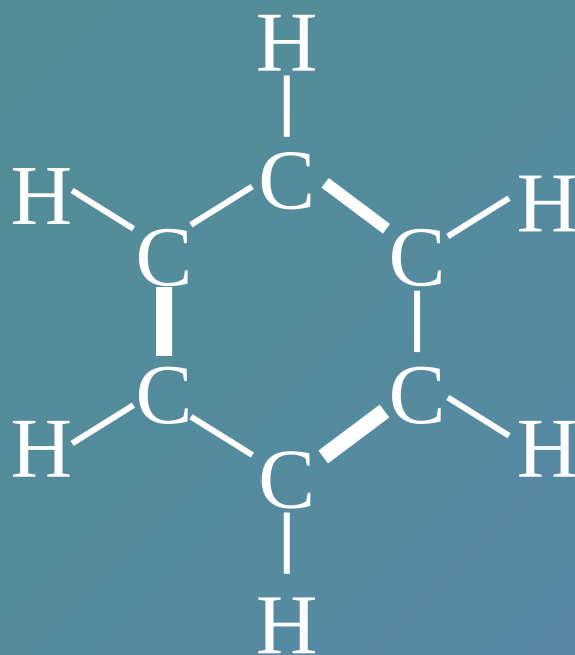
Le Concept de Graphe.

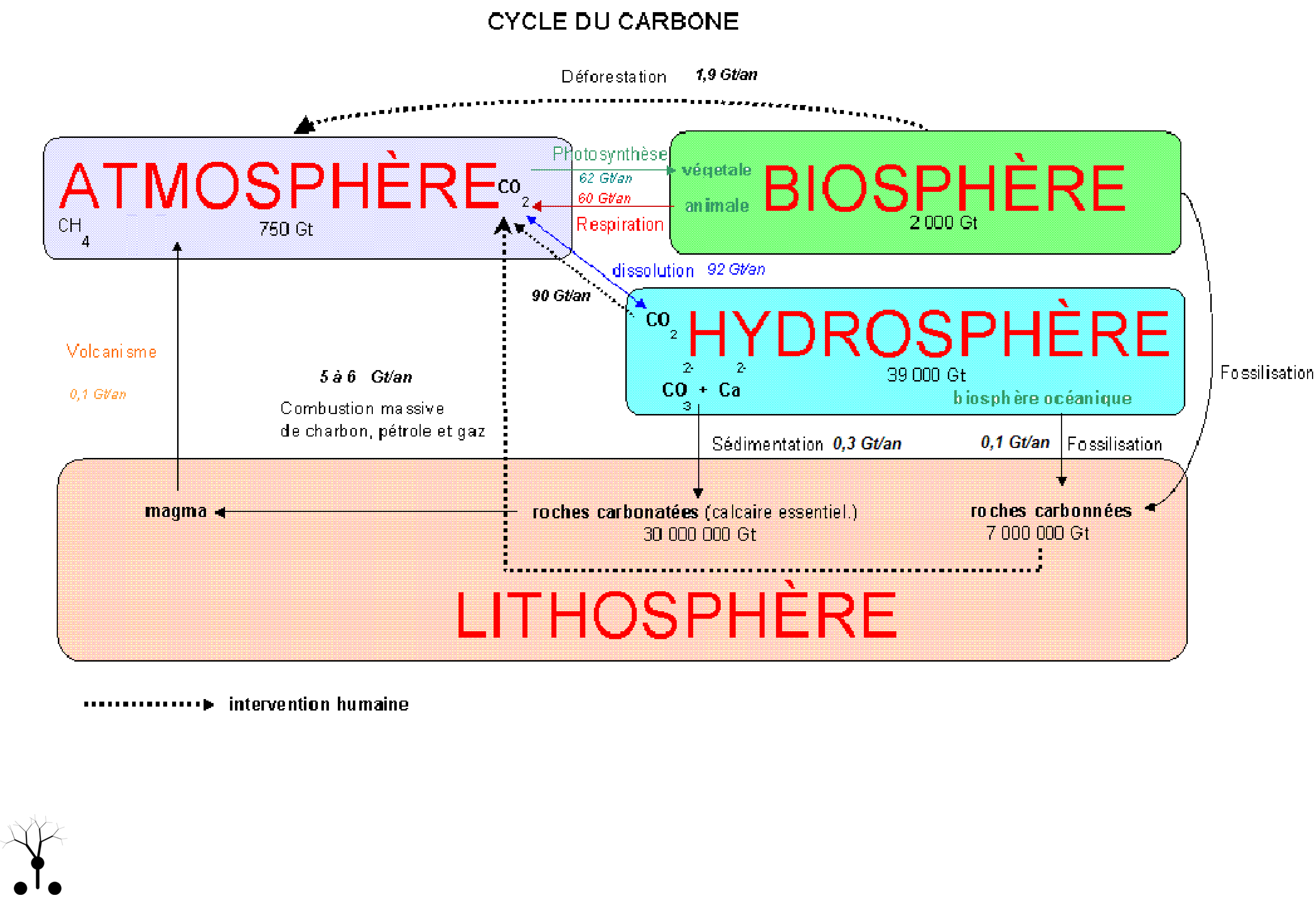
Jérémy Rouot

e-mail: jeremy.rouot@yncrea.fr

bureau 332



benzène


CYCLE DU CARBONE
Déforestation 1,9 Gt/an
ATMOSPHÈRE
CO2
CH4
750 Gt
Photosynthèse
62 Gt/an
60 Gt/an
Respiration
végétale
animale
BIOSPHÈRE
2 000 Gt
dissolution 92 Gt/an
90 Gt/an
CO2
HYDROSPHÈRE
CO3 2- + Ca 2-
39 000 Gt
biosphère océanique
Volcanisme
0,1 Gt/an
5 à 6 Gt/an
Combustion massive
de charbon, pétrole et gaz
Sédimentation 0,3 Gt/an
0,1 Gt/an Fossilisation
Fossilisation
magma
roches carbonatées (calcaire essentiel.)
30 000 000 Gt
roches carbonnées
7 000 000 Gt
LITHOSPHÈRE
intervention humaine

