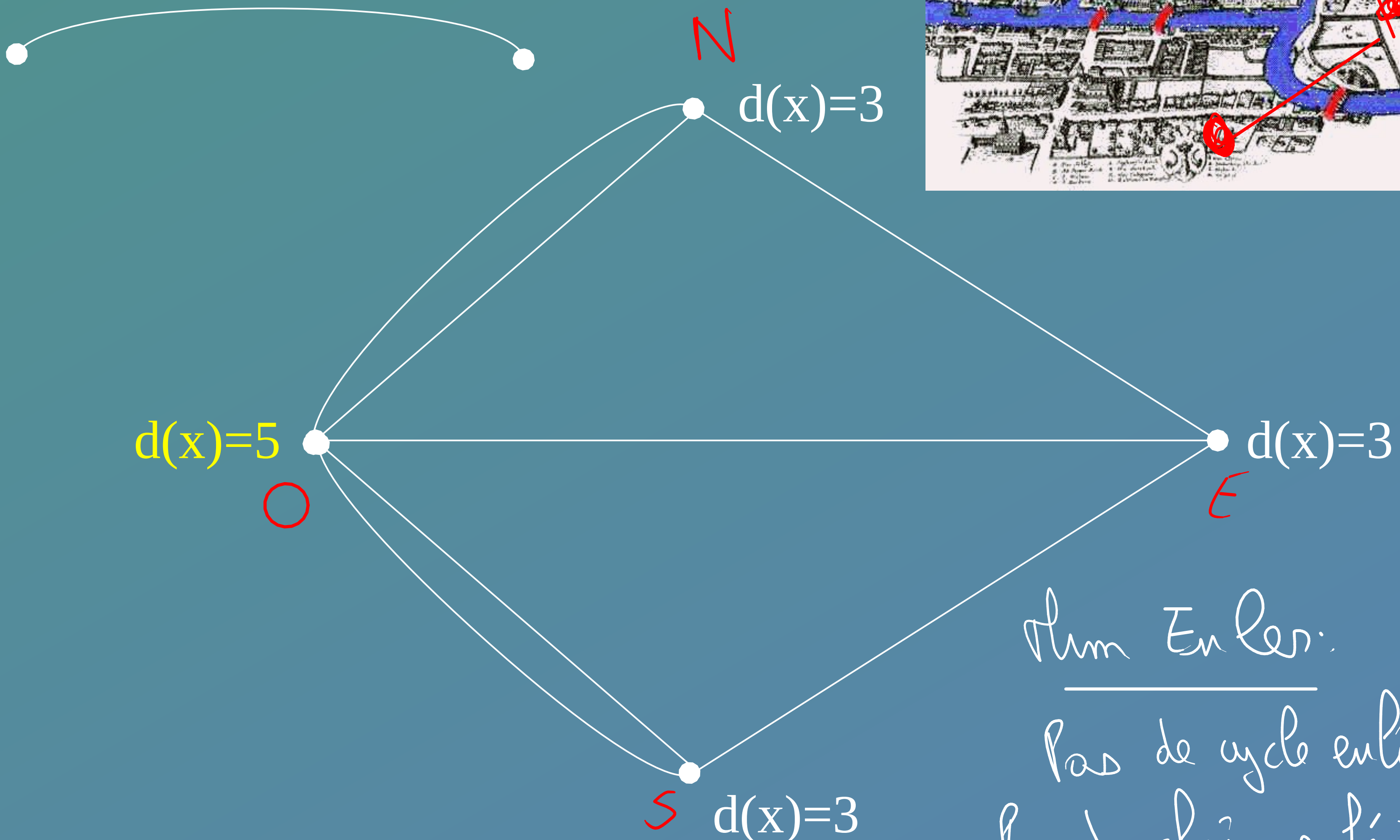

Königsberg i. Pr.
Schloßteichbrücke

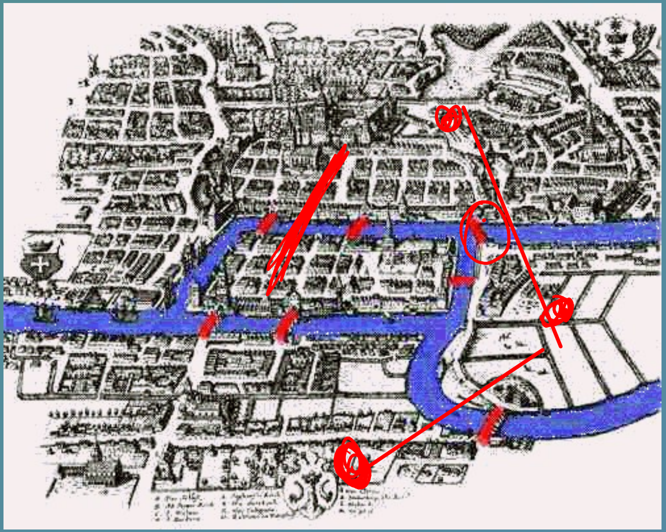



pont

*Abb. 0.8.1.* Die Königsberger Brücken (anno 1736)

