

## Rapport sur le mémoire de thèse de Jérémy Rouot

Le mémoire de Jérémy Rouot, intitulé « *Méthodes géométriques et numériques en contrôle optimal et applications au transfert orbital à poussée faible et à la nage à faible nombre de Reynolds* », et présenté pour sa Thèse de Doctorat, comporte deux parties. La première est sur la nage à faible nombre de Reynolds et comporte 6 chapitres. La deuxième est sur le transfert orbital à poussée faible et comporte 3 chapitres.

Dans la première partie, le candidat s'intéresse au modèle la nage optimale à faible nombre de Reynolds, qui s'applique aux micro-nageurs. Le critère de minimisation considéré est l'énergie mécanique dissipée.

Après avoir décrit quelques modèles de nageurs (Copepod, modèle symétrique en dimension 3, modèle non symétrique en dimension 5, modèle de Purcell à trois branches), Jérémy Rouot explique le cadre général de son étude, basée sur la résolution d'un problème de contrôle optimal consistant à minimiser l'énergie mécanique (efficacité géométrique) ou, par reparamétrisation, à minimiser le temps.

Les différents modèles sont analysés dans le cadre de la géométrie sous-Riemannienne, cadre dans lequel les systèmes de contrôle sont linéaires en le contrôle et non linéaires en l'état. L'application du principe du maximum de Pontryagin conduit à des problèmes aux valeurs limites (problèmes de tir).

Dans le cas du modèle de Purcell, Jérémy Rouot tire parti de la structure sous-Riemannienne notamment en utilisant le concept d'approximation nilpotente. De ce point de vue, le modèle géométrique obtenu est un modèle de Cartan plat. Le flot extrémal est paramétré par des fonctions elliptiques du premier et du second ordre. Des logiciels de calcul formel sont utilisés pour valider les expressions explicites.

Une étude géométrique et numérique poussée est réalisée pour comparer les modèles de nageurs de Copepod et de Purcell. L'étude géométrique révèle des configurations particulières, dites "triangles", qui correspondent à des extrémales anormales données par le principe du maximum de Pontryagin, et qui bornent le domaine stratifié par des familles d'extrémales normales.

Jérémy Rouot calcule des contrôles optimaux périodiques, et l'implémentation numérique pour les simulations est effectuée en combinant des logiciels existants (Bocop et HamPath), qui sont basés respectivement sur des méthodes directes et indirectes. Jérémy Rouot utilise dans ses simulations numériques des homotopies pour calculer des brassées de plus grande amplitude. Dans les différents modèles étudiés, il met en oeuvre des calculs numériques de points conjugués (dans les cas normaux et anormaux) pour obtenir des conditions suffisantes locales d'optimalité, ou éliminer

des extrémales non optimales. Notamment, Jérémy Rouot démontre que le triangle anormal n'est pas optimal en utilisant le concept d'efficacité géométrique.

Dans la seconde partie, Jérémy Rouot s'intéresse au problème de transfert orbital à poussée faible, en temps minimal, sous effet de deux perturbations conservatives : l'effet lunaire, et la perturbation  $J_2$  (due à une planète pas tout à fait sphérique).

Il effectue quelques rappels sur la formulation du problème de temps minimal, quelques éléments sur le problème de Kepler, les systèmes dynamiques et les modèles de perturbations gravitationnelles, et les techniques de moyennation en théorie des perturbations.

La technique classique de moyennation permet d'isoler une dynamique rapide, et une dynamique lente qui est une perturbation d'un système intégrable. Elle est ici appliquée au flot extrémal donné par le principe du maximum appliqué au problème de transfert orbital, conduisant à une moyennation simple (à une seule fréquence angulaire) dans le cas sans perturbation, et à une moyennation double (à deux fréquences angulaires) si on tient compte d'une perturbation lunaire.

Jérémy Rouot obtient des conditions de convergence permettant de passer du système non moyenné au système moyenné, sur le problème aux valeurs limites obtenu par le principe du maximum. Ses simulations numériques complètent l'ensemble de l'étude.

L'ensemble du travail présente une bonne cohérence. Jérémy Rouot s'intéresse à deux problèmes distincts (la nage à faible nombre de Reynolds et le transfert orbital à poussée faible) et les analyse avec des outils théoriques et numériques communs, développant ainsi une très bonne expertise en contrôle optimal.

Le modèle sous-Riemannien de Heisenberg fournit un modèle de nage à la fois simple et éclairant, et qui démontre fort bien comment utiliser de manière pertinente des outils de géométrie plus sophistiqués dans des modèles raffinés : analyse du flot extrémal, intégrabilité, front d'onde sous-Riemannien, calcul de points conjugués, etc. Pour le Copepod, il est fort intéressant d'utiliser le modèle de Tagaki qui permet d'observer les nages et de comparer les résultats avec les calculs effectués dans cette thèse, l'objectif étant de construire un micro-robot nageur pour valider les modèles à faible nombre de Reynolds.

En conclusion, l'ensemble est un travail de thèse conséquent et de très bon niveau, et qui ouvre d'intéressantes perspectives. Je suis tout à fait favorable à la soutenance de cette thèse de doctorat.

Emmanuel Trélat  
Professeur