Le Havre
Amiens
Bonn
Koblenz
Frankfurt
Roscoff
Morlaix
Brest
Paimpol
Carentan
St. Lô
Bayeux
Deauville
Rouen
Guingamp
St. Malo
Caen
Lisieux
Charleville Mèzieres
Luxembourg
Luxembourg
Cochem
Mainz
St. Brieuc
Dinan
Dol
Pontorson
Mont-St. Michel
Evreux
Arlon
Trier
Quimper
Charles-de-Gaulle
Reims
Paris
Alençon
Épernay
Thionville
Lorient
Vannes
Rennes
Laval
Chartres
Metz
Saarbrücken
Redon
Le Mans
Nancy
La Baule
Le Croisic
St. Nazaire
Nantes
Angers
Orléans
Troyes
Karlsruhe
Strasbourg
Blois
Tours
St. Pierre-des-Corps
Saumur
Gien
Offenburg
France
Colmar
La Roche-sur-Yon
Vierzon
Bourges
Montbard
Freiburg
Les Sables d'Olonne
Mulhouse
Belfort
Basel
Singen
Châteauroux
Dijon
Niort
Poitiers
Nevers
Beaune
La Rochelle
Zürich
Besançon
Moulins
Dôle
Olten
Montluçon
Le Creusot
Neuchâtel
Luzern
Chalon sur Saone
Bern
Saintes
Royan
Vichy
Lausanne
of Biscay
Angoulême
Limoges
Switzerland
Roanne
Ussel
Clermont-Ferrand
Mâcon
Bourg-en Bresse
Genève
Tulle
Périgueux
Le Mont-Dore
Brig
Bordeaux
Libourne
St. Emilion
Brive
Annecy
Lyon
Satolas TGV
St. Gervais
Neussargues
Arcachon
Souillac
Chamonix
Aix-les-Bains
Chambéry
Aosta
Chiasso
Facture
St. Flour
Bergerac
Le Bugue
St. Etienne
Bourg-St. Maurice
Como
Aurillac
Figeac
Arona
Le Puy
Ivrea
Novara
Grenoble
Cahors
Milano
Agen
Rodez
Modane
Bilbao
Bayonne
Biarritz
Dax
Vercelli
Pavia
Valence
Briançon
San Sebastián
Torino
Millau
Montauban
Asti
Alessandria
Albi
Piacenza
Alès
Gap
Montélimar
Vitoria
Pau
Veynes
Cuneo
Tarbes
Orange
Toulouse
Genova
Castres
Avignon
Pamplona
Lourdes
Digne
Nimes
Savona
Logroño
Montpellier
St. Gaudens
Carcassonne
Arles
San Remo
Béziers
Luchon
Foix
Castejón
Jaca
Sète
Agde
Aix-en-Provence
Nice
Ventimiglia
La Spezia
Narbonne
Viareggio