un pont = une arête



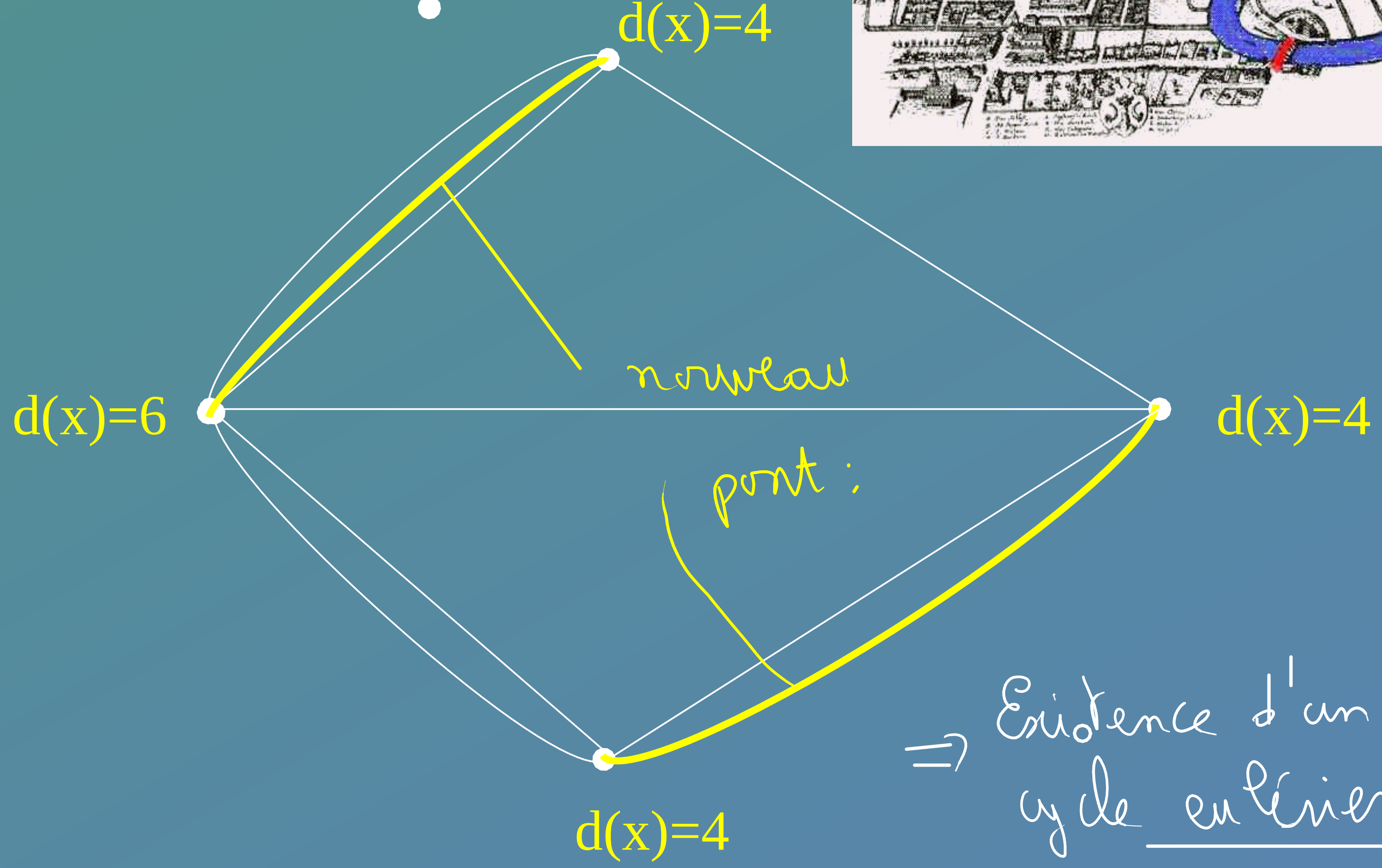



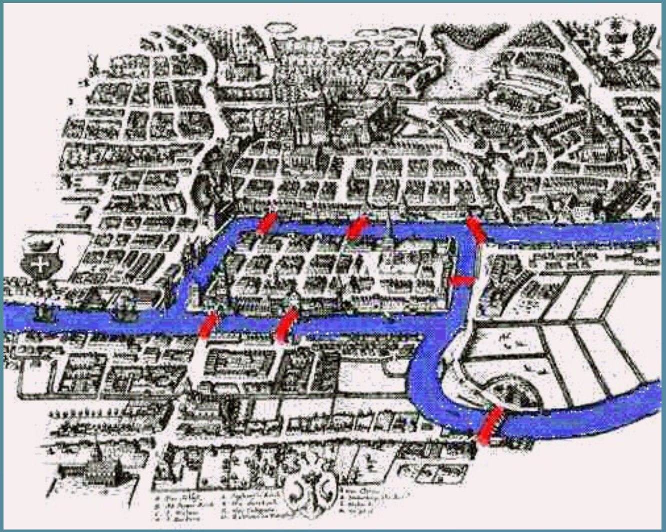
Thm Euler:

Pas de cycle eulérien

Pas de chaîne eulérienne

