Cours de mathématiques
Deuxième année

Jérémy Rouot

EPF: École d'Ingénieur-e-s

Version du 25 mars 2018

Table des matières

Chapitre 1

Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Rappels

1.1.1 Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition 1. *Soit E un ensemble muni d'une opération d'addition notée $+$ et d'une opération de multiplication par un scalaire (réel ou complexe) notée $\cdot$. On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si :*

1. *$(E,+)$ est un groupe commutatif :*
   (a) $u+v=v+u$ *(pour tout $u,v\in E$)*
   (b) $u+(v+w)=(u+v)+w$ *(pour tout $u,v,w\in E$)*
   (c) *Il existe un* ***élément neutre*** $0_E\in E$ *tel que* $u+0_E=0_E+u=u$ *(pour tout $u\in E$)*
   (d) *Tout $u\in E$ admet un* ***symétrique*** u' *tel que* $u+u'=0_E$
   Cet élément u' est noté $-u$.
2. *L'opération $\cdot$ vérifie :*
   (a) $\lambda\cdot u$ *(pour tout $u\in E$, $\lambda\in\mathbb{R}$)*
   (b) $1\cdot u=u$ *(pour tout $u\in E$)*
   (c) $\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u$ *(pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)*
   (d) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$ *(pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $u,v\in E$)*
   (e) $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$ *(pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $u\in E$)*

Les éléments de E sont appelés ***vecteurs*** et ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés ***scalaires***.

Définition 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est* ***un sous-espace vectoriel*** *de E si et seulement si :*

- *F est un sous-ensemble non vide de E.*
- *$\forall (u, v) \in F^2$ et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$.*

Exemple 1. ♣ *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?*

- $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant y\}$.
- $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Sous-espace vectoriel.

- F est ***un sous-espace vectoriel*** de E si, et seulement si, $F \subset E$, $0_E \in F$ et toute combinaison linéaire de vecteurs de F est dans F. F a la structure d'espace vectoriel.
- Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E. Le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathscr{F}$ est noté $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et correspond à l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathscr{F}$.
- $\mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ est aussi, l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathscr{F}$.

Famille libre et famille génératrice.

- Une famille de vecteurs $\mathscr{F}$ de E est ***génératrice*** si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$,.
- Une famille génératrice de $\mathrm{vect}(\mathscr{F})$ est $\mathscr{F}$.
- Une famille de vecteurs de E est ***libre*** si, et seulement si, toute combinaison linéaire à coefficients non tous nuls est différente du vecteur nul. On dit aussi que les vecteurs d'une famille libre sont ***linéairement indépendants***.
- Une famille de vecteurs de E est ***liée*** si elle n'est pas libre. On dit aussi que les vecteurs d'une famille liée sont ***linéairement dépendants***.

Base.

- Une famille de vecteurs de E qui est libre et génératrice est appelée une ***base***.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
- Tout vecteur s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs d'une base.

Dimension.

- Toutes les bases ont le même cardinal, ce nombre correspond à la dimension de E.
- Si $F \subset E$ est sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leqslant \dim E$.
- Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

1.1.2 Matrices et applications linéaires

Définitions.

- E et F deux espaces vectoriels et f une application de E vers F. On dit que f est ***une application linéaire de*** E ***dans*** F si et seulement si :
  — $\forall (u,v) \in E^2, f(u+v) = f(u) + f(v)$,
  — $\forall u \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda f(u) = f(\lambda u)$.
- $\mathscr{L}(E,F)$ est ***l'ensemble des applications linéaires*** de E dans F.
- Une application linéaire de E dans E est appelée ***un endomorphisme*** . On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
- ***L'image de*** f , notée $\mathrm{Im} f$, est définie par : $\mathrm{Im} f = \{v \in F \,|\, \exists u \in E, f(u) = v\}$. C'est un sous-espace vectoriel de F.
- ***Le noyau de*** f , noté $\ker f$ est défini par $\ker f = \{u \in E \,|\, f(u) = 0_F\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit A^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

  $$A^0 = I_n \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \; A^k = A^{k-1} \times A.$$

  On en déduit facilement que : $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \quad A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, on définit f^k par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$:

  $$f^0 = Id_E \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad f^k = f^{k-1} \times f.$$

  On en déduit de même que : $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \quad f^k \circ f^l = f^l \circ f^k = f^{k+l}$.

1.2 Produit et somme d'espaces vectoriels

1.2.1 Le cas de deux espaces vectoriels

Produit de deux espaces vectoriels.

Définition 3 (Produit de deux espaces vectoriels)**.** *Soient E et F deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels. On appelle* ***produit cartésien*** *de E et de F l'ensemble des couples formés par un vecteur de E et un vecteur de F.*

$$E \times F = \{(v_1, v_2) \,|\, v_1 \in E,\, v_2 \in F\}.$$

Exemple 2. ♣ *Soient* $E_1 = \mathbb{R}$ *et* $E_2 = \mathbb{R}$*. Trouver et dessiner* $E_1 \times E_2$*.*

Théorème 1 (Dimension d'un produit de deux espaces vectoriels)**.**

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim E_1 \times \dim E_2.$$

Démonstration. ♣

□

Somme de deux sous-espaces vectoriels.

Définition 4 (Somme de deux sous-espaces vectoriels)**.** *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle* ***somme*** *de F et G, et on note $F+G$, l'ensemble défini par*

$$F+G = \{u+v \mid u \in F \text{ et } v \in G\}.$$

Exemple 3. ♣ *Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0\}$ et $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 0\}$. Trouver $F+G$.*

Théorème 2. • *$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément,*

$$F+G = \mathrm{Vect}(F\cup G).$$

- *Formule de Grassmann.*

$$\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E\cap F).$$

Remarque. *$F\cup G$ n'est pas nécessairement un espace vectoriel (donner un contre exemple). Si c'est pour cela que l'on s'intéresse à* $\mathrm{Vect}(F\cup G)$ *qui est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F\cup G$.*

Exemple 4. • ♣ *Si $E=\mathbb{R}^2$ et (u,v) une base de $\mathbb{R}^2$. Que vaut $u\mathbb{R}+v\mathbb{R}$?*

- ♣ *Même question si (u,v) est une famille liée.*

Définition 5 (Somme directe)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **en somme directe** si $F\cap G=\{0\}$.*

1.2.2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 6 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires)**.** *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont dits **supplémentaires** dans E si tout élément de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Autrement dit pour tout $v\in E$, il existe un unique couple $(v_1,v_2)\in F\times G$ tel que $v=v_1+v_2$.

Proposition 1. *Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si, et seulement si,*

$$\boxed{E = F\oplus G.}$$

Espaces vectoriels supplémentaires

Une méthode efficace pour montrer que deux espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E est de vérifier que F et G sont bien des sous-espaces vectoriels de E puis de prouver que $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(F+G) = \dim E$.

Exemple 5. *1. ♣ Montrer que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x-y-z=0\}$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y=z=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.*

2. ♣ Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles. On note E_1 le sous-ensemble de E des fonctions paires et E_2 le sous-ensemble des fonctions impaires. Montrer que $E = E_1 \oplus E_2$.

1.2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Ici on généralise la somme et le produit d'un nombre $p \geqslant 2$ d'espaces vectoriels.

Définition 7. *Soient E un espace vectoriel et $F_1, F_2, \ldots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On appelle* ***somme des sous-espaces vectoriels*** *$F_1, F_2, \ldots, F_p$ l'ensemble formé par des combinaisons linéaires des vecteurs de chaque sous-espace vectoriel F_i.*

$$\sum_{k=1}^{p} F_k = F_1 + F_2 + \ldots + F_p = \{u \in E |\ \textit{il existe}\ (v_1, \ldots, v_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i\ \textit{tel que}\ u = v_1 + \ldots + v_p\}.$$

On dit que la somme $\sum_{k=1}^{p} F_k$ est ***directe*** lorsque la décomposition est unique.

$$\bigoplus_{k=1}^{p} F_k = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_p = \{u \in E |\ \text{il existe un unique p-uplet}(v_1, \ldots, v_p) \in \prod_{i=1}^{p} E_i\ \text{tel que}\ u = v_1 + \ldots + v_p.\}$$

Proposition 2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E,*

- *L'ensemble* $\sum_{k=1}^{p} F_k$ *est un sous-espace vectoriel de E,*
- *L'ensemble* $\sum_{k=1}^{p} F_k$ *est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant* $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$,
- $\sum_{k=1}^{p} F_k = \mathrm{Vect}\left(\bigcup_{k=1}^{p} F_k\right)$.
- $\dim\left(\sum_{k=1}^{p} F_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(F_k)$.

Exemple 6. ♣ *Soit* $E_1 = \mathrm{Vect}((2,0,2))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((0,1,0))$, $E_3 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$. *Trouver* $\dim(E_1 + E_2 + E_3)$. *Est-ce que la somme est directe ?*

Proposition 3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $F_1, F_2, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On a équivalence entre*

- *La somme* $\sum_{k=1}^{p} F_k$ *est directe.*
- $\forall (v_1, \dots, v_p) \in \prod_{k=1}^{p} F_k$, $\sum_{k=1}^{p} v_k = 0_E \Rightarrow$ *pour tout* $k = 1, \dots, p \quad v_k = 0_E$.
- $\forall i = 1, \dots, p \quad F_i \cup \left(\bigoplus_{k=1}^{p} F_k\right) = 0_E$.

Remarque. *Il ne suffit pas que les sous-espaces vectoriels soient en somme directe deux à deux !*

Exemple 7. *Soit E un espace vectoriel et (e_1, e_2) une famille libre de E (on suppose donc* $\dim(E) \geqslant 2$*). Posons* $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$, $E_2 = \mathrm{Vect}(e_2)$ *et* $E_3 = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2)$.

1. ♣ *Montrer que la somme $E_1 + E_2 + E_3$ n'est pas directe.*

2. ♣ *Montrer que* $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = E_2 \cap E_3 = 0$.

Proposition 4. *Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \text{ et } E = \sum_{k=1}^{p} F_k.$$

Si, de plus, $F_1, \dots, F_p$ sont de dimension finie alors

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \Leftrightarrow \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \text{ et } \dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k \Leftrightarrow E = \sum_{k=1}^{p} F_k \text{ et } \dim E = \sum_{k=1}^{p} \dim F_k.$$

Exemple 8. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Vect}(e_k).$$

On a aussi

$$E = \mathrm{Vect}(e_1) \bigoplus_{k=2}^{n} \mathrm{Vect}(e_k) = \dots$$

On obtient une décomposition en somme directe par ***fractionnant une base*** de E.

Bases adaptées.

Proposition 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F un sous-espace vectoriel de E. Toute famille libre de F peut-être complétée en une base de E.*
Toute base de E dont les premiers vecteurs forment une base de F est appelée ***base adaptée au sous-espace vectoriel*** F.

Définition 8. *Soit E un espace vectoriel et $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$. Une base de E obtenue en concaténant des bases de chaque sous-espaces vectoriel F_k est appelée* ***base adaptée à la somme directe*** $\bigoplus_{k=1}^{p} F_k$.

Exemple 9. *On considère les vecteurs $\vec{v}_1 = (1,0,0,1)$, $\vec{v}_2 = (0,0,1,0)$, $\vec{v}_3 = (0,1,0,0)$, $\vec{v}_4 = (0,0,0,1)$, $\vec{v}_1 = (0,1,0,1)$ dans $\mathbb{R}^4$.*

1. ♣ $F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ *et* $F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_3)$ *sont-ils supplémentaires dans* $\mathbb{R}^4$ *? Si oui, donner une base adaptée à la somme directe* $F_1 \oplus F_2$.

2. ♣ $F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ *et* $F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_4, \vec{v}_5)$ *sont-ils supplémentaires dans* $\mathbb{R}^4$ *? Si oui, donner une base adaptée à la somme directe* $F_1 \oplus F_2$.

3. ♣ $F_1 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_4)$ *et* $F_2 = \mathrm{Vect}(\vec{v}_3, \vec{v}_5)$ *sont-ils supplémentaires dans* $\mathbb{R}^4$ *? Si oui, donner une base adaptée à la somme directe* $F_1 \oplus F_2$.

Remarque.
- *Les matrices d'endomorphismes dans des bases adaptées ont des formes particulières, plus simples.*
- *Pour définir un endomorphisme sur E, il suffit de le définir sur chaque sous-espace vectoriel qui forme une décomposition de E.*

Proposition 6. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels. $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe dans E : $E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$. Soient $u_1 \in \mathscr{L}(F_1, F), \ldots, u_p \in \mathscr{L}(F_p, F)$. Alors, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(F, F)$ telle que*

$$\forall i = 1, \ldots, p, \quad u_{|F_i} = u_i.$$

1.3 Matrices et endomorphismes

Définition 9 (Polynôme d'une matrice)**.** *Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, ce que l'on note $P \in \mathbb{K}[X]$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée, on définit $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par*

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0.$$

Exemple 10. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(A) = A^3 + 2A + I_n$. Alors $P(X) = X^3 + 2X + 1$.*

Proposition 7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $\phi_A : \mathbb{K}[X] \ni P \to P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est linéaire.*

♣ *Que signifie la linéarité de ϕ_A ?.*

Proposition 8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors $\forall\,(P(X), Q(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$ $P(A)Q(A) = (PQ)(A)$.*

Exemple 11.
- *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = P(A) = A^2 - A - 6I_n$. Alors $P(X) = X^2 - X - 6$. Comme $P(X) = (X-3)(X+2)$, on a $B = (A-3)(A+2)$.*
- ♣ *Montrer que* $\ker Q(A) \subset \ker(PQ)(A)$.

Définition 10 (Polynôme d'un endomorphisme)**.** *Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels, ce que l'on note $P(X) \in \mathbb{R}[X]$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme d'un espace vectoriel E, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par*

$$P(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0.$$

Proposition 9. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.*
- *L'application $\phi_f : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ est linéaire.*
- *$\forall\,(P(X), Q(X)) \in \mathbb{K}[X]^2$ $P(f)Q(f) = (PQ)(f)$.*

Faisons maintenant le lien entre polynômes d'endomorphismes en dimension finie et polynômes de matrices.

Proposition 10. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$ ainsi qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Si l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ a pour matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ relativement à la base $\mathscr{B}$, alors l'endomorphisme $P(f)$ a pour matrice $P(A)$ relativement à cette base $\mathscr{B}$.*

♣ *Reformuler cette proposition.*

Définition 11. *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0$. On définit de même un polynôme annulateur de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exemple 12. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = P(A) = A^3 + 2A + I_n$. Alors $P(X) = X^3 + 2X + 1$.*

- *Le polynôme $X - 1$ est annulateur de Id_E (respectivement de I_n).*
- ♣ *Quel est le polynôme annulateur de la matrice diagonale* $\mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ *?*

Certains résultats déjà connus peuvent également être reformulés en termes de polynômes annulateurs.

Exemple 13.
- *Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est un **projecteur** de E si, et seulement si, $p^2 = p$. Le polynôme $X^2 - X$ est annulateur de p.*
- *Un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ est une **symétrie** de E si, et seulement si, $s^2 = Id_E$.*

  ♣ *Quel est un polynôme annulateur de s ?*

Exercice. ♣ *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A non nul et de degré au plus n^2.*

Applications au calcul de l'inverse et des puissances.

Définition 12 (Matrice inverse)**.** *Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que*

$$AB = I_n \qquad \text{et} \qquad BA = I_n,$$

*on dit que A est **inversible**. On appelle B l'**inverse de** A et on la note A^{-1}.*

Exemple 14. ♣ *On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

- *Calculer A^2. En déduire A^{-1}.*
- *On pose $B = A + I_n$. Montrer que B^2 et B^3 s'exprime en fonction de B.*
- *Calculer B^k pour $k \in \mathbb{N}$.*

Exemple 15. ♣ *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - A - 2I_n = 0$. Donner A^{-1} en fonction de A et I_n.*

Matrices définies par blocs, opérations. Il est parfois utile de subdiviser une grosse matrice en sous-matrices (blocs) accolées les une aux autres. Par exemple, considérons la matrice

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

où les lignes horizontales et verticales ont été ajoutées pour visualiser plus facilement les blocs. Une manière beaucoup plus synthétique de décrire cette matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_4 & 0_{4,2} \\ 0_{2,4} & 0_{2,2} \end{pmatrix}$$

où I_p est la matrice unité d'ordre p et $0_{k,l}$ est la matrice nulle. Les termes écrits dans la matrice ne sont plus des nombres mais des matrices rectangulaires.

Matrice diagonale et triangulaire par bloc. Soit M une matrice carrée.

Définition 13. *On dit que M est* ***une matrice diagonale par blocs*** *si elle admet une écriture par blocs de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée.

On convient de noter $M = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_p)$ la matrice M décrite ci-dessus.

Définition 14. *On dit que M est une matrice triangulaire supérieure par blocs si elle admet une écriture par blocs de la forme :*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout k, la matrice A_k est carrée.

Notre convention est de noter $*$ dans une matrice lorsqu'il n'y a aucune contrainte sur un coefficient (ou un bloc).

Remarque. • *On définit de manière analogue la notion de matrice triangulaire inférieure par blocs. On dit qu'une matrice est triangulaire par blocs si elle est triangulaire supérieure par blocs ou triangulaire inférieure par blocs.*

- *Une matrice diagonale par blocs est à la fois triangulaire supérieure et inférieure par blocs.*

Opérations par bloc. L'addition et le produit par blocs découlent directement de la définition de l'addition et du produit matriciel.

- Addition par blocs. Soient A et B deux matrices de même taille écrites par blocs. Si pour tout i les blocs A_i et de B_i sont de même taille, alors

$$A+B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1+B_1 & A_2+B_2 \\ A_3+B_3 & A_4+B_4 \end{pmatrix}$$

- Produit par blocs. Si les tailles des blocs sont compatibles, c'est-à-dire que pour tout i, j et k le nombre de colonnes de $A_{i,k}$ est égal au nombre de lignes de $B_{k,j}$, alors

$$A \times B = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1}+A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2}+A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1}+A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2}+A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}$$

Exemple 16. ♣ *Soient $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$. Posons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A, B et D pour que M soit inversible et dans ce cas expliciter M^{-1}.*

Sous-espaces stable et endomorphisme induit.

Définition 15. *Un sous-espace vectoriel F de l'espace vectoriel E est dit* ***stable*** *par $f \in \mathscr{L}(E)$ si $f(F) \subset F$, autrement dit :*

$$\boxed{v \in F \Longrightarrow f(v) \in F.}$$

Dans ce cas on dit que $f_F : F \to F$ est ***l'endomorphisme induit*** *par f sur F.*

Exemple 17. ♣ *Montrer que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $\ker v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.*

Supposons que E est de dimension n, que f est un endomorphisme de E, et que F est un sous-espace de E stable par f. Notons $(e_1,\dots,e_p)$ une base de F. On la complète en une base de E :

$$\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n).$$

La matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

où $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in M_p(\mathbb{R})$ est la matrice de $f_{|F}$ dans la base $(e_1,\dots,e_p)$ de F.

Remarque.
- *f_F est un endomorphisme de F .*
- *Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par $f \in \mathscr{L}(E)$.*
- ***Ne pas confondre : la restriction de f à F , notée $f_{|F}$, qui a toujours un sens et qui appartient à $\mathscr{L}(F,E)$ et l'endomorphisme induit par f sur F noté f_F.***

Exemple 18. ♣ *Montrer qu'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui laisse toutes les droites de E stables est une homothétie.*

Matrices semblables.

Définition 16. *Les matrices A et A' dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites* ***semblables*** *s'il existe une matrice $P \in Gl_n(\mathbb{R})$ telle* *que*

$$A' = P^{-1} A P.$$

Exercice. ♣ *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les matrices semblables à λI_n.*

Proposition 11. *Deux matrices A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables si, et seulement si, elles représentent un même endomorphisme dans deux bases.*

Deux matrices semblables ont le même rang.

Exercice.

- ♣ *Montrer que* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *sont semblables avec* $\lambda \neq 0$.

- ♣ *Montrer que* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

- ♣ *Trouver deux matrices de même rang qui ne sont pas semblables ?*

- ♣ *Prenons deux applications linéaires f et g et une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E tels que*

$$f(e_1) = 0, f(e_2) = e_2, g(e_1) = e_1, g(e_2) = 0.$$

Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont-elles semblables ?

Trace d'une matrice carrée et d'un endomorphisme. Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments a_{11}, $a_{22}, \dots, a_{nn}$ sont appelés les ***éléments diagonaux***.
Sa ***diagonale principale*** est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 17. *La **trace** de la matrice A est le scalaire obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,*

$$\boxed{\operatorname{Tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Exemple 19. • *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, *alors* $\operatorname{Tr} A = 2 + 5 = 7$.

• *Pour* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 8 \\ 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Tr} B = 1 + 2 - 10 = -7$.

Théorème 3. *Soient* A *et* B *deux matrices* $n \times n$*. Alors :*

1. $\operatorname{Tr}(A + B) = \operatorname{Tr} A + \operatorname{Tr} B$,
2. $\operatorname{Tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{Tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{Tr}(A^T) = \operatorname{Tr} A$,
4. $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Remarque. *Deux matrices semblables ont même trace, mais deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables.*

Exemple 20. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

- ♣ *Calculer la trace de* A *et de* B.
- ♣ *Les matrices* A *et* B *sont-elles semblables ?*

Proposition 12 (Définition de la trace d'un endomorphisme)**.** *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie et* $f \in \mathscr{L}(E)$*. La trace de l'endomorphisme* f *est la trace de la matrice de* f *dans n'importe quelle base de* E*.*

Démonstration. ♣

$\square$

1.4 Calculs de déterminants

Calculer un déterminant

Pour calculer un déterminant purement numérique on dispose de l'algorithme du ***pivot de Gauss***. Dans un cadre plus général, il n'y a pas de méthode systématique. On peut envisager notamment :

- d'opérer sur les lignes et les colonnes pour obtenir un déterminant plus simple à calculer,
- ou de faire apparaître ce déterminant comme une valeur particulière d'une fonction (le plus souvent polynomiale) que l'on sait exprimer, mais il existe bien entendu d'autres moyens : produit par blocs, développements successifs pour obtenir une relation de récurrence linéaire, etc.

Rappel : Un déterminant d'une matrice est nul si, et seulement si, la matrice n'est pas inversible, soit encore si, et seulement si, les vecteurs formés par les lignes (ou par les colonnes) ne forment pas une base.

Calcul à la main des matrices 3×3. Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exemple 21. ♣ *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. *Calculer* $\det A$.

Exemple 22. ♣ *Calculer par le pivot de Gauss* $\det A$ *où*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Formule pour la matrice inverse. Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ on lui associe sa ***comatrice***

$$\operatorname{Com} A = \begin{pmatrix} +C_{11} & -C_{12} & +C_{13} \\ -C_{21} & +C_{22} & -C_{23} \\ +C_{31} & -C_{32} & +C_{33} \end{pmatrix}$$

où C_{ij} est le déterminant de la sous matrice de A en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne. La formule est alors

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{Com} A^T}$$

si $\det A \neq 0$.

Remarque. *Le cas* $n-$*dimensionnel se traite de façon analogue.*

Exemple 23. ♣ *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Trouver* A^{-1}.

Théorème 4 (Déterminant de Vandermonde)**.** *Étant donné des scalaires* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *le déterminant d'ordre n défini par :*

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

Le déterminant de Vandermonde $V(x_1,\dots,x_n)$ *est non nul si, et seulement si, les scalaires* $(x_1,\dots,x_n)$ *sont distincts deux à deux.*

Démonstration. 1. ♣ *Que vaut le déterminant si les* x_i, $i = 1,\dots n$ *ne sont pas deux à deux distincts ?*

2. ♣ *On suppose maintenant que les* x_i, $i = 1,\dots n$ *sont distincts. Montrer par récurrence sur n que*

$$V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i>j}(x_i - x_j).$$

$\square$

Calculer les déterminants suivants.

- ♣ *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}),\ D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R}),\ B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, *montrer que*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \ \det B.$$

- ♣ *Pour tout* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, *montrer que*

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

- Soit

$$D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b & a & c & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & b & a & c \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & a \end{vmatrix}.$$

1. ♣ *Pour $n \geqslant 3$, exprimer D_n en fonction de D_{n-1} et D_{n-2}.*

2. ♣ *Calculer* D_1 *et* D_2.

3. ♣ *En déduire la valeur de* D_n *dans les cas suivants :*
   (a) $a = 5, b = 1, c = 6$.
   (b) $a = 2, b = 1, c = 1$.

- ♣ *Calculer* $\det \delta_n$ *où*

$$\delta_n = \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix}.$$

(cette matrice de taille $n \times n$ comporte des a sur la diagonale et des b partout ailleurs).
Indication : on peut procéder par opérations sur les lignes et les colonnes en commençant par remarquer que la somme par rangée est constante.

1.5 Exercices

Exercice 1. *Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?*

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad 3x - 7y = z\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x^2 - z^2 = 0\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x + y - z = x + y + z = 0\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad z(x^2 + y^2) = 0\}$.
5. $F = \{P(X) \in \mathbb{R}_4[X] \quad | \quad P(1) \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 2. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par :* $f(M) = AM$.

1. *Déterminer* $\ker(f)$.
2. *f est-il surjectif?*
3. *Trouver une base de* $\ker(f)$ *et une base de* $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{R}$, on considère E_1 et E_2, deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives n_1 et n_2.*

1. *Donner un encadrement de* $\dim(E_1 \cap E_2)$ *et* $\dim(E_1 + E_2)$.
2. *Montrer l'égalité :*
$$\dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$
Indice : *considérer une base B_0 de $E_1 \cap E_2$, la compléter en une base B_1 de E_1 en une base B_2 de E_2 ; extraire de $B_1 \cup B_2$ une base de $E_1 + E_2$.*

Exercice 4. *Soit* $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z - t = 0 \text{ et } x - 2y + 2z + t = 0 \text{ et } x - y + z = 0\}$.

1. *Déterminer une base de E et en déduire la dimension de E.*
2. *Compléter cette base en une base de* $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. *Soit* $a = (1, 0, 2, 4) \in \mathbb{R}^4$ *et* $E = \mathrm{Vect}(a)$ *et* $F = \{(x, y, z, t) \in R^4 \,|\, x + z + 4t = 0\}$.
A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 6. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$, *on pose* $F = \{P \in E \,|\, P(0) = P'(1) = 0\}$ *et* $G = \mathbb{R}_1[X]$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$.

Exercice 7. *Soit* $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 3u_n\}$ *et* $G = \{v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = 2u_{v+1} + 2v_n\}$.

1. *Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, *l'espace vectoriel des suites réelles.*
2. *Montrer que si* $u \in F \cap G$, *alors u est constante en déduire que la somme* $F + G$ *est directe.*

Exercice 8. *Soient les matrices A et B définies par*
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer $(A + B)^2$ *et* $A^2 + 2AB + B^2$.

Exercice 9. *Soit*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que* $P = (2 - X)^3$ *est le polynôme annulateur de A.*
2. *En déduire que A est inversible et déterminer* A^{-1}.

Exercice 10. *Soit* $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ *la matrice*
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2, A^3, A^4.
En déduire $(A + I)^n$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Indice : Calculer en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 11. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* A^2 *et trouver les réels a et b tel que* $A^2 = aA + bI_3$.
2. *En déduire que A est inversible et donner l'expression de* A^{-1} *en fonction de A et* I_3.

Exercice 12. *Soit l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^2$ *canoniquement associé à la matrice* $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *La droite* $\mathrm{Vect}\{(-1,1)\}$ *est-elle stable par* f *?*

Exercice 13. *Soit l'endomorphisme* f *de* $\mathbb{R}^3$ *canoniquement associé à la matrice* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Le plan P d'équation* $y+z=0$ *est-il stable par* f *? La droite* $\mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}$ *est-elle stable par* f *?*

Exercice 14.
1. *On considère l'espace vectoriel* $\mathbb{R}_3[X]$ *et la base* $B = (1; x; x^2; x^3)$. *Trouvez la trace de l'application* f *qui associe à chaque fonction polynôme* $P(X) \in \mathbb{R}$ *sa fonction dérivée* $P'(X)$.
2. *Calculer la trace de l'endomorphisme* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par* $f((x,y)) = (y,x)$.

Exercice 15. *Vérifier que les matrices* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ *ne sont pas semblables.*

Exercice 16. *Vérifier que les matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *sont semblables.*

Exercice 17. *Calculez les déterminants :*

1. $$\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. $$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. $$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. $$\begin{vmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{vmatrix}.$$

5.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 18. *1. Calculer le déterminant suivant pour $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}.$$

2. Calculer, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ le déterminant :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_2 \dots x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_1 \dots x_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Chapitre 2

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

2.1 Éléments propres

2.1.1 Pour un endomorphisme

Définition 18 (Valeur propre, vecteur propre, spectre)**.** *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.*
2. *Soit $x \in E \setminus \{0\}$: on dit que x est **vecteur propre** de u s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.*
3. *L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est appelé le **spectre** de u et est noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.*

Remarque.
- *Le vecteur propre associé à la valeur propre λ n'est pas unique.*
- ♣ *L'espace vectoriel engendré par un vecteur propre x de l'endomorphisme u est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ et est stable par u.*

Définition 19. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. L'ensemble*

$$E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \cdot Id_E)$$

*est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ appelé le **sous-espace propre** associé à λ et à u. Il est constitué du vecteur nul 0_E et de tous les vecteurs propres de u associés à λ.*

Exemple 24.
- *Soit $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ avec $u(x, y) = (x + 2y, 0)^\intercal$. Une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de u associée au vecteur*

propre $(x, y)^\top \neq (0,0)^\top$ *vérifie*

$$x + 2y = \lambda x \quad \text{et} \quad 0 = \lambda y$$

ce qui conduit à

$$\lambda = 1 \text{ et } y = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 0 \text{ et } x = -2y.$$

Donc les deux valeurs propres sont :

— 1 *associé au vecteur propre* $(k, 0)^\top$ *où* k *est n'importe quel réel non nul, par exemple pour* $k = 1$*, on obtient* $(1,0)^\top$,

— 0 *associé au vecteur propre* $(-2k, k)^\top$ *où* k *est n'importe quel réel non nul, par exemple pour* $k = \sqrt{2}/2$*, on obtient* $\sqrt{2}/2\ (1,1)^\top$.

♣ *Représenter dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *les sous-espaces propres de* u.