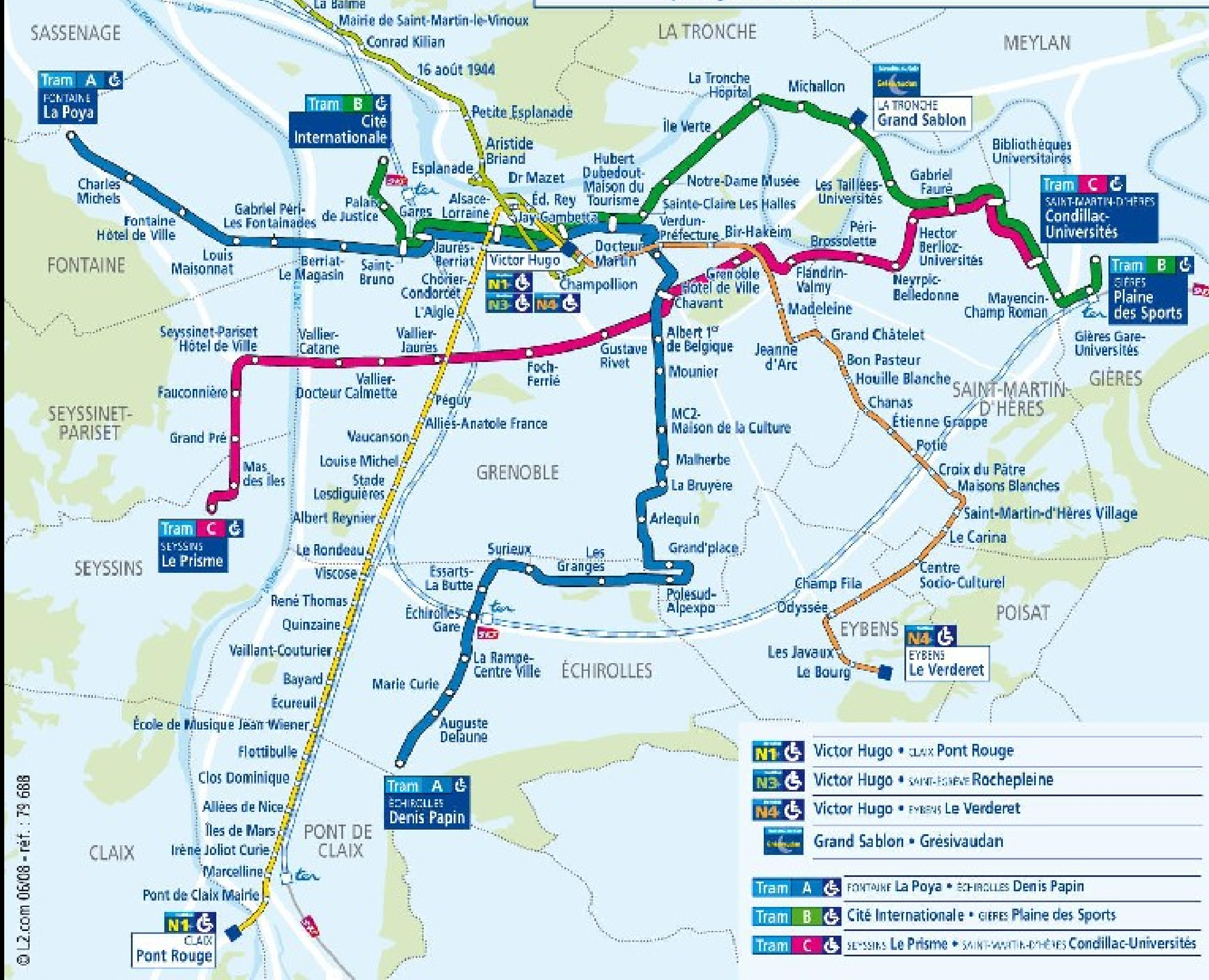
RÉSEAU DE SOIRÉE

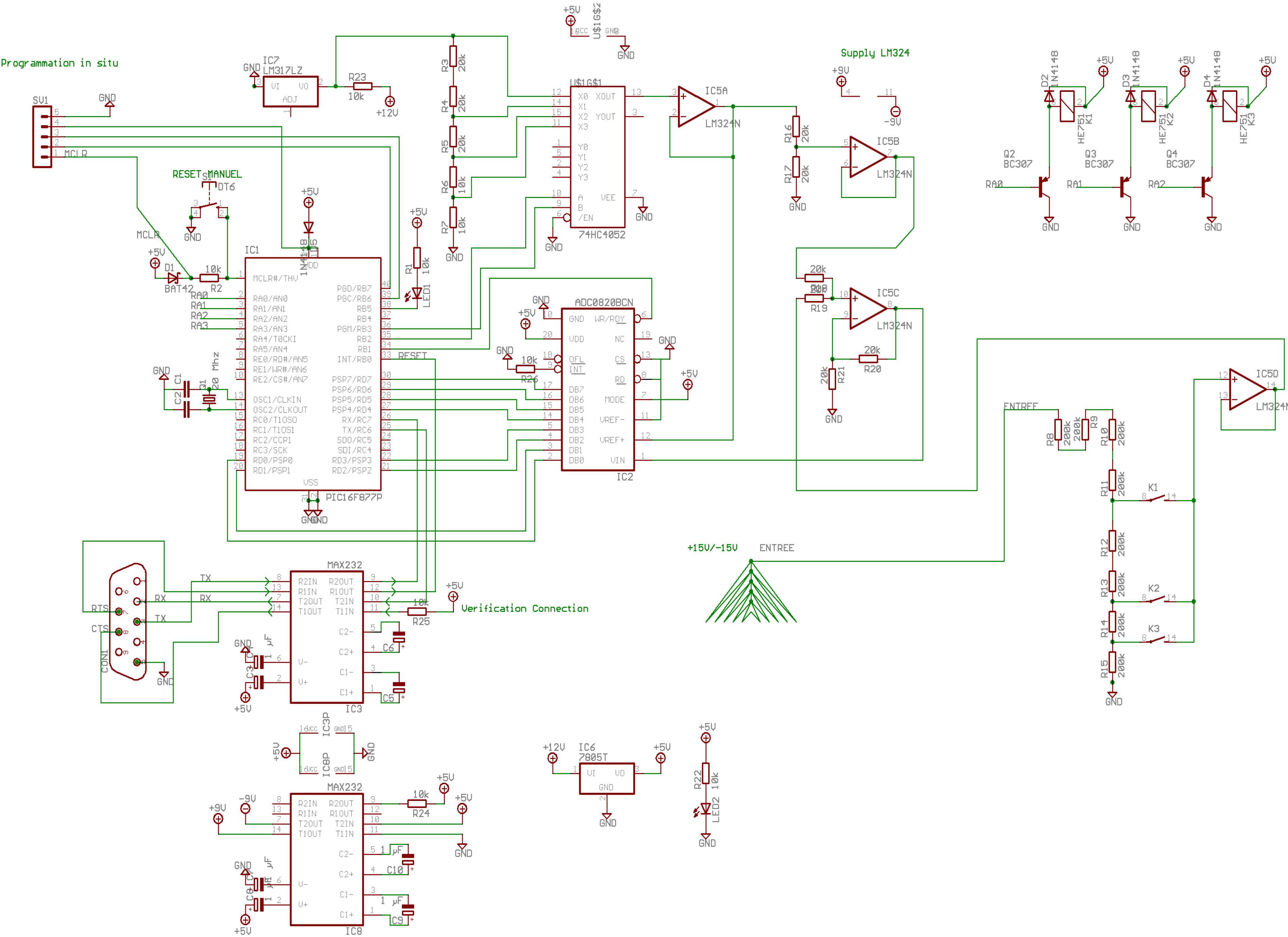
Noctibus

4 lignes de bus les jeudis, vendredis et samedis de 21h à minuit :

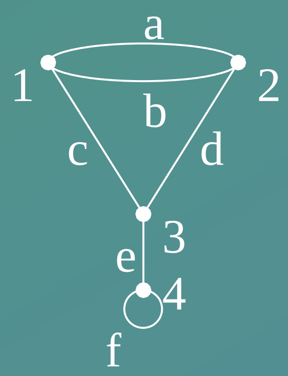
- **3 lignes au départ de Victor Hugo toutes les 30 minutes.**
  Tous les arrêts situés sur le parcours de ces lignes sont desservis.
- **1 navette du Soir Grésivaudan au départ de la station tram Grand Sablon.**
  Desserte des arrêts à la demande des passagers (communes de Meylan, La Tronche, Corenc).

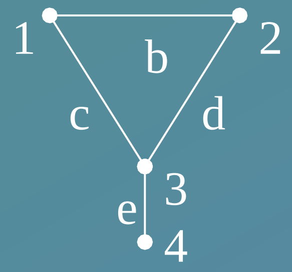
Tram **3 lignes de tram tous les jours jusqu'à 1h00 du matin (passage au centre ville).**





Programmation in situ
SV1
MCLR
GND
IC7
LM317LZ
VI VO
ADJ
R23
10k
+12V
R3 20k
R4 20k
R5 20k
R6 10k
R7 10k
+5V
U$1G$2
VCC GND
U$1G$1
X0 XOUT
X1
X2 YOUT
X3
Y0
Y1
Y2
Y3
A VEE
B
/EN
74HC4052
IC5A
LM324N
Supply LM324
+9V
-9V
R16 20k
R17 20k
IC5B
LM324N
D2 1N4148
D3 1N4148
D4 1N4148
HE751 K1
HE751 K2
HE751 K3
Q2 BC307
Q3 BC307
Q4 BC307
RA0
RA1
RA2
RESET MANUEL
S1 DT6
D1
BAT42
R2
10k
IC1
1N4148
D5
R1 10k
LED1
MCLR#/THV
RA0/AN0
RA1/AN1
RA2/AN2
RA3/AN3
RA4/T0CKI
RA5/AN4
RE0/RD#/AN5
RE1/WR#/AN6
RE2/CS#/AN7
OSC1/CLKIN
OSC2/CLKOUT
RC0/T1OSO
RC1/T1OSI
RC2/CCP1
RC3/SCK
RD0/PSP0
RD1/PSP1
VDD
VSS
PGD/RB7
PGC/RB6
RB5
RB4
PGM/RB3
RB2
RB1
INT/RB0
PSP7/RD7
PSP6/RD6
PSP5/RD5
PSP4/RD4
RX/RC7
TX/RC6
SDO/RC5
SDI/RC4
RD3/PSP3
RD2/PSP2
PIC16F877P
RESET
RA3
C1
C2
Q1
20 Mhz
ADC0820BCN
GND WR/RDY
VDD NC
OFL CS
INT RD
DB7 MODE
DB6
DB5
DB4 VREF-
DB3
DB2 VREF+
DB1
DB0 VIN
IC2
10k
R26
20k
R19
IC5C
LM324N
20k
R20
20k
R21
IC5D
LM324N
ENTREE
R8 200k
R9 200k
R10 200k
R11 200k
R12 200k
R13 200k
R14 200k
R15 200k
K1
K2
K3
+15V/-15V
ENTREE
CON1
RTS
CTS
TX
RX
MAX232
R2IN R2OUT
R1IN R1OUT
T2OUT T2IN
T1OUT T1IN
C2-
C2+
C1-
C1+
V-
V+
IC3
C3
C4
C5
C6
1 µF
10k
R25
Verification Connection
IC3P
IC8P
VCC
IC6
7805T
VI VO
GND
R22 10k
LED2
IC8
R24
C7
C8
C9
C10





graphe (non orienté) $G = (X;E)$

formé par un couple : un ensemble X et une famille E

$X=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$ où $n \geq 1$ (*sommets de G*) $n =$*ordre de G*

et $E = \{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$ avec $m \geq 0$ (*arêtes de G*),