un pont = une arête



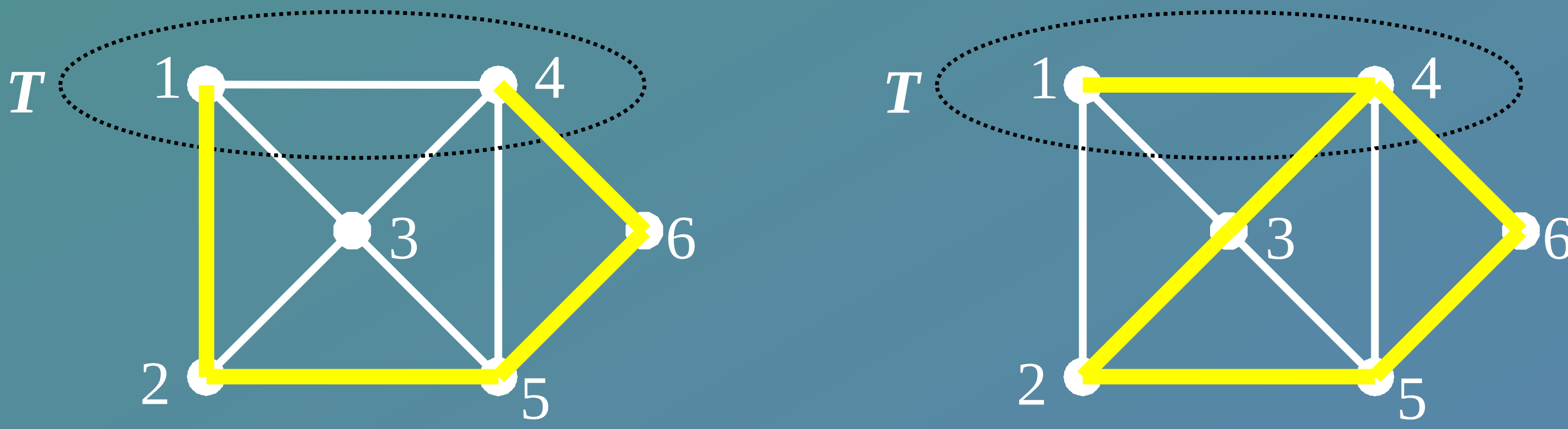



⇒ Existence d'un cycle eulérien

Soit $T \subset X$ un sous-ensemble de sommets du graphe $G=(X, E)$.