- ♣ *Si* $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$*, ses valeurs propres peuvent-elles être complexes ?*

- *Soit* $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ *avec* $u(x, y) = (y, -x)^\top$. *Une valeur propre* $\lambda \in \mathbb{R}$ *de* u *associée au vecteur propre* $(x, y)^\top$ *vérifie*

$$y = \lambda x \quad \text{et} \quad x = -\lambda y$$

ce qui entraîne $y = -\lambda^2 y$. *Comme* λ *est réel,* $\lambda^2 \neq -1$ *donc* $x = y = 0$. *Donc* u *n'a pas de valeur propre.*

- ♣ *Trouver les valeurs propres de* $u : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ *avec* $u(x, y) = (y, -x)^\top$.

- ♣ *Soit* $E = C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. *Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de* $D \in \mathscr{L}(E)$ *défini par :* $\forall f \in E, D(f) = f'$.

- ♣ *L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre donnée est-il un espace vectoriel ?*

- ♣ *Montrer que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres.*

Mini-exercices. *1. Trouver tous les* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que la matrice* $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *admette* $(1,2,3)^\top$ *pour vecteur propre.*

2. Trouver tous les $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & b \end{pmatrix}$ *admette* $(2,1)^\top$ *et* $(1,1)^\top$ *pour vecteurs propres.*

Propriété. *Si* $\dim E$ *est finie, alors :*

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre} \Leftrightarrow (u - \lambda \cdot Id_E) \notin GL(E).}$$

Démonstration. ♣

□

Proposition 13. *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. La somme d'une famille finie de sous-espace propres de u distincts est nécessairement directe :

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}\right), \quad \text{avec } \forall i \neq j,\ \lambda_i \neq \lambda_j.$$

> 2. *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est nécessairement libre.*

Exemple 25. ♣ *Si E est de dimension n, il y a au plus n valeurs propres.*

Exemple 26. ♣ *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note e_λ la fonction de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par : $\forall t \in \mathbb{R},\ e_\lambda(t) = e^{\lambda t}$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que $(e_{\lambda_1}, \ldots, e_{\lambda_n})$ est une famille libre de E.*

Propriété. *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.*

Exemple 27. ♣ *Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre associé. Soit P le polynôme $P(X) = X^2 - 1$. Alors $P(u)$ est l'endomorphisme $P(u) = u \circ u - Id_E$. Vérifions que $P(\lambda)$ (scalaire) est une valeur propre de $P(u)$ (endomorphisme).*

> **Théorème 5** (Valeurs propres et polynôme annulateur)**.** *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont racines de tout polynôme annulateur de u.*

Démonstration. ♣

□

2.1.2 Pour une matrice carrée

Définition 20. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $\mathscr{M}_{\mathscr{C}_n}(u) = M$ avec $\mathscr{C}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une **valeur propre** de M s'il est valeur propre de u donc $\exists X \in \mathbb{K}^n$ tel que $X \neq 0$ et $M \cdot X = \lambda \cdot X$.*
2. *Soit X un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On dit que X est **vecteur propre** de M s'il est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \mid M \cdot X = \lambda \cdot X$.*
3. *Le **spectre** de M est aussi le spectre de u donc l'ensemble des valeurs propres de M : on le note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(M)$.*
4. *Le **sous-espace propre** associé à λ est $E_\lambda(M) = \ker(M - \lambda \cdot I)$ i.e. $\ker(u - \lambda \cdot Id_E)$.*

Exemple 28. *1. ♣ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. ♣ Déterminer les éléments propres propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Propriété (Changement de corps)**.** *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$.*

Propriété. *1. $[\lambda$ valeur propre de $M] \Leftrightarrow [(M-\lambda\cdot I) \notin GL_n(\mathbb{K})] \Leftrightarrow [\det(M-\lambda\cdot I)=0]$,*

2. $[\lambda \in \mathrm{Sp}(M)] \Leftrightarrow [P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(M))]$,

3. Si deux matrices sont semblables, elles ont le même spectre.

Mini-exercices. *1. Démontrer la Proposition 13.2 pour le cas $n=3$. (On pourra faire intervenir un déterminant de Vandermonde).*

2.2 Polynôme caractéristique

2.2.1 Rappels sur les polynômes

Relations coefficients/racines. (***Théorème fondamental de l'algèbre***).

Tout polynôme de degré p

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

(où les coefficients a_i, $i=0,\dots p$ peuvent être réels ou complexes et a_p est le coefficient de plus haut degré supposé non nul) est ***scindé*** sur $\mathbb{C}$, c'est à dire qu'il peut s'écrire sous la forme d'un produit de polynômes de degré 1 :

$$P(x) = a_p(x-r_p)(x-r_{p-1})\dots(x-r_1)$$

où r_i, $i=1,\dots p$ sont les racines (éventuellement complexes) de P.

Les ***formules de Vieta*** relient les coefficients a_i aux racines r_i de la façon suivante :

$$\begin{cases} r_1+r_2+\cdots+r_{p-1}+r_p = -\dfrac{a_{p-1}}{a_p} \\ (r_1r_2+r_1r_3+\cdots+r_1r_p)+(r_2r_3+r_2r_4+\cdots+r_2r_p)+\cdots+r_{p-1}r_p = \dfrac{a_{p-2}}{a_p} \\ \quad\vdots \\ r_1r_2\dots r_p = (-1)^p\dfrac{a_0}{a_p}. \end{cases}$$

Exemple 29. *On considère un polynôme du second degré $P(x)=a(x-r_1)(x-r_2)=ax^2-a(r_1+r_2)x+ar_1r_2$ où r_1,r_2 sont les racines (éventuellement complexes) de P. On note la forme développée de ce polynôme par : $P(x)=ax^2+bx+c$, par identification on a les relations (formules de Vieta pour $p=2$) :*

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a}, \quad r_1r_2=\frac{c}{a}.$$

♣ *Si* $P(x) = x^2 - 4x - 252$ *admet pour racine* 18, *quelle est son autre racine ?*

Exemple 30. ♣ *Que vaut la somme des racines p-ième de l'unité ?*

2.2.2 Polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme

Définition 21 (Polynôme caractéristique d'une matrice)**.** *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle polynôme caractéristique de* A *le polynôme* $P(X) = \det(X \cdot I - A)$.
P *est souvent noté* χ_A*, son degré est égal à n si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, son expression est*

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}\, A \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A.$$

Exemple 31 (Matrice Compagnon)**.** ♣ *Trouver le polynôme caractéristique de la matrice A :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

et vérifier le calcul de la trace et du déterminant de A sur ce polynôme.

Propriété. *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. ♣

$\square$

Remarque. *La réciproque n'est pas vraie !*

Exemple 32. ♣ *Donner une matrice non diagonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant 2 et -1 pour valeurs propres.*

Remarque. *Le fait que deux matrices semblables aient le même polynôme caractéristique, c'est-à-dire que deux matrices représentant le même endomorphisme aient le même polynôme caractéristique, justifie la définition suivante.*

Définition 22 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = M_{\mathcal{B}}(u)$ où $\mathcal{B}$ est une base quelconque. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme $\chi_u = \chi_A$. Il ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie.*

$$\chi_u(X) = X^n - \mathrm{Tr}(u) \cdot X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u.$$

Retenons aussi que $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \cdot Id_E - u)$.

Théorème 6. *Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) sont les racines du polynôme caractéristique de u (de A).*

Calcul du polynôme caractéristique

Le théorème précédent montre l'importance pratique d'obtenir le polynôme caractéristique sous forme factorisée. On réalise dans les cas concrets cet objectif en calculant le déterminant $\det(X \cdot I - A)$ par opérations élémentaires afin de faire apparaître des facteurs communs dans les lignes ou les colonnes.

Propriété. *Dans $\mathbb{C}$, χ_A est scindé. Notons $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ ses racines qui sont aussi les valeurs propres de A. D'après la section 2.2.1, nous avons les relations suivantes :*

$$\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n, \qquad \mathrm{Tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n.$$

Exemple 33. *Soit* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda) - 2 = \lambda^2 + 2\lambda - 2.$$

Exemple 34. ♣ *Soit* $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 4 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}$. *Trouver les valeurs propres de* A.

Propriété. *Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est triangulaire de coefficients diagonaux* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, *alors :*

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Sp}\, A = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Démonstration. ♣

□

Exemple 35. ♣ *Calculer les valeurs propres de* $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 0 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Définition 23. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. λ est une* ***racine d'ordre*** *k de P si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

- $(X-\lambda)^k$ *divise P,*
- $P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{(k-1)}(\lambda) = 0$ *mais* $P^{(k)}(\lambda) \neq 0$.

Exemple 36. ♣ *Vérifier que la matrice suivante a une valeur propre double :* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition 24 (Ordre de multiplicité)**.** *Soit λ une valeur propre de u (resp. de A). On dit que λ est d'ordre $k \in \mathbb{N}^\star$ si λ est racine de χ_u (resp. de χ_A) d'ordre k.*

Théorème 7. *Si λ est valeur propre d'ordre m, alors $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m$.*

Exemple 37. ♣ *Trouver la dimension du sous-espace propre assosié au valeur propre double de* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 8 (Théorème de Hamilton-Cayley)**.** *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$). Soit χ_u le polynôme caractéristique de u (resp. χ_A celui de A), alors*

$$\boxed{\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)} \text{ (resp. } \chi_A(A) = 0\text{).}}$$

Exemple 38. ♣ *Soit $A \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $A^2 \neq A$. Montrer que $A^2 = 0$ en montrant que :*

1. *A n'est pas inversible,*
2. *$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{Tr} A\, X$,*
3. *$A^2 = \operatorname{Tr} A\, A$ avec $\operatorname{Tr} A \neq 1$,*
4. *Conclure.*

Proposition 14 (Cas d'un endomorphisme induit)**.** *Si u stabilise F i.e. F est stable par u où F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\chi_{u_F} | \chi_u$ où u_F endomorphisme induit $\in \mathscr{L}(F)$.*

Corollaire 1. *Si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $\forall i \in [\![1, k]\!]$, F_i est stable par u, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_i}$ où $u_i = u_{F_i}$ i.e. l'endomorphisme induit de u sur F_i.*

Mini-exercices. *Calculer dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ le spectre des matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Endomorphismes diagonalisables

2.3.1 Définitions

Définition 25. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.*
2. *On dit que A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Exemple 39. ♣ *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ définie par $M = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base canonique (e_1, e_2). Vérifier que le changement de base défini par la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ donne une matrice diagonale représentant u dans la nouvelle base.*

Propriété. *Si A est diagonalisable en $\Delta = P^{-1}AP$, alors les valeurs propres sont les éléments de la diagonale de Δ et la **multiplicité** de chacune est son nombre d'occurrences dans cette diagonale.*

Théorème 9. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les cinq affirmations suivantes sont équivalentes.*

1. *u est diagonalisable.*
2. *E possède une base de vecteurs propres.*
3. $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$ *où* $k = \mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u))$ *et* $E_{\lambda_i} = \ker(u - \lambda \cdot Id_E)$.
4. $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}) = n$.
5. χ_u *est scindé i.e.* $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$ *et* $\forall i \in [\![1, k]\!]$, $\dim E_{\lambda_i} = m_i$.

Corollaire 2. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.*

Proposition 15 (Lien avec les matrices)**.** *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant un endomorphisme u. La matrice A est alors diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.*

Diagonaliser un endomorphisme par une approche matricielle

La proposition précédente justifie le fait que :

- pour étudier le caractère diagonalisable d'un endomorphisme, on préfère parfois étudier une matrice qui le représente;
- réciproquement, pour étudier le caractère diagonalisable d'une matrice, on préfère parfois étudier un endomorphisme qu'elle représente.

Comment diagonaliser une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable et $(E_1, \dots, E_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Si on note P la matrice dont les colonnes sont $E_1, \dots, E_n$, alors :

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Ainsi, en notant $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, on obtient $A = PDP^{-1}$.

Condition pratique de diagonalisation

Pour que $u \in \mathscr{L}(E)$ soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes :

- son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$,
- pour toute valeur propre multiple de u, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de cette valeur propre.

On a un résultat similaire pour les matrices.

Exemple 40. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Son polynôme caractéristique est scindé et a une racine double, effectivement* $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^2$. *Le sous-espace propre associé à* $\lambda = 1$ *est de dimension* 1 *:*

$$(A - I)\,x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad E_1 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice n'est pas diagonalisable.

Exemple 41. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\chi_{A)}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1$. *Le polynôme caractéristique de* A *n'est pas scindé sur* $\mathbb{R}$. *Donc la matrice n'est pas diagonalisable sur* $\mathbb{R}$. *Mais elle est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$, *car* $\lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i})$ *:*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{D} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}}_{P}.$$

Exemple 42. ♣ *Donner un exemple de matrice qui n'est pas diagonalisable.*

Exemple 43. ♣ *Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *une matrice diagonalisable telle que* $\operatorname{Sp} A = \{1\}$. *Montrer que* $A = I$.

Exemple 44. ♣ *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est-elle diagonalisable ?*

Exemple 45. ♣ *À quelle condition sur* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est-elle diagonalisable ?

2.3.2 Application de la diagonalisation

Calcul de puissances d'une matrice.

Exemple 46. ♣ *Si* $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *avec* $\lambda_i \in \mathbb{K}$, *que vaut* A^k, $k \in \mathbb{N}$ *?*

Pour calculer les puissances successives d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable,

- on diagonalise A, c'est-à-dire déterminer une matrice $P \in GL_p(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale,
- on calcule l'inverse P^{-1} de la matrice P,
- enfin si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a alors :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = (PDP^{-1})^p = \overbrace{(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{=I}D\underbrace{P^{-1})(\quad}_{=I}\ldots\underbrace{\quad)(P}_{=I}DP^{-1})}^{p \text{ termes}} = PD^pP^{-1}}$$

c'est à dire

$$A^p = P \begin{pmatrix} \lambda_1^p & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^p \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Exemple 47. ♣ *On pose* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^n *pour* $n \in \mathbb{N}$ *et donner une base de* $\mathbb{R}^3$ *dans laquelle* A *a une forme simple.*

Forme explicite des suites récurrentes d'ordre p.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est dite récurrente linéaire d'ordre p (à coefficients constants), si elle vérifie une relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1},$$

où $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ est une famille fixée de scalaires. Une telle suite est entièrement déterminée par ses p premiers termes $u_0, \ldots, u_{p-1}$.

Étude du cas $p = 2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n.$$

On peut réécrire cette dernière équation sous forme matricielle

$$U_{n+1} = A U_n \text{ où } U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$$

On démontre alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n U_0$$

où $U_0 = (u_0, u_1)^\top$ est donné.

Pour l'étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on est alors ramené à déterminer les puissances successives de la matrice A.

Valeurs propres simples. Si la matrice A possède deux valeurs propres distinctes r_1, r_2, alors A est diagonalisable et il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = P \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} P^{-1} U_0.}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des suites géométriques $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En fait on peut montrer que la famille $((r_1^n)_n,(r_2^n)_n)$ est une base de l'espace vectoriel des suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre 2, cet espace est donc de dimension 2.

Valeurs propres doubles. Si $r_1 = r_2 = r$ est une valeur propre double de A. Alors $\chi_A(\lambda) = (\lambda - r)^2$ est le polynôme caractéristique de A. Si $a \neq 0$ et $b \neq 1$ alors $A \neq rI$ donc A n'est pas diagonalisable. Si l'on note f l'endomorphisme canoniquement associé à A, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{K}$ telle que e_1 soit un vecteur propre de A, alors

$$M_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

avec s et t des éléments de $\mathbb{K}$. Comme $\chi_f = \chi_A$ et $f \neq rId_{\mathbb{R}^2}$ on en déduit que $t = r$ et $s \neq 0$. Enfin, en considérant $\mathscr{B}' = (e_1, e_2/s)$ on a

$$M_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}.$$

Il existe donc $Q \in GL_2(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}$.

Notons B cette dernière matrice et soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on voit que $J^2 = 0$, $B^n = (rI + J)^n = r^n I + \binom{n}{1} r^{n-1} J + \binom{n}{2} r^{n-1} J^2 + \ldots + J^n = r^n I + nr^{n-1} J$.

Donc $A^n = QB^nQ^{-1} = r^n I + nr^{n-1} QJQ^{-1}$. On en déduit :

$$\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = r^n \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + nr^{n-1} QJQ^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}.}$$

On a donc établi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire des deux suites $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nr^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. *Par la même méthode, on généralise pour le cas $p > 2$.*

Exemple 48 (Cas des racines complexes.). ♣ *Si $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \neq 0 \mod \pi$.*

Exemple 49. ♣ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle vérifiant :*

$$(u_0, u_1, u_2) = (1, 0, 2) \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\, u_{n+3} = -6u_n - 11u_{n+1} - 6u_{n+2}.$$

Déterminer une expression de u_n *en fonction de* n*.*

2.3.3 Diagonalisation et polynômes annulateurs

Lemme : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, diagonalisable. Soit $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_i, i \in [\![1,k]\!]\}$. $\forall i \in [\![1,k]\!]$, $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. Soit p_i la projection de E sur E_i de direction $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k} E_j$. Alors $u = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k$ et $\forall P \in \mathbb{K}$, $P(u) = P(\lambda_1)p_1 + P(\lambda_2)p_2 + \ldots + P(\lambda_k)p_k$.

Théorème 10 (Caractérisation par un polynôme annulateur)**.** *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$*.* u *est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.*

Exemple 50. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$*. Observons que* $A^2 = I$ *on peut conclure que* $\lambda^2 - 1$ *est un polynôme annulateur de* A *scindé à racines simples sur* $\mathbb{R}$ *:* $\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$*. Donc* A *est diagonalisable. Effectivement* $\chi_A(\lambda) = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (\lambda^2 - 1)(1-\lambda)$*. Donc la matrice est semblable à*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Endomorphismes trigonalisables

Définition 26. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1. *u est dite* ***trigonalisable*** *s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle $M_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.*
2. *M est dite* ***trigonalisable*** *si elle est semblable à une matrice T triangulaire supérieure.*

L'algorithme de calcul de la réduction d'une matrice est le suivant.

- Factoriser le polynôme caractéristique parfois étudier une matrice qui le représente,
- Trouver une base de chaque sous-espace propre,
- Compléter cette base s'il y a lieu. Si la multiplicité de la valeur propre λ est m alors qu'il n'y a que $l < m$ vecteurs propres indépendants, il faut trouver encore $m-l$ vecteurs. Pour chaque vecteur propre v déjà trouvé, vous allez résoudre le système $(A-\lambda I)w = v$, où v est un vecteur propre déjà écrit. Vous devrez vérifier que la solution w est linéairement indépendante des vecteurs déjà écrits. S'il manque encore des vecteurs, vous résoudrez le système $(A-\lambda I)u = w$... Rassurez-vous, vous n'aurez pas à itérer trop longtemps pour obtenir une base de E,
- Calculer l'inverse de P,
- Vérifier vos calculs.

Exemple 51. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)^2$. Il a une racine double $\lambda = -1$, et la matrice $A-\lambda I = A+I$ est de rang 1.

$$A + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pour compléter en une base de $\mathbb{R}^2$, cherchons v_2, indépendant de v_1, et tel que $(A+I)v_2 = v_1$: par exemple $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Comme $Av_1 = -v_1$ et $Av_2 = v_1 - v_2$, la matrice dans la base (v_1, v_2) a bien la forme souhaitée.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}}_{P}$$

où P est la matrice dont la ième colonne est v_i, $i = 1, 2$.

Exemple 52. ♣ *Trigonaliser la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$

Théorème 11 (Caractérisation). *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *u est trigonalisable.*
2. *χ_u est scindé.*
3. *Il existe un polynôme annulateur de u scindé.*

Corollaire 3. *Si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors tout endomorphisme u de E est trigonalisable. On aussi $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, M est trigonalisable.*

Mini-exercices. 1. *Soit u l'application suivante :*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u, et, si c'est possible, diagonaliser u.

2.5 Exercices

Exercice 19. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.*

2. *Déterminer la matrice de passage P de la base initiale à la base de vecteurs propres, puis sa matrice inverse P^{-1}.*

Exercice 20. *Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que AB est diagonalisable. La matrice BA est-elle diagonalisable ?*

Exercice 21. *À quelle condition la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & 1+a \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?*

Exercice 22. *Montrer que tout matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable.*

Exercice 23. *Montrer que $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Calculer A^n.*

Exercice 24. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.*

1. *Démontrer que A est diagonalisable de trois manières :*
   (a) *en calculant directement le déterminant $\det(A - \lambda I_3)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,*
   (b) *en utilisant le théorème du rang,*
   (c) *en calculant A^2.*

Exercice 25. *Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'elle est diagonalisable, puis qu'il existe une matrice B telle que $B^3 = A$.*

Exercice 26. *Soit $f \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E)$ telle que $f^3 + f^2 + f = 0$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $F = Im\, f$.*

1. *Montrer que F est un sous-espace vectoriel stable par f.*
2. *Montrer que $\ker f \cap Im\, f = \{0\}$.*
3. *En déduire que la restriction g de f à F est un automorphisme de F.*
4. *Montrer que si $\lambda \in Sp_{\mathbb{R}}(f)$ alors $\lambda = 0$.*
5. *En déduire que le rang de f est pair (raisonner par l'absurde et étudier les racines réelles du polynôme caractéristique de g).*

Exercice 27. *Trigonaliser la matrices réelle suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 28. *Déterminer une matrice triangulaire semblable à*

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 29. *Montrer que* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *est trigonalisable.*
A est-elle diagonalisable ? Réduire A.
Même question pour $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 30. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et soient* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *ses valeurs propres complexes. Exprimer* $tr(A^p)$ *où* $p \in \mathbb{N}$ *en fonction des* λ_j, $j = 1, \dots, n$.

Exercice 31. *Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ *dont sa matrice dans la base canonique est :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminer le polynôme caractéristique* P_u *de* u.
2. *Trouver les valeurs propres et les sous-espaces caractéristiques* F_i.
3. *Donner une base suivant laquelle la matrice de* u *se décompose en deux blocs diagonaux.*
4. *Donner les projections* p_i *de* $\mathbb{R}^4$ *sur* F_i.

Exercice 32. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *et* f *l'endomorphisme linéaire de* $\mathbb{R}^3$ *ayant pour matrice* A *dans la base canonique* ε *de* $\mathbb{R}^3$.

1. *Calculer le polynôme caractéristique de* A.
2. *Trouver une base* $\varepsilon' = \{e_1, e_2, e_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que* $M_{\varepsilon'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. *Soit* $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ *un endomorphisme tel que* $f \circ g = g \circ f$. *Montrer que* $Ker(f - 2Id)$ *et* $Ker(f - Id)^2$ *sont laissés stables par* g.
4. *En déduire que la matrice de* g *dans* ε' *est de la forme* $M_{\varepsilon'}(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ *avec* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   Préciser les valeurs possibles de a, b, c *et* d.
5. *Soit* $F = \{B \in M_3(\mathbb{R}); AB = BA\}$. *Montrer que* F *est un sous-espace vectoriel de* $M_3(\mathbb{R})$. *Calculer sa dimension (on pourra utiliser la question 3.).*

Exercice 33. *Soit* $(u)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle vérifiant :* $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ *et* $u_0 = 1, u_1 = 3$. *Exprimer* u_n *en fonction de* n.

Exercice 34. *On considère la matrice* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. *Démontrer que* $\lambda = 2$ *est valeur propre de* A *et que* $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre associé.*

   On admet que A admet deux autres valeurs propres -2 *et* 4 *avec comme vecteurs propres respectivement* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. *On considère les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par leurs premiers termes* a_0, b_0, c_0 *et :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} & = -2b_n + 2c_n \\ b_{n+1} & = -3a_n + b_n + 3c_n \\ c_{n+1} & = -a_n + b_n + 3c_n \end{cases}.$$

   On suppose que $a_0 = 2, b_0 = 2$ *et* $c_0 = 0$.
   Calculer a_n, b_n *et* c_n *en fonction de* n.

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens réels

3.1 Espaces préhilbertiens réels, produit scalaire

Dans cette section, E désigne $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 27 (Forme bilinéaire symétrique, positive et définie-positive). *L'application* $(\cdot \mid \cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$. $(\cdot \mid \cdot)$ *est une* ***forme bilinéaire symétrique*** *si elle vérifie :*

1. ***Linéarité à gauche :*** $\forall u, v, w \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ (u + \lambda w \mid v) = (u \mid v) + \lambda (w \mid v)$.
2. ***Symétrie :*** $\forall (u, v) \in E \times E,\ (u \mid v) = (v \mid u)$.

De plus, $(\cdot \mid \cdot)$ *est dite*

- ***Positive*** *si* $\forall u \in E,\ (u \mid u) \geqslant 0$,
- ***Définie-positive*** *si de plus* $\forall u \in E, (u \mid u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$

Remarque. • *Le mot «* ***forme*** *» renvoie au fait que l'application* $(\cdot \mid \cdot)$ *est à* ***valeurs scalaires*** *(*$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

- *La* ***linéarité à droite*** *signifie que* $\forall v \in E,\ (\cdot \mid v) : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ u \mapsto (u \mid v) \end{cases}$ *est linéaire. Cette propriété est automatiquement vérifiée lorsque* $(\cdot \mid \cdot)$ *est symétrique.*

Définition 28. • *On appelle* ***produit scalaire*** *toute forme bilinéaire symétrique sur E définie positive.*

- *Lorsque E est muni d'un produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$*, le couple* $(E, (\cdot \mid \cdot))$ *(ou plus simplement E) est dit* ***préhilbertien réel****.*
- *Si de plus E est de dimension finie, il est dit* ***euclidien****.*

Exemple 53. *1. Pour* $E = \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, v_1), v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ *on considère l'application* $(u \mid v) = 2u_1 v_1 + u_2 v_1 - u_1 v_2$. $(\cdot \mid \cdot)$ *est bilinéaire (vérification facile). C'est une forme car elle renvoie un réel mais elle n'est pas symétrique car* $(u \mid v) - (v \mid u) = 2u_1 v_1 + u_2 v_1 - u_1 v_2 - (2u_1 v_1 - u_2 v_1 + u_1 v_2) = 2u_2 v_1$ *donc pour* $u_2 = v_1 = 1$ *et* $u_1 = v_2 = 0$ *on a* $((0,1) \mid (1,0)) \neq ((1,0) \mid (0,1))$.

2. ♣ Changer l'expression de $(u \mid v)$ *pour que* $(\cdot \mid \cdot)$ *soit symétrique.*

3. ♣ *Cette forme bilinéaire symétrique est-elle positive ? définie-positive ?*

Exemple 54. *Pour $E = \mathbb{R}^2$, on considère l'application $(u \mid v) = u^\top A v$ avec $u, v \in \mathbb{R}^2$ et A est une matrice 2×2 symétrique.*

1. ♣ *Montrer que $(\cdot \mid \cdot)$ est une forme bilinéaire et que $(\cdot \mid \cdot)$ est symétrique lorsque A est une matrice symétrique.*

2. ♣ *Donner un exemple de matrices A (diagonale et non diagonale) où $(\cdot \mid \cdot)$ est :*
   (a) *positive.*
   (b) *définie-positive.*
   (c) *positive mais non définie-positive*

Exemple 55. *Avec $E=\mathbb{R}^n$, l'application :*

$$\left(x \mid y\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

est un produit scalaire. En effet, cette application renvoie bien un réel et elle vérifie :

- *Linéarité à gauche : oui par linéarité de la somme,*
- *Symétrie : $\left(x \mid y\right)=\left(y \mid x\right)$: oui car $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=\sum_{i=1}^{n} y_i x_i$,*
- *Définie-positivité : oui car $(x \mid x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant 0$ (positivité) et $(x \mid x)=0 \Rightarrow \forall i=1,\dots,n,\ x_i^2=0 \Rightarrow x=0$. (une somme de termes tous positifs est nulle si et seulement si tous ces termes sont nuls).*

Exemple 56. ♣ *Avec $E=\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, $a<b$, montrer que l'application :*

$$\left(f \mid g\right)=\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire.

Exemple 57. ♣ *Avec $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que l'application :*

$$(A \mid B)=\operatorname{Tr}(A^\intercal B)$$

est un produit scalaire.

Théorème 12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz avec le produit scalaire)**.** *Soit* $(\cdot\mid\cdot)$ *une forme bilinéaire symétrique positive. Alors*

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ \left(x \mid y\right)^2 \leqslant (x \mid x) \times \left(y \mid y\right).}$$

Si de plus $(\cdot\mid\cdot)$ *est définie positive, alors l'égalité a lieu si et seulement si les vecteurs* x *et* y *sont colinéaires.*

Démonstration. Soient $t \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$ et $g(t) = (x + ty \mid x + ty)$.

1. ♣ *Justifier que* $g(t)$ *est positif pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et pour tout* $x, y \in E$*. De plus montrer que c'est un trinôme du second degré en* t*.*

2. ♣ *En déduire la condition sur le discriminant de* $g(t)$ *puis conclure.*

□

Exemple 58. *1.* ♣ *Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$ *définie par* $\left(x \mid y\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$*. Écrire cette inégalité dans le cas* $n = 2$*.*

2. ♣ *Étant donné* $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ *tels que* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$*, prouver que :*

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}$$

Exemple 59. *1.* ♣ *Calculer :*

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} & : & a+2b+4c \\ \textit{sous la contrainte} & : & a^2+b^2+c^2=1 \end{array}$$

(Indication : Appliquer l'inégalité de Cauchy–Schwarz à $(a+2b+4c)^2$*).*

2. ♣ *Qu'avez-vous calculé géométriquement ?*

3. ♣ *Votre solution de la question 1 se généralise-t-elle pour résoudre le problème :*

$$\begin{array}{lcl} \max\limits_{(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n} & : & a_1x_1+\ldots a_nx_n \\ \textit{sous la contrainte} & : & a_1^2+\ldots+a_n^2=1 \end{array}$$

où $x_1, \ldots, x_n$ *sont des réels fixés.*

Exemple 60. ♣ *Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur* $\mathscr{C}^0([a,b])$ *définie par* $\left(f \mid g\right) = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Application à la géométrie. Le produit scalaire usuel apparaît naturellement en géométrie.