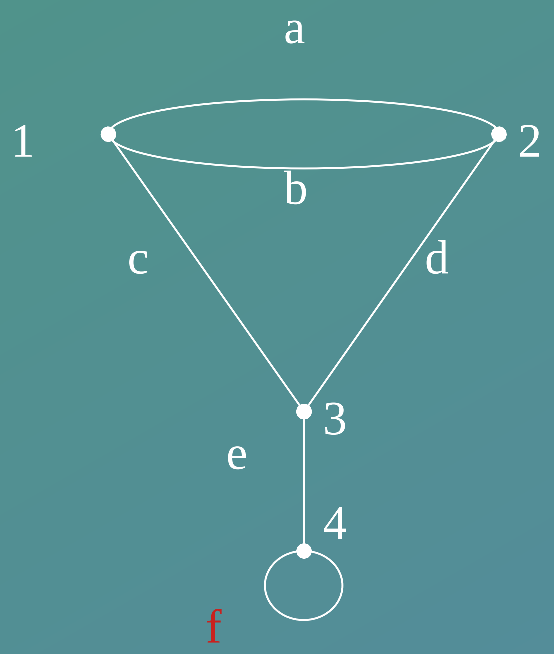
$e_i =$ *paire d'éléments de X*

arête $e=\{x,y\}$ x et y sont ses *extrémités*, *lorsque* $x=y$, e est une *boucle*.

Deux arêtes sont parallèles lorsqu'elles ont les mêmes extrémités;

un ensemble d'arêtes parallèles est une arête multiple.

graphe simple : *pas de boucle ni d'arête multiple*



graphe d'ordre 4 $X=\{1, 2, 3, 4\}$

$E=\{a, b, c, d, e, f\}$

où $a=\{1, 2\}$, $b=\{1, 2\}$, $c=\{1, 3\}$, $d=\{3, 2\}$, $e=\{3, 4\}$, $f=\{4, 4\}$;

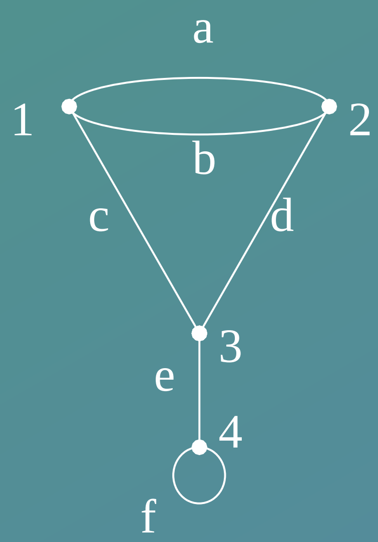
f est une boucle

a, b deux arêtes parallèles.

On considère donc les arêtes comme des paires "étiquetées".

matrice nxn, appelée ***matrice d'adjacence*** de G

$$\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$$

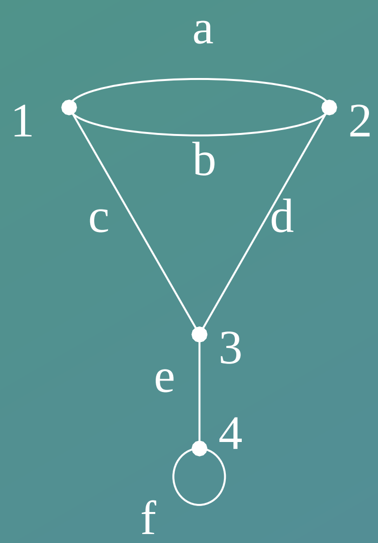


dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

a_{xy} = nombre d'arêtes ayant x et y comme extrémités;

$$\boldsymbol{A}(G) : \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{O}(n^2)$$



matrice $n \times m$, appelée *matrice d'incidence* $\mathbf{B}(G)=(b_{xe})$ dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par E, définie par: b_{xe}= nombre de fois où x est incident à e.

$$b_{xe} \in \{0\ ;1\ ;2\}$$

la somme des éléments d'une colonne est 2

$$\boldsymbol{B(G)}: \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{O(n \cdot m)}$$

Les sommets adjacents à x forment l'*ensemble des voisins* de x, noté $N(x)$

Si $N(x) \cup \{x\} = X$ le *sommet* x est *universel*.

Le *degré* $d(x)$ d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes à x (une boucle est comptée deux fois).

Si $d(x)=0$ le *sommet* x est *isolé*, si $d(x)=1$ le *sommet* x est *pendant*.

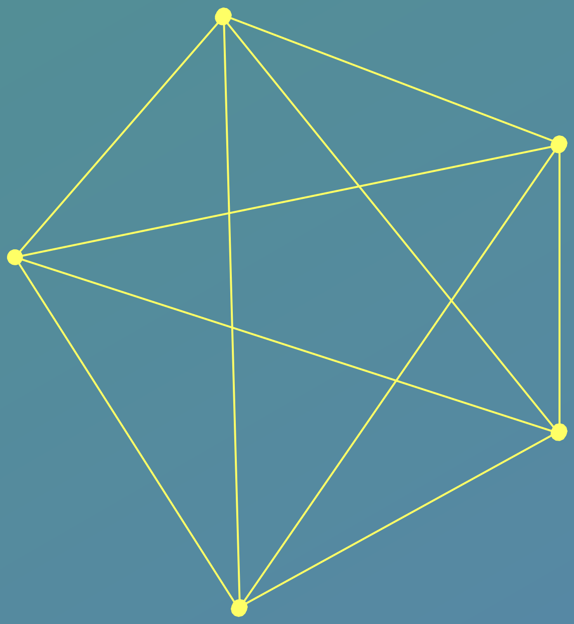
Une *arête pendante* est une arête incidente à un sommet pendant.

Un graphe simple avec n sommets deux à deux adjacents est un *graphe complet* K_n (ainsi $d(x) \equiv n-1$).

Un *couplage* est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes.