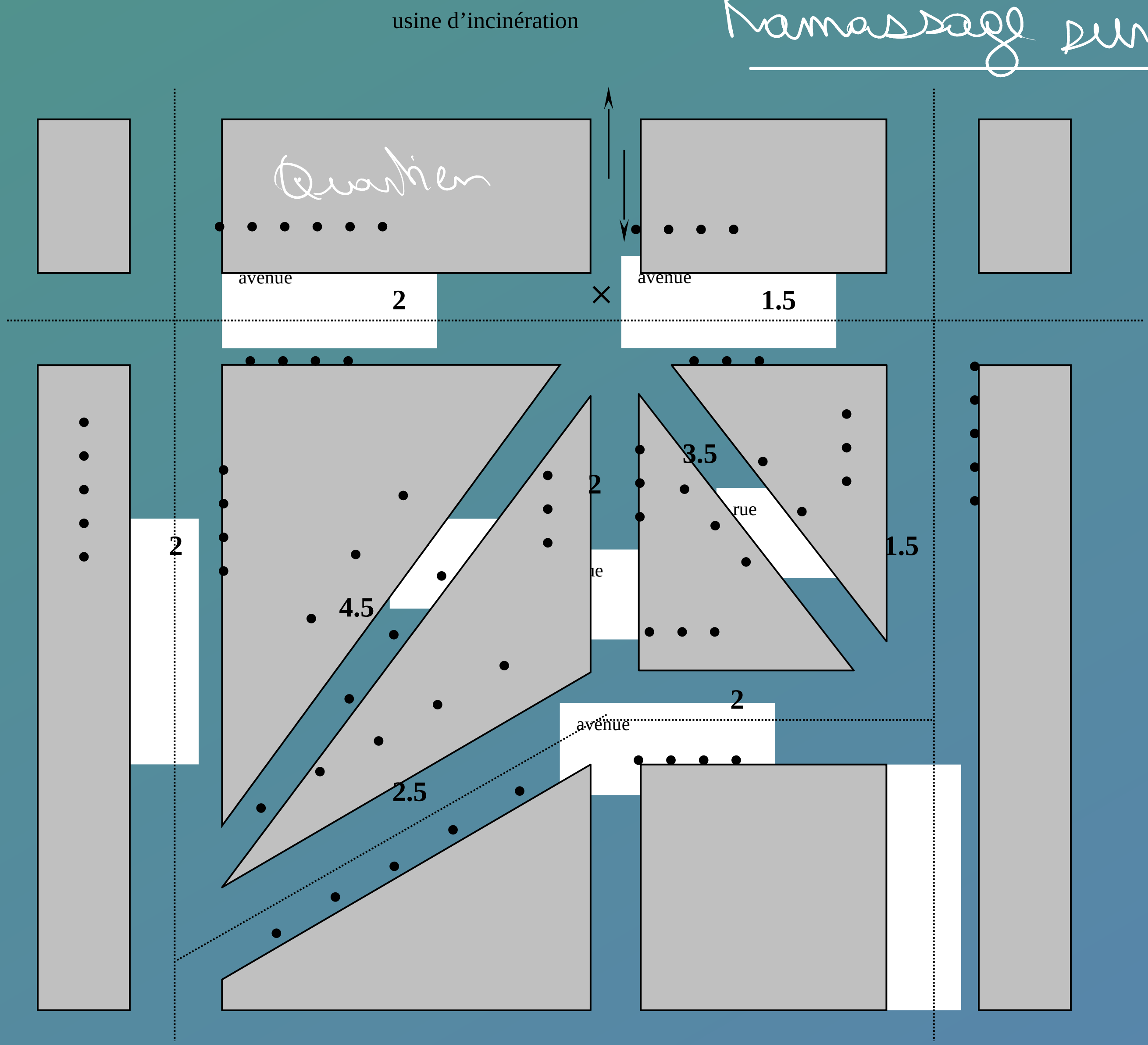
On appelle ***T–joint*** le sous-ensemble d’arêtes $J \subset E$ tel que $T$ est exactement l’ensemble des sommets de degré impair du graphe partiel $G'=(X, J)$.