- Dans le plan ($E = \mathbb{R}^2$), la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur (α, β) admet pour ***équation cartésienne*** :

$$\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0) = 0.$$

  En notant $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(-\beta, \alpha)$, $\mathscr{D}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$. Le vecteur $\vec{n}$ est dit ***normal*** à la droite $\mathscr{D}$. ♣ *Faire un dessin qui illustre la définition du vecteur normal à une droite.*

- Dans l'espace ($E = \mathbb{R}^3$), un plan $\mathscr{P}$ a une ***équation cartésienne*** de la forme :

$$ax + by + cz = d \quad \text{avec} \quad (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0).$$

  Si l'on considère un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{P}$, alors $d = ax_0 + by_0 + cz_0$. Ainsi, un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathscr{P}$ si, et seulement si :

$$a(x - x0) + b(y - y0) + c(z - z0) = 0,$$

  c'est-à-dire si, et seulement si, $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n}(a, b, c)$. Le vecteur $\vec{n}$ est dit ***normal*** au plan $\mathscr{P}$. ♣ *Faire un dessin qui illustre la définition du vecteur normal à un plan.*

Remarque. • *La seule connaissance d'un vecteur normal ne suffit pas à définir une droite ou un plan. Il faut une autre information, comme par exemple un point par lequel la droite ou le plan passe.*

- *Il existe une infinité de vecteurs normaux à un plan. Cependant, tous ces vecteurs normaux ont la même direction. Un plan a donc une unique "direction normale", celle donnée par la direction de tous ses vecteurs normaux.*

3.1.2 Norme associée à un produit scalaire

Définition 29 (Norme et distance euclidienne)**.** • $\forall x \in E$, *la **norme euclidienne** associée au produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$ *est* $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

- $\forall x, y \in E$, *la **distance euclidienne** entre* x *et* y *est* $d(x, y) = \|x - y\|$.

Remarque. *Avec les propriétés du produit scalaire, la norme associée vérifie :*

- ***Séparation :*** $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
- ***Homogénéité :*** $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- ***Inégalité triangulaire :*** $\forall x \in E,\ \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
  avec égalité si, et seulement si, x et y sont positivement proportionnels, c'est-à-dire si, et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+,\ y = \lambda x$.

Exemple 61. *Dans* $\mathbb{R}^2$, *la norme associée au produit scalaire canonique d'un vecteur* $x = (x_1, x_2)$ *est* $\|x\|^2 = (x \mid x) = x_1^2 + x_2^2$. *Cette norme est appelée norme* 2 *et notée* $\|\cdot\|_2$.
♣ *Comment voir rapidement que la définition* $\|x\|_2 = \sqrt{(x \mid x)}$ *contient nécessairement une racine carrée ?*

Exemple 62. ♣ *Calculer la norme de la fonction tangente vue comme un vecteur de l'espace préhilbertien* $\mathscr{C}^0\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \mathbb{R}\right)$ *muni du produit scalaire canonique sur cet ensemble.*

Propriété. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme induite par le produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$, *alors on a :*

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y)$
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x \mid y)$
- *Égalités de polarisations :*
  1. $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$
  2. $(x \mid y) = \dfrac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$

3. $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

- *Identité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Démonstration. ♣ *Montrer le premier point ce ces propriétés et une égalité de polarisation.*

□

Exemple 63. *Vous déjà vu aussi la norme* 1 *dans* $\mathbb{R}^2$ *définie par* $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ *avec* $x = (x_1, x_2)$.
♣ *En utilisant une égalité de polarisation, montrer que cette norme n'est pas induite par un produite scalaire. Autrement dit qu'il n'existe aucun produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$ *tel que :* $(\cdot \mid \cdot) = \|\cdot\|_1$.

Théorème 13 (Inégalité de Cauchy-Schwarz avec la norme)**.** *Soit* $(E, (\cdot \mid \cdot))$ *est un espace préhilbertien réel et* $\|\cdot\|$ *est la norme euclidienne associée.*

1. $\forall (x, y) \in E^2,\ |(x \mid y)| \leqslant \|x\| \times \|y\|$.
2. $\forall (x, y) \in E^2, |(x \mid y)| = \|x\| \times \|y\| \Leftrightarrow (x, y)$ *est liée.*

3.2 Orthogonalité

Dans cette section, $(E, (\cdot \mid \cdot))$ est un espace vectoriel préhilbertien réel.

3.2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 30.
- *vecteurs orthogonaux : $x, y \in E$ tels que $(x \mid y) = 0$;*
- *famille orthogonale $(e_i)_{i\in I} \in E^{card(I)}$ telle que $\forall i, j \in I / \ i \neq j$, $(e_i \mid e_j) = 0$,*
- *famille orthonormale $(e_i)_{i\in I} \in E^{card(I)}$ telle que $\forall i, j \in I$, $(e_i \mid e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,*
- *sous-espaces vectoriels orthogonaux F et G tels que $\forall (x, y) \in F \times G$, $(x \mid y) = 0$.*

Exemple 64. ♣ *Soit $E = \mathscr{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Trouver un vecteur orthogonal de E (donc une fonction) au vecteur $x \mapsto \cos x$.*

Proposition 16. *Toute famille orthogonale de vecteurs* **non nuls** *est libre.*

Remarque. *La réciproque de la Proposition 16 est fausse.*

Exemple 65. ♣ *Soient v_1 et v_2 deux vecteurs libres de $\mathbb{R}^2$. Soit u un vecteur orthogonal à ces deux vecteurs. Que pouvez-vous dire de u ?*

Corollaire 4.
- *Toute famille orthonormale est libre.*
- *Toute famille orthonormale et génératrice est une base.*
- *Si $\dim E = n$, toute famille orthonormale de n vecteurs est une base.*

Exemple 66. ♣ *Soit $\mathscr{F} = (t \mapsto 1/\sqrt{2}, t \mapsto \cos(nt), t \mapsto \sin(nt))_{n\in\mathbb{N}^*} = (t \mapsto 1/\sqrt{2}, t \mapsto \cos(t), t \mapsto \cos(2t), \ldots, t \mapsto \sin(t), t \mapsto \sin(2t), \ldots)$ une famille de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: espace (préhilbertien réel muni du produit scalaire canonique : $(f \mid g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$) des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que cette famille est orthonormale.*

Proposition 17 (Théorème de Pythagore)**.** *Soit E un espace préhilbertien réel. Si $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E, alors*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Démonstration. ♣ *Dans le cas $n = 2$. Calculer, pour $x, y \in E$, $\big(x + y \mid x + y\big)$ de deux manières différentes.*

□

3.2.2 Sous-espaces orthogonaux

Définition 31 (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)**.** *On appelle orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E le sous-espace vectoriel noté $F^\perp$ et défini par :*

$$F^\perp = \{x \in E,\ \forall y \in F,\ (x \mid y) = 0\}.$$

Exemple 67.
- *$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.*
- $\{0_E\}^\perp = E$.
- ♣ $E^\perp = \{0_E\}$

- *Soit* $\vec{u} = (a, b)$ *un vecteur non nul de* $\mathbb{R}^2$ *muni de son produit scalaire canonique et* $D = \mathrm{Vect}(u)$. *Un vecteur* (x, y) *appartient à* $D^\perp$ *si, et seulement si,* $ax + by = 0$ *donc* $D^\perp = \mathrm{Vect}(-b, a)$.
- ♣ *La somme* $F + F^\perp$ *est directe.*

- *Soit* $a \in E \setminus \{0\}$.

  1. ♣ *Montrer que l'application* $\varphi(x) = (x \mid a)$ *est une forme linéaire non nulle. Son noyau est l'orthogonal de quel espace vectoriel ?*

  2. ♣ *En déduire que l'orthogonal de* $\mathrm{Vect}(a)$ *est un hyperplan.*

Propriété. 1. *Si* G *est un sous-espace vectoriel orthogonal à* F*, alors* $G \subset F^\perp$.

2. $F^\perp$ *est, au sens de l'inclusion, le plus grand sous-espace vectoriel orthogonal à* F.
3. *Si* $F_1 \subset F_2$*, alors* $F_1^\perp \supset F_2^\perp$.
4. $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.
5. *Étant donné une partie* A *de* E*, alors* $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$.

Théorème 14. *Soit* E *un espace préhilbertien réel de dimension quelconque. On considère un sous-espace vectoriel de* E*,* F *qui est* ***de dimension finie*** *et soit* $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ *une base orthonormée de* F*. Alors :*

1. $F \oplus F^\perp = E$*, et* $F^\perp$ *est appelé le* ***supplémentaire orthogonal*** *de* F.
2. $(F^\perp)^\perp = F$.
3. *On peut définir la projection orthogonale* p_F *de* E *sur* F *et* $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$.
4. $\forall x \in E,\ d(x, F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\|$.

Remarque. • *Soit E de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E n'admet, en général, pas un unique supplémentaire. En revanche, il admet un unique supplémentaire orthogonal.*

- *Un sous-espace vectoriel F de dimension infinie de E n'admet pas forcément de supplémentaire orthogonal.*

Exemple 68. *En dimension finie, le supplémentaire orthogonal d'un hyperplan est donc une droite, et le supplémentaire orthogonal d'une droite, un hyperplan.*

3.2.3 Projection orthogonale

> **Proposition 18** (Projection orthogonale)**.** *Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^{\perp} = E$. On appelle projection (projecteur) orthogonale de E sur F la projection de E sur F de direction $F^{\perp}$.*

Exemple 69 (Projection sur une droite)**.** *Soit $a \in E$, $a \neq 0_E$ et $F = \mathrm{Vect}(a)$. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :*

$$p(x) = \frac{(a \mid x)}{\|a\|^2} \cdot a.$$

♣ *Faire un dessin lorsque $E = \mathbb{R}^3$ en représentant a, F, $F^{\perp}$ x, $p(x)$ et $x - p(x)$.*

Exemple 70 (Projection sur un sous-espace vectoriel)**.** *Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ où $(e_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls. $\forall x \in E$, la projection de x sur F est :*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) \cdot e_i, \qquad \text{si } (e_1, \dots, e_p) \text{ est orthonormée.}$$

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(e_i \mid x)}{\|e_i\|^2} \cdot e_i, \qquad \text{si } (e_1, \dots, e_p) \text{ est orthogonale de vecteurs non nuls.}$$

Calcul du projeté orthogonal d'un vecteur

- Lorsque l'on dispose d'une base orthonormée (ou plus généralement orthogonale) de F, on a directement l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur x sur F mais il ne faut pas oublier que l'obtention d'une base orthogonale peut être longue.
- Pour trouver le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$ de dimension finie, sans avoir à déterminer une base orthonormée de F, il suffit de résoudre le système obtenu en traduisant les égalités $(x - y \mid e_i) = 0$ sur les coordonnées de y.

Exemple 71. ♣ *Prenons* $E = \mathbb{R}^3$, $a, x \in E$ *et* $F = \text{Vect}(a)$. *Faire un dessin de* $a, x, F, F^\perp, p_F(x)$ *et* $p_{F^\perp}(x)$. *Que vaut* $p_F + p_{F^\perp}$ *?*

Théorème 15 (Distance à un sous-espace vectoriel)**.** *Si* F *possède un supplémentaire orthogonal (i.e. si* $F \oplus F^\perp = E$*) alors :*

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = d(x, p_F(x))$$

où $p_F(x)$ *est le projeté orthogonal de* x *sur* F.

Théorème 16 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit* $(u_1, \ldots, u_p)$ *une famille libre d'un espace préhilbertien* E.
Il existe ***une et une seule famille orthonormée*** $(e_1, \ldots, e_p)$ *telle que :*

1. $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_i) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_i)$ *;*
2. $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $(e_i \mid u_i) > 0$.

Orthogonalisation de Gram-Schmidt

Pour orthonormaliser la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ en une famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$, l'algorithme est le suivant :

$$\boxed{f_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_i \mid u_k) e_i = u_k - p_{k-1}(u_k) \quad \text{et} \quad e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}}$$

pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

Exemple 72. ♣ *Orthonormaliser la famille* (u_1, u_2, u_3) *avec* $u_1 = (6, -2, 2)$, $u_2 = (-2, 5, 0)$, $u_3 = (2, 0, 7)$.

Mini-exercices. *Soit $\mathscr{B}$ une base d'un espace vectoriel euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}'$ de E telle que la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ soit triangulaire supérieure.*

Corollaire 5.
- *Tout espace euclidien possède une base orthonormée.*
- *Toute famille orthonormale peut-être complétée en une base orthonormée.*

Expression analytique en base orthonormée du produit scalaire

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E un espace vectoriel euclidien.

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = (e_i \mid x)$$

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Exemple 73. *Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E et $f \in \mathscr{L}(E)$ et $M = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$*

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{i,j} = (e_i \mid f(e_j)) \quad \textit{d'où} \quad \operatorname{Tr} f = \sum_{i=1}^{n} \big(e_i \mid f(e_i)\big).$$

Exemple 74 (Coefficients de Fourier)**.** *Reprenons l'Exemple 66. Nous avons montré que $\mathscr{F} = (t \mapsto 1/\sqrt{2}, t \mapsto \cos(t), t \mapsto \cos(2t), \dots, t \mapsto \sin(t), t \mapsto \sin(2t), \dots)$ était une famille libre (car orthonormale) de l'ensemble E des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On peut montrer et on le supposera qu'en fait $\mathscr{F}$ est une base de cet ensemble E (ceci n'est pas évident car E est de dimension infinie ...).*
♣ *Soit $f \in E$. Que vaut la composante de f dans la base $\mathscr{F}$?*

Théorème 17 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale d'un espace vectoriel préhilbertien réel, alors :*

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Complément :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x)^2 + d(x, F)^2 \ \textit{avec}\ F = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p).$$

Exemple 75. ♣ *Illustrer l'inégalité de Bessel par un dessin avec $E = \mathbb{R}^2$, $e_1 = 1/\sqrt{2}(1,1)$ et $e_2 = 1/\sqrt{2}(-1,1)$.*

Mini-exercices. *Pour les questions suivantes, si E est un espace euclidien alors son dual $E^\star$ représente l'ensemble des formes linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Autrement dit : $E^\star = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.*

1. *Isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que E est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ via :*
$$\varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$
φ dépend de la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E choisie.

2. *Isomorphisme entre E et son dual $E^\star$: Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et $E^\star = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$. Monter que E est isomorphe à son dual via :*
$$\Psi : \begin{cases} E \longrightarrow E^\star \\ a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \mapsto \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \end{cases} \end{cases}.$$
Autrement dit :
$$\Psi : \begin{cases} E \to E^\star \\ a \mapsto (a \mid .) \end{cases}.$$

3.2.4 Calcul de distances en géométrie

Cas du plan. Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

> **Proposition 19.** *Soit $\mathscr{D}$ une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par un point A et de vecteur normal $\vec{n}$. La distance d'un point M à la droite $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ est donnée par :*
> $$d(M,\mathscr{D}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax+by+c|}{\|\sqrt{a^2+b^2}\|}.$$

Exemple 76. ♣ *Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormal, calculer la distance du point A à la droite D, laquelle passe par le point $(3,1)$ et est dirigée par le vecteur $u = (-1,2)$.*

Cas de la dimension 3. L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Proposition 20. *La distance d'un point M de $\mathbb{R}^3$ à la droite $A+\mathrm{Vect}\,\vec{u}$ est donnée par :*

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right|}{\|\vec{u}\|}.$$

Proposition 21. *La distance d'un point M de $\mathbb{R}^3$ au plan $\mathscr{P} : ax+by+cz+d=0$ (de vecteur normal $\vec{n}=(a,b,c)$ est donnée par :*

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax+by+cz+d|}{\|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\|}.$$

Exemple 77. ♣ *Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormal, calculer la distance du point $A=(8,8,3)$ au plan P dont une équation cartésienne est $P : 5x-4y-4=0$.*

3.3 Exercices

Exercice 35. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que*

$$\phi(P(x),Q(x)) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur l'espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 36. *Soient $x_1>0, x_2>0, \ldots, x_n>0$ et $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.*
Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geqslant n^2,$$

préciser les cas d'égalité.

Exercice 37.
1. *Soit P le plan d'équation $x_1+x_2-2x_3=0$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base orthonormée de P. En déduire la formule de projection orthogonale sur P.*
2. *Mêmes questions avec l'hyperplan H d'équation $x_1+x_2-2x_3+x_4=0$ dans $\mathbb{R}^4$.*

Exercice 38. *Appliquer Gram-Schmidt à la base suivante de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique :*

$$u_1=(1,0,1),\ u_2=(1,1,0),\ u_3=(1,1,1).$$

Mêmes questions avec

$$u_1=(0,1,1),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(1,1,0).$$

Exercice 39. *Soient les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes :*

$$A_1 = I_2,\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Appliquer Gram-Schmidt à la base (A_1, A_2, A_3, A_4).

Exercice 40. *Dans un repère orthonormé $(O; e_1, e_2, e_3)$, on considère les vecteurs $u = e_1 - e_2 + 2e_3$ et $v = -e_1 - 2e_2 + e_3$. Donner leurs normes, leur produit scalaire. Calculer la projection orthogonale de u sur v.*

Exercice 41. *Soit E l'espace des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ $(a < b)$ dans $\mathbb{R}$ et on considère l'application :*

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & E \times E \to \mathbb{R} \\ & (f, g) \mapsto \left(f \mid g\right) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

φ est-elle un produit scalaire sur E ?

Exercice 42. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique et $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr} M = 0\}$.*

1. *Prouver que H est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, en fonction de M, sa distance à H.*

Exercice 43. *Calculer :*

$$\begin{array}{lcl} \min\limits_{(a,b,c,d)\in(\mathbb{R}_+^*)^4} & : & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \\ \textit{sous la contrainte} & : & a + b + c + d = 1 \end{array}$$

(indication : on pourra commencer par écrire $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{a+b+c+d}{a} + \frac{a+b+c+d}{b} + \frac{a+b+c+d}{c} + \frac{a+b+c+d}{d}$, sortir un terme constant, puis mettre les fractions restantes au même dénominateur).

Exercice 44. 1. *Montrer que $(f|g) = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = e^x$ et $f_3(x) = x$.*

2. *Pour quels réel a et b la distance de $f_2(x)$ à $g(x) = ax + b$ est-elle minimale ?*

Exercice 45. *Déterminer par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une base orthonormale de* $\mathrm{Vect}(X, X^2)$ *relativement au produit scalaire*

$$(P(X), Q(X)) = P(0)Q(0) + P(1)P(1) + P(2)P(2).$$

Exercice 46. *Soient A et B deux matrices symétriques sde taille $n \times n$. Montrer que*

$$(\mathrm{Tr}\,(AB + BA))^2 \leqslant 4\mathrm{Tr}\left(A^2\right)\mathrm{Tr}\left(B^2\right)$$

Extra :

Exercice 47. *On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $B = (i, j, k)$. Former la matrice dans B de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$*

Exercice 48. *Appliquer Gram-Schmidt à la base suivante de* $\mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique :*

$$u_1 = (1,0,1), u_2 = (-1,1,0), u_3 = (0,2,1).$$

Exercice 49. *Dans* $\mathbb{R}^3$ *muni d'un repère orthonormal, calculer la distance du point* $A = (4,2,6)$ *au plan* P *dont une équation cartésienne est* $P : 3x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Exercice 50. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *muni d'un repère orthonormal, calculer la distance du point* $M(-1,4)$ *à la droite* D*, laquelle passe par le point* $(1,1)$ *et est dirigée par le vecteur* $u = (-1,3)$.

Exercice 51. *Pour* $E = \mathbb{R}^2$*, on considère l'application* $(u \mid v) = u^\intercal Av$ *avec* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *et* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Cette application définie-elle le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ *?*

Exercice 52. *Soit* $E = \mathbb{R}^3$ *muni du produit scalaire canonique. On considère le sous-espace vectoriel* $F = \mathrm{Vect}((1,-3,2))$ *de* E*. Trouver une base de* $F^\perp$.

Exercice 53. *Pour quelles valeurs de* a *et* b *l'intégrale* $\int_0^1 (x^4 - ax - b)^2 \mathrm{d}x$ *est minimale ?*

Chapitre 4

Isométries et endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel euclidien.

4.1 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Définition 32 (Isométrie vectorielle)**.** *Un endomorphisme f de E est une **isométrie vectorielle** s'il conserve la norme c'est-à-dire si :*

$$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$$

Exemple 78 ($E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)**.**

- *Une rotation de centre 0_E est une isométrie vectorielle du plan euclidien.*
- *Une translation de vecteur $\vec{t} \neq 0_E$ n'est pas une isométrie vectorielle car ce n'est même pas un endomorphisme.*
- ♣ *À quelle condition une homothétie de rapport λ est-elle une isométrie vectorielle du plan euclidien ?*

Exemple 79. ♣ *Quelles sont les valeurs propres possibles d'une isométrie vectorielle ?*

Proposition 22. *Une isométrie vectorielle est un automorphisme.*

Démonstration. ♣

□

Proposition 23 (Isométrie Vectorielle ≡ Automorphisme Orthogonal)**.** *Un endomorphisme f de E est une isométrie si, et seulement s'il conserve le produit scalaire c'est-à-dire si, et seulement si :*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$$

Remarque. *Cette propriété explique pourquoi une isométrie vectorielle est aussi appelée un* ***automorphisme orthogonal****. Il s'agit en effet d'un automorphisme qui conserve l'orthogonalité, au sens où deux vecteurs orthogonaux ont des images orthogonales.*

Définition 33 (Caractérisation d'un automorphisme orthogonal)**.** *Les quatre définitions suivantes des automorphismes orthogonaux sont équivalentes :*

1. $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \forall (x, y) \in E^2,\ (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y)$ *i.e. u conserve le produit scalaire.*
2. $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ *i.e. u conserve la norme;*
3. *soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et l'image d'une base orthonormée est une base orthonormée;*
4. $\forall (x, y) \in E^2,\ \|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$ *et* $u(0_E) = 0_E$ *;*

Définition 34 (Symétrie)**.** *Un endomorphisme $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie de E si, et seulement si, $s^2 = Id_E$.*

Exemple 80.
- *Une projection orthogonale n'est pas un automorphisme orthogonal sauf si c'est l'identité puisque, sinon, elle n'est pas bijective (car $p \circ p = Id_E$).*
- ♣ *Toute symétrie orthogonale est une isométrie vectorielle.*

- ♣ *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Montrer que, si s est une isométrie, alors s est une symétrie orthogonale, c'est-à-dire que F et G sont orthogonaux.*

Définition 35 (Structure)**.** *L'ensemble des automorphismes orthogonaux est noté $O(E)$.*

Proposition 24 (Matrice de u^{-1} dans une base orthonormée)**.** *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée, soit $u \in O(E)$.*

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)^{\top}$$

Démonstration. ♣

□

Corollaire 6.

$$\mathrm{Rg}(u^{-1}) = \mathrm{Rg}(u) \qquad \mathrm{Tr}(u^{-1}) = \mathrm{Tr}(u) \qquad \det(u^{-1}) = \det(u)$$

Conséquence :

$$\chi_{u^{-1}} = \chi_u \qquad \mathrm{Sp}(u^{-1}) = \mathrm{Sp}(u) \qquad \mu_{u^{-1}} = \mu_u$$

Proposition 25 (Sous-espaces stables)**.** *Soient $u \in O(E)$ et u^{-1} son inverse. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On a :*

$$[F \text{ est stable par } u] \Leftrightarrow [F^{\perp} \text{ est stable par } u^{-1}]$$

Démonstration. ♣

$\square$

Proposition 26. *Soit $u \in O(E)$ alors* $\det u \in \{-1, 1\}$.

Mini-exercices. *Dans ces questions $u \in O(n)$ et u^{-1} désigne son inverse (voir Proposition 22).*

1. **Noyau et image.**
   Montrer que :
   $$\ker(u^{-1}) = \mathrm{Im}(u)^{\perp} \qquad \mathrm{Im}(u^{-1}) = \ker(u)^{\perp}.$$
2. **Normes subordonnées.**
   *On définie la **norme d'opérateur** de u par :*
   $$|||u||| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \left\{ \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\|x\|=1} \{\|u(x)\|\}.$$
   Montrer que :
   $$|||u||| = |||u^{-1}||| \qquad |||u^{-1} \circ u||| = |||u|||^2.$$

4.2 Matrices orthogonales

Définition 36 (Matrice Orthogonale)**.** *Les définitions suivantes sont équivalentes.*

1. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, son application linéaire associée est une isométrie vectorielle.*
2. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, ses colonnes forment une base. orthonormée.*
3. *Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si, et seulement si, $M^{\intercal} M = In$.*

$M \in O(n)$?

- Lorsqu'une matrice est orthogonale, il est aisé de calculer son inverse : il suffit de la transposer.
- Pour montrer qu'une matrice est orthogonale, il suffit de vérifier que ses colonnes (ou ses lignes) forment une famille orthonormale. Il y a donc n normes et $C_n^2 = n(n-1)/2$ produits scalaires à calculer. Ce procédé est plus rapide que le calcul de $M^\intercal M$ qui nécessite le calcul de n^2 coefficients,

Exemple 81. ♣ *On considère un algorithme qui, à partir d'une matrice M en entrée, indique si cette matrice est orthogonale ou non à partir de la méthode de l'encadré précédent. Quelle est la complexité en termes d'opérations élémentaires de cet algorithme ?*

Exemple 82. TODO*p.141*

Exemple 83. ♣ *Traduire la Proposition 24 en termes de matrice orthogonale.*

Définition 37 (Structure)**.** *L'ensemble des matrice orthogonales est appelé groupe orthogonal d'ordre n et est noté $O(n)$.*

Exemple 84.

♣ *Justifier que $O(n)$ est un groupe.*

Proposition 27. *Soit* $A \in O(n)$ *alors* $\det A \in \{-1, 1\}$.

Démonstration. ♣

□

Proposition 28. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base orthonormale,* $\mathscr{B}'$ *une autre base de* E.

$$[\mathscr{B}' \text{ orthonormale}] \Leftrightarrow [\mathrm{Pass}(\mathscr{B}, \mathscr{B}') \in O(n)]$$

Démonstration. ♣

□

Définition 38. *On appelle* $SO(n) = \{A \in O(n) \text{ tel que } \det A = 1\}$ *le groupe spécial orthogonal d'ordre* n.

Mini-exercices. *Montrer que les sous-espaces propres de* $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ *sont orthogonaux.*

4.3 Espace euclidien orienté de dimension 2 ou 3

Définition 39. *On dit que deux bases orthonormales* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *de* E *sont de même sens si la matrice de passage de* $\mathscr{B}$ *à* $\mathscr{B}'$ *appartient à* $SO(n)$.

Remarque. *On dit que l'on oriente l'espace* E *lorsque l'on choisit une base* $\mathscr{B}_0$ *orthonormale et qu'on la décrète directe. Alors :*

- *toute base orthonormale de même sens que* $\mathscr{B}_0$ *est dite directe,*
- *toute base orthonormale de sens opposé à* $\mathscr{B}_0$ *est dite indirecte.*

Proposition 29 (Produit Mixte)**.** *Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases orthonormales directes. Alors, on a :*

$$\forall (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n, \ \det_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \det_{\mathscr{B}'}(u_1, u_2, \ldots, u_n).$$

Remarque. *Le calcul du déterminant est le même dans toute base orthonormale.*

Démonstration. ♣

□

Définition 40. *On appelle produit mixte de n vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ leur déterminant dans n'importe quelle base orthonormale directe. On le note :* $\mathrm{Det}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Définition 41. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension* 3*. Il existe un unique vecteur de E , noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et appelé produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}$, tel que :*

$$\forall \vec{w} \in E, \ \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} \mid \vec{w}).$$

Exemple 85. ♣ *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E de dimension* 3*. Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dans une base orthonormale directe $\mathscr{B}$, alors montrer que dans $\mathscr{B}$ on a :*

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Proposition 30. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.*

Exemple 86. ♣ *Pour $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, donner une base de* $\mathrm{Vect}(\vec{u}, \vec{v})^{\perp}$.

Remarque. *Soit $\mathscr{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base orthonormale d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors la base $\mathscr{B}$ est directe si, et seulement si, $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et indirecte si, et seulement si, $\vec{w} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$.*

Remarque (Règle de la main droite)**.** *Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base directe. Prenez votre main droite. Si le pouce est dirigé par $\vec{u}$, l'index par $\vec{v}$ alors la direction du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donné par le majeur.*

Proposition 31 (Volume orienté d'un parallélotope)**.**

1. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. L'aire orienté du parallélogramme engendré par les $\vec{u}, \vec{v}$ vaut $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \wedge \vec{v}$. En particulier, cette quantité en dépend pas de la base $\mathscr{B}$.*
2. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Le volume orienté du tétraèdre engendré par les $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vaut $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.*

Exemple 87. *TODO*

Exemple 88. ♣ *Soient les points $A = (1;2)$, $B = (2;3)$ et $C = (5;0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Calculer l'aire du triangle ABC.*

Mini-exercices.

1. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{W}$ trois vecteurs d'un espace euclidien E orienté de dimension 3. Montrer que*

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

2. *Soient $o = (0;0;0)$, $a = (1;0;0)$, $b = (0;1;0)$ et $c = (0;0;1)$ dans $\mathbb{R}^3$. On note $\mathscr{T}$ le tétraèdre $oabc$.*
   (a) *Montrer que $\mathrm{vol}(\mathscr{T}) = 1/6$.*
   (b) *En déduire que pour tout tétraèdre OABC, on a*

$$\mathrm{vol}(OABC) = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right|$$

   (c) *Application : calculer le volume du tétraèdre de sommets $A(-1;2;3)$, $B(-2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $D(0;0;-4)$.*

4.4 Réduction des endomorphismes et matrices symétriques réelles

Corollaire 7. *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est symétrique si, et seulement si, sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est symétrique.*

Corollaire 8.

$$\operatorname{Rg}(u^*) = \operatorname{Rg}(u) \qquad \operatorname{Tr}(u^*) = \operatorname{Tr}(u) \qquad \det(u^*) = \det(u)$$

Conséquence :

$$\chi_{u^*} = \chi_u \qquad \operatorname{Sp}(u^*) = \operatorname{Sp}(u) \qquad \mu_{u^*} = \mu_u$$

4.4.1 Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)

Définition 42 (Endomorphisme autoadjoint)**.** *Un endomorphisme u est dit **autoadjoint** (ou **symétrique**) s'il vérifie :*

$$\forall (x, y) \in E^2, \ (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))$$

.