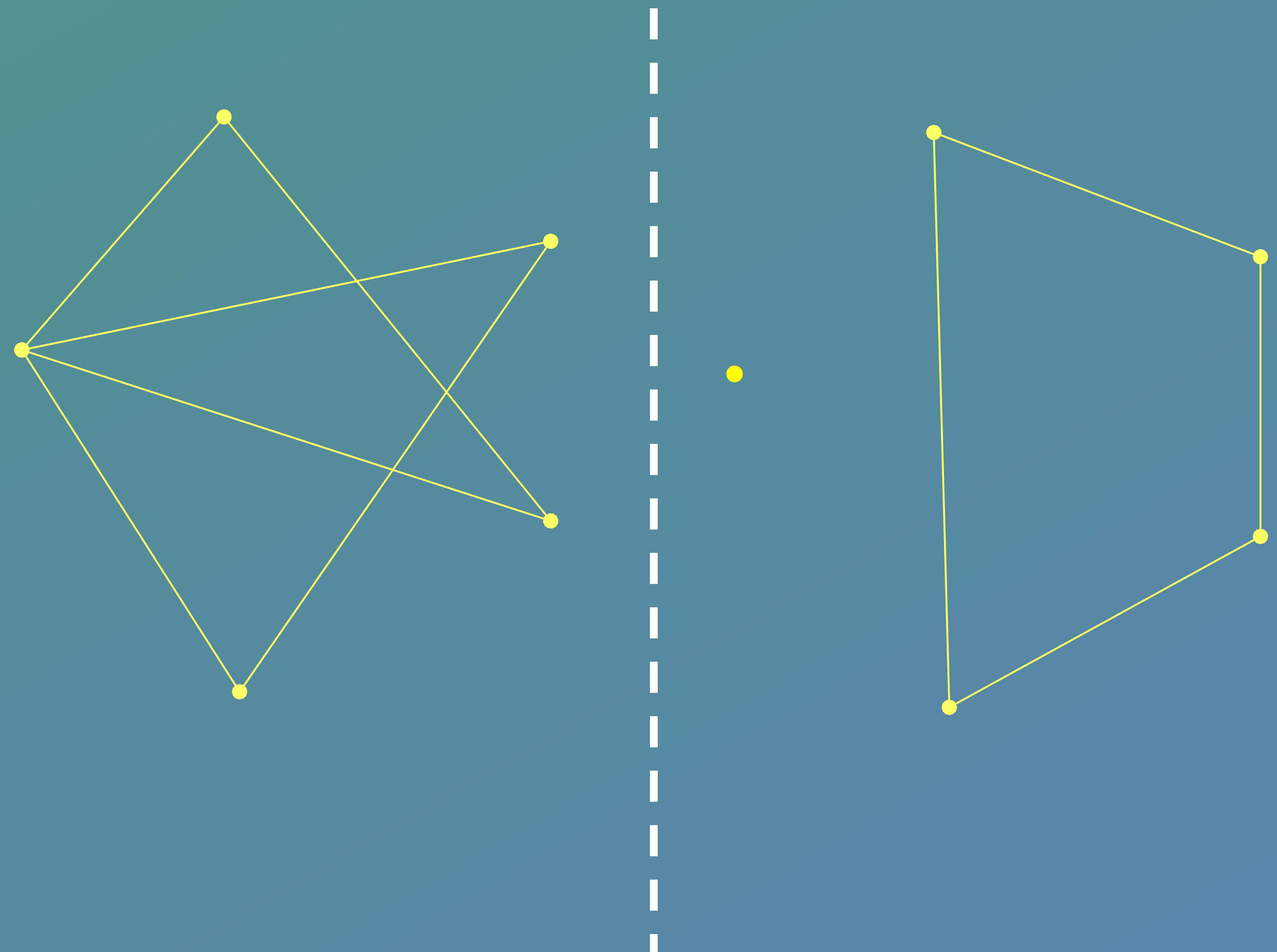
Le *couplage* est *parfait* si $\forall x \in X$, $\exists$ une arête du couplage incidente à x.

graphe complet

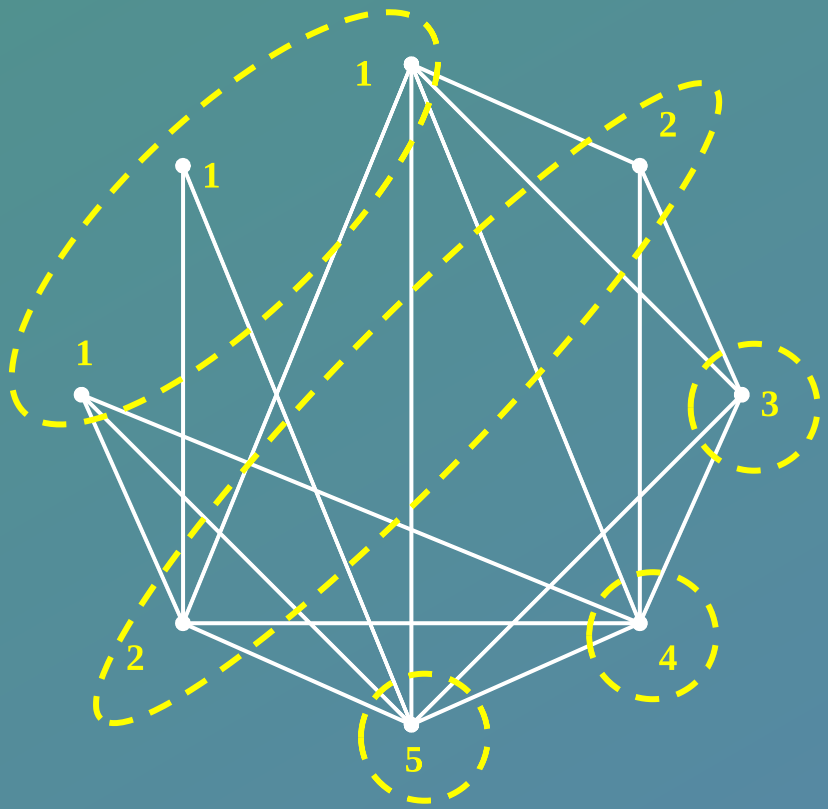


K_5

graphe complémentaire



Un *stable* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.