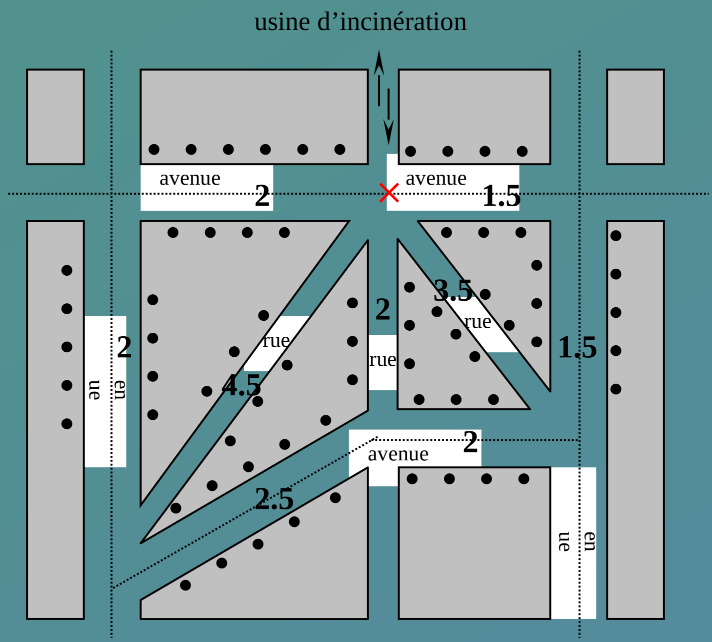
Ci-dessous nous illustrons deux $T$–joints pour $T=\{1, 4\}$.



# Ramassage sur bus.

Avenues pondérées



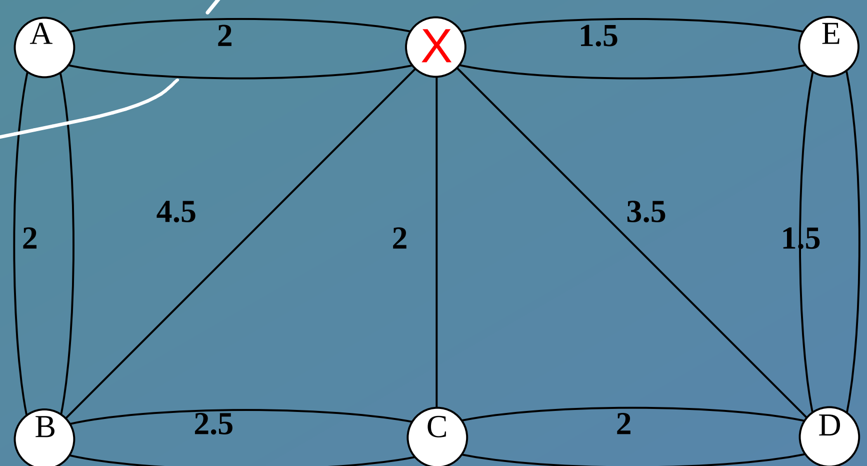



Le temps total du parcours = temps de ramassage (34 min.) + le temps nécessaire pour traverser un circuit qui commence et finit en X.

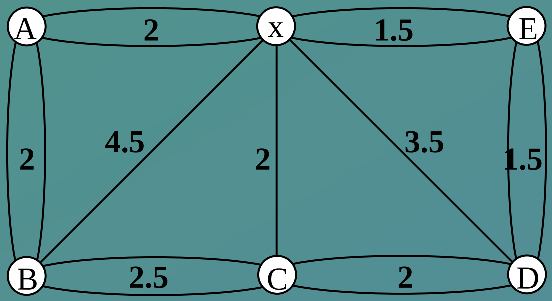
Pour ramasser toutes les poubelles (sans repasser sur celles déjà ramassées)

rue n° pair

rue n° impair




On doit chercher un cycle eulérien




le temps total pour traverser une seule fois chaque segment = 33 min.

\+ ramassage 34 min.

total = 67 min.

n'existe pas

Le ***cycle eulérien*** (qui traverse chaque arête une seule fois) n'existe pas car le graphe possède 4 sommets de degrés impairs (d(x)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5).

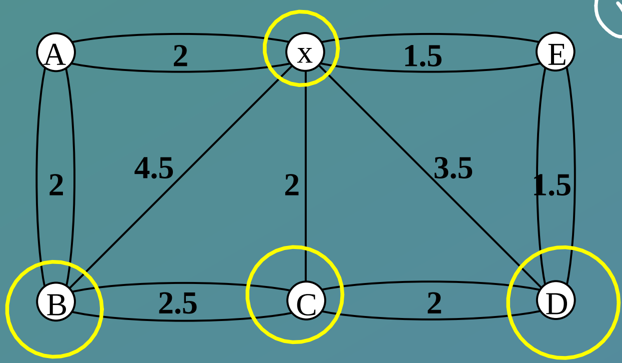
pas de chaîne eulérienne.