Proposition 32 (Matrice d'un endomorphisme autoadjoint)**.** *Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$. u est autoadjoint si et seulement si A est symétrique.*

Remarque. ♣ *Donner un automorphisme orthogonal qui n'est pas symétrique.*

♣ *Donner un automorphisme orthogonal qui soit symétrique.*

Définition 43 (Structure de $\mathscr{S}(E)$)**.** *On note $\mathscr{S}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^* = u\}$. $(\mathscr{S}(E), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ isomorphe à $(\mathscr{S}_n(E), +, \times)$.*

Exemple 89. *Toute homothétie est un endomorphisme symétrique.*

Exemple 90. ♣ *Soit p une projection de E. Montrer que p est une projection orthogonale si, et seulement si, p est symétrique.*

Exemple 91. ♣ *Soit s une symétrie de E . Montrer que s est une symétrie orthogonale si, et seulement si, s est symétrique.*

Mini-exercices. *1. Soient u et v deux endomorphismes symétriques. Montrer que $u \circ v$ est symétrique si, et seulement si, u et v commutent.*

Lemme 1. *Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$) où E un espace vectoriel non réduit au vecteur nul. Alors, le polynôme caractéristique de u est scindé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(u) \neq \varnothing$ (resp. $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$) et il existe des vecteurs propres.*

Démonstration. ♣

□

Théorème 18 (Spectrale 1 (version endomorphisme))**.** *Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ (i.e. u un endomorphisme symétrique ou autoadjoint). Alors u est diagonalisable dans une base orthonormée et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.*

Théorème 19 (Spectrale 2 (version matricielle))**.** *Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors il existe une matrice diagonale Δ et $P \in O(n)$ telles que*

$$\Delta = P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{\top} \cdot A \cdot P$$

Remarque. *La matrice P étant orthogonale, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base de vecteurs propres orthogonaux.*

Exemple 92. *TODO*

Exemple 93. ♣ *Diagonaliser (si possible)* $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.[2]

4.5 Exercices

Chapitre 5

Espaces vectoriels normés

5.1 Norme

Définition 44 (Norme)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle* **norme** *sur E toute application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :*

1. **Positivité :** $\forall x \in E$, $\|x\|$ *est bien définie et* $\|x\| \in \mathbb{R}^+$,
2. **Séparation :** $\forall x \in E$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$,
3. **Homogénéité :** $\forall x \in E$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$,
4. **Inégalité triangulaire ou Inégalité de Minkowski :** $\forall (x, y) E^2$, $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme est appelé ***espace vectoriel normé****.*

Remarque.

On note $(E, \|\cdot\|)$ l'espace vectoriel E muni de la norme $\|\cdot\|$. Lorsqu'il n'y a pas risque d'ambiguïté quant à la norme utilisée, on peut ne pas la préciser et se contenter de noter E.

Si $\|\cdot\|$ est une norme, alors la propriété d'homogénéité implique que $\|0\| = 0$.

Exemple 94. 1. *L'application $x \mapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$ (où $|x|$ désigne la valeur absolue de x si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module de x si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

2. ♣ *L'application $\varphi(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ est-elle une norme ?*

3. ♣ *L'application $\varphi(x_1, x_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} & si\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$ est-elle une norme ?*

4. ♣ *L'application* $\mathbb{K}^2 \ni (x_1, x_2) \to \min(|x_1|, |x_2|) \in \mathbb{R}^+$ *est-elle une norme ?*

5. *Les applications :* $\mathbb{K}^2 \ni (x, y) \to \max(|x|, |y|) \in \mathbb{R}^+$ *et* $\mathbb{K}^2 \ni (x, y) \to |x| + |y| \in \mathbb{R}^+$ *sont des normes sur* $\mathbb{K}^2$*, appelées respectivement* ***norme infinie*** *et* ***norme un****, et notées* $\|\cdot\|_\infty$ *et* $\|\cdot\|_1$.

6. ♣ *Définir la norme* $\|\cdot\|_1$ *et la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *sur* $\mathbb{R}^n$.

7. ♣ *Soit* $(E, (\cdot|\cdot)$ *un espace préhilbertien réel. Montrer que l'application :*

$$x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$$

est une norme sur E*. Cette norme est appelé* ***norme euclidienne*** *(ou norme deux) associée au produit scalaire* $(\cdot \mid \cdot)$.

8. *L'espace* $\mathbb{R}^2$*, muni du produit scalaire :*

$$\big((x_1, y_1) \mid (x_2, y_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

dont la norme associée est donnée par $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ *est un espace vectoriel normé.*

9. ♣ *Plus généralement, quelle est la norme deux sur l'espace* $\mathbb{R}^n$ *induite par le produit scalaire :*

$$\big((x_1,\dots,x_n) \mid (y_1,\dots,y_n)\big) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \text{ ?}$$

10. *L'espace* $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *(avec* $a<b$*) des fonctions continues de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$*, muni du produit scalaire*

$$(f \mid g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

dont la norme associée est donnée par $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t}$.

11. ♣ *Donner au moins deux autres normes sur* $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *et prouver que c'est une norme.*

12. ♣ *Soit* $E=\mathbb{R}^n$ *vu comme un* $\mathbb{R}$*-ev et* $x \in E\setminus\{0\}$*. Montrer qu'il existe deux vecteurs unitaires de même direction que* x*.*

♣ *Que se passe-t-il si* E *est vu comme un* $\mathbb{C}$*-ev ?*

Proposition 33 (Seconde inégalité triangulaire)**.**

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x+y\|.}$$

Démonstration. ♣

□

Exemple 95. ♣ *En utilisant la proposition 33, montrer :*

$$\boxed{\forall x, y \in E,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|.}$$

Remarque.

- *Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, l'inégalité triangulaire est une égalité si, et seulement si x, y sont positivement proportionnels (i.e. $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$).*

  $\boxed{\Leftarrow}$ *Dans ce cas, si $x = \lambda y$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors*

  $$\|x+y\| = \|(1+\lambda)y\| = |1+\lambda|\|y\| = \|y\| + |\lambda|\|y\| = \|y\| + \|\lambda y\| = \|x\| + \|y\|.$$

  $\boxed{\Rightarrow}$ *On a :*

  $$\|x+y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2,$$

  et d'autre part,

  $$\|x+y\|^2 = (x+y \mid x+y) = (x \mid x) + (x \mid y) + (y \mid x) + (y \mid y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x \mid y).$$

  Ainsi si il y a égalité alors $(x \mid y) = \|x\|\|y\|$ qui est le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (déjà vu dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens réels et qui mène à la conclusion voulue).
- ♣ *Dans $\mathbb{R}^2$ trouver une norme et deux vecteurs x et y* ***non colinéaires*** *mais vérifiant $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$.*

Définition 45 (Distance)**.** *Une distance est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *c'est bien une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$,*
2. *$\forall u, v \in E$, $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$,*
3. *$\forall (u, v) \in E^2$, $d(u, v) = d(v, u)$,*
4. *$\forall (u, v, w) \in E^3$, $d(u, w) \leqslant d(u, v) + d(v, w)$.*

Définition 46 (Distance associée à une norme)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Alors l'application*

$$d : \left\{ \begin{array}{l} E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) \longmapsto d(u, v) = \|u - v\| \end{array} \right.$$

*est une **distance**.*

Remarque. *Toutes les distances ne sont pas nécessairement associées à une norme.*

Propriété. *Soit d une distance sur E. $\forall (u, v, w) \in E^3$, $|d(u, v) - d(u, w)| \leqslant d(u, w)$.*

Définition 47 (Distance d'un « point » à une partie)**.** *Soit $x \in E$ et $A \subset E$ avec A non vide. On appelle distance de x à A le nombre*

$$d(x, A) = \inf\big(\{d(x, y), y \in A\}\big).$$

Exemple 96. ♣ *Prenons $E = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$ et soit d la distance induite. Calculer $d(p, S)$ où $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et $p = (1, 0, -1)$.*

Dans la suite, et sauf mention du contraire, $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé et d désigne la distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

Définition 48 (Boule ouverte, boule fermée, sphère)**.** *Soit a un élément de E et r un réel strictement positif.*

- *On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r , et l'on note $B(a,r)$, la partie :*

$$B(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) < r\}.$$

- *On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r , et l'on note $B_F(a,r)$, la partie :*

$$B_F(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) \leqslant r\}.$$

- *On appelle **sphère** de centre a et de rayon r , et l'on note $S(a,r)$, la partie :*

$$S(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) = r\}.$$

On a alors $S(a,r) = B_F(a,r) \setminus B(a,r)$.

Exemple 97. ♣ *Représenter les boules unités ($r = 1$) de $\mathbb{R}^2$ pour les distances associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.*

Définition 49 (Partie convexe)**.** *Soit $A \subset E$.*

$$A \text{ \textbf{convexe}} \quad \Leftrightarrow \quad \forall a,b \in A,\ [a,b] \subset A \quad \Leftrightarrow \quad \forall a,b \in A,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda a + (1-\lambda)b \in A.$$

Propriété. *Les boules ouvertes et fermées de E sont des parties convexes de E.*

Exemple 98. *1.* ♣ *L'union de deux boules (ouvertes ou fermées) est-elle convexe ? (Faire un dessin)*

2. ♣ *L'intersection de deux boules (ouvertes ou fermées) est-elle convexe ? (Faire un dessin)*

3. ♣ *Soit $f(x) = \ln x$. La partie $\{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mid y \geqslant f(x)\}$ est-elle convexe ? (Faire un dessin).*

Définition 50 (Parties bornées, application bornée)**.** 1. *Une partie A non vide de E est dite bornée si*

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant k.}$$

2. *Une fonction $f : X \to E$ où X est un ensemble quelconque non vide est dite bornée si la partie $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée. Ou encore*

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leqslant k.}$$

Remarque. *Dire qu'une partie est bornée signifie donc qu'il existe une boule fermée centrée en l'origine qui la contient.*

Exemple 99. ♣ *L'ensemble $A = \{(2\cos(t^2), \sin(2t)),\ t \in \mathbb{R}\}$ est-il bornée dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$?*

Exemple 100. ♣ *Donner E, une partie A de E et deux normes pour lesquelles A est bornée pour la première norme mais n'est pas bornée pour la deuxième norme.*

Remarque.
- *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans E. Donc, d'après la définition précédente, une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leqslant M.$$

- *L'espace vectoriel $\mathscr{B}(X,E)$ des fonctions $f : X \to E$ bornées où X non vide et E un espace vectoriel normé est lui-même normé par $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$.*

5.2 Suites d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Définition 51 (Suites convergentes – divergentes)**.** *Soit $u \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans $(E, \|\cdot\|)$ qui est un espace vectoriel normé.*

1. *S'il existe $\ell \in E$ tel que*

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \text{si } n \geqslant n_0,\ \text{alors } \|u_n - \ell\| \leqslant \varepsilon,}$$

   on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, que sa limite est ℓ et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

2. *Une suite divergente est une suite non convergente.*

Remarque. *La convergence d'une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé dépend par définition de la norme avec laquelle on travaille. Une suite peut en effet converger pour une norme et diverger pour une autre. En cas d'ambiguïté, il est donc important de préciser la norme utilisée.*

Exemple 101 (***En dimension infinie***, la notion de convergence dépend de la norme)**.** *Dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, considérons la suite de fonctions (f_n), $n \in \mathbb{N}^*$ définie ainsi :*

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = x^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, la suite (f_n), $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers la fonction nulle pour la norme un (car $\|f_n\|_1 \to 0$) mais pas pour la norme infinie (car $\|f_n\|_\infty \nrightarrow 0$).

Exemple 102. ♣ *(Norme sur l'espace des polynômes). Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes. On définie la norme $\|P\| = \max_{X\in[0,1]} |P(X)|$. Calculer $\|P_n\|$ avec $P_n(X) = \dfrac{X}{n} + 1$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \|P_n\|$?*

Remarque. *L'Exemple 102 montre qu'une limite d'éléments non inversible (P_n) peut être inversible.*

Proposition 34 (Cas d'un espace vectoriel produit)**.** *Soit $E = \prod_{j=1}^{k} E_j$ un espace vectoriel produit normé où l'on note $\|\cdot\|_{E_j}$ la norme sur E_j, $j = 1,\ldots,k$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in E$ donc $u_n = (u_{n,1},\ldots,u_{n,k})$ où $\forall j \in [\![1,k]\!]$, $u_{n,j} \in E_j$. Soit $\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_k) \in E$. On a :*

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|} \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \forall j \in [\![1,k]\!],\ u_{n,j} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|.\|_{E_j}} \ell_j.}$$

Suite de matrices

On peut voir une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^{n^2}$ qui est un produit de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En appliquant la proposition 34,

la matrice $A_n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ converge vers la matrice $M = \left(m_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ si, et seulement si, $a_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} m_{ij}$.

♣ *Lorsque l'on a appliqué la proposition 34, que vaut E, E_1, E_2, ..., u_n, $u_{n,1}$, $u_{n,2}$, ..., ℓ, ℓ_1, ℓ_2,... ?*

Exemple 103 (Suite de matrices)**.** *Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note les normes p ($p \in \mathbb{N}$) et infinie par : $\|M\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{1/p}$ et $\|M\|_\infty = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$.*

1. *Soit $A_n = \begin{pmatrix} \frac{\ln n}{n} & \frac{1}{n}\sin(n) \\ 0 & \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \end{pmatrix}$. Que vaut $A = \lim_{n\to\infty} A_n$? Calculer $\|A - A_n\|_\infty$ et $\|A - A_n\|_1$.*

2. *Soit $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{-a}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $A = \lim_{n\to\infty} A_n^n$? Calculer $\|A - A_n\|_\infty$ et $\|A - A_n\|_2$.*

3. $A_p = 2^{-p} I_n + A$ *où* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. *Que vaut* $\lim\limits_{p\to\infty} A_p$ *?*

Proposition 35. *L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel* $\mathscr{B}(\mathbb{N}, E)$ *(espace des suites bornées à valeurs dans* E*).*

Remarque. ♣ *Expliquer ce que veut dire la Proposition 35 en terme de somme de suites convergentes, multiplication par un scalaire ...*

- *Nous avons aussi que le produit de deux suites convergentes et* **à valeurs dans** $\mathbb{K}$ *est une suite convergente vers le produit des limites.*

Proposition 36. *Si une suite* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ*, alors la suite réelle de terme général* $\|a_n\|$ *converge vers* $\|\ell\|$.

Démonstration. ♣

□

Exemple 104. ♣ *Donner un exemple où la réciproque est fausse.*

Définition 52 (Suite extraite)**.** *On appelle* ***suite extraite*** *ou* ***sous-suite*** *d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Exemple 105. *1. Soit $u_n = (-1)^n$. Si $\varphi(n) = 2n$ alors φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Que vaut la sous-suite $u_{\varphi(n)}$?*

2. Soit $u_n = \cos(\pi/2n)$. Donner une sous-suite de (u_n) constante.

Définition 53 (Valeur d'adhérence)**.** *Soit $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in E$. On dit que α est* ***valeur d'adhérence*** *de la suite $(u_n)_n$ si elle est limite d'une suite extraite de $(u_n)_n$.*

Exemple 106.
- ♣ *Quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$?*

- ♣ *Quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite de terme général $u_n = \sin(n)$?*

- ♣ *Quelles sont les valeurs d'adhérences de la suite de terme général $u_n = (-1)^n$?*

Théorème 20. *Toute suite convergente admet une et une seule valeur d'adhérence.*

Montrer qu'une suite diverge

Le Théorème 20 offre une méthode pour prouver qu'une suite diverge. Il suffit, au choix :

- d'en exhiber une sous-suite qui diverge,
- d'en exhiber deux sous-suites convergeant vers deux limites différentes.

Exemple 107. *La suite réelle de terme général $a_n = (-1)^n$ est divergente, car ses deux sous-suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes, égales respectivement à 1 et -1, donc convergent respectivement vers 1 et -1.*

5.2.1 Cas de la dimension finie

Dans l'exemple 101, E est de dimension infinie. En fait, en dimension finie on ne peut pas avoir ce cas où la convergence dépend de la norme.

Théorème 21 (Équivalence des normes en dimension finie)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, (a_n) une suite à valeurs dans E et ℓ un élément de E. Si l'on dispose de deux normes sur E et si la suite (a_n) converge vers ℓ pour l'une des deux normes, alors elle converge aussi vers ℓ pour l'autre.*

Exemple 108 (Sur $\mathbb{R}^p$)**.** *L'équivalence des normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ signifie qu'il existe des réels $\alpha_2, \alpha_\infty, \beta_2, \beta_\infty$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$:*

$$\alpha_2\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta_2\|x\|_1,$$
$$\alpha_\infty\|x\|_1 \leqslant \|x\|_\infty \leqslant \beta_\infty\|x\|_1.$$

♣ *Donner des réels $\alpha_2, \beta_2, \alpha_\infty, \beta_\infty$ qui satisfont ces inégalités.*

Exemple 109 (Sur l'espace des polynômes de degrés $\leqslant n$). *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ que l'on écrit $P(X) = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} \ldots + a_1 X + a_0$. On considère les normes*

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{p} |a_k|, \quad \|P\|_m = \max_{0\leqslant k\leqslant p} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

1. ♣ *Calculer $\|P_n\|_1$, $\|P_n\|_\infty$, $\|P_n\|_m$ avec $P_n(X) = 1 + \frac{1}{n}X + \frac{1}{n^2}X^2$ et vérifier que la suite de polynômes (P_n) converge vers le même polynôme pour ces différentes normes.*

2. ♣ *On considère $P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} X^k$. Que vaut $\|P_n\|_1$, $\|P_n\|_\infty$, $\|P_n\|_m$? Ces suites convergent-elles vers le même polynôme ?*

Remarque. *Puisque dans un espace de dimension finie les notions manipulées ne dépendent pas de la norme choisie, il arrive que l'on ne précise même pas avec quelle norme on travaille. Par exemple, on ne s'étonnera pas de lire : « Soit E un espace vectoriel de dimension finie et A une partie bornée de E. »*

Dans un espace de dimension finie muni d'une base, la convergence d'une suite est équivalente à celle des suites coordonnées.

Proposition 37. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit (a_n) une suite à valeurs dans E. Notons $(a_n^{(1)}), \dots, (a_n^{(p)})$ les suites « coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ », c'est-à-dire les suites scalaires vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \sum_{k=1}^{p} a_n^{(k)} e_k.$$

Étant donné $\ell = \sum_{k=1}^{n} \ell_k e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :

- *la suite (a_n) converge vers ℓ*
- *pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, la suite de terme général $a_n^{(k)}$ converge vers ℓ_k.*

Exemple 110 (Sur $\mathbb{K}^p$)**.** ♣ *Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $a_n = (1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{2n})$. En utilisant la proposition 37, préciser p, $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$,..., $e_1, e_2, \dots$ puis $\ell_1, \ell_2, \dots$ et en déduire la limite ℓ de la suite $(a_n)_n$.*

Exemple 111 (Sur l'espace des matrices)**.** ♣ *Soit la suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $A_n = \begin{pmatrix} \frac{n!}{e^n} & \frac{1}{n} & \cos(e^n) \\ 0 & & \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$.*

Préciser p, $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$,..., $e_1, e_2, \dots$ puis $\ell_1, \ell_2, \dots$ et en déduire la limite ℓ de la suite $(A_n)_n$.

Théorème 22 (Théorème de Bolzano–Weierstrass)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Toute suite bornée de E admet au moins une valeur d'adhérence.*

Remarque. *Rappelez-vous qu'une **suite convergente est nécessairement bornée**. La réciproque est évidemment fausse. Le théorème 22 donne une "réciproque faible".*

Exemple 112. *Soit $E = \mathbb{R}$ et la suite $a_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La suite est bornée et admet au moins une valeur d'adhérence. En effet, elle a les deux valeurs d'adhérences qui sont -1 et 1.*

Exemple 113. ♣ *Donner une suite non bornée qui admet au moins une valeur d'adhérence.*

Exemple 114. *Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Munissons-le de la norme définie pour le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $\|P\| = \max_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$. Considérons la suite de polynômes $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

1. ♣ *Cette suite est-elle bornée ?*

2. ♣ *En raisonnant par l'absurde, montrer qu'il n'existe pas une sous-suite $(X^{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un polynôme L de degré p.*

   ♣ *Pourquoi cela ne contredit pas le théorème 22 ?*

5.3 Quelques éléments de topologie

Définition 54 (Ouvert, fermé)**.** *Soit E est un espace vectoriel normé*

1. *On dit que $\Omega \in \mathscr{P}(E)$ est un ouvert si*

$$\boxed{\forall a \in \Omega,\ \exists r > 0 \quad \text{tel que} \quad B(a,r) \subset \Omega.}$$

2. *On appelle fermé tout ensemble F dont le* ***complémentaire*** *$\complement_E F$ est ouvert.*

Exemple 115.
- $]0,1[$ *est ouvert dans $E = \mathbb{R}$, son complémentaire qui est $]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$.*
- $[0,1]$ *est fermé dans $E = \mathbb{R}$.*

Exemple 116. ♣ *L'intervalle ouvert $]a,b[$ (a et b étant des réels tels que $a < b$) est-il ouvert dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$?*

Remarque. ***Attention, un ensemble qui n'est pas ouvert n'est pas nécessairement fermé.*** ♣ *Donner un tel exemple.*

Propriété.
1. *$\varnothing$ et E sont à la fois ouverts et fermés.*
2. *Toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*
3. *Toute intersection quelconque de fermés est un fermé et toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Théorème 23 (Caractérisation séquentielle des fermés)**.** *Soit F une partie d'un espace vectoriel normé E.*

$$\boxed{\big(F \text{ est fermé}\big) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\text{Toute suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ d'éléments de } \boldsymbol{F} \text{ qui converge admet une limite qui appartient à } F\big).}$$

Exemple 117. ♣ *Expliquer la phrase : « Un ensemble fermé est stable par passage à la limite ».*

Exemple 118. *Les ensembles donnés sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}$?*

1. ♣ $[2, +\infty[$.

2. ♣ $\{3\}$.

3. ♣ $\cup_{n=1}^{\infty}]0, n[$ *(union infinie d'ouverts).*

4. ♣ $\mathbb{R}^{-}$.

5. ♣ $\cap_{n=1}^{\infty} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$ *(intersection infinie d'ouverts).*

Exemple 119. ♣ *Montrer que toute boule fermée est fermé. On pourra se limiter à une boule fermée de $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 120. *Les ensembles suivants sont-ils ouverts ou fermés ou ni l'un ni l'autre dans $\mathbb{R}^2$?*

1. ♣ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\}$.

2. ♣ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| \geqslant 0,\ |y| \geqslant 0\}$.

3. ♣ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| < 0,\ |y| > 0\}$.

Exemple 121. ♣ *Montrer que toute partie ouverte de E peut s'écrire comme une réunion de fermés.*

Exemple 122. ♣ *Montrer que toute partie ouverte de E peut s'écrire comme une réunion de boules ouvertes.*

Définition 55 (Adhérence)**.** *Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ et $a \in E$. On dit que a **est adhérent à** A si*

$$\forall r > 0,\ \mathscr{B}(a, r) \cap A \neq \varnothing.$$

*L'« **adhérence** » de A est l'ensemble des points adhérents à A. Elle est noté $\overline{A}$.*

Remarque. • *L'adhérence de A est aussi le plus petit fermé contenant A.*

- *Une manière plus séquentielle, est de voir l'adhérence de* A *comme* ***l'ensemble de toutes les limites des suites convergentes d'éléments de*** A.

Exemple 123. *1. Soit* $E = R$ *et* $F =]0,1[$ *et* $\overline{F} = [0,1]$.

2. ♣ *Le point* 1 *est-il adhérent à* $A = [0,1[$ *? Si oui, donner une suite d'éléments de* A *qui converge vers* 1.

3. ♣ *Le point* 0 *est-il adhérent à* $A = [-1,0]$ *? Si oui, donner une suite d'éléments de* A *qui converge vers* 0.

Exemple 124. ♣ *Donner un ensemble vide, d'adhérence non vide.*

Exemple 125. ♣ *Montrer que si* F *est fermé alors* $\overline{F} = F$.

Définition 56 (Intérieur)**.** *Soit* $A \in \mathscr{P}(E)$ *et* $a \in E$. *On dit que* a *est « intérieur » à* A *si*

$$\exists r > 0 / \ \mathscr{B}(a,r) \subset A.$$

*L'**intérieur** de* A *est l'ensemble des points intérieurs à* A. *Il est noté* $\mathring{A}$.

Remarque. *L'intérieur de* A *est aussi le plus grand ouvert inclus dans* A.

Exemple 126. *L'intérieur de* $A = \{(x,y) \in R^2 \mid x \in [-1,1]$ *et* $y \in]-1,1]\}$ *est* $\{(x,y) \in R^2 \mid x \in]-1,1[$ *et* $y \in]-1,1[\}$. ♣ *Faire un dessin de* A *et* $\mathring{A}$

Exemple 127. ♣ *Donner un ensemble non vide, d'intérieur vide.*

Exemple 128. ♣ *Montrer que si A est ouvert alors $\mathring{A} = A$.*

Propriété. *Pour toute partie A d'un evn,*

$$\boxed{\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}.}$$

Mini-exercices. 1. *Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ avec E un espace vectoriel normé. La* ***frontière*** *de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}\,A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \complement \mathring{A}$.*
Montrer que $\mathrm{Fr}A$ est fermé et $\mathrm{Fr}A = \mathrm{Fr}\left(\complement A\right)$.

2. *Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On dit que A est* ***dense*** *dans B si $\overline{A} \supset B$.*
Montrer que pour $B = E$: A dense dans $E \Leftrightarrow \overline{A} = E$.

5.4 Limite et continuité en un point.

Définition 57 (Limite d'une fonction en un point)**.** *Soit $f : A \to F$ où $A \subset E$ et $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, soit $\ell \in F$.*
On dit que f admet pour limite ℓ en a (ou au point a) et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{a} f = \ell$ i.e. si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \|x - a\| < \alpha \text{ et } x \in A,\ \text{alors } \|f(x) - \ell\|_F \leqslant \varepsilon.}$$

♣ *Faire un dessin qui représente $E = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, a, x, α, ℓ et la courbe de f.*

Théorème 24 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit $f : A \to F$ avec $A \subset E$ et E, F deux espaces vectoriels normés. Soit $a \in \overline{A}$, $\ell \in F$.*

$$\boxed{\lim_a f = \ell \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } a, \text{ la suite } \left(f(x_n)\right)_n \text{ converge vers } \ell.}$$

Si $a \in A$,

$$\boxed{f \textbf{ continue en } a \iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telle que si } x_n \to a, \text{ alors } f(x_n) \to f(a).}$$

Exemple 129. ♣ *Illustrer le théorème 5 sur un exemple d'une fonction continue.*

Exemple 130. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$.*

1. ♣ *Essayer de représenter graphiquement f au voisinage de $x = 0$.*

2. ♣ *f est-elle continue en $x = 0$?*

Définition 58 (Continuité sur une partie A)**.** *Soit $f : A \to F$ avec F un espace vectoriel. f est dite continue sur A si elle est continue en chaque point de A.*

Théorème 25 (Continuité et topologie)**.** *Soit $f : E \to F$ avec E, F deux espaces vectoriels normés. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E ;*
2. *l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E ;*
3. *l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E.*

Exemple 131 (Image directe d'un ouvert)**.** ♣ *Donner une application continue telle que l'image directe d'un ouvert n'est pas ouvert.*

Exemple 132 (Image directe d'un fermé)**.** ♣ *Donner une application continue telle que l'image directe d'un fermé n'est pas fermé.*

Exemple 133. ♣ *En utilisant le théorème 25, montrer que l'ensemble $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ est fermé.*

Exemple 134. ♣ *Montrer que l'ensemble $A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \det M = 0\}$ est fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Exemple 135. ♣ *Montrer que l'ensemble $B = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr} M \in]0,1[\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Propriété. 1. *Si deux fonctions f_1 et f_2 convergeant vers $\ell_1 \in E$ et $\ell_2 \in E$ respectivement alors toute combinaison linéaire $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ converge vers $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2$.*

2. *Si f est une fonction convergeant vers $\ell \in E$ et φ est une fonction* **à valeurs réelles** *convergeant vers $\lambda \in \mathbb{K}$ alors φf converge vers $\lambda \ell$.*

Si f est une application à valeurs dans un espace de dimension finie, alors l'étude de la limite de f en un point se ramène à celle de ses applications coordonnées dans une base :

> **Proposition 38.** *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit $f : A \to E$ une application à valeurs dans E (A étant une partie quelconque d'un espace vectoriel normé). Notons $f_1, \ldots, f_p$ les applications « coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$ », c'est-à-dire les fonctions scalaires vérifiant :*
>
> $$\forall x \in A,\ f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)\, e_k.$$
>
> *Pour $a \in A$ et $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k$ appartenant à E, il est équivalent de dire :*
> - *l'application f admet ℓ comme limite en a,*
> - *pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, l'application f_k tend vers ℓ_k en a.*

Corollaire 9. *Avec les notations de la proposition précédente :*
- *l'application f est continue en a si, et seulement si, chacune des applications $f_1, \ldots, f_p$ est continue en a,*
- *l'application f est continue sur A si, et seulement si, chacune des applications $f_1, \ldots, f_p$ est continue sur A.*

Exemple 136. ♣ *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (\cos(2x), y^2)$. Donner des valeurs des variables $A, E, f, f_1, f_2, \ldots, p, \ell, \ell_1, \ell_2, \ldots, e_1, e_2, \ldots$ qui apparaissent dans la proposition 38.*

Exemple 137. ♣ *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x, 2y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.*

5.5 Exercices

Exercice 54. *Soit $E = \mathbb{R}^n$. Démontrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalents.*

Exercice 55. *Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :*

1. $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy>1\right\}$.
2. $\left\{(x,y)\in R^2 | x^2+y^2\leqslant 2\right\}\setminus\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\right\}$.

Exercice 56. *Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :*

1. $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2<\exp(\sin y)+12\right\}$.
2. $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; -1<\ln(x^2+1)<1\}$.

Exercice 57. *Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on défini $x\in\mathbb{R}^n$ par*

$$x=\left(-1,\frac{(-1)^2}{4},\dots,\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

Calculer $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$.

Exercice 58. *Soit $x(t)=t^2$, $y(t)=2t+3$. Trouver la distance entre $x(t)$ et $y(t)$ dans les espaces suivants :*

1. $\mathscr{C}^0([0,\frac{7}{2}],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\int_0^{\frac{7}{2}}|f(t)|\mathrm{d}t$.
2. $\mathscr{C}^0([0,\frac{7}{2}],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\max\limits_{t\in[0,\frac{7}{2}]}|f(t)|$.
3. $\mathscr{C}^1([0,\frac{7}{2}],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\max\limits_{t\in[0,\frac{7}{2}]}|f(t)|+\max\limits_{t\in[0,\frac{7}{2}]}|f'(t)|$.

Exercice 59. *Montrer que la suite*

$$f_n(t)=\begin{cases} nt & 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{n}\\ 1 & \frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\end{cases},$$

définie pour $n\in\mathbb{N}^*$, est convergente vers $f(t)\equiv 1$ dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|=\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t$, mais divergente pour la norme $\|f\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|f(t)|$.

Exercice 60. *Soit $x(t)=\frac{1}{5}(4t^3-t^4)$. Trouver $\|x\|$ dans les espaces suivants :*

1. $\mathscr{C}^0([-1,5],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\int_{-1}^{5}f(t)\mathrm{d}t$.
2. $\mathscr{C}^0([-1,5],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\max\limits_{t\in[-1,5]}|f(t)|$.
3. $\mathscr{C}^1([-1,5],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|f\|=\max\limits_{t\in[-1,5]}|f(t)|+\max\limits_{t\in[-1,5]}|f'(t)|$.