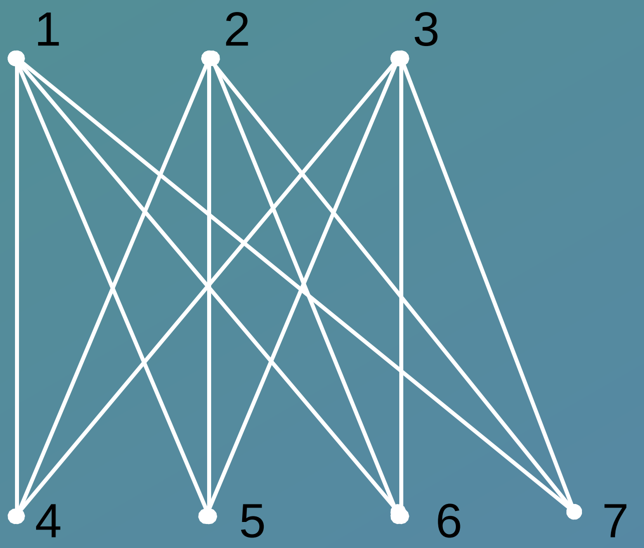
Partition de G en 5-stables

Nombre de stabilité :

$$\alpha(G) = \max\ \{|S|,\ S \text{ est un stable de } G\}$$

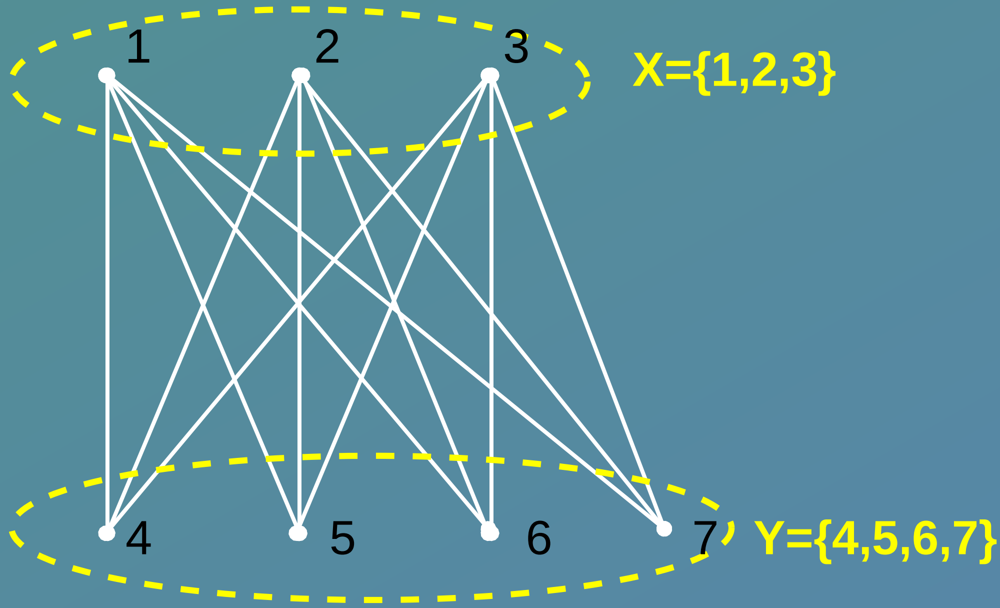
On dit que G est un graphe 5-parti

Quels sont les stables du graphe suivant ?



$$\alpha(G) = ?$$

Partition de G en 2-stable : le graphe est ***biparti***

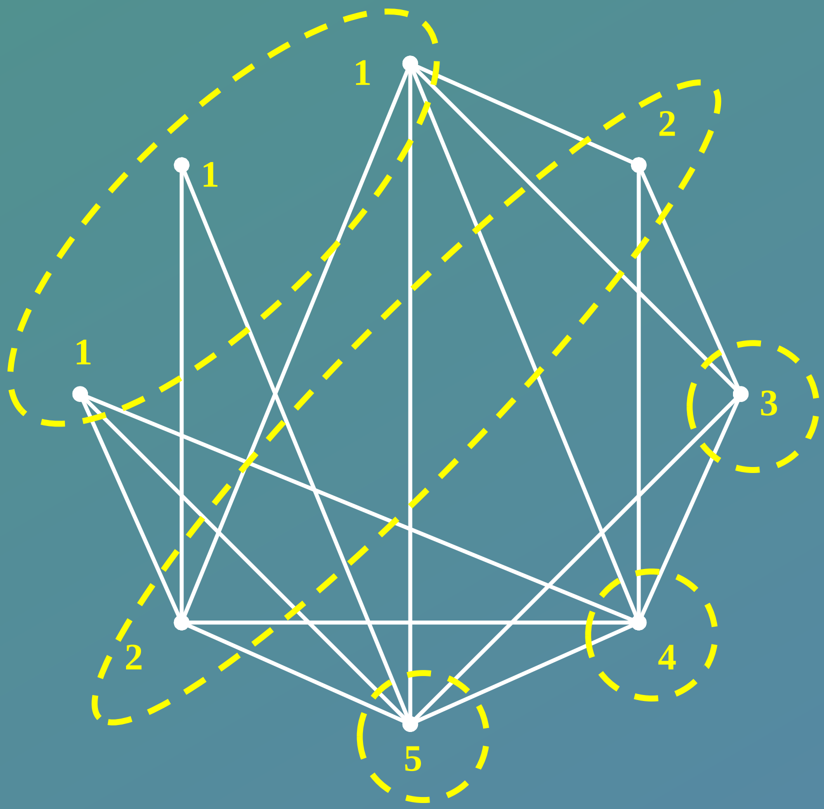


$$\alpha(G) = 4$$

G est même dit ***biparti complet*** *car tous les sommets*

de X sont reliés à deux à deux à ceux de Y, on le note $\boldsymbol{K_{3,4}}$.

Un *stable* est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents.



Partition de G en 5-stables

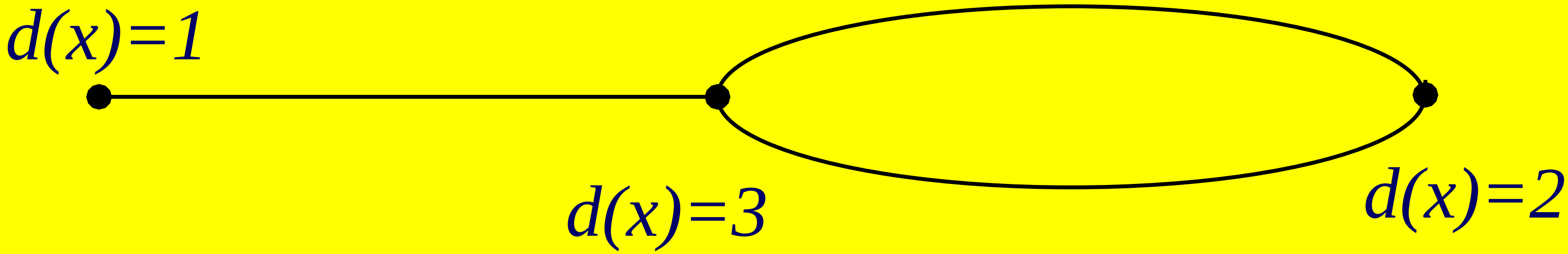
$$\alpha(G) \geq 3$$

Nombre de stabilité :

$$\alpha(G) = \max \{|S|,\ S \text{ est un stable de } G\}$$

Exemple 1:

Trouver un graphe d'ordre 3 avec ses trois degrés différents.