## *... moins contraint : Problème du postier chinois :*

Trouver une ***chaîne fermée de longueur totale minimale*** qui traverse chaque arête au moins une fois.

# Problème du postier chinois :

Trouver une ***chaîne fermée de longueur totale minimale*** qui traverse chaque arête au moins une fois.

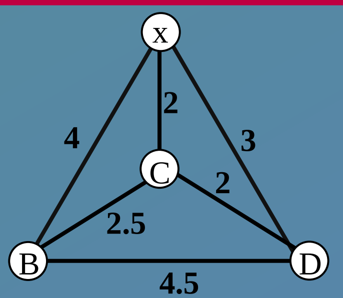



Graphe non simple.

$\Rightarrow$ Il existe 4 sommets de degrés impairs

d(X)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5

$\Downarrow$



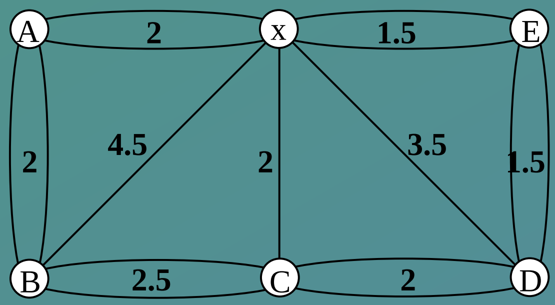

*Graphe simple (invariance parité des degrés)*

On rajoute des arêtes sur des sommets de degré impair de sorte que le théorème d'Euler soit applicable.

Pb: Où ajouter des arêtes ?

pour obtenir des degrés pairs

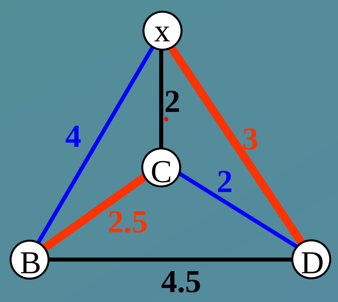
On peut supprimer A et E sans perte de généralité




il existe 4 sommets de degrés impairs

d(X)=7 et d(B)=d(C)=d(D)=5

**Définition** : *Couplage = Ensemble d'arêtes non adjacentes*



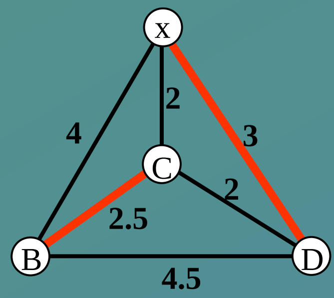

couplage {XC; BD} de poids 6,5

couplage {XB; CD} de poids 6

couplage {XD; BC} de poids 5,5

***le couplage de poids minimum***

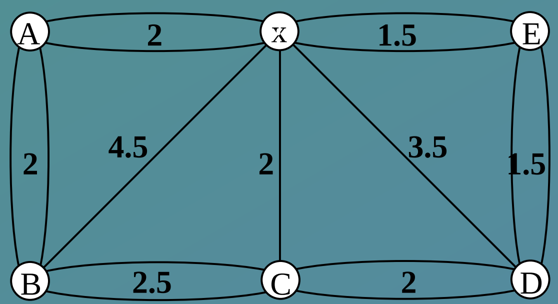
Si on rajouter des arêtes, on les ajoute sur le couplage rouge.