Définition 59. *On note la suite $(u)_n$ du terme générale u_n de manière suivante :*

$$u=(u_1,u_2,\dots,u_n,\dots).$$

Exercice 61. *Pour $p > 1$, on note ℓ_p et ℓ_∞ l'espace vectoriel formé des suites $(u_n)_n$ muni de la norme*

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\geqslant 1} |u_n|,$$

respectivement. Calculer la distance entre $x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}, \dots\right)$ et $y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$ dans ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_∞.

Exercice 62. *La suite $(x_n)_n$ de terme général $x_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, appartient-elle à la boule ouverte centrée en la suite nulle $O = (0, \dots, 0, \dots)$ de rayon 1 dans l'espace l_1 ? Dans l'espace l_2 ?*

Exercice 63. *Considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} |P(t)|$ et l'application linéaire de dérivation ϕ :*

$$\phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P' \end{array} \right. .$$

Démontrer que ϕ n'est pas continue en 0.

Exercice 64. *Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:*

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\sin(x-y)}{x-y} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{array} \right.$$

est continue.

Exercice 65. *Étudier la convergence des suites suivantes :*

1. *$f_n(t) = t^{2n}$ dans $\mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.*
2. *$f_n(t) = t^n - t^{n+1}$ dans $\mathscr{C}^0([1,2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \max\limits_{t\in[1,2]} |f(t)|$.*
3. *$f_n(t) = nt^2 e^{-nt}$ dans $\mathscr{C}^0([0,2], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \max\limits_{t\in[0,2]} |f(t)|$.*
4. *$f_n(t) = \dfrac{\cos(nt)}{n}$ dans $\mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \displaystyle\int_0^\pi |f(t)| \mathrm{d}t$.*

Chapitre 6

Équivalents

6.1 Sur les suites

6.1.1 La relation $o(\cdot)$: Négligeabilité.

Définition 60. *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est* ***négligeable*** *par rapport à une suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne s'annulant pas à partir d'un certain rang si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. *On le note* $u_n = o(v_n)$.

Remarque. *On n'écrira pas par exemple* $u_n = o(2n^2+1)$, *mais plus simplement* $u_n = o(n^2)$.

Exemple 138. *Dire que* $u_n = o(1)$ *revient à dire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0.*

Corollaire 10 (Règles de calcul sur la relation de négligeabilité).

- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne s'annule pas à partir d'un certain rang, alors* $\frac{1}{v_n} = o\left(\frac{1}{u_n}\right)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $w_n = o(v_n)$, *alors* $u_n + w_n = o(v_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$, *alors* $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et* $w_n = o(t_n)$ *alors* $u_n w_n = o(v_n t_n)$.

6.1.2 L'équivalence

Définition 61. *Deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont* ***équivalentes*** *si* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. *On le note* $u_n \sim v_n$.

Corollaire 11. *Deux suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont équivalentes si et seulement si* $u_n - v_n = o(v_n)$.

Remarque.

- *Elle est réflexive* ($u_n \sim u_n$), *transitive (si* $u_n \sim v_n$ *et* $v_n \sim w_n$ *alors* $u_n \sim w_n$*), et symétrique (si* $u_n \sim v_n$ *alors* $v_n \sim u_n$*).*
- *On n'écrit jamais qu'une suite est équivalente à* 0.
- *Si k est un réel non nul (cf ci-dessus), dire que* $u_n \sim k$ *est équivalent à dire que* $\lim_{n\to+\infty} u_n = k$.
- *Si deux suites sont équivalentes, et qu'elles admettent des limites (éventuellement infinies), alors leurs limites sont égales.*

Exemple 139. ♣ *Les équivalents ne se composent pas non plus en général : ainsi, on a* $n^2+n \sim n^2$ *mais* $e^{n^2+n} \nsim e^{n^2}$.

Exemple 140. ♣ *Déterminer un équivalent simple de* $u_n = n^5 + 2n^3 - 1$.

Théorème 26 (Règles de calcul)**.**
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $w_n \sim t_n$*, alors* $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* v_n *ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors* $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.
- *Si* $u_n \sim v_n$*, alors* $\forall \alpha \neq 0$, $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

Exemple 141. *On ne peut pas additionner des équivalents. Par exemple* $(n^2 + n \sim n^2$ *et* $(-n^2 - 3) \sim -n^2$*, mais la somme nous donnerait* $n - 3$ *équivalent à 0, ce qui est faux.*

Exemple 142. ♣ *Déterminer un équivalent de* $u_n = \dfrac{n^3 - n^2 + 1}{3n^2 + n}$.

Théorème 27.
- *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suites ne s'annulant pas à partir d'un certain rang, alors*

$$e^{u_n + o(1)} \sim e^{u_n}$$

- *. Soient* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles strictement positives.*
  Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *et* $u_n \sim v_n$ *, alors*

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

- *Si* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$ *et* $u_n \sim v_n$ *, alors*

$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

Exemple 143. ♣ *Déterminer un équivalente simple des suites de terme général :*
- $u_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
- $e^{n^2 + n + \frac{1}{2} + \frac{1}{n}}$

6.1.3 Résultats classiques

Théorème 28 (Croissances comparées)**.** *1. Si $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$.*

2. $\forall a > 1, \forall b > 0, n^b = o(a^n)$.

3. $\forall b > 0, \forall k > 0, \ln^k(n) = o(n^b)$.

Équivalents classiques. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors :

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$.
- $\sin(u_n) \sim u_n$.
- $1 - \cos(u_n) \sim \dfrac{u^2}{2}$.
- $\tan(u_n) \sim u_n$.
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$.

Exemple 144. ♣ *Déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

- $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+n}\right)$
- $u_n = \ln(\mathrm{ch}(n))$.
- $u_n = \sqrt{n^4+3n^3-1} - n^2$.

6.1.4 Développements asymptotiques de suites.

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{kn^k} + o(\frac{1}{n^k})$$
$$e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{k!n^k} + o(\frac{1}{n^k})$$
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-3)}{2^k k! n^k} + o(\frac{1}{n^k})$$
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2n} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!\,n} + o(\frac{1}{n^k})$$

6.2 Sur les fonctions

6.2.1 La relation $O(\cdot)$: Domination.

Définition 62. *On considère f et g deux applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overline{A}$. On dit que f est **dominée** par g au voisinage de a s'il existe un réel positif M et un voisinage de a noté V_a tel que*

$$\forall x \in V_a \cap A, \quad |f(x)| \leqslant M|g(x)|.$$

On note alors $f = O_a(g)$, $f \underset{x\to a}{=} O(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.

Exemple 145. ♣

- *On suppose $f = O_a(1)$. Que peut-on dire de f ?*
- *On suppose $g = O_a(0)$. Que peut-on dire de g ?*

6.2.2 La relation $o(\cdot)$: Négligeabilité.

Définition 63. *On considère f et g deux applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overline{A}$. On suppose qu'il existe un voisinage V_a de a vérifiant*

$$\forall x \in V_a \cap A, \quad g(x) \neq 0.$$

*L'application f est **négligeable** devant g au voisinage de a si et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note alors $f = o_a(g)$, $f \underset{x\to a}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.

Exemple 146. ♣

- *Soit α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Monter que $x^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^\alpha)$.*
- *Donner une condition sur α et β pour qu'on ait $x^\beta \underset{x\to +\infty}{=} o(x^\alpha)$.*

Mini-exercices.

1. Donner $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ et traduire le résultat avec un petit "o".
2. Dans les cas suivants, quelle fonction est négligeable par rapport à l'autre ?
   - $f(x) = 2x$ et $g(x) = \ln x$ en $+\infty$.
   - $f(x) = x - 3$ et $g(x) = 5\ln x$ en 0.
   - $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \ln(x^3)$ en $+\infty$.

6.2.3 L'équivalence

Définition 64. *On considère f et g deux applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overline{A}$. On dit que f est **équivalente** à g au voisinage de a si*

$$f - g = o_a(g).$$

On note alors $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

Corollaire 12. *On considère f et g deux applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overline{A}$. On suppose qu'il existe un voisinage V_a de a vérifiant*

$$\forall x \in V_a \cap A, \quad g(x) \neq 0.$$

*L'application f est **équivalente** à g au voisinage de a si et seulement si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 147. ♣ *Soit ℓ un réel non nul. Montrer que $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$. Que se passe-t-il si $\ell = 0$?*

Minis exercices Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = 2x - 3x^4 + x^5$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x-x^2}$.
3. $f(x) = \dfrac{x-3x^2+x^3}{4x^5-x+2x^2}$.
4. $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_m x^m$ avec $n < m$, $a_n \neq 0$ et $a_m \neq 0$.
5. $f(x) = xe^{-x}$.
6. $f(x) = 2x - \dfrac{3}{x}$.
7. $f(x) = \dfrac{x-3x^2+x^3}{4x^5-x+2x^2}$.

Corollaire 13 (Règles de calcul)**.** *On considère f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\overline{A}$.*

- ***Compatibilité avec le produit.***
$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2.$$
- ***Compatibilité avec le quotient.*** *Si f_1 et g_2 ne s'annule pas sur un voisinage de a, alors*
$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \text{ et } f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}.$$
- ***Compatibilité avec la puissance.*** *Si f_1 et g_1 sont strictement positives sur un voisinage de a, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*
$$f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \Rightarrow \quad f_1^{\alpha} \underset{a}{\sim} g_1^{\alpha}.$$
- ***Substitution dans un équivalent.*** *Soient I et J deux intervalles, $a \in \overline{I}$, une application u de I dans J et deux applications f et g de J dans $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $f \underset{b}{\sim} g$ alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.*

Remarque. *Sans hypothèses supplémentaires, la relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition et la composition.*

Propriété 1. Soit f une fonction définie de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors
$$\boxed{f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a).}$$

6.2.4 Équivalents usuels

$$
\begin{array}{ccccc}
\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x & \sin(x) \underset{0}{\sim} x & \cos(x)-1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2} & \tan(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{th}(x) \underset{0}{\sim} x \\
e^x - 1 \underset{0}{\sim} x & (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x & \arcsin(x) \underset{0}{\sim} x & \arctan(x) \underset{0}{\sim} x & \mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x
\end{array}
$$

Exemple 148. ♣ *Déterminer* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}$ *à l'aide des équivalents.*

Mini-exercices. Déterminer un équivalent de fonctions suivantes :

1. $3x^2 + \dfrac{2}{x}$ en 1 et 0.
2. $\sqrt{x} + \ln(x)$ en $+\infty$.
3. $x^3 + \ln(2x)$ en $+\infty$.
4. $\sqrt{x} + x$ en 0.
5. $1 - \cos(\sin(x))$ en 0.

6.2.5 Développements limités des fonctions usuelles à l'origine.

$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{sh}\, x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} x^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n)$$

Méthode

Montrer que $f \underset{a}{\sim} g$

- g connue
  - Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a, étudier $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.
  - Si g s'annule sur un voisinage de a, montrer que $f(x) = h(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$.
- g à déterminer
  - Si la limite de f en a est une constante non nulle, utiliser la propriété : $f \underset{a}{\sim} l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.
  - Utiliser les règles de calculs et les équivalents usuels.
  - Utiliser $f \sim g \Leftrightarrow f(x) = h(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$.
  - Si f est dérivable en a, utiliser la propriété 1 pour écrire $f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$.

6.3 Exercices

Exercice 66. *Déterminer un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

1. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+n^2}}$
3. $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$
4. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2-2}{n^2+n}\right)$
5. $u_n = \ln(n^2+n+1)$
6. $u_n = e^{1+\frac{1}{n}} - 1$
7. $u_n = \sqrt{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)} - 1$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{n+2}{n^2-1}\right)$
9. $u_n = \exp\dfrac{2n^2-1}{n^2} - e^2$
10. $u_n = \ln\left(\cos\left(e^{-n}\right)\right)$
11. $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$
12. $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$

Exercice 67. *Soit $v_n = 1+2+3+\cdots+n$. Montrer que $v_n \sim \dfrac{n^2}{2}$.*

Exercice 68. *Déterminer un équivalent simple de la fonction f en 0 et $+\infty$.*

1. $f(x) = x + x^2$
2. $f(x) = x + \sqrt{x}$

3. $f(x) = x + \ln(x)$
4. $f(x) = \ln(x) + \ln^2(x)$
5. $f(x) = e^x + \sin(x)$
6. $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Exercice 69. *Déterminer un équivalent simple de la fonction f en 0.*

1. $f(x) = \sin^2(x)$
2. $f(x) = \ln(\cos(x))$
3. $f(x) = \dfrac{\tan(x)\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+1}-1}$

Chapitre 7

Séries numériques

7.1 Rappels

7.1.1 Exemples introductifs

On s'intéresse à la complexité en temps des deux boucles :

double-iteration.py

```
#Programme P1 : double-iteration.py
#n: entier naturel
for i in range(n):
    for j in range(0,n,i+1):
        #operations en temps constant ...
```

Calculons le temps d'exécution de la boucle intérieure pour des i fixés.

- Lorsque $i = 0$, on effectue n opérations à temps constant.
- Lorsque $i = 1$, on effectue $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ opérations à temps constant, qui est approché supérieurement par $\frac{n}{2}$ opérations à temps constant.
- Lorsque $i = 2$, on effectue approximativement $\frac{n}{3}$ opérations à temps constant.
- Lorsque $i = 3, \dots$

♣ *Quel est alors le nombre total d'opérations à temps constant ?*
Donner la complexité temporelle sous la forme $O(n^{\alpha} \ln^{\beta} n)$ *où vous préciserez* α *et* β*.*

♣ *Donner un exemple d'une série divergente et ayant un terme général convergeant vers* 0 *et un exemple d'une série convergente.*

7.1.2 Définitions

- Série de terme général u_k :
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
- $(S_n)_n$ est la ***suite des sommes partielles***.
- $R_n = \sum_{k \geqslant n+1} u_k$, $(R_n)_n$ est la ***suite des restes***.
- La limite de $(S_n)_n$, S, est notée
$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \quad \text{ou} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \quad \text{ou} \quad \textstyle\sum_{k\geqslant 0} u_k \quad \text{ou} \quad \sum u_k.$$
On réservera la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à une série convergente.

Exemple 149 (Série géométrique)**.** *La série géométrique* $\sum_n a^n$*, avec* $a \in \mathbb{C}$*, converge si, et seulement si,* $|a| < 1$*.*
En effet, si $a \neq 1$ *:*
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a} \quad et \quad a^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & si\ |a| < 1 \\ 1 & si\ |a| > 1 \end{cases},$$
donc la série diverge pour $|a| > 1$ *et converge vers* $\frac{1}{1-a}$ *pour* $|a| < 1$*.*
Si $a = 1$ *alors la série diverge grossièrement.*

7.1.3 Propriétés

- *Convergence des restes.* Si la série de sommes partielles S_n est convergente, alors $\lim_n S_n = S = S_n + R_n$ ($\forall n \geqslant 0$) et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
- *Condition nécessaire de convergence.* Si $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, alors la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ tend vers 0.

  ♣ *Énoncer la contraposée de ce résultat et donner des exemples d'application.*

- *Linéarité.* Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ est convergente et de somme $\lambda A + \mu B$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Exemple 150.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{5}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} + 5 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 5 \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + 5\frac{3}{2} = \frac{19}{2}.$$

7.1.4 Critères de convergence

- *Somme partielle avec terme général positif.* Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n \leqslant M$. ♣ *En effet :*

- *Convergence absolue.* Si $\sum |u_n|$ est convergente alors $\sum u_n$ l'est et on a $|\sum u_n| \leqslant \sum |u_n|$. ♣ *En effet :*

- *Comparaison à une autre série*

1. Une série à termes réels positifs converge si et seulement la suite des sommes partielles est majorée. Dans ce cas, la somme de la série est la borne supérieure des sommes partielles. C'est aussi la borne supérieure de toutes les sommes finies. Lorsqu'une série à termes réels positifs est divergente, on convient que sa somme est égale à $+\infty$.
2. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, alors $0 \leqslant \sum u_n \leqslant \sum v_n$ (inégalité dans $[0, +\infty]$).
3. Si (u_n) est une suite et (v_n) une suite à termes réels positifs telle que $\sum v_n$ converge et $u_n = O(v_n)$ alors $\sum |u_n|$ converge.
4. Si (u_n) et (v_n) sont réelles positives et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
   « De même nature » signifie que les deux séries sont soit convergentes en même temps, soit divergentes en même temps.
   Contre-exemple en cas de signe variable : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.

Méthode

Pour étudier une série, on commence par examiner si elle converge absolument, auquel cas la convergence est assurée.
Pour cela, on peut comparer la série $\sum u_n$ à une série de référence (série de Riemann, série géométrique, série de Bertrand ...).

Remarque. *Il faut garder à l'idée qu'une série n'est qu'un cas particulier de suite. Étudier la convergence d'une série correspond en fait à l'étude de la convergence de suite. En effet dire que $\sum u_n$ converge revient à dire que la suite des somme des partielles converge.*

7.1.5 Exemples

Exemple 151. *Puisque $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$ est le terme général d'une série convergence (série de Riemann) alors la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ converge*

Exemple 152 (Série exponentielle)**.** *La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge. En effet, $0 \leqslant \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ et $\dfrac{1}{n(n-1)} \sim \dfrac{1}{n^2}$, donc $\sum \dfrac{1}{n(n-1)}$ converge car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Finalement $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ converge.*
En fait, par définition, la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ vaut le nombre d'Euler $e = \exp(1)$.

Exemple 153. *Inversement, nous avons vu que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge. On en déduit facilement que les séries $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent également.*

Exemple 154. *Les deux séries*

$$\sum \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{k+\ln(k)}{k^3} \qquad \text{convergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$*, et nous savons que la série* $\sum \frac{1}{k^2}$ *converge.*

Exemple 155. ♣ *Par contre, montrer que les séries*

$$\sum \frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{k+\ln(k)}{k^2} \text{ divergent.}$$

Exemple 156 (Convergence absolue)**.** *1. La* ***série harmonique alternée*** $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ *n'est pas absolument convergente. Car pour* $v_k = \frac{(-1)^k}{k+1}$*, la série* $\sum_{k\geqslant 0} |v_k| = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k+1}$ *diverge.*

2. Par exemple la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\cos k}{k^2}$ *est absolument convergente.* ♣ *Car*

Exemple 157. ♣ *Est-ce que la série* $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(\operatorname{th} k\right)$ *converge ?*

Mini-exercices. *1. Calculer les sommes partielles S_n de la série dont le terme général est $\frac{1}{4^k}$, commençant à $k=1$. Cette série est-elle convergente ? Si c'est possible, calculer la somme S et les restes R_n.*

2. *Mêmes questions avec* $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k$, $\sum_{k\geqslant 0}3^k$, $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{10^k}$, $\sum_{k\geqslant 2}\exp(-k)$.

3. *Pourquoi les séries suivantes sont-elles divergentes ?*

$$(a)\ \sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}+(-1)^k\right),\quad (b)\ \sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{k+1},\quad (c)\ \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2k},\quad (d)\ \sum_{k\geqslant 1}k\cos(k),\quad (e)\ \sum_{k\geqslant 1}\exp(\frac{1}{k})$$

.

4. *Calculer les sommes partielles de la série* $\sum_{k\geqslant 1}\ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$. *Cette série est-elle convergente ?*

5. *Montrer que* $\sum_{k=0}^{+\infty}k^2q^k=\frac{q^2+q}{(1-q)^3}$.

6. *Montrer que la série* $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\ln k)^\alpha}{k^3}$ *converge, quel que soit* $\alpha\in\mathbb{R}$.

7. *Montrer que, si la série à termes positifs* $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ *converge, alors la série* $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k^2$ *converge aussi.*

8. *Soient* $\sum_{k\geqslant 0}u_k$ *et* $\sum_{k\geqslant 0}v_k$ *deux séries vérifiant* $u_k>0$, $v_k>0$ *et pour tout* $k\geqslant 0$: $0<m\leqslant\frac{u_k}{v_k}\leqslant M$. *Montrer que les deux séries sont de même nature.*

9. *Par comparaison ou recherche d'équivalent, déterminer la nature de la série* $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\ln k}{k}$. *Même question avec les séries de terme général* $\sin\left(\frac{1}{(k-1)(k+1)}\right)$; $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$; $\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}}\right)$.

10. *Écrire la série associée au développement décimal* $0,99999\ldots$ *Notons S la somme de cette série. Calculer la série correspondant à* $10\cdot S$. *Simplifier* $10\cdot S-S$. *En déduire S. Retrouver cette valeur S à l'aide d'une série géométrique.*

11. *Justifier que la série* $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$ *est convergente. Décomposer* $\frac{1}{k^2-1}$ *en éléments simples. Déterminer une expression des sommes partielles S_n. En déduire que* $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$.

12. *Nous admettons ici que* $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$. *Sans calculs, déterminer les sommes :*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2}{k!}$$

7.2 Compléments sur les séries numériques

7.2.1 Règle de d'Alembert

Théorème 29 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit (u_n) une suite à termes dans $\mathbb{C}^*$ telle que $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.*

- *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge absolument*
- *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_n$ diverge.*

Exemple 158. *1.* $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k!}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$ *converge, car, en notant $_k$ le terme général, i.e. $u_k = \frac{k!}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$, alors en appliquant la règle de d'Alembert, on a : $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.*

2. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ *diverge, car*

Remarque.
- *Le théorème peut s'appliquer si des u_k sont nuls pour un nombre fini de k.*
- *Notez bien que le théorème ne permet pas toujours de conclure. Faites aussi bien attention que l'hypothèse est $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant q < 1$, ce qui est plus fort que $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < 1$.*
- *De même la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure lorsque $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 1$. Par exemple pour les séries $\sum u_k = \sum \frac{1}{k}$ et $\sum v_k = \sum \frac{1}{k^2}$ nous avons $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+1} \to 1$, de même que $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$. Cependant la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge alors que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.*

Exemple 159. ♣ *Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k\geqslant 0} \binom{k}{3} z^k$ soit absolument convergente.*

7.2.2 Comparaison série/intégrale

Cette section fait la jonction entre les séries et les intégrales.

> **Théorème 30.** *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Alors la série $\sum_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge si, et seulement si, la fonction f est intégrable sur $[n_0, +\infty[$.*

Attention! Il est important que f soit positive et décroissante. *Donner un contre-exemple.*

Démonstration. ♣

□

Remarque. *En supposant toujours f une fonction continue par morceaux, positive et décroissante sur $[n_0, +\infty[$, si $\sum f(k)$ et $\int_{n_0}^{+\infty} f$ convergent, on montre (voir la preuve de la Proposition 30) l'encadrement des restes :*

$$\boxed{\forall n > n_0 \quad \int_{n_0+1}^{+\infty} f \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{+\infty} f.}$$

Exemple 160 (Séries de Riemann)**.** *Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.*

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ *est divergente, donc la série* $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *diverge.*

Exemple 161 (Séries de Bertrand)**.** *La série de Bertrand est*

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^\alpha (\ln k)^\beta}.$$

- *si* $\alpha > 1$, *elle converge*
- *si* $0 < \alpha < 1$, *alors elle diverge.*
- *si* $\alpha = 1$ *et* $\begin{cases} \beta > 1 & \textit{alors elle converge.} \\ \beta \leqslant 1 & \textit{alors elle diverge.} \end{cases}$

♣ **Justifications :**

Exemple 162. ♣ *La série*

$$\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)$$

est-elle convergente ?

7.2.3 Séries alternées

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite qui vérifie $u_k \geqslant 0$. La série $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ s'appelle une ***série alternée***.

Théorème 31 (Critère des séries alternées)**.** *Supposons que $(u_k)_{k\geqslant 0}$ soit une suite qui vérifie :*

1. *$u_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 0$,*
2. *la suite (u_k) est une suite décroissante,*
3. *$\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$.*

Alors la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k$ converge.

Démonstration. On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes :

- La suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geqslant 0$.
- La suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1} \leqslant 0$.
- $S_{2n+1} \leqslant S_{2n}$ car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \leqslant 0$.
- $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$ (lorsque $n \to +\infty$).

En conséquence (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent vers la même limite S, donc (S_n) converge vers S. □

Exemple 163 (Série harmonique alternée)**.** ♣ *La série*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

converge-t-elle ?

Non seulement le critère des séries alternées prouve la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$, mais la preuve nous fournit deux résultats importants supplémentaires : un encadrement de la somme et une majoration du reste.

Corollaire 14. *Soit une série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ vérifiant les hypothèses du théorème 31. Soit S la somme de cette série et soit (S_n) la suite des sommes partielles.*

1. *La somme S vérifie les encadrements :*

$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant S \leqslant \cdots \leqslant S_{2n} \leqslant \cdots \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$

2. *En plus, si $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n, alors on a*

$$|R_n| \leqslant u_{n+1}.$$

Pour une série alternée, la vitesse de convergence est donc dictée par la décroissance vers 0 de la suite (u_k).

Pour montrer des propriétés sur les restes où les sommes partielles d'une série alternée, il est souvent utile (comme dans la démonstration du théorème 31) de considérer les sommes d'indices pairs (S_{2n}) et d'indice impairs (S_{2n+1}).

Exemple 164. ♣ *Écrire le point 1 du Corollaire 14 pour le cas de la série Harmonique alternée.*

Exemple 165. ♣ *Démontrer le point 2. du Corollaire 14.*

Remarque. *Terminons par deux mises en garde :*

1. *On ne peut pas laisser tomber la condition de décroissance de la suite* (u_k) *dans le critère des séries alternées.*
2. *Il n'est pas possible de remplacer* u_k *par un équivalent à l'infini dans le théorème 31, car la décroissance n'est pas conservée par équivalence.*

Utilisation des développements limités

Pour étudier une série à termes réels non absolument convergente, on pourra faire (si c'est possible!) un développement asymptotique du terme général, le dernier terme écrit étant :

- ou bien le terme général d'une série absolument convergente,
- ou bien de signe fixe.

Exemple 166. ♣ *Etudier la série* $\sum u_n$ *avec* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{2/3} + \cos n}$.

Mini-exercices. 1. *Est-ce que le critère des séries alternées s'applique aux séries suivantes ?*

a. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \ln k}$ *b.* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{\frac{k+1}{k}}$ *c.* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{(-1)^{k+1}(\sqrt{k} - \ln k)}$

d. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} (-1)^k \big(\ln(k+1) - \ln(k)\big)$ *e.* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{k} + (-1)^k \ln k}$ *f.* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^k}{3k + (-1)^k}$

2. *Quelle est la nature de la série de terme général* $u_n = \sin\left(\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ *?*

7.2.4 Formule de Stirling

Proposition 39 (Formule de Stirling)**.** *On a l'équivalent suivant :*

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

L'exercice suivant donne une preuve de cette formule.

Exercice Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ $u_n = \ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \mathrm{d}t$.

1. (a) Montrer que $\sum u_n$ est convergente.
   (b) En déduire que la suite (a_n) converge vers un nombre $\ell > 0$.
2. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}$.
   (b) En déduire que pour $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2p+1} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$
   (c) Montrer que $I_{2p+2} \leqslant I_{2p+1} \leqslant I_{2p}$.
3. (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
   (b) En formant $\dfrac{a_n^2}{a_{2n}}$, montrer que $L = \sqrt{2\pi}$.
4. En déduire la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Exemple 167. ♣ *Montrer l'équivalence* $C_{2n}^n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

7.3 Exercices

Exercice 70. *Quelle est la nature des séries dont les termes généraux sont :*

1. $\dfrac{\cos(1/n)}{n^2+\sqrt{n}}$ *2.* $\dfrac{n}{n^2+3n+1}$ *3.* $\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ *4.* $\dfrac{a^n}{1+a^n}$, $a \in \mathbb{R}$

5. $(3n+2)\dfrac{4^n}{n!}$ *6.* $\ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ *7.* $\dfrac{\mathrm{ch}(2n)}{\mathrm{ch}(3n)}$ *8.* $e^{-\sqrt{n}\ln n}$

9. $\dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n)$ *10.* $\dfrac{(-1)^n + n}{n^2}$ *11.* $\dfrac{1}{2^{\ln n}}$ *12.* $\dfrac{1}{n\ln^\alpha n}$, $\alpha > 0$

13. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+an+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Exercice 71. *On pose* $u_n = \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Montrer que la série $\sum u_n$ *converge et déterminer* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Exercice 72. *On considère les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *avec* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^{1/3}+(-1)^n}}$ *et* $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/6}}$.

1. *Montrer que* $u_n \sim v_n$.
2. *Montrer que* $\sum u_n$ *diverge et* $\sum v_n$ *converge.*

Exercice 73. 1. *Montrer que la série de terme général* $u_n = \dfrac{6^n}{\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\left(3^n-2^n\right)}$, $n \in \mathbb{N}*$, *est convergente.*

2. *Simplifier* $3^n\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right) - 3^{n+1}\left(3^n-2^n\right)$ *est calculer la somme de la série.*

Exercice 74. *La série*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}$$

est-elle convergente ?

Exercice 75. *Peut-on appliquer la règle de d'Alembert à la suite* u_k *définie par :*

$$u_k = \begin{cases} \dfrac{2^n}{3^n} & \text{si } k = 2n \\[2mm] \dfrac{2^n}{3^{n+1}} & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

.

Exercice 76. 1. *On rappelle que la série harmonique alternée converge et a pour somme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

Montrer la convergence des deux séries $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k}\right)$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k}\right)$ *et calculer leur somme à l'aide du rappel ci dessus.*

2. *Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle* $\dfrac{1}{4x^3-x}$.
3. *Montrer la convergence de la série* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{4k^3-k}$ *et calculer sa somme à l'aide de ce qui précède.*
4. *L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^3-x}$ *converge t-elle ? Si oui, la calculer.*

Exercice 77. *Soit* (a_n) *un suite de réels strictement positifs telle que* $\sum a_n$ *converge. Étudier les séries*

$$\sum \frac{a_n}{1+a_n}, \qquad \sum a_n a_{2n}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}.$$

Exercice 78. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$. *On pose pour tout entier naturel non nul,* $u_n = \dfrac{(n-1)!}{(n+p)!}$.

1. *Montrer la convergence de la série de terme général* u_n.

2. *Simplifier* $\frac{(n-1)!}{(n+p-1)!} - \frac{(n)!}{(n+p)!}$ *et* u_n *la calcule de la somme de la série.*

Exercice 79. *Soit* $u_n = n\frac{n!}{(n+4)!}$.