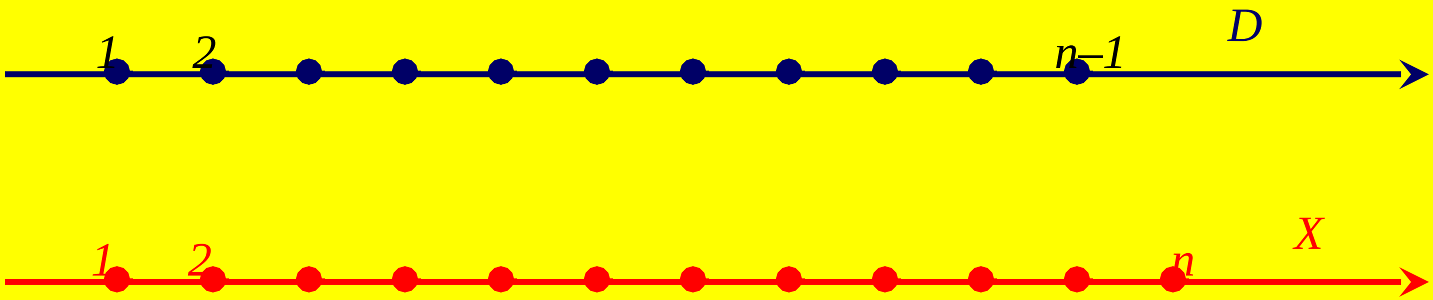


montrer, que

chaque graphe simple G=(X;E), d'ordre au moins 2, contient au moins deux sommets de même degré.

$G=(X;E)$ d’ordre n sans sommet isolé.

$$1 \leq d(x_i) \leq n-1$$



$$1 \leq i \leq n$$

il n’existe pas d’injection de X dans D !

Il existe donc au moins deux sommets, i et j, tels que $d(x_i)=d(x_j)=d\in D$.

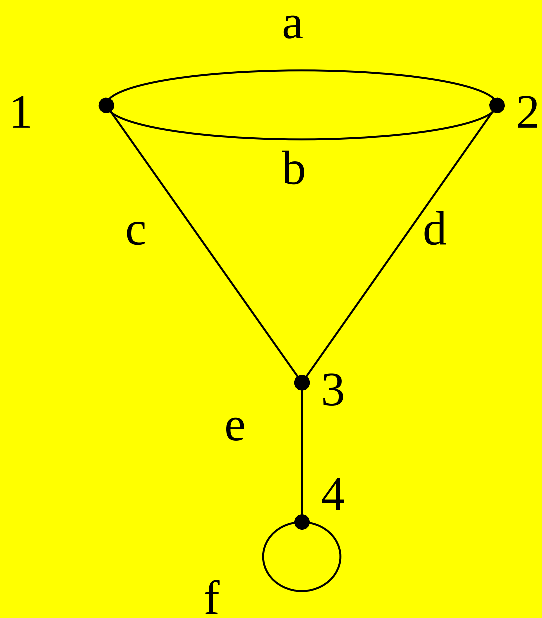
Si le graphe admet un sommet isolé unique, alors on ajuste le raisonnement précédent pour un graphe d’ordre $n-1$ et quand il y a au moins deux sommets isolés, alors ils ont tous de degré identique égal à zéro.

Dans la démonstration nous avons appliqué un principe fréquemment utilisé dans les raisonnements combinatoires. Connu sous le nom de *principe des cages à pigeons* (ou encore *principe des tiroirs*) il possède l'interprétation suivante:

Soient n pigeons (objets) mis dans m cages (tiroirs) ;

si n>m alors il existe au moins deux pigeons (objets) dans une même cage (tiroir).

Ce principe est une conséquence du principe d'induction sur $\mathbb{N}$.

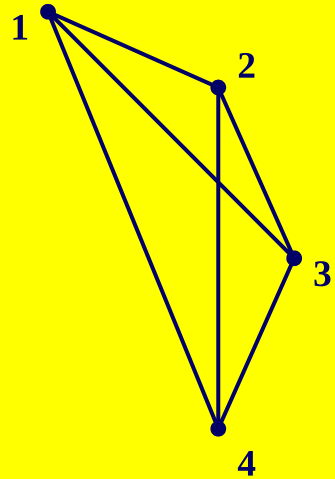


$d(1)=3$

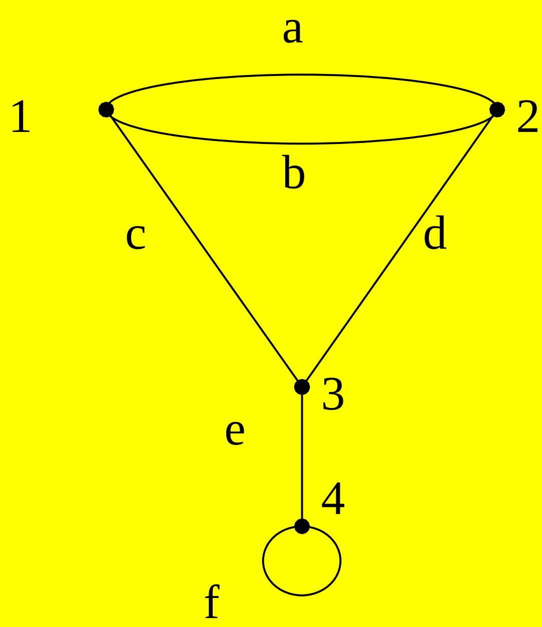
$d(2)=3$

$d(3)=3$

$d(4)=3$



K_4



$$
\begin{array}{rr}
 & d(1)=3 \\
 & d(2)=3 \\
 & d(3)=3 \\
+ & d(4)=3 \\
\hline
 & 12
\end{array}
$$

$|E|=|\{a, b, c, d, e, f\}| = 6$

Théorème 1 :

Pour tout graphe G=(X,E) on a : $\sum_{x \in X} d(x) = 2|E|$.