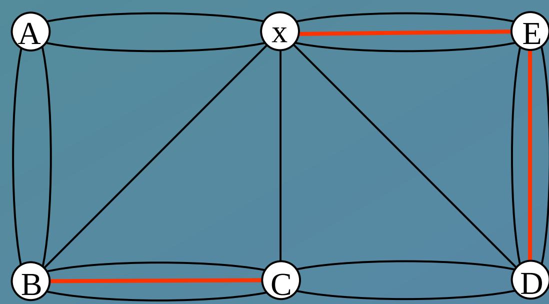



***le couplage de poids minimum*** {XD; BC}

$d(A) = 4$, $d(B) = 6$, $d(C) = 6$

$d(D) = 6$, $d(E) = 6$, $d(X) = 8$




existence d'un cycle eulérien

**X ⇒ A ⇒ B ⇒ C ⇒ D ⇒ E ⇒ X ⇒ B ⇒ C ⇒ X ⇒ E ⇒ D ⇒ C ⇒ B ⇒ A ⇒ X ⇒ D ⇒ E ⇒ X**

cycle eulérien

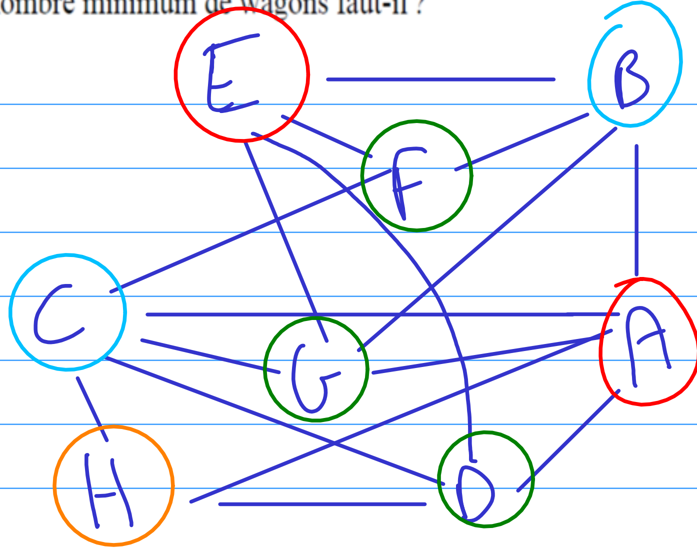
Exercice 5

On veut transporter des produits chimiques par le rail. A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit produits chimiques. Dans le tableau ci-dessous, une croix signifie que les produits ne peuvent pas être entreposés dans le même wagon, car il y aurait risque d'explosion :

| | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | x | x | x | | | x | x |
| B | x | | | | x | x | x | |
| C | x | | | x | | x | x | x |
| D | x | | x | | x | | | x |
| E | | x | | x | | x | x | |
| F | | x | x | | x | | | |
| G | x | x | x | | x | | | |
| H | x | | x | x | | | | |

contraintes

Quel nombre minimum de wagons faut-il ?




On peut modéliser le problème par un graphe de sorte qu'un sommet soit un produit et une arête entre i et j existe si i et j ne peuvent pas être ensemble.

Dès lors, le tableau correspond à la matrice d'adjacence où 1 croix correspond à 1 arête et une case vide à 0.

| $x$ | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | 5 | 4 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 |

Deux sommets adjacents ne doivent pas être dans le même wagon donc si on détermine un coloriage du graphe où une couleur correspond à un wagon, les contraintes seront vérifiées et le nombre chromatique sera le nombre de wagons minimal.

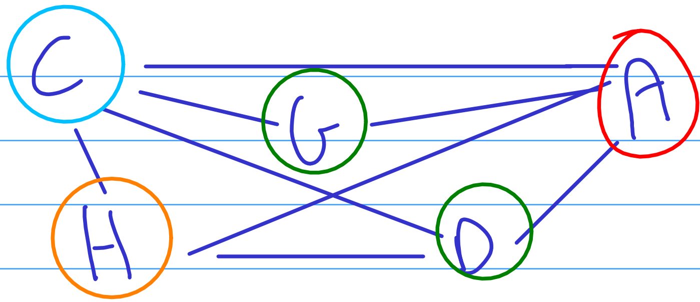
## Algorithme glouton pour le coloriage.

- on trie les sommets par degré décroissant
- on colorie le sommet du plus haut degré puis utilisons cette couleur pour tous les autres sommets non adjacents.
- on réitère jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommets à colorer.

| $x$ | $d(x)$ |
|---|---|
| A | 5 |
| C | 5 |
| B | 4 |
| D | 4 |
| E | 4 |
| G | 4 |
| F | 3 |
| H | 3 |

On a trouvé un 4-coloriage. Est-ce le minimum de couleurs ?

On considère le sous graphe $\overbrace{C-A-G}^{K_3}-H-D$




Il faut nécessairement 3 couleurs pour colorier C-A-G ($K_3$)

Puis, on doit nécessairement attribuer une nouvelle couleur pour H ou D.

Finalement le nombre chromatique est 4 et il faut quatre wagons.