1. *Calculer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Peut-on conclure avec le de D'Alembert sur la nature de la série* $\sum u_n$?
   On pose $\alpha_n = \ln\left(n^3 u_n\right)$.
2. *Déterminer un équivalent de* $\alpha_{n+1} - \alpha_n$.
3. *En déduire la nature de la série* $\sum(\alpha_{n+1} - \alpha_n)$.
4. *En déduire que la suite* $\left(n^3 u_n\right)_{n\in N}$ *converge vers un réel* $L > 0$.
5. *En déduire que la série* $\sum u_n$ *converge.*

Exercice 80. *Soit* (a_n) *une suite de réels strictement positifs tels que, au voisinage de* $+\infty$, *on ait*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

1. *Montrer que la série de terme général* n^α *est de ce type; rappeler pour quelles valeurs de* α *elle converge.*
2. *Montrer que si* $\alpha > -1$, *la série de terme général* a_n *diverge, et que si* $\alpha < -1$ *elle converge.*
3. *Application : étudier la série*
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}.$$
4. *Montrer que si l'on a au voisinage de* $+\infty$,
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right),$$
   alors la série de terme général a_n *diverge.*
5. *Application : étudier la série*
$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1-\exp(-1/n)\right).$$

Exercice 81. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 \in]0,1[$ *donné et* $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. *Montrer que cette suite converge et en donner la limite. Montrer que la série de terme général* u_n^2 *converge et en donner la limite. Montrer que les séries de terme généraux* u_n *et* $\ln(u_{n+1}/u_n)$ *divergent.*

Exercice 82. *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries à termes réels strictement positifs. On suppose que* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *converge, et que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{u_{n+2}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+2}}{v_n}.$$

Montrer que $\sum_{n\geqslant 2} u_n$ *converge.*

Méthode 1. *On définit* $a_n = u_{2n}$ *et* $b_n = v_{2n}$.

1. *Pourquoi* $\sum_n b_n$ *est finie ?*
2. *Étudier la somme* $\sum_{n=0}^{p-1}(\ln(a_{n+1}) - \ln(a_n))$.
3. *En déduire que* $\sum_n a_n$ *est finie puis conclure.*

Méthode 2. *Soit* $M > 0$. *On définit* $a_n = u_{2n}$ *et* $b_n = v_{2n}$.

1. *Prouver qu'il existe un rang N tel que* $\frac{a_n}{b_n} < M$ *pour tout* $n > N$.
2. *En déduire* $a_{n+1} \leqslant M b_{n+1}$.
3. *Conclure.*

Chapitre 8

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre, les applications sont du type $A \to F$ où $A \subseteq \mathbb{R}$ et $F \subseteq \mathbb{R}$. Le plus souvent, $E = F = \mathbb{R}$. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

8.1 Suites de fonctions : divers types de convergence

8.1.1 Convergence simple, convergence uniforme

Définition 65 (Convergence simple)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F. Soit f une fonction de A dans F. On dit que $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A et on écrit $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ si*

$$\forall x \in A,\ f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).$$

Remarque.
- *Certaines propriétés algébriques « passent à la limite simple ». Par exemple si les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g, alors la suite $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f+g$ et la suite $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg.*
- *Beaucoup de propriétés analytiques ne passent pas « à la limite simple ». En particulier,*
  - *L'exemple 168 montre que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.*
  - *L'exemple 169 montre que la limite simple d'une suite de fonctions bornées n'est pas nécessairement bornée.*
  - *L'exemple 170 montre que la composée d'une suite de fonctions, laquelle converge simplement, ne converge pas nécessairement.*

Exemple 168. ♣ *La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n(x) = x^n$ converge-t-elle simplement vers une fonction continue sur* $[0,1]$ *?*

Exemple 169. ♣ *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x & si\ x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[\\ \dfrac{1}{x} & si\ x \in \left[\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\end{cases}$$

converge-t-elle vers une fonction bornée sur $[0, +\infty[$ *?*

Exemple 170. ♣ *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions avec* $f_n(x) = \dfrac{1}{n}$*. Donner une fonction* φ *telle que* $\varphi \circ f_n$ *ne converge pas simplement sur* $\mathbb{R}$*.*

Définition 66 (Convergence uniforme)**.** *Soit* $\forall n \in \mathbb{N}\ f_n : A \to F, f : A \to F$*. On dit que la suite de fonctions* $(f_n)_{n\in N}$ *converge uniformément vers* f *sur* A *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que si } n \geqslant n_0 \text{ alors } \forall x \in A,\ \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon.$$

On note $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$*.*

Remarque.

- *Le point important dans cette définition est que* ***le paramètre*** $\mathbf{n_0}$ ***ne dépend pas de*** $\mathbf{x}$*, d'où le terme "uniforme".*
- *Il est important de préciser la partie* A *de* $\mathbb{R}$ *où* $(f_n)_n$ *converge uniformément.*

Proposition 40 (CV Uniforme ⇒ CV Simple)**.**

$$\boxed{\text{Si } f_n \xrightarrow{\text{CU}} f, \text{ alors } f_n \xrightarrow{\text{CS}} f.}$$

Nier la convergence uniforme

Pour démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers une fonction f ne converge pas uniformément, on peut : chercher à exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $|f_n(x_n) - f(x_n)|$ ne tende pas vers 0.

Exemple 171. ♣ *Donner un exemple d'une suite de fonctions qui converge simplement mais pas uniformément.*

Montrer la convergence uniforme

Pour étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on commence par étudier la convergence simple. Si elle converge effectivement simplement vers une fonction f, on cherche alors à établir si elle converge uniformément ou pas vers f.
Pour cela on cherche à majorer, à partir d'un certain rang, la quantité $|f_n(x) - f(x)|$, et ce, indépendamment de $x \in A$ par un terme α_n tel que $\alpha_n \to 0$.

Exemple 172.

- *Soit* $f_n(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{n}}$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+$. *Montrons que* $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ *sur* $\mathbb{R}_+$ *avec* $f(x) = \sqrt{x}$. *On a :*

$$f_n(x) - f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} = \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{1}{n}}} \leqslant \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Cette dernière quantité est indépendante de x et converge vers 0 *donc* $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$.

- ♣ *Soit* $f_n(x) = \sin\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$. *Étudier la convergence de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8.1.2 Convergence en moyenne

Définition 67 (Norme 1 d'une fonction continue)**.** *On définit pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$) la norme $\|\cdot\|_1$ (implicitement, $a<b$) par :*

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Définition 68 (Norme 2 d'une fonction de carré intégrable)**.** *On définit pour toute fonction $f \in L_2([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions de carré intégrable) la norme $\|\cdot\|_2$ (implicitement, $a<b$) par :*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}.$$

Définition 69 (Norme infinie d'une fonction bornée)**.** *On définit pour toute fonction $f \in \mathscr{B}([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions bornées) la norme $\|\cdot\|_\infty$ (implicitement, $a<b$) par :*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Montrer la convergence uniforme avec $\|\cdot\|_\infty$

Pour montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, on montre qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $(f_n - f)$ est bornée sur $[a,b]$ et que $\|f-f_n\|_\infty \to 0$.

Exemple 173. ♣ *(a) Calculer $\|f\|_\infty$ avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ sur $\mathbb{R}$.*
(b) Soit $f_n(x) = f(nx)$, pour $n\in\mathbb{N}$. Que dire des convergences simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$?

Définition 70 (Convergence en moyenne)**.** *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$) et $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f (au sens de $\|.\|_1$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. On note $f_n \xrightarrow{\|.\|_1} f$.*

Remarque. *On demande aux f_n d'être continues car il faut que leurs intégrales soient définies.*

Mini-exercices. *1. Étudier la convergence simple et uniforme des suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec*

$$(a)\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ pour } x\in\mathbb{R},\ (b)\ f_n(x) = \left(x+\frac{1}{n}\right)^2 \text{ pour } x\in\mathbb{R}_+,\ (c)\ f_n(x) = \left(x+\frac{e^{-x}}{n}\right)^2 \text{ pour } x\in\mathbb{R}_+.$$

$$(d)\ f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2} \text{ pour } x\in\mathbb{R},\quad (e)\ f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x} \text{ pour } x\in\mathbb{R}_+,\quad (f)\ f_n(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x\in\mathbb{R}^*, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$$

2. $\forall f\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, *montrer que*

$$\|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\|f\|_2 \leqslant (b-a)\|f\|_\infty.$$

3. Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *avec* f_n *des fonctions bornées définies sur* $\mathbb{R}$*, convergeant uniformément et telle que* $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ *ne converge pas uniformément.*

8.2 Régularité de la limite d'une suite de fonctions

8.2.1 Continuité de la limite uniforme

Théorème 32 (Conservation de la continuité par convergence uniforme)**.** *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* A *dans* F *et* $f : A \to F$*. Si* $\forall n\in\mathbb{N}$ *(ou à partir d'un certain rang),* f_n *est continue et si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*, alors* f *est continue.*

Exemple 174. *Soit* $f_n = x^n$ *définie pour* $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$*. La suite* $f(_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $f=0$ *sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ *qui est bien une fonction continue sur* $\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Définition 71 (Convergence uniforme sur tout segment)**.** *Soient* $f_n : I\to\mathbb{K}$ *et* $f : I\to\mathbb{K}$ *avec* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. On dit que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur tout segment de* I *si pour tout segment* J *tel que* $J\subset I$, $f_{n|_J} \xrightarrow{\text{CU}} f_{|_J}$.

Remarque. *La convergence uniforme sur un intervalle* I *implique la convergence uniforme sur tout segment* $J\subset I$*. Par contre, l'exemple 175 ci-dessous montre que la réciproque est fausse.*

Exemple 175. ♣ *Soit* $f_n(x) = x^n$ *définie pour* $x\in[0,1[$*. La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment de* $[0,1[$ *mais pas uniformément sur* $[0,1[$*. En effet,*

Proposition 41 (Convergence uniforme et continuité)**.** *Soient $f_n : I \to \mathbb{K}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I, alors f est continue sur I.*

Remarque. *Donc pour avoir la continuité de la limite sur un intervalle I, il suffit d'avoir la continuité uniforme sur tout segment de I de la suite de fonctions vers cette limite. Cette notion de convergence uniforme sur tout segment est plus faible que la notion de convergence uniforme de la Définition 66.*

8.2.2 Convergence uniforme et dérivation

Proposition 42 (Convergence uniforme et primitivation)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathscr{C}(I,\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ et $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment $J \subset I$. Soit, pour tout entier naturel n,*

- *g_n la primitive de f_n sur I qui s'annule en $a \in \mathbb{R}$,*
- *g la primitive de f sur I qui s'annule en a.*

Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur J.

Proposition 43 (Convergence uniforme et dérivation)**.** *Soit $(f_n)_n \in \left(\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que :*

- *$f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur I ;*
- *$f_n' \xrightarrow{\text{CU}} g$ sur tout segment de I.*

Alors

- *$f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$;*
- *$f' = g$;*
- *$f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur tout segment de I.*

Exemple 176. ♣ *Soit la suite $f_n(x) = \dfrac{x}{n+x}$ pour $x \in [0,a]$, $a > 0$. Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n' = \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n\right)'$.*

Exemple 177. ♣ *Soit la suite $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)x^2 + (-1)^n$ pour $x \in [0,a]$, $a > 0$. Trouver $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$.*

Exemple 178. ♣ *Est-ce qu'une limite de fonctions* $\mathscr{C}^1$ *est* $\mathscr{C}^1$ *?*

8.2.3 Interversion limite-intégrale

Proposition 44 (Lien entre convergence en moyenne et convergence des intégrales)**.** *Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues et* $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne vers* f *sur* $[a,b]$, *alors :*

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 179. ♣ *Calculer :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{e^{-x/n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 33 (Lien entre convergence uniforme, en moyenne et des intégrales)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues. Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$, *alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en moyenne vers* f *sur* $[a,b]$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 180. ♣

1. *Calculer* $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)\mathrm{d}x$ *pour tout entier naturel* n.
2. *Calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)$.
3. *Donner un exemple de suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *continues définies sur* $[0,1]$ *convergeant simplement vers* 0 *et telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_{[0,1]} f_n = +\infty$.

Mini-exercices. *Déterminer les limites suivantes lorsque l'entier n tend vers l'infini.*

$$(a)\ \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty}\frac{n}{nx^2+e^x}\,\mathrm{d}x, \quad (b)\ \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\,\mathrm{d}x.$$

8.3 Application aux séries de fonctions

8.3.1 Convergences simple, uniforme, absolue et normale

Définition 72 (Série de fonctions)**.** *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$, $\sum f_n$ désigne une « série de fonctions » (de terme général f_n). On note, pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ la somme partielle, c'est aussi une fonction de A dans $\mathbb{K}$. Si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (simplement ou uniformément) vers S, on dira que la série de fonctions $\sum f_n$ converge et a pour somme S.*

Remarque. *Notez que la somme partielle S_n est une suite de fonctions $(S_n(x))_n$ donc les résultats vus en Section 8.1-8.2 s'appliquent.*

Définition 73 (Convergence simple)**.** *On dit que $\sum f_n$ converge simplement et a pour somme S si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers S. Ou encore si $\forall x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge et a pour somme un scalaire noté $S(x)$.*

Exemple 181. ♣ *Soit $f_n(x) = (1-x)x^n$ pour $x \in]-1,1[$. Que vaut $\sum f_n$?*

Définition 74 (Convergence uniforme)**.** *$\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S si $S_n \xrightarrow{\text{CU}} S$ i.e.*

$$\lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0.$$

Exemple 182. *1.* ♣ $\sum \frac{x^n}{n}$ *converge simplement mais pas uniformément pour $x \in [0,1[$.*

2. ♣ $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ *converge uniformément pour $x \in [0,2\pi]$.*

Théorème 34. *1. Si $\sum f_n$ converge uniformément alors $f_n \xrightarrow{\text{CU}} 0$;*

2. $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme S où S est la somme de $\sum f_n$ au sens de la convergence simple

$$\Longleftrightarrow$$

$$R_n \xrightarrow{\text{CU}} 0 \text{ où } R_n \text{ est le reste d'ordre } n : R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k.$$

Exemple 183. ♣ *Montrer que la série $\sum \frac{1}{x+n^2}$ converge uniformément et $f_n \xrightarrow{\text{CU}} 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Définition 75 (Convergence absolue)**.** *On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement.*

Exemple 184. ♣ *La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}x}{n^2}$ converge absolument pour tout $x \in [0,1]$. En effet,*

Exemple 185. ♣ *Étudier la converge simple et absolue de* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n+x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Proposition 45.

$$\boxed{\textit{Convergence absolue} \Rightarrow \textit{Convergence simple.}}$$

Exemple 186. ♣ $\sum \frac{\sin(nx)}{n^5}$ *converge absolument et simplement pour* $x \in [0, 2\pi]$.

Notation. $(\mathscr{B}(A, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ où chaque fonction de la suite est bornée.

Définition 76 (Convergence normale)**.** *Soit* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathscr{B}(A, \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. *On dit que la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge normalement si la série numérique* $\sum \|f_n\|_\infty$ *converge.*

Exemple 187. ♣ *La série de fonctions* $\sum_{n \geqslant 1} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ *converge normalement sur* $\mathbb{R}_+$.

Théorème 35 (Lien entre convergence normale et autre type de convergence)**.** *Si $\sum f_n$ converge normalement alors elle converge uniformément et absolument et donc simplement.*

Exemple 188. ♣ *Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.*

♣ *Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{x^2+n^2}$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.*

8.3.2 Régularité de la somme d'une série de fonctions

Théorème 36. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions, $f_n : A \to \mathbb{K}$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément et a pour somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.*

1. ***Conservation de la continuité pour la somme d'une série convergeant uniformément :** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}(A,\mathbb{K})$, alors $S \in \mathscr{C}(A,\mathbb{K})$.*
2. ***Interversion des symboles $\lim_{x\to a}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}$:** si $a \in \overline{A}$, si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut b_n, alors $\sum b_n$ converge vers $\lim_{x\to a} S(x)$, i.e.*

$$\lim_{x\to a} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)}_{S(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\lim_{x\to a} f_n(x)}_{b_n}.$$

Pour la suite, $A = I$, intervalle de $\mathbb{R}$.

3. ***Interversion des symboles*** $\int_a^b$ ***et*** $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ***:*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}(I,\mathbb{R})$, *si* $a, b \in I$, $a < b$,

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. ***Interversion de la dérivation et du signe*** $\sum_{n=0}^{+\infty}$ ***:*** *si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, *si* $\sum f_n$ *converge simplement sur* I *et a pour somme* S. *Si* $\sum f_n'$ *converge uniformément sur tout segment de* I *et a pour somme* T.
Alors $S \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$, $S' = T$ *et* $\sum f_n$ *converge uniformément*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Exemple 189. ♣ *Montrer que* $\left(\sum_{n\geqslant 1} f_n\right)' = \sum f_n'$ *pour* $f_n = \dfrac{e^{-nx^2}}{n^2}$.

Exemple 190. ♣ *Soit* $f_n(x) = e^{-\pi n^2 x}$ *pour* $x \in [\epsilon, \infty[$ *où* $\epsilon > 0$ *et* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. *Démontrer que* f *est dérivable.*

8.4 Exercices

Exercice 83. *Étudier la convergence uniforme des suites*

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$ *pour* $x \in [0,1]$.
2. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ *pour* $x \in [0,1]$.
3. $f_n(x) = \arctan nx$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. $f_n(x) = e^{-nx^2}$ *pour* $x \in [1, +\infty[$.

5. $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.

6. $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ *pour* $x \in]0,1[$.

Exercice 84. *Soit* $(f_n)_{n\in N}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x(1-nx) & si\ x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & si\ x \in \left]\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

1. *Étudier la convergence simple de la suite* $(f_n)_{n\in N}$.
2. *Calculer* $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$. *Y-a-t-il convergence uniforme sur* $[0,1]$ *?*
3. *Étudier la convergence uniforme sur* $[a,1]$ *pour* $a \in]0,1]$.

Exercice 85. *Soit* $(f_n)_{n\in N}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$.

1. *Montrer que la suite* $(f_n)_{n\in N}$ *converge uniformément sur* $[0,1]$ *vers une fonction dérivable* f.
2. *Montrer que la suit* $(f_n')_{n\in N}$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *vers une fonction* g.
3. *Comparer* f' *et* g.

Exercice 86. *Étudier la convergence uniforme des séries* $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum \frac{x^2}{1+n^{3/2}x^2}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
2. $\sum \frac{nx}{1+n^5x^2}$ *pour* $x \in]0,+\infty[$.
3. $\sum e^{-\sqrt{nx}}$ *pour* $x \in [1,+\infty[$.

Exercice 87. *Étudier la convergence normale et uniforme de la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$

$$f_n(x) = x\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ et } f_1(x) = x.$$

Exercice 88. *Étudier la convergence simple de* $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n(x)$ *pour* $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ *où*

$$f_n(x) = \frac{x^n}{(1-x)^n}.$$

Exercice 89. *Déterminer le domaine de convergence simple de la série de fonctions définies par :*

$$\sum f_n(x) = \frac{1}{2^{nx}}.$$

Exercice 90 (La fonction exponentielle). *La fonction exponentielle, notée* $x \mapsto e^x$, *peut être définie de deux façons différentes :*

(a) *soit comme l'unique solution de l'équation différentielle* $y'(x) = y(x)$ *et vérifiant la condition initiale* $y(0) = 1$,

(b) *soit comme la limite de la suite de fonctions* $(f_n)_n$ *avec* $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. *Avec la définition* (a), *montrer que* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ *est solution de la même équation différentielle vérifiée par* e^x *et avec la même condition initiale.*
2. *Avec la définition* (b), *justifier que la limite simple de* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *existe. La convergence de cette suite de fonctions est-elle uniforme sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 91. *Étudier la convergence (simple/uniforme) de* $\sum xe^{-nx}$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

Exercice 92. *Soit* $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ *défini pour* $x \geqslant 0$ *et* $n \geqslant 1$.

1. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.
2. *Montrer que la série* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.
3. *La convergence est-elle normale sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

Exercice 93. *Calculer*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Chapitre 9

Séries entières

9.1 Définition

Définition 77 (Série entière)**.** *On appelle **série entière** de la variable complexe (resp. réelle) toute série de fonctions du type* $\sum a_n z^n$ *(resp.* $\sum a_n x^n$*) où* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *(resp.* $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*).*

Remarque. *Lorsque* $z \in \mathbb{C}$ *est fixé,* $\sum a_n z^n$ *est une série numérique. La série entière est une série de fonctions* $\sum f_n(z)$ *où* $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est une fonction de la forme* $f_n(z) = a_n z^n$*. Le domaine de définition de la série correspond à l'ensemble des* $z \in \mathbb{C}$ *telle que la série numérique* $\sum a_n z^n$ *soit finie.*
Tous les résultats sur les séries entières complexes sont, a fortiori, valables pour les séries entières réelles.

Exemple 191. *1.* ♣ $z \mapsto \sum z^{2n}$ *est-elle une série entière ? Si oui, que vaut* a_n *?*

2. ♣ $z \mapsto \sum e^{-n} z$ *est-elle une série entière ? Si oui, que vaut* a_n *?*

3. ♣ $z \mapsto 1 + 2z^4 - z^2$ *est-elle une série entière ? Si oui, que vaut* a_n *?*

4. *Prenons la fonction cosinus,* $\cos : z \mapsto \cos(z)$*. Cette fonction est indéfiniment dérivable en* 0 *et son développement de Taylor en* $z = 0$ *s'écrit :*

$$\cos(z) = \cos(0) + \cos'(0)\, z + \frac{1}{2!} \cos''(0)\, z^2 + \ldots = \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} z^n \right) + o(z^N).$$

Ici, on a envie de passer à la limite quand $N \to +\infty$ *et on obtiendrait la série*

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} z^n. \tag{1}$$

L'objectif de ce cours est de voir

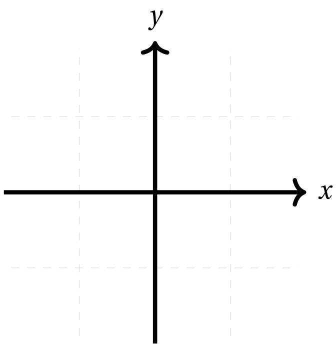
- *à quelle condition une fonction admet-elle une série entière (convergente) ?*
- *si oui, sur quel domaine cette écriture en série est valide ? Par exemple, on voit que le développement* (1) *de cosinus est valide pour z proche de 0, peut-on effectivement calculer ce voisinage de 0 ?*
- *enfin, en quoi cette autre écriture de la fonction est intéressante ?*

Exemple 192. ♣ *Si $a_n = \dfrac{1}{n}$, la série entière associée se note $\sum \dfrac{z^n}{n}$. La série entière converge-t-elle pour $z = 1$?*

Exemple 193. ♣ *Si $a_n = \cos(n\pi/2)$, la série entière associée se note $\sum \cos(n\pi/2)z^n$. La série entière converge-t-elle pour $z = 1$?*

Exemple 194 (Disques de rayon r et de centre O)**.** ♣ *Représenter dans le plan complexe,*

- *le* ***disque ouvert*** *de centre 0 et de rayon r : $\mathscr{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < r\}$ pour $r = 3/2$,*
- *le* ***disque fermé*** *de centre 0 et de rayon r : $\mathscr{D}_f(0, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$ pour $r = 1/2$.*



Exemple 195. *1.* ♣ *Soit $u \in \mathbb{C}$ l'affixe d'un point U. Que vaut les affixes m des points M obtenus par rotations de centre O et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ du point U ?*

2. ♣ *Supposons que $\sum a_n z^n$ converge absolument pour pour $z = u$. La série est-elle aussi convergente pour $z = m$?*

Lemme 2 (Lemme d'Abel)**.** *Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(a_n r^n)_n$ soit une suite bornée. Alors pour tout $|z| < r$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc simplement.*

Démonstration. ♣ *En écrivant que*

$$|a_n z^n| = |a_n|\, r^n \frac{|z^n|}{r^n} = |a_n| r^n \left| \frac{z^n}{r^n} \right| = |a_n| r^n \left| \frac{z}{r} \right|^n,$$

prouver le Lemme 2.

□

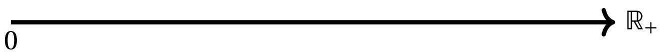
Propriété. *Soit* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *Soient :*

- $A = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n$ *est bornée*$\}$
- $B = \{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n$ *converge vers* $0\}$

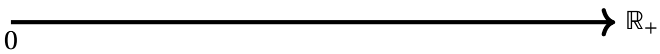
Alors $\sup A = \sup B$.

Exemple 196. ♣ *Sur les axes réels positifs ci-dessous, représenter* A, B, $\sup A$, $\sup B$. *A-t-on* $A = B$ *?*

1. *où* $a_n = 1$.



2. *où* $a_n = \dfrac{1}{n}$.



Définition 78 (Rayon, disque et cercle de convergence)**.** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière où* $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *On appelle :*

- ***Rayon de convergence :*** *élément de* $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *défini par*

$$R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\} = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+ \mid a_n r^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right\}.$$

- ***Disque de convergence :*** *le « disque »* $\mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.
- ***Cercle de convergence :*** *le « cercle »* $\mathcal{C}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$.

Propriété. *Les séries* $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$, $\sum M a_n z^n$ *où* $M \in \mathbb{C}^\star$ *ont le même rayon de convergence.*

Exemple 197 (Série géométrique)**.** $\forall z, |z| < 1, \quad \dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n.$

Exemple 198 (Série exponentielle)**.** $\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$

Exemple 199. ♣ *Donner un exemple de série où le rayon de convergence est :*

1. $R = 0$.

2. $R = +\infty$.

Exemple 200. ♣ *Donner un exemple de série* $\sum a_n z^n$ *où le rayon de convergence* R *est tel que :*

1. *la suite* $(|a_n|R^n)$ *converge vers* 0.

2. *la suite* $(|a_n|R^n)$ *diverge.*

Calculer R par le critère de d'Alembert

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes non nuls. Pour déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum_n a_n z^{v_n}$, on peut s'intéresser, pour $z \in \mathbb{C}^*$, à $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1} z^{v_{n+1}}|}{|a_n z^{v_n}|}$.
Si cette limite existe et qu'elle est différente de 1, la règle de d'Alembert donne la nature de la ***série numérique*** $\sum_n |a_n||z|^{v_n}$, ce qui permet de majorer ou minorer R.

Exemple 201. ♣ *Calculer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_n \dfrac{n}{3^n} z^n$.

Exemple 202. ♣ *Calculer le rayon de convergence de la série entière* $\sum_n n!\, z^{n^2}$.

9.2 Convergence de la série entière $\sum a_n z^n$

Théorème 37. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Soit R son rayon de convergence.*

1. *La série entière converge absolument donc simplement sur le disque de convergence $\mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$;*
2. *La série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé $\mathcal{D}_f(0,R_1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R_1\}$ avec $0 < R_1 < R$;*
3. *$\forall z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, la série diverge ;*
4. *La fonction $S : \begin{cases} \mathcal{D}(0,R) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \end{cases}$ est continue sur $\mathcal{D}(0,R)$.*

Le comportement de la série entière sur la frontière de son disque ouvert de convergence peut être très variable, comme le montrent les exemples suivants.

Exemple 203. ♣ *Que vaut le domaine de convergence de la série entière $\sum_n z^n$? La série converge t-elle pour des points à la frontière du disque de convergence ?*

Exemple 204. ♣ *Que vaut le domaine de convergence de la série entière $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$? La série converge t-elle pour des points à la frontière du disque de convergence ?*

Propriété. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si $\sum a_n R^n$ converge absolument alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\mathcal{D}_f(0,R)$.*

Exemple 205. ♣ *Vérifier la convergence normale de* $\sum \frac{z^n}{n^2}$ *sur* $\mathcal{D}_f(0,R)$ *où* R *est son rayon de convergence.*

9.3 Propriétés

Propriété. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *de rayons de convergences respectifs* R_a *et* R_b.

1. *si* $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leqslant |b_n|$, *alors* $R_a \geqslant R_b$;
2. *si* $a_n = O(|b_n|)$ *ou* $a_n = o(|b_n|)$, *alors* $R_a \geqslant R_b$;
3. *si* $a_n \sim b_n$, *alors* $R_a = R_b$.

Exemple 206. ♣ *Soit* $d(n)$ *le nombre de diviseurs de* $n \in \mathbb{N}^*$. *Donner le rayon de convergence de* $\sum_n d(n)\, z^n$.

Exemple 207. ♣ *Comparer les rayons de convergence de* $\sum n z^n$ *et* $\sum \sqrt{n} z^n$.

Exemple 208. ♣ *Démontrer que* $\sum \frac{z^n}{2^n}$ *et* $\sum \arctan\left(\frac{1}{2^n}\right) z^n$ *ont le même rayon de convergence.*

Propriété. *Si $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$, la série entière $\sum P(n)z^n$, a pour rayon de convergence $R = 1$.*

Démonstration. ♣

□

Théorème 38. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergences respectifs R_a et R_b. Soient $\sum s_n z^n$ et $\sum p_n z^n$ respectivement somme et produit de Cauchy des deux séries précédentes i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s_n = a_n + b_n$ et $p_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Soit R_s et R_p les rayons de convergence de ces deux dernières. Alors*

1. *$R_s \geqslant \min(R_a, R_b)$, $R_p \geqslant \min(R_a, R_b)$;*
2. *si $R_a \neq R_b$, alors $R_s = \min(R_a, R_b)$;*
3. *on pose $R = \min(R_a, R_b)$. $\forall z \in \mathscr{D}(0, R)$,*
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;
   - $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

Exemple 209. *1.* ♣ *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n e^n z^n$?*

2. ♣ *Quel est le rayon de convergence de la série $\sum_n e^{-n} z^n$?*

3. ♣ *En déduire le rayon de convergence de la série $\sum_n ch(n) z^n$? Calculer la somme de cette série.*

Remarque. *Le produit des séries entières* $\sum_n a_n z^n$ *et* $\sum_n b_n z^n$ *s'écrit*

$$\left(\sum_n a_n z^n\right)\left(\sum_n b_n z^n\right) = \sum_n \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n,$$

ce qui s'écrit autrement par

$$\left(\sum_n a_n z^n\right)\left(\sum_n b_n z^n\right) = \sum_n \left(\sum_{i+j=n} a_i b_j\right) z^n.$$

Exemple 210. *1. ♣ Calculer* $\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2$ *en utilisant le produit de Cauchy.*

2. ♣ En déduire

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n.$$

9.4 Cas des séries réelles

Proposition 46 (Intégrale)**.** *Soit* $\sum a_n t^n$ *une série entière réelle (où* $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*) de rayon de convergence R et de somme S. Alors* $\forall a, b \in]-R, R[$,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n \mathrm{d}t$$

Proposition 47 (Primitive)**.** *Soit* $\sum a_n t^n$ *une série entière réelle de rayon de convergence R et de somme S. Alors les primitives de S sur* $]-R, R[$ *s'écrivent*

$$t \mapsto k + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 211. *1. ♣ Écrire la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *pour* $x \in]-1, 1[$ *sous la forme* $\sum_n a_n x^n$ *où vous préciserez la suite* $(a_n)_n$.