Considérons la matrice d'incidence

$$B(G):\quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & . & . & . & e_m \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ . \\ n \end{array} & \begin{pmatrix} 1 + & 1 + & . + & . \ldots & . + & 0 \\ 1 & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{r} = d(1) \\ d(2) \\ \ldots \\ \underline{+ \quad d(n)} \\ \sum_{x \in X} d(x) \end{array}$$

Considérons la matrice d’incidence

$$B(G):\quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ . \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & . & . & . & e_m \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & . & . & . & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} & . & . & . & . & \boldsymbol{0} \\ . & . & . & . & . & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & . & \boldsymbol{2} \end{array}\right) \end{array}$$

$$\boldsymbol{2} \quad \boldsymbol{2} \quad \boldsymbol{2} \quad \ldots \quad \boldsymbol{2} = 2\,\underbrace{\mathrm{card}(E)}_{|E|}$$

Théorème 1 :

Pour tout graphe G=(X,E) on a : $\sum_{x \in X} d(x) = 2|E|$.

Corollaire 1 :

Le nombre de sommets de degré impair est toujours ...

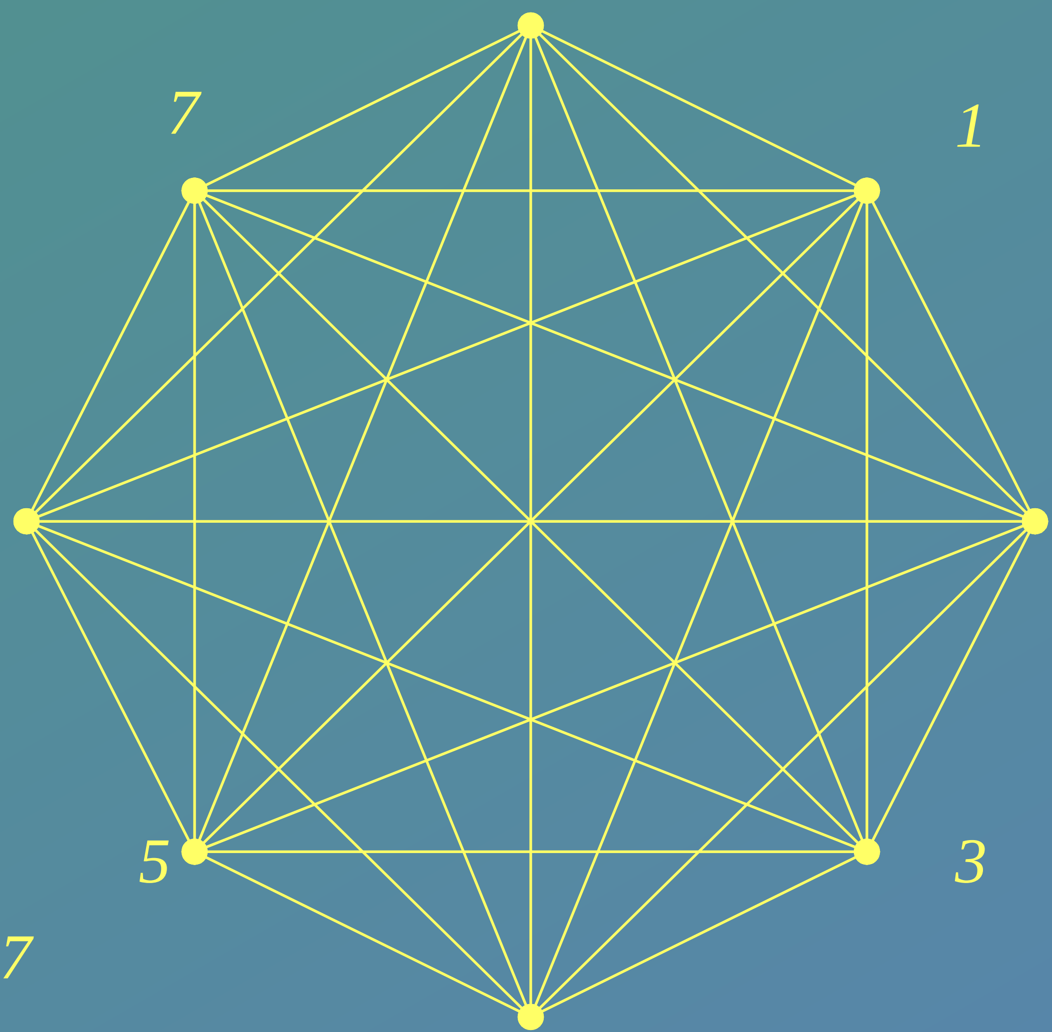
Théorème 1 :

Pour tout graphe G=(X,E) on a : $\sum_{x \in X} d(x) = 2|E|$.

Corollaire 1 :

Le nombre de sommets de degré impair est toujours PAIR.

Graphe complet de 8 sommets noté K_8



K_8

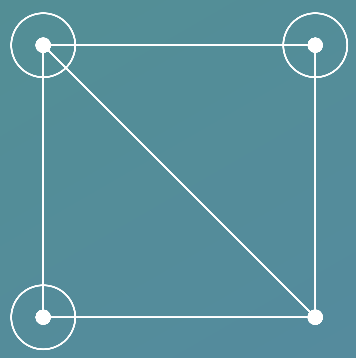
$d(x) \equiv 7$

$\Sigma_{x \in X} d(x) = 2|E|$

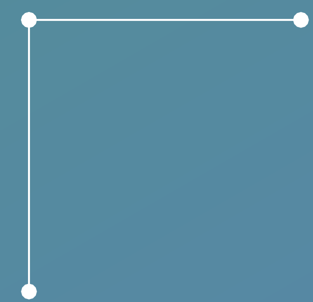
$|E| = 28$

$H=(Y;F)$ est un *sous-graphe* du graphe $G=(X,E)$ *engendré par* Y

lorsque $Y \subseteq X$ et F est formé de la totalité des arêtes de E dont les extrémités sont dans Y.

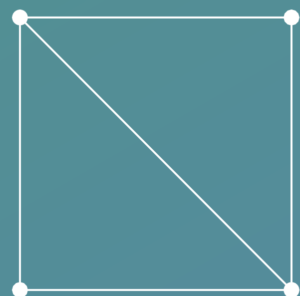


graphe G

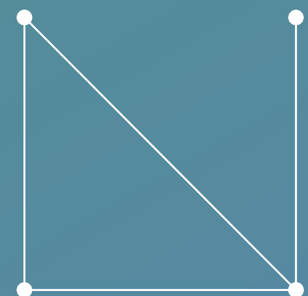


un sous-graphe engendré

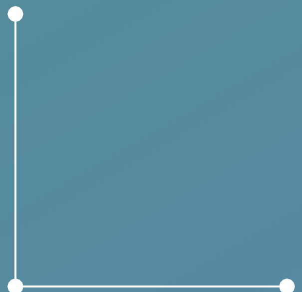
On appelle un *graphe partiel* de $G=(X;E)$ tout graphe $H=(X;F)$ où $F \subseteq E$.



graphe G



un graphe partiel



?

un sous-graphe partiel