2. ♣ *En déduire l'écriture sous la forme* $\sum_n b_n x^n$ *où vous préciserez la suite* $(b_n)_n$ *de la fonction* $f(x) = \ln(1+x)$ *pour* $x \in]-1,1[$.

Exemple 212. 1. ♣ *Écrire la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ *pour* $x \in]-1,1[$ *sous la forme* $\sum_n a_n x^n$ *où vous préciserez la suite* $(a_n)_n$.

2. ♣ *En déduire l'écriture sous la forme* $\sum_n b_n x^n$ *où vous préciserez la suite* $(b_n)_n$ *de la fonction* $f(x) = \arctan x$ *pour* $x \in]-1,1[$.

Lemme 3 (Série « dérivée »). *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R. *La série entière* $\sum n a_n z^{n-1}$ *est dite « série dérivée ». Cette série a aussi* R *pour rayon de convergence.*

Théorème 39. *Soit* $\sum a_n r^n$ *une série entière réelle de rayon de convergence* R *de somme* S. *Alors* $S \in \mathscr{C}^\infty(]-R,R[,\mathbb{R})$ *et* $\forall t \in]-R,R[$,

$$S^{(k)}(t) = \sum_{n \geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$

Proposition 48 (Coefficients d'une série entière). *Soit* $\sum a_n t^n$ *une série entière réelle de rayon de convergence* R *et de somme* f. *Alors*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

et ainsi

$$\forall t \in]-R, R[,\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n.$$

Remarque. *La proposition 48 permet de relier les coefficients a_n de la série avec sa somme f.*

Remarque. *Ainsi la série entière $\sum_n a_n x^n$ de rayon de convergence R est une fonction dérivable sur $]-R, R[$ et dont la dérivée est la somme de la série entière $\sum_n (n+1)\, a_{n+1}\, x^n$.*

Exemple. ♣ *Démontrer, en utilisant la série dérivée, l'égalité vue dans l'Exemple 210.*

9.5 Fonctions développables en séries entières

Définition 79 (Fonction développable en série entière en 0)**.** *On dit que f est développable en série entière au point 0 s'il existe $R > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ ($(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) tels que :*

- *f est définie sur $\mathscr{D}(0, R)$ et*
- $\forall x \in \mathscr{D}(0, R),\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$

On dit aussi que f admet un développement en série entière en 0 (abrégé en : f admet un DSE(0)).

Remarque (Série de Taylor)**.** *On a vu au Théorème 39 que toute somme f d'une série entière $\sum_n a_n x^n$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. Dès lors, la somme f est une fonction développable en série entière en 0 et son développement est donné par la Proposition 48 :*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \forall x \in]-R, R[.$$

Conditions nécessaires pour que f admette un DSE

Si f admet un DSE(0) alors

- f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0.
- Les termes de la série sont nécessairement $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- La ***seule*** série entière qui peut convenir est sa série de Taylor, c'est à dire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Il reste alors à vérifier que
  1. cette série converge
  2. la somme de cette série est bien $f(x)$ pour x proche de 0.

Exemple 213. *Toute fonction polynomiale est développable en série entière.*

Exemple 214. ♣ *Donner une fonction qui n'est pas développable en série entière au point* 0.

Définition 80 (Fonction développable en série entière en $x_0 \in \mathbb{R}$)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $g : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ u \mapsto g(u) = f(x_0 + u) \end{cases}$ avec J l'intervalle I translaté de $-x_0$.*
f est développable en série entière en x_0 si g est développable en série entière en 0.
Ou encore, s'il existe $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $R > 0$ tels que $\forall x \in]x_0 - R, R + x_0[,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Exemple 215. ♣ *Écrire le DSE(1) de la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.*

Propriété. *Soit f une fonction développable en série entière en* 0 *et de rayon de convergence R :*

1. *Il y a* ***unicité du développement en série entière****;*

2. *Si g est aussi une fonction développable en série entière en* 0 *et qui admet R' comme rayon de convergence, $f+g$ et $f\times g$ sont développables en série entière en 0 de rayon de convergence* $\geqslant \min(R,R')$ *avec*

$$(f+g)(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)t^n \qquad (f\times g)(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_{n-k}b_k)t^n.$$

αf admet aussi un développement en série entière de rayon de convergence R si $\alpha\neq 0$ avec

$$(\alpha f)(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha a_n)t^n.$$

3. *f' est développable en série entière et admet R comme rayon de convergence et*

$$\forall t\in]-R,R[,\ f'(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}na_nt^{n-1}.$$

4. *Si F est une primitive de f, F est aussi développable en série entière de même rayon de convergence R et*

$$\forall t\in]-R,R[,\ F(t)=F(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\frac{t^{n+1}}{n+1}.$$

5. $f\in\mathscr{C}^{\infty}(]-R,R[,\mathbb{R})$.

Remarque. • *Bien noter que « développable en série entière » ne signifie pas que f soit* **globalement** *égale à la somme d'une série entière, mais simplement que f coïncide avec la somme d'une série entière sur* ***un intervalle ouvert centré en*** 0.

• *Il est tout à fait possible que la somme de la série entière $\sum_n a_nx^n$ de rayon de convergence R et la fonction f coïncident sur un intervalle $]-r,r[$, mais qu'elles ne coïncident pas sur $]-R,R[$, même lorsque f est définie sur $]-R,R[$.*

Exemple 216. ♣ *Donner des exemples qui illustrent la remarque précédente.*

Exemple 217. ♣ *Supposons que $\sum_n a_nx^n$ admet un rayon de convergence $R>0$ et qu'il existe $r>0$ tel que*

$$\forall x\in]-r,r[,\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0.$$

Que dire de la suite $(a_n)_n$?

Exemple 218. ♣ *Soit*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. *f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$? Calculer $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$.*
2. *Que vaut la série de Taylor de f en 0 ?*
3. *En déduire que la somme de cette série n'est pas égale à f.*

Exemple 219. ♣ *Montrer que si f admet un DSE(0) et est paire (resp. impaire), il n'y aura que des monômes d'ordre pair (resp. impair) dans le développement en série entière.*

Exemple 220. ♣ *Trouver le DSE(0) de la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.*

9.5.1 Développements en séries entières usuels

De rayon de convergence $R = +\infty$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \qquad \frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n$$

$$-\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \qquad \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$\operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \qquad \operatorname{Arctan} t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

De rayon de convergence $R = 1$, $\forall t \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$$

$$\operatorname{Arcsin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad \operatorname{Argth} t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)}$$

Opérations sur les sommes de séries entières

Soit I un intervalle tel que $0 \in I$, ainsi que $f : I \mapsto C$ et $g : I \mapsto C$.

- Si f et g sont des fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$, alors $f+g$, λf et fg sont développables en série entière sur $]-r, r[$.
- Si f et g sont des fonctions développables en série entière, alors $f+g$, λf et fg sont développables en série entière.
- Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, alors toutes les dérivées et les primitives de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$.

Calculer un DSE à partir des DSE connus

Pour établir l'existence d'un développement en série entière d'une fonction f , et le cas échéant pour l'expliciter, on cherche d'abord à voir si l'on peut se ramener par des opérations algébriques ou analytiques (intégration, dérivation) à des fonctions ou des développements connus.

Exemple 221. ♣ *La fonction f définie par* $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ *est-elle développable en série entière en* 0 *?*

Exemple 222. ♣ *Donner le DSE(0) de* $f(x)=\arctan(x+1)$.

On pourrait être tenté d'utiliser le développement en série entière de la fonction Arctan . Cela conduit à une impasse, puisque le développement en série entière est valable uniquement sur $]-1,1[$ *et il permet simplement d'écrire :*

$$\forall x\in]-2,0[,\ \arctan(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{2n+1}}{2n+1}$$

ce qui ne peut donner un développement en série entière au voisinage de 0. *Il faut trouver une autre méthode ...*

9.6 Exercices

Exercice 94. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières* $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *suivantes :*

1. $a_n=\ln(n)$.
2. $a_n=e^{-n^2}$.
3. $a_n=\dfrac{ln(n)}{n^2}$.
4. $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$.

5. $a_n = \dfrac{(5n)!}{(n!)^5}$.

6. $a_n = \arcsin\left(\dfrac{n+1}{1+n\sqrt{2}}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 95. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (2+3i)^n z^n.$$

Exercice 96. *Déterminer le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{1+b^n} x^n$$

selon les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 97. *Déterminer le rayon de convergence* R *des séries entières réelles* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *suivantes, puis calculer leurs sommes sur* $]-R, R[$ *:*

1. $a_n = n$.
2. $a_n = n(n-1)$.
3. $a_n = n^2$.

Exercice 98. *Déterminer le rayon de convergence* R *des séries entières réelles* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *suivantes, puis calculer leurs sommes sur* $]-R, R[$ *:*

1. $a_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$.
2. $a_n = \dfrac{1}{n} \cos\left(\dfrac{2\pi n}{3}\right)$.
3. $a_n = n^2$.

Exercice 99. *Calculer les sommes suivantes :*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3n+2}{2^n}$.

Exercice 100. *Calculer le développement en série entière en zéro des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}, \quad g(x) = \ln(x^2-5x+6), \quad h(x) = \int \cos(t^2)\,\mathrm{d}t, \quad s(x) = \frac{1}{1+x+x^2}.$$

Exercice 101. *On pose* $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(3-x)}$.

1. *Écrire* f *sous la forme* $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-3}$ *et déduisez-en les primitives de* f *sur l'intervalle* $]3, +\infty[$.
2. *Déterminez le développement en série entière en* 0 *de la fonction* f *et précisez son rayon de convergence.*
3. *Déterminez le développement limité à l'ordre* 5 *en* 0 *de la fonction* f.

Exercice 102. *On considère la série de fonctions* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n} x^n$, *$x$ désignant un réel.*

1. *Étudiez la simple convergence de cette série.*
   On note D l'ensemble des x où cette série converge, $S(x)$ la somme de cette série.
2. (a) *Étudiez la convergence normale puis la convergence uniforme de cette série sur D.*
   (b) *La fonction S est-elle continue sur D.*

Exercice 103. *Calculez le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :*

1. $\sum n^\alpha z^n$, $(\alpha \in \mathbb{R})$.
2. $\sum \cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right) z^n$.

Exercice 104. 1. *Démontrez que si $|a_n| \sim |b_n|$ alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.*

2. *Quel est la rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{i^n n^2}{n^2+1} z^n$ *(où $i^2 = -1$) ?*

Exercice 105. 1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?*

2. *Quel est le rayon de convergence de la série entière* $\sum \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right) z^n$ *?*

Exercice 106. 1. *Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?*

2. *Développez en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - \ln(1-2x)$.*
   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$ *?* $x = \dfrac{1}{2}$ *? Si oui quelle est sa somme ?*

Exercice 107. *Déterminez le développement en série entière à l'origine de la fonction* $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *en précisant son rayon de convergence.*

Exercice 108. 1. *Déterminez le rayon de convergence de la série entière* $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. *Déterminez le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \mathrm{ch}(x)$, et précisez le rayon de convergence.*
3. (a) *Déterminez $S(x)$.*
   (b) *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(0) = 1,\ f(x) = \mathrm{ch}(\sqrt{x}) \text{ pour } x > 0,\ f(x) = \cos(\sqrt{-x}) \text{ pour } x < 0.$$

   Démontrez que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 10

Intégration

10.1 Rappels

Subdivisions.

Exemple 223. *Soit* $(a_n)_{n=0,\dots,N-1}$ *une subdivision* ***uniforme*** *de* N *points de l'intervalle* $[0,1]$.

1. ♣ *Que vaut l'expression de* a_i *en fonction de* N *?*
2. ♣ *Que devient cette expression si* $(a_n)_n$ *est une subdivision* ***uniforme*** *de* N *points de l'intervalle* $[a,b]$ *en fonction de* a, b *et* N *?*

Intégrale de Riemann. Soit f une fonction **continue** de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a,b]$. Vous avez vu en première année que la somme de Riemann associée à f est le nombre réel

$$S_\sigma^R(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,(a_{i+1} - a_i)$$

et que cette somme est convergente. Sa limite est notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et elle définie l'intégrale, ***au sens de Riemann***, de f sur $[a,b]$.
♣ *Faire un dessin représentant la courbe représentative de* f, σ *et* $S_\sigma^R(f)$.

Aussi, l'observation de la réalité a conduit les mathématiques à envisager des fonctions discontinues et dans ce cas la somme de Riemann n'est pas toujours convergente. Ainsi donc l'intégrale de f au sens de Riemann n'est pas définie, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 224. *Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par* $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } \frac{1}{x} \in \mathbb{N} \text{ et } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. ♣ *Soit $(a_n)_n$ une subdivision régulière de $[0,1]$ de pas h. Donner l'expression de a_n en fonction de n et h.*
2. ♣ *Que souhaiterait-on comme valeur pour l'aire $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?*
3. ♣ *A-t-on $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{h} \rfloor} h f(a_i) \xrightarrow[h\to 0]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?*
4. ♣ *Expliquez ce que vous avez obtenu.*

Le but du cours est de généraliser l'intégration sur un ***intervalle quelconque*** de fonctions continue par morceaux, c'est à dire des fonctions continues sauf en un ***nombre fini*** de points de discontinuité.

10.2 Fonctions continues par morceaux

Définition 81 (Fonction continue par morceaux sur un ***segment***)**.** *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ où ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite **continue par morceaux** sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a = a_0, \dots, a_n = b)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i, a_{i+1}[$ possède un prolongement continu sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$. Une telle subdivision est dite adaptée à f.*

Remarque. *On note $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Fonction continue par morceaux

Pour établir qu'une fonction f est continue par morceaux sur un segment, on détermine une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de ce segment telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- la fonction $f_{|]a, a_{i+1}[}$ est continue,
- la fonction $f_{|]a, a_{i+1}[}$ admette des limites finies en a_i et a_{i+1}.

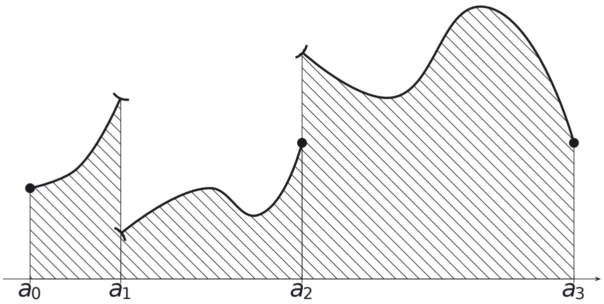


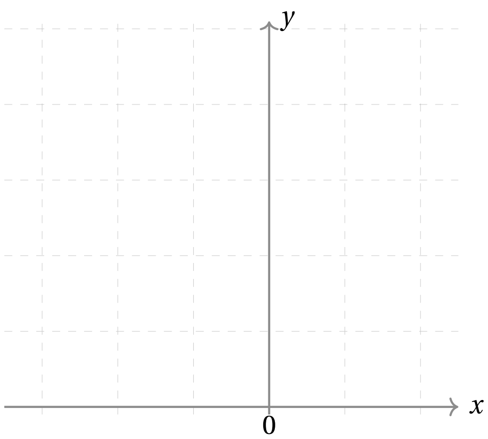
FIGURE 10.1 – Fonction continue par morceaux sur le segment $[a_0, a_3]$.

Exemple 225.
- *Toute fonction continue sur un segment est continue par morceaux.*
- *Toute fonction en escalier sur un segment est continue par morceaux.*
- *La restriction à un segment de la fonction partie entière est continue par morceaux, car en escalier.*

Exemple 226. *En vous reportant à la figure 10.1, où l'on notera f la fonction représentée, compléter par les relations d'ordre $\leqslant, \geqslant$ ou $=$:*

1. $\lim\limits_{x \to a_1^-} f(x) \ldots\ldots \lim\limits_{x \to a_1^+} f(x)$,
2. $\lim\limits_{x \to a_2^-} f(x) \ldots\ldots f(a_2)$,
3. $\lim\limits_{x \to a_2^+} f(x) \ldots\ldots f(a_2)$,
4. $\lim\limits_{x \to a_2^-} f(x) \ldots\ldots \lim\limits_{x \to a_2^+} f(x)$.

Exemple 227. ♣ *Représenter une fonction continue par morceaux sur la subdivision $(-3, 1/2, 3/2, 2)$ de l'intervalle $[-3, 2]$.*



Exemple 228. ♣ *Combien de sous-intervalles, dont les bornes sont choisies parmi les a_i, possède la subdivision $(-1 = a_0, \ldots, a_n = 1)$ de $[-1, 1]$?*

Exemple 229. ♣ *Représenter la fonction f définie sur $[1, 5]$ par $f(x) = \dfrac{5}{\lfloor x \rfloor}$. Cette fonction est-elle continue par morceaux ? (Vous pourrez faire un dessin).*

Proposition 49. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.*

Définition 82 (Fonction continue par morceaux sur un **intervalle quelconque**)**.** *Une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ où ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur chaque segment $J \subset I$.*

Exemple 230. ♣ *Donner une fonction continue par morceaux non bornée.*

Exemple 231. ♣ *La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle continue par morceaux ?*

Exemple 232. ♣ *La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle continue par morceaux ?*

Exemple 233. ♣ *La fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle continue par morceaux ?*

Exemple 234. *Soit* $\varphi : x \mapsto x^3 \sin(\frac{1}{x})$.

1. ♣ *Montrer que* φ *a un prolongement continu sur* $[0,1]$*, qu'on notera encore* φ*. Que vaut* $\varphi(0)$ *? Montrer que* $\varphi([0,1]) \subset [-1,1]$.

2. ♣ *Soit* $f : \begin{cases} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lfloor x \rfloor \end{cases}$. *Montrer que f est continue par morceaux.*

3. ♣ *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose :*

$$u_n = f \circ \varphi\left(\frac{1}{n\pi}\right) \quad et \quad v_n = f \circ \varphi\left(\frac{2}{(4n-1)\pi}\right).$$

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$*. La fonction* $f \circ \varphi$ *est-elle continue par morceaux ?*

10.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

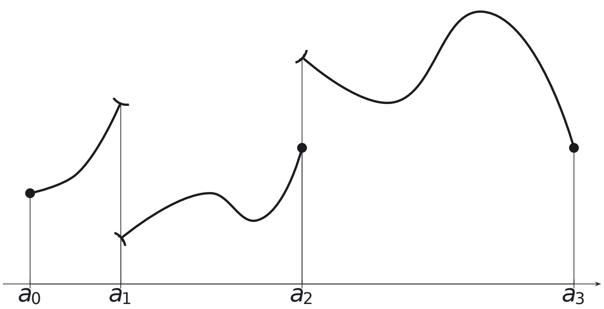
10.3.1 Intégrale sur un intervalle de longueur finie

En première année, on a défini l'intégrale sur un segment des fonctions en escalier, puis celle des fonctions continues. Nous allons étendre cette notion d'intégrale sur un segment au cas des fonctions continues par morceaux.

Proposition 50. *Soit* $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ *et* $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ *une* **subdivision adaptée** *à* f*. Pour tout* $i \in [\![0,n-1]\!]$*, on note* $\tilde{f}_i$ *le prolongement continu sur* $[a_i,a_{i+1}]$ *de* $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$*. Alors la somme :*

$$S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i,a_{i+1}]} \tilde{f}_i$$

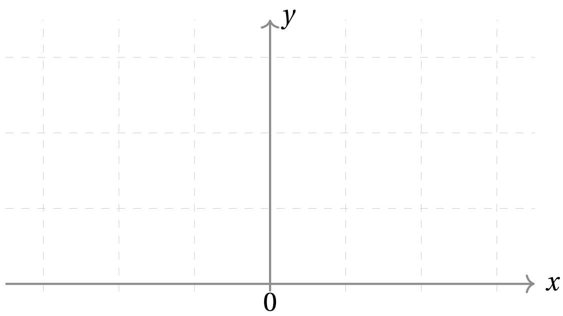
ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée à f*. Cette somme est appelée* ***intégrale*** *de* f *. On la note*



> $\displaystyle\int_{[a,b]} f.$

Remarque. *Cette intégrale ainsi définie est linéaire.*

Exemple 235. ♣ *Représenter une fonction f et une subdivision* **non adaptée** *à f.*



Exemple 236. *Pour les questions suivantes, on prendra les notations de la proposition 50 et une représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous.*

1. ♣ *Sur la figure, indiquer la fonction $\tilde{f}_2$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{[a_1,a_2]} \tilde{f}_1$.*
2. ♣ *Que représente la somme $S_\sigma(f)$?*

> **Proposition 51.** *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$. Alors la fonction $|f|$ est continue par morceaux et l'on a :*
> $$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant \int_{[a,b]} |f|.$$

Exemple 237. *1.* ♣ *Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = 0$ si, et seulement si, f est nulle, sauf peut-être en ses points de discontinuité.*

2. ♣ *L'application* $(f \mid g) = \displaystyle\int_{[a,b]} fg$ *pour* $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ *définie-t-elle un produit scalaire sur* $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ *?*

Proposition 52 (Relation de Chasles)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles et $c \in]a,b[$. Alors*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f.$$

Proposition 53 (Positivité de l'intégrale)**.** *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.*

Exemple 238. ♣ *Soient f et g sont deux fonctions de $\mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. Déduire des propositions précédentes que si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.*

Proposition 54 (Cas d'un segment)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ strictement croissante. Alors $f \circ \varphi$ est continue par morceaux et l'on a :*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Exemple 239. ♣ *Que devient la formule du changement de variables si φ est strictement décroissante ?*

Remarque. *Aussi la stricte monotonie de φ est nécessaire pour que $f\circ\varphi$ soit continue par morceaux (voir exemple 234).*

10.3.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Définition 83 (Intégrale généralisée)**.** *Soit $f\in\mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge, si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ existe dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite. Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Lien avec les primitives dans le cas continue

Prenons le cas où f est continue et notons F une primitive de f. Puisque $\displaystyle\int_a^x f=[F]_a^x=F(x)-F(a)$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ équivaut à l'existence dans $\mathbb{K}$ de $\displaystyle\lim_{+\infty} F$ et, dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f=\lim_{+\infty} F-F(a).$$

Exemple 240. *1.* ♣ *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos t\,\mathrm{d}t$ *diverge.*

2. ♣ *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ *converge et déterminer sa limite.*

3. ♣ *L'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-it}\,\mathrm{d}t$ *converge-t-elle ?*

4. ♣ *Donner une fonction continue par morceaux f sur $[a,+\infty[$ telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.*

Remarque. *Contrairement à ce qui se passe pour les séries numériques, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ n'entraîne pas que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$, ni même que f est bornée au voisinage de $+\infty$.*
En effet, considérons l'exercice suivant. f continue et affine par morceaux sur $[0,+\infty[$ avec

- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est affine sur les intervalles $[n-1/4^n, n]$ et $[n, n+1/4^n]$.*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$f\left(n-4^{-n}\right) = f\left(n+4^{-n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad f(n) = 2^n.$$

- *en dehors des intervalles $[n-4^{-n}, n+4^{-n}]$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f est nulle.*

♣ *Donner une allure de la représentation graphique de cette fonction f.*

♣ *Montrer que, bien que $\lim\limits_{+\infty} f \neq 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.*

Proposition 55. *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et $b \in [a,+\infty[$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature, c'est-à-dire convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux. De plus,* **si elles convergent**, *on a l'égalité :*

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.}$$

Remarque. *Ainsi si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, alors la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement local de f* **au voisinage de $+\infty$**.

Exemple 241. ♣ *Soit $f \in \mathscr{C}([a,+\infty[,\mathbb{K})$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge . Montrer que la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,+\infty[$, de dérivée égale à $-f$.*

Théorème 40 (Changement de variables – Cas d'un intervalle)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit φ une application bijective de J dans I et strictement croissante. Alors $f\circ\varphi$ est continue par morceaux sur J, les intégrales $\displaystyle\int_I f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence*

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 56. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction positive.*
Alors

$$\int_a^{+\infty} f \geqslant 0.$$

10.3.3 Intégrabilité

Définition 84. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$* **converge absolument** *si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.*
Dans ce cas, on dit que f est **intégrable**.

Théorème 41.

$$\boxed{f \text{ est intégrable} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^{+\infty} f \text{ est convergente.}}$$

Exemple 242. ♣ *Donner un exemple où la réciproque du théorème 41 est fausse.*

Exemple 243. ♣ *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$.*

Exemple 244. ♣ *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ soit intégrable sur $[1, +\infty[$.*

Théorème 42. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $g \in \mathscr{C}_m([a, +\infty[, \mathbb{K})$.*

1. *Si $|f| \leqslant |g|$, alors l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ de g implique celle de f.*
2. *Si $f = O(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ de g implique celle de f.*
3. *Si $f \sim g$ au voisinage de $+\infty$, alors l'intégrabilité sur $[a, +\infty[$ de g équivaut à celle de f.*

Nature d'une intégrale généralisée

Pour déterminer la nature de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ avec $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R})$, on peut déterminer un équivalent g de f au voisinage de $+\infty$. Si cet équivalent g est de signe constant, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, g est intégrable sur $]a,+\infty]$.

Exemple 245. ♣ *Donner des exemples de fonctions f et g pour illustrer les trois cas du théorème 42.*

Exemple 246. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale* $\int_1^{\infty} \frac{x}{1+\sin x^2}\,\mathrm{d}x$ *?*

Proposition 57. *Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,+\infty[,\mathbb{R})$ une fonction de signe constant au voisinage $+\infty$. Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction f est intégrable sur $[a,+\infty[$.*

Exemple 247. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale :* $\int_1^{+\infty} f$ *avec* $f(t) = 2\ln(t^{3/2}+1) - 3\ln(t+1)$ *?*

10.3.4 Généralisation à d'autres intervalles

Précédemment, on s'est intéressé à la convergence des intégrales dont le support est un intervalle de la forme $[a,+\infty[$. Les résultats énoncés sont facilement adaptables à d'autres types d'intervalles : $]-\infty,a]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$.

Cas général : $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$

Pour déterminer la nature de $\displaystyle\int_a^b f$, on commence par examiner sur quel intervalle d'extrémités a et b la fonction f est continue par morceaux.
Selon les cas, on fait ensuite une ou deux études (en général des études locales permettant d'utiliser les méthodes vues précédemment).
Si, par exemple, a est réel et que f est continue par morceaux sur $[a,b[$, une étude au voisinage de a est inutile.

Nous illustrons cette généralisation par quelques exemples.

Exemple 248. ♣ *Supposons f définie sur $\mathbb{R}$, intégrable sur $[0,+\infty[$ et impaire. Que vaut $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^-} f(t)\,\mathrm{d}t$?*

Exemple 249. *1.* ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$?*

2. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$?*

3. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?*

4. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$?

Exemple 250. 1. ♣ *Le produit de deux fonctions intégrables sur* $]-\infty, a]$ *est-il intégrable sur* $]-\infty, a]$?

2. ♣ *Le produit de deux fonctions intégrables sur* $]0,1]$ *est-il intégrable sur* $]0,1]$?

Définition 85. *Une fonction* $f \in \mathscr{C}_m(I, \mathbb{K})$ *est dite de carré intégrable si la fonction* f^2 *est intégrable sur* I. *On note* $\mathscr{C}_m^2(I, \mathbb{K})$ *l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur* I.

Exemple 251. 1. ♣ *Donner un exemple d'une fonction continue par morceaux sur* $[1, +\infty[$ *non intégrable, mais de carré intégrable sur* $[1, +\infty[$.

2. ♣ *Compléter par un symbole d'inclusion ensembliste :*

$$\mathscr{C}_m(I,\mathbb{R}) \quad \ldots\ldots \quad \mathscr{C}^2_m(I,\mathbb{R}).$$

Proposition 58. *Le produit de deux fonctions continues par morceaux de carré intégrable sur I est intégrable sur I.*

Démonstration. ♣

□

Exemple 252. ♣ *Montrer que toute fonction de carré intégrable sur un intervalle borné est intégrable sur cet intervalle.*

Proposition 59 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$ de carré intégrable sur I. On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\boxed{\left|\int_I fg\right| \leqslant \left(\int_I |f^2|\right)^{1/2}\left(\int_I |g^2|\right)^{1/2}.}$$

Remarque. *L'ensemble $\mathscr{C}^2_m(I,\mathbb{K})$ des fonctions de carré intégrable sur I est un sous espace vectoriel de $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$. De plus, $(f \mid g) = \displaystyle\int_I fg$ est un produit sur $\mathscr{C}^2_m(I,\mathbb{K})$.*
♣ *Pourtant, expliquer pourquoi ce n'est pas un produit scalaire sur $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$?*

Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz **dans $\boldsymbol{\mathscr{C}^2_m(I,\mathbb{K})}$** *découle de la propriété de ce produit scalaire. Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnée en proposition 59 est plus générale car elle est établie pour f et g de $\mathscr{C}_m(I,\mathbb{K})$.*

10.3.5 Intégration par partie

Théorème 43 (Intégration par partie)**.**

$$\int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^X u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^X - \int_a^X u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

où $X \in [a,b[,\ u,v \in \mathscr{C}^1([a,b[,\mathbb{K})$. On note $l_1 = \lim\limits_{X\to b^-} u(X)v(X)$ et $l_2 = \lim\limits_{X\to b^-} \int_a^X (u'v)(t)\,\mathrm{d}t$.
Si l_1 et l_2 existent dans $\mathbb{R}$:

- *si $f \geqslant 0$: on a alors prouvé que $f \in \mathscr{L}^1([a,b[,\mathbb{R}^+)$;*
- *si $f \leqslant 0$: le calcul ne sert à rien sauf si on a montré au préalable que $f \in \mathscr{L}^1([a,b[,\mathbb{R})$.*

Exemple 253. ♣ *À l'aide d'une intégration par parties, justifier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$.*

Exemple 254. ♣ *Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$?*

10.3.6 Intégrales « impropres » : attention danger

Il est possible que $\lim\limits_{X\to b^-} \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t$ existe (et soit finie) sans que f soit intégrable (mais cela n'arrive pas si $f \geqslant 0$).
Dans ce cas, on dit (encore parfois) que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ « converge »et on note (quand même exceptionnellement) $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim\limits_{X\to b^-} \int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t$.
On parle d'intégrale « impropre ».

Exemple 255. ♣ *Donner un tel exemple.*

10.4 Exercices

Exercice 109. *1. Soient* $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ *avec* $m\leqslant n$. *Calculer* $\displaystyle\int_m^n \lfloor x\rfloor \mathrm{d}x$.

2. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\mathrm{d}x$.

Exercice 110. *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continue telle que* $|f(x)|\leqslant 1$ *pour tout* $x\in[a,b]$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = b-a$. *Que dire de* f *?*

Exercice 111. *Déterminer la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos\left(e^{-t}\right)e^{-t}\mathrm{d}t$.

Exercice 112. *Quelle est la nature, selon* $\alpha\in\mathbb{C}$ *de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\mathrm{d}t\,?$$

Exercice 113. *Quelle est la nature de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} e^{it}\ln(t)e^{-2t}\mathrm{d}t\,?$$

Exercice 114. *Quelle est la nature de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\,?$$

Exercice 115. *Quelle est la nature de l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,?$$

Exercice 116. *Montrer que l'intégrale* $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\mathrm{d}t$ *converge pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 117. *Déterminer la nature des intégrales suivante :*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\ln t)}{t^2}\mathrm{d}t$.
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos(t)\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 118. *Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?*

1. $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1-\sqrt{t}}$.

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(1+t\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)\right)\mathrm{d}t$.
3. $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)\mathrm{d}x$ *pour* $a\in\mathbb{R}$.
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.
5. $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{e^t-1}$.
6. $\displaystyle\int_0^1\cos^2\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

Chapitre 11

Équations différentielles linéaires

11.1 Rappels de 1re année

11.1.1 Motivations.

Une équation différentielle s'écrit

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in I$$

où f est un champ de vecteur connu, $y(t)$ est une fonction inconnue à déterminer et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.
Une solution de cette équation est une fonction s définie sur I telle que $\dot{s}(t) = f(t, s(t))\ \forall t \in I$.
Prenons l'exemple d'une équation autonome, c'est à dire f ne dépend pas explicitement du temps : $f(t, y(t)) := f(y(t))$ et en dimension 2, c'est à dire $y(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est la position dans le plan au temps t, $\dot{y}(t)$ est un vecteur qui représente la vitesse au temps t.

Le problème est alors : si on connaît la vitesse, peut-on trouver la position ?

ce qui d'une manière plus mathématique se formule comme

si on connaît la dérivée d'une fonction, peut-on retrouver la fonction ?

D'un point de vue géométrique, la vitesse au temps t est représentée par un vecteur, et lorsque t varie f représente un champ de vecteur (voir Figure 11.1.1). Résoudre $\dot{y}(t) = f(y(t))$ où f est donné par la Figure 11.1.1 revient à trouver une **courbe tangente à tous les vecteurs de f en tout les points de cette courbe**.
♣ *Représenter deux exemples de courbes solutions, appelées* **courbes intégrales**, *sur la Figure 11.1.1.*
Plusieurs questions se posent

1. *Existence :* à quelles conditions existe-t-il une solution de l'équation ? Existe-t-elle sur tout l'intervalle de définition ?
2. *Calcul :* si une solution existe, comment la calculer ? Peut-on calculer toutes les solutions ?
3. *Interprétation :* Quelles sont les propriétés des solutions : régularité ? comportement si on perturbe la condition initiale ? ...)

Exemple 256. *Soit $\dot{y}(t) = f(y(t))$ avec f est continue et l'on suppose que cette équation différentielle admet une solution $y(\cdot)$.*

1. ♣ *Si f est continue, quelle est la régularité de $y(\cdot)$?*

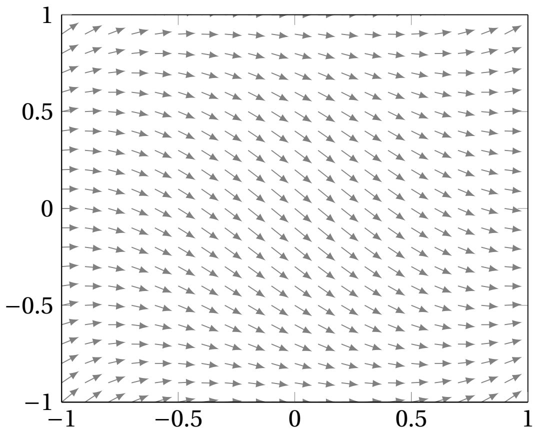


FIGURE 11.1 – Exemple d'un champ de vecteur f dans le plan et indépendant du temps.

2. ♣ *La fonction $\tilde{y}_a$ définie par $\tilde{y}_a(t) = y(t-a)$ où $a \in \mathbb{R}$ est-elle solution ?*

3. ♣ *La question précédente est-elle vraie si l'équation s'écrit $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$?*

Exemple 257. ♣ *Trouver au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :*

1. $\dot{y} = \sin t$	2. $\dot{y} = 1 + e^t$
3. $\dot{y} = y$	4. $\dot{y} = 3y$
5. $\ddot{y} = \cos t$	6. $\ddot{y} = y$

Exemple 258. *1.* ♣ *Soit l'équation différentielle $\dot{y} = 2ty + 4t$. Vérifier que $y(t) = k\exp(t^2) - 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.*

2. ♣ *Soit l'équation différentielle $t^2\ddot{y} - 2y + 2t = 0$. Vérifier que $y(t) = kt^2 + t$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

11.1.2 Résolution d'une équation différentielle linéaire

Dans ce cas, le champ de vecteur f est "affine" en y, c'est à dire qu'il s'écrit :

$$f(t, y(t)) := a(t)\, y(t) + b(t)$$

où a et b sont des fonctions données et l'équation différentielle s'écrit

$$y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t). \tag{1}$$

♣ *Rappeler le **principe de superposition** des solutions.*

L'équation ***homogène*** associée est

$$y'(t) = a(t)\, y(t)$$

et ses solutions s'écrivent :

$$y_h(t) = k \exp\left(A(t)\right), \; k \in \mathbb{R}$$

où A est une primitive de a.

Si $y_p(\cdot)$ est une solution particulière de (1) alors l'ensemble de **toutes les solutions** de l'équation 1 s'écrivent

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = k \exp\left(A(t)\right) + y_p(t), \; k \in \mathbb{R}.$$

La difficulté pour résoudre ce genre d'équation est donc de pouvoir trouver une solution particulière y_p.

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive.

La solution générale de (1) $y' = a(t)y$ est donnée par $y(t) = ke^{A(t)}$, avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = k(t)\,e^{A(t)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_0 soit une solution de (1) $y' = a(t)y + b(t)$.

Puisque $A' = a$, on a :

$$y_0'(t) = a(t)k(t)e^{A(t)} + k'(t)e^{A(t)} = a(t)y_0(t) + k'(t)e^{A(t)}$$

Ainsi :

$$y_0'(t) - a(t)y_0(t) = k'(t)e^{A(t)}$$

Donc y_0 est une solution de (1) si et seulement si

$$k'(t)e^{A(t)} = b(t) \iff k'(t) = b(t)e^{-A(t)} \iff k(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne une solution particulière

$$\boxed{y_p(t) = \left(\int b(t)e^{-A(t)}\mathrm{d}t\right)e^{A(t)}}$$

de (1) sur I. La solution générale de (1) est donnée par

$$\boxed{y(t) = y_p(t) + ke^{A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}.}$$

Exemple 259. ♣ *Soit l'équation* $y' + y = e^t + 1$. *L'équation homogène est* $y' = -y$ *dont les solutions sont les* $y(t) = ke^{-t}$, $k \in \mathbb{R}$. *Trouver une solution particulière avec la méthode de variation de la constante.*

Remarque. ♣ *Énoncer les rappels pour les équations différentielles linéaires d'ordre* 2 *à coefficients constants :*

$$y''(t) = a\,y'(t) + b\,y(t) + c(t) \tag{2}$$

où a et b sont des constantes.

Problème de Cauchy. Un problème de Cauchy est une équation différentielle où une condition initiale est donnée

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \ a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}, \ t_0 \in I, \ y_0 \in \mathbb{R}.$$

Les problèmes de Cauchy sont des problèmes bien posés, c'est à dire qu'ils admettent une solution. Plus précisément, voici l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 44 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit $y' = a(t)y + b(t)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Alors, pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(t_0) = y_0$.*

Une ***courbe intégrale*** d'une équation différentielle est le graphe d'une solution. Le théorème 44 pour les équations différentielles linéaires du premier ordre $y' = a(t)y + b(x)$ se reformule ainsi :

« Par chaque point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une et une seule courbe intégrale. »

Exemple 260. *Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = t$ sont les*

$$y(t) = t - 1 + ke^{-t} \quad k \in \mathbb{R}$$

et sont définies sur $I = \mathbb{R}$. Pour chaque point $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(t_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe intégrale passant par (t_0, y_0).

Le but du cours est de généraliser ces méthodes dans le cas où l'on a un système d'équations différentielles, c'est à dire dans le cas où y est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, $y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t))^\top$, a est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ connue et b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

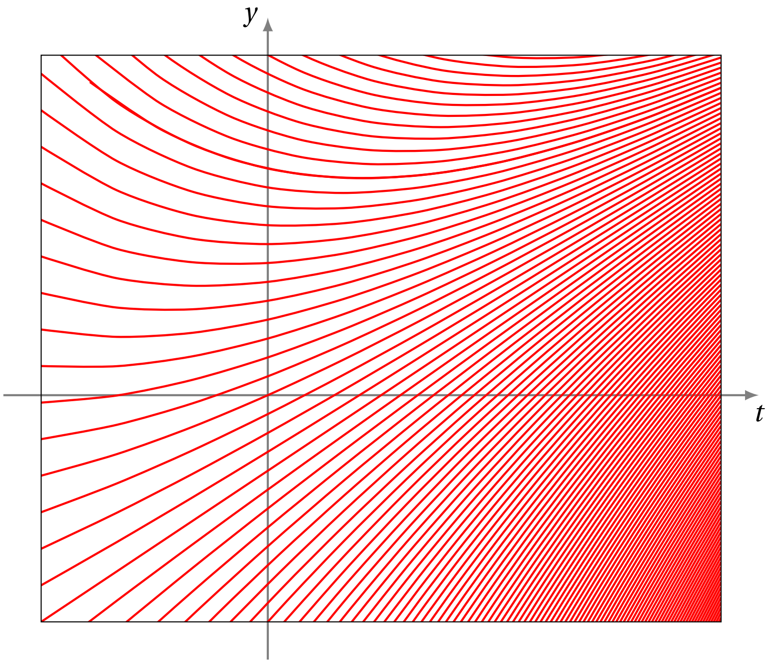


FIGURE 11.2 – Représentation des courbes intégrales d'une équation différentielle.

Exemple 261. *Soit le système différentiel :*

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) = -y_1(t) \end{cases}$$

définie pour $t \in \mathbb{R}$.

1. ♣ *Donner la fonction* f *qui définie cette équation comme* $y'(t) = f(t, y(t))$.

2. ♣ *Montrer que la fonction* $s(t) = (\sin t, \cos t)$ *est solution de cette équation.*

3. ♣ *Existe-t-il une autre solution ?*

11.2 Systèmes différentiels linéaires d'ordre 1

11.2.1 Définitions

Notations

- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$;
- F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie (pratiquement, $F = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) ;
- Dans $\mathscr{L}(F)$, si $u \in \mathscr{L}(F)$ et $y \in F$, on note $u.y$ plutôt que $u(y)$.
  Comme $\begin{cases} \mathscr{L}(E) \times F \\ (u, y) \mapsto u.y \end{cases}$ est bilinéaire, si $a \in \mathscr{D}(I, \mathscr{L}(F))$ (ensemble des fonctions dérivables de I dans $\mathscr{L}(F)$) et si $\varphi \in \mathscr{D}(I, F)$, en notant $a.\varphi : \begin{cases} I \to F \\ t \mapsto a(t).\varphi(t) \end{cases}$, alors $a.\varphi \in \mathscr{D}(I, F)$ et $(a.\varphi)' = a'.\varphi + a.\varphi'$.
- Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous ne noterons pas la dépendance en t. Ainsi, $y'(t) = a(t).y(t)$ sera aussi noté $y' = a.y$ ou $y' = a(t).y$ pour insister sur la dépendance en t de a.

Remarque. *Dire que $a \in \mathscr{C}(I, \mathscr{L}(F))$ signifie que pour tout t dans I, $a(t)$ est une application linéaire de $\mathscr{L}(F)$.*
♣ *Donner un exemple d'un tel objet.*

Définition 86 (Système différentiel linéaire du premier ordre)**.** *On appelle système d'équations différentielles linéaires du premier ordre toute équation du type :*

$$\boxed{(E) : y'(t) = a(t).y(t) + b(t)}$$

où $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$ et $b \in \mathscr{C}(I, F)$.

Exemple 262. ♣ *Que vaut la fonction a et b dans le cas de l'exemple 261 ?*

Exemple 263. ♣ *Le système différentiel*

$$\begin{cases} y_1'(t) = t^2\, y_2(t) \\ y_2'(t) = -y_1(t) - \sin(t) \end{cases}$$

est-il un système différentiel du premier ordre linéaire ? Si oui, préciser a et b.

Exemple 264. ♣ *L'équation différentielle*

$$y'' + t^2 y = 0$$

est-elle un système différentiel du premier ordre linéaire ? Si oui, préciser a et b.

Exemple 265. ♣ *Donner un système différentiel du premier ordre non linéaire.*

Définition 87 (Solution de l'équation différentielle linéaire)**.** *Une solution du système différentiel linéaire (E) est une fonction $\varphi \in \mathscr{D}(I, F)$ telle que :*

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = a(t).\varphi(t) + b(t).$$

Définition 88 (Problème de Cauchy)**.** *On appelle problème de Cauchy tout problème du type :*

$$\begin{cases} y' = a.y + b & (E) \\ y(t_0) = y_0 & (C.I.) \end{cases}$$

où $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$, $b \in \mathscr{C}(I, F)$, $t_0 \in I$ et $y_0 \in F$.

Exemple 266. ♣ *Donner un exemple venant de la physique d'un problème de Cauchy.*

Exemple 267. ♣ *Donner un système différentiel ne définissant pas un problème de Cauchy.*

11.2.2 Propriété : structure de l'ensemble des solutions

Proposition 60 (Régularité). *Si φ est une solution de $(E) : y' = a.y + b$ (où a et b sont continues sur I), alors $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, F)$. Ainsi, toute solution d'un système différentiel linéaire du premier ordre est de classe $\mathscr{C}^1$.*
Prolongement : si a et b sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ alors φ sera de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Proposition 61 (Structure algébrique de l'ensemble des solutions). *Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble solution de (E) un système différentiel linéaire du premier ordre et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble solution du système différentiel homogène associé.*
$\mathscr{S} = \varphi_p + \mathscr{S}_0$ est un espace affine de même dimension que $\mathscr{S}_0$ avec φ_p une solution particulière de (E).

Résolution d'un système linéaire du premier ordre

Résoudre le système différentiel (E) revient à :

- résoudre le système homogène associé (E_0) ;
- trouver une solution particulière φ_p.

Exemple 268. ♣ *Donner l' espace vectoriel $\mathscr{S}_0$ et l'espace affine $\mathscr{S}$ pour l'exemple 264.*

Proposition 62 (Principe de superposition). *Soient $(E_1) : y' = a.y + b_1$, $(E_2) : y' = a.y + b_2$ et $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ les ensembles solutions associés respectifs.*
Si $y_1 \in \mathscr{S}_1$ et $y_2 \in \mathscr{S}_2$, alors :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2,\ \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in \tilde{\mathscr{S}}$$

où $\tilde{\mathscr{S}}$ est l'ensemble des solutions du système : $y' = a.y + (\alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2)$.

Exemple 269. ♣ *Donner un exemple de résolution d'un système de deux équations différentielles en utilisant le principe de superposition.*

Théorème 45 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)**.** *Soit* $(E) : y'(t) = a(t).y + b(t)$ *où* $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$, $b \in \mathscr{C}(I, F)$ *avec* F *un espace vectoriel normé de dimension finie. Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} (E) : \ y' = a.y + b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I, \ y_0 \in F$$

admet une et une seule solution.

Exemple 270 (Formule explicite de la solution d'une équation différentielle)**.** ♣ *Quel est le problème de Cauchy vérifié par la fonction :*

$$\varphi(t) = \exp(-A(t))\left(\varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \exp(A(s))b(s)\,\mathrm{d}s\right) ?$$

pour $t \geqslant t_0$, a, b *étant des fonctions à valeurs réelles et* A *étant une primitive de* a.

Exemple 271. ♣ *Montrer que deux courbes intégrales du même système différentiel ne s'intersecte pas.*

Exemple 272. ♣ *Montrer qu'une solution non nulle du système différentiel homogène* (S_0) *ne s'annule en aucun point de* I.

Exemple 273 (Méthode d'Euler)**.** *La **méthode d'Euler** permet de trouver une approximation de la vraie solution de tout système différentiel. Considérons l'équation différentielle* $(E) : y'(t) = f(t, y(t))$ *sur* $[0,1]$*. Prenons une subdivision régulière* $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$ *de* $[0,1]$ *de pas* h*.*

1. ♣ *Donner l'expression de* $t_n,\ n = 1, \ldots, N$*.*

2. ♣ *On veut calculer une suite* $(y_n)_n$ *de* $F^{\mathbb{N}}$ *qui approche la solution* y *de* (E) *au temps* t_n*, c'est à dire*

$$\boxed{y_n \simeq y(t_n).}$$

   Montrer que :

$$\frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = f(t_n, y(t_n)) + o(1), \quad \forall n = 1, \ldots, N-1.$$

   Comme $y(t_n) \simeq y_n$*, on peut écrire*

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n).$$

3. ♣ *Appliquer la méthode d'Euler pour l'équation* $y' = y$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *qui vaut* 1 *en* $t = 0$ *et dont on connaît la solution* $\varphi(t) = \exp(t)$*.*

Théorème 46. *Les solutions du système différentiel linéaire homogène* $(E_0) : y' = a(t).y$ *où* $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$ *constituent un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de même dimension que* F *i.e.*

$$\boxed{\dim \mathscr{S}_0 = \dim F.}$$

Définition 89 (Système fondamental de solutions)**.** *On appelle **système fondamental** de solutions de* (E_0) *toute base* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *où* $n = \dim F$ *constituée de solutions de* $(E_0) : y' = a.y$*.*

Dimension de l'espace vectoriel homogène

Le fait de connaître la dimension de $\mathscr{S}_0$ se révèle utile lors de la résolution. En effet, si l'on dispose de n solutions $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ de $\mathscr{S}_0$, alors pour obtenir que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de $\mathscr{S}_0$ et donc que : $\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, il suffit de montrer, au choix :

- que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre ;
- que la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est génératrice en montrant que toute solution de $\mathscr{S}_0$ s'écrit nécessairement comme combinaison linéaire de $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

Exemple 274. *On souhaite résoudre le système différentiel homogène (S) :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

Soit $f = (f_1, f_2)$ une solution de (S).

1. *♣ En additionnant les deux équations, montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (f_1 + f_2)(t) = ae^{3t}.$$

2. *♣ En déduire que $f \in \mathrm{Vect}(\phi_1, \phi_2)$ avec :*

$$\phi_1 : t \to (e^{-t}, -e^{-t}) \ \ et\ \ \phi_2 : t \to (e^{3t}, e^{3t})$$

Définition 90 (Wronskien)**.** *Soient $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une famille de fonction de I à valeurs dans F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n de base $\mathscr{B}$. On appelle wronskien de $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ l'application :*

$$W_{\mathscr{B}} : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \det_{\mathscr{B}}(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)). \end{array}$$

Exemple 275. ♣ *Calculer le wronskien pour le système différentiel de l'exemple 274.*

Proposition 63 (Système fondamental)**.** *Soit* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *n éléments de* $\mathscr{S}_0$ *espace solution de* $(E_0) : y' = a(t).y$ *où* $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$*. Les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *est un système fondamental de solutions de* $\mathscr{S}_0$ *;*
2. $\exists t_0 \in I,\ W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t_0) \neq 0$ *;*
3. $\forall t \in I,\ W(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) \neq 0$.

Théorème 47. *Soit* $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *un système fondamental de solutions de* $(E_0) : y'(t) = a(t).y(t)$ *avec* $a \in \mathscr{C}\big(I, \mathscr{L}(F)\big)$*. Soit* $(E) : y'(t) = a(t).y(t) + b(t)$ *avec* $b(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\varphi_i(t)$ *et* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$*. Soit* $\varphi \in \mathscr{C}^1(I, F)$ *tel que* $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\varphi_i(t)$ *où* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$*. On a :*

$$\varphi \text{ est solution de } (E) \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i' = \alpha_i$$

Démonstration.

□

Exemple 276. ♣ *Donner un exemple d'application du théorème 47.*

11.3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

11.3.1 Application exponentielle

Plus précisément, on considère le système (E) : $y' = a(t).y + b(t)$, où pour tout t, $a(t)$ est une **application linéaire constante**.

Proposition 64 (Problème de Cauchy)**.** *La seule solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a.y \\ y(t_0) = v \end{cases} \quad \text{où } a \in \mathscr{L}(F),\ t_0 \in I,\ v \in F$$

est l'application $t \mapsto \exp\big((t-t_0)\cdot a\big).v$.

Généralisation de l'application exponentielle. On connaît $\exp(x)$ quand x est réel. On peut définir $\exp(x)$ quand x est une application linéaire.

Propriété.
- $\forall u \in \mathscr{L}(F)$, $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$;
- *Si deux éléments a et b de $\mathscr{L}(F)$ commutent,* $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$;
- $\exp(0_{\mathscr{L}(F)}) = 1_{\mathscr{L}(F)}$;
- $\forall a \in \mathscr{L}(F)$, $\forall (t,s) \in I^2$, $\exp\big((t+s)\cdot a\big) = \exp(t\cdot a) \circ \exp(s \cdot a)$;
- $\exp\big(0_{\mathscr{L}(F)}\big) = Id_F$;
- $\forall a \in \mathscr{L}(F)$, $\forall t \in I$, $\exp(t\cdot a) \in GL(F)$;
- $\forall a \in \mathscr{L}(F)$, $\forall a \in I$, *a et* $\exp(t \cdot a)$ *commutent.*

Proposition 65 (Exponentielle de matrices)**.**
- *Si* $\Delta = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\exp(\Delta) = \mathrm{Diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$.
- *Si A est diagonalisable, $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$ avec Δ diagonale. Alors* $\exp(A) = P \cdot \exp(\Delta) \cdot P^{-1}$.

Exemple 277. ♣ *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *que vaut* $\exp(tA)$ *?*

Exemple 278. ♣ *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *que vaut* $\exp(A)$ *?*

Exemple 279. ♣ *Si A est nilpotente d'indice p, que vaut* $\exp(tA)$ *?*

11.3.2 Résolution de $Y' = AY$

On résout ici $X' = A \cdot X + B(t)$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K}^n)$.

Cas où A est diagonalisable : Notons λ_j les valeurs propres de A et v_j leurs vecteurs propres associés.

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot e^{\lambda_j \cdot t} \cdot v_j$$

φ est une solution de (E_0) avec $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Calcul d'une base de solution de (S_0)

Pour résoudre l'équation (E_0) : $y' = Ay$, si la matrice A est diagonalisable, alors en notant $(V_1, \dots, V_n)$ une base de vecteurs propres et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres associées, on obtient une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de l'espace $\mathscr{S}_0$ des solutions de (E_0) en prenant, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\varphi_k : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \mapsto e^{\lambda_k t} V_k \end{array}.$$

Exemple 280. ♣ *Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Cas où A est trigonalisable : Donnons la méthode sur un exemple : Résolvons $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cas où A est trigonalisable

Résumons la méthode précédente :

1. on trigonalise A, c'est-à-dire qu'on écrit $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire supérieure
2. en posant $Y = P^{-1}X$ et en traduisant à l'aide de Y le système différentiel $X' = AX$, on obtient le système différentiel $Y' = TY$; ce système différentiel est triangulaire et on peut le résoudre ligne par ligne, du bas vers le haut
3. on obtient alors les solutions cherchées à l'aide de la relation $X = PY$.

11.4 Équations différentielles linéaires (scalaires) d'ordre 2

Définition 91. *Une équation différentielle linéaire d'ordre* 2 *est une équation du type :*

$$(E) : a(t)\cdot y'' + b(t)\cdot y' + c(t)\cdot y = d(t)$$

où $a, b, c, d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$.

Définition 92. *Une solution de* (E) *est une fonction* φ *deux fois dérivable de* I *dans* $\mathbb{K}$ *telle que :*

$$\forall t \in I,\ a(t)\cdot\varphi''(t) + b(t)\cdot\varphi'(t) + c(t)\cdot\varphi(t) = d(t)$$

Définition 93. *On appelle problème de Cauchy tout problème du type :*

$$\begin{cases} (E) \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I,\ y_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

Proposition 66. *Soit* $(E) : a(t)\cdot y'' + b(t)\cdot y' + c(t)\cdot y = d(t)$ *avec* $a, b, c, d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. *Soit* $(E_0) : (E) : a(t)\cdot y'' + b(t)\cdot y' + c(t)\cdot y = 0$ *l'équation homogène associée. Soient* $\mathscr{S}$ *et* $\mathscr{S}_0$ *les espaces solutions respectifs de* (E) *et* (E_0). *Alors :*

- $\mathscr{S}_0$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel;*
- $\mathscr{S}$ *est ou bien vide ou bien un* $\mathbb{K}$*-espace affine i.e.* $\exists \tilde{x} \in \mathscr{S}_0 \ /\ \mathscr{S} = \tilde{x} + \mathbb{S}_0$.

Propriété. *Si* a *ne s'annule pas sur* I, *toute solution de* (E) *est nécessairement ce classe* $\mathscr{C}^2$ *sur* I.

Théorème 48. *Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} y'' + \dfrac{b(t)}{a(t)}\cdot y' + \dfrac{c(t)}{a(t)}\cdot y = \dfrac{d(t)}{a(t)} \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = v_0 \end{cases} \quad \text{où } t_0 \in I,\ y_0, v_0 \in \mathbb{K}$$

admet une et une seule solution.

Proposition 67. $\Psi_{t_0} : \begin{array}{ccc} \mathscr{S}_0 & \to & \mathbb{K}^2 \\ x & \mapsto & \big(y(t_0), y'(t_0)\big) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

Théorème 49.

$$\dim \mathscr{S}_0 = 2$$

Définition 94. *On appelle système fondamental de solutions toute base* (φ_1, φ_2) *de* $\mathscr{S}_0$.

Définition 95 (Wronskien)**.** *Soit* $(E_0) : a(t)\cdot y'' + b(t)\cdot y' + c(t)\cdot y = 0$ *où* $a, b, c, d \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$. *Soit* φ_1, φ_2 *deux solutions de* (E_0). *On appelle wronskien de* (φ_1, φ_2) *l'application :*

$$W(\varphi_1, \varphi_2) : \begin{cases} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} \end{cases}$$

Théorème 50. *Soit* $(E_0) : a(t)\cdot y'' + b(t)\cdot y' + c(t)\cdot y = 0$ *où* $a, b, c, d \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, *$a$ ne s'annulant pas sur I. Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes pour deux solutions φ_1, φ_2 de (E_0) :*

1. (φ_1, φ_2) *est un système fondamental de solutions ;*
2. $\exists t_0 \in I \;/\; W(\varphi_1,\varphi_2)(t_0) \neq 0$ *;*
3. $\forall t \in I,\ W(\varphi_1,\varphi_2) \neq 0.$

Recherche de solutions :

- recherche de solutions particulières de la même forme que a, b et c ;
- recherche de solutions développables en série entière ;
- recherche par méthode de variation de la constante ;
- recherche par méthode de variation des constantes.

Méthode de variation de la constante : Une fois une première solution φ de (E_0) trouvé, on pose $y(t) = \varphi(t)\cdot z(t)$. On doit supposer que φ ne s'annule pas pour pouvoir écrire réciproquement $z = \dfrac{y}{\varphi}$. Il faut ensuite reporter dans (E). On trouve une équation différentielle du premier ordre en z' que l'on résout en posant $Z = z'$. Ainsi, $y = C\cdot\varphi \displaystyle\int \psi_1 + D\cdot\varphi$ avec $C, D \in \mathbb{K}$ et $Z = C\cdot\psi_1$.

Méthode de variation des deux constantes : On cherche un système fondamental de solutions de (E_0) notées (φ_1,φ_2). On cherche alors une solution particulière $\tilde{y}$ de (E) sous la forme $\tilde{y} = \lambda_1\cdot\varphi_1 + \lambda_2\cdot\varphi_2$ où les dérivées de λ_1 et λ_2 vérifient le système : $\begin{cases} \lambda_1'\cdot\varphi_1 + \lambda_2'\cdot\varphi_2 = 0 \\ \lambda_1'\cdot\varphi_1' + \lambda_2'\cdot\varphi_2' = \dfrac{d(t)}{a(t)} \end{cases}$. On obtient λ_1' et λ_2' par résolution du système de Cramer puis λ_1 et λ_2 par recherche de primitive. On a donc l'expression de $\tilde{y} = \lambda_1\cdot\varphi_1 + \lambda_2\cdot\varphi_2$. D'où :

$$\mathscr{S}_{\mathscr{E}} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ t & \mapsto & \tilde{y}(t) + \alpha_1\cdot\varphi_1 + \alpha_2\cdot\varphi_2 \end{array},\ (\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{K}^2 \right\}$$

11.5 Exercices

Exercice 119. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le système différentiel $X' = AX$ avec* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 120. *Calculer* $\exp(A)$ *si*

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 121. *Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$,
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,
4. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 122. *Résoudre les systèmes différentiels suivants :*

1.
$$\begin{cases} x'(t) = y(t) + 2e^t \\ y'(t) = x(t) + t^2, \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x' = y - 2x - 2z \\ y' = x - 2y + 2z \\ z' = 3x - 3y + 5z, \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) + 4e^{5t} \\ y'(t) = x(t) + 2y(t). \end{cases}$$

Exercice 123. *Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes et résoudre complètement ces équations.*

1. $4ty''(t) - 2y'(t) + 9t^2 y(t) = 0$
2. $x^2 y''(x) + 6xy'(x) - (6 - x^2)y(x) = -1$

Exercice 124. *Chercher une solution de l'équation homogène associée à*

$$x(x+1)y''(x) - y'(x) - 2y(x) = 3x^2$$

de la forme $y = x^\alpha$.

Exercice 125. *Intégrer les équations suivantes :*

1. $y''(t) - \left(6t + \frac{1}{t}\right) y'(t) + 8t^2 y(t) = t^4$,
   (poser $u = x^2$),
2. $(x^2 + 3)y''(x) + xy'(x) - y(x) = 1$,
   (chercher les solutions polynomiales),
3. $x^2 y''(x) + 4xy'(x) + (2 - x^2)y(x) = 1$,
   (poser $y = \frac{u}{x^2}$).

Index