Orientation d'un Graphe.

Jérémy Rouot

e-mail: jeremy.rouot@yncrea.fr

bureau 332

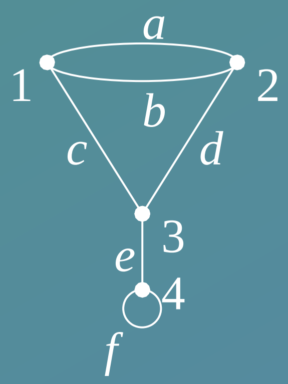
On obtient un ***graphe orienté*** $G=(X;A)$ lorsque, pour toute arête $e \in E$ d'un graphe non orienté $G=(X;E)$, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si $a=(x,y)$ est un arc, on dit que

On obtient un ***graphe orienté*** *G=(X;A)* lorsque, pour toute arête $e \in E$ d'un graphe non orienté *G=(X;E)*, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si *a=(x,y)* est un arc, on dit que

"*y* est un ***successeur*** de *x*" et "*x* est un ***prédécesseur*** de *y*".

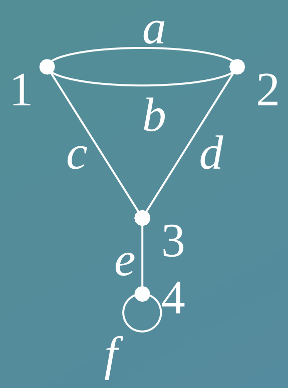
On obtient un ***graphe orienté*** *G=(X;A)* lorsque, pour toute arête e∈E d'un graphe non orienté *G=(X;E)*, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si *a=(x,y)* est un arc, on dit que

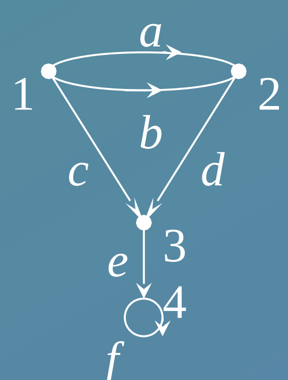
"*y* est un ***successeur*** de *x*" et "*x* est un ***prédécesseur*** de *y*".



On obtient un ***graphe orienté*** *G=(X;A)* lorsque, pour toute arête e∈E d'un graphe non orienté *G=(X;E)*, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si *a=(x,y)* est un arc, on dit que

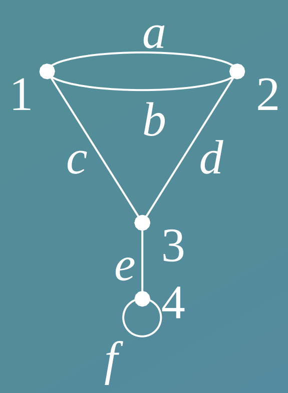
"*y* est un ***successeur*** de *x*" et "*x* est un ***prédécesseur*** de *y*".

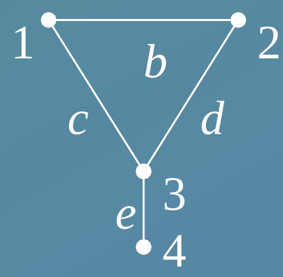


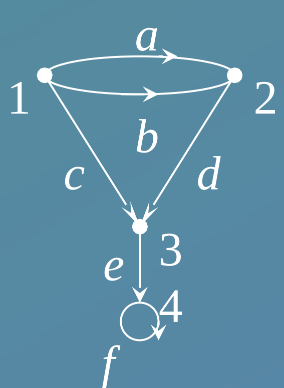


On obtient un ***graphe orienté*** *G=(X;A)* lorsque, pour toute arête $e \in E$ d'un graphe non orienté *G=(X;E)*, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si *a=(x,y)* est un arc, on dit que

"*y* est un ***successeur*** de *x*" et "*x* est un ***prédécesseur*** de *y*".

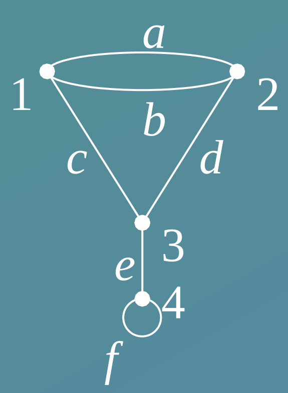


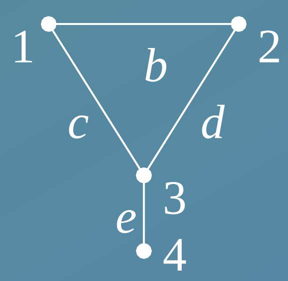


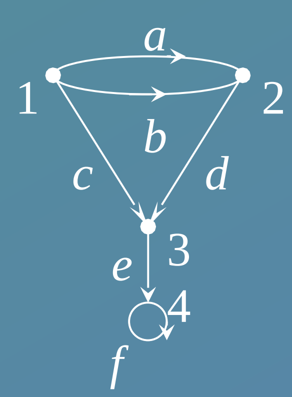


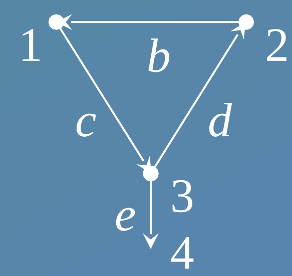
On obtient un ***graphe orienté*** *G=(X;A)* lorsque, pour toute arête e∈E d'un graphe non orienté *G=(X;E)*, ses extrémités sont ordonnées. Chaque arête se transforme en un ***arc*** qui est un couple de **sommets** (***initial*** et ***terminal***). Si *a=(x,y)* est un arc, on dit que

"*y* est un ***successeur*** de *x*" et "*x* est un ***prédécesseur*** de *y*".









matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$

matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$

dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$

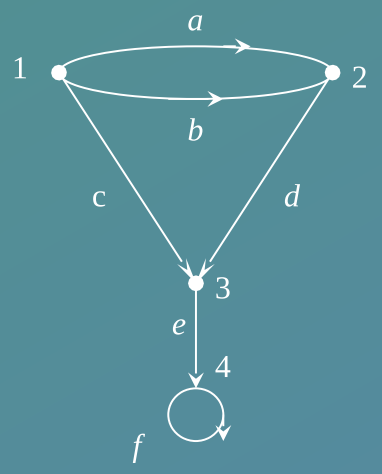
dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

a_{xy} *= nombre d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y ;*

matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$

dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

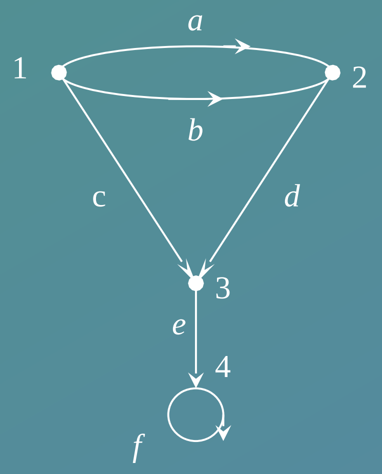
a_{xy} = *nombre d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y ;*



matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\boldsymbol{A}(G)=(a_{xy})$

dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

a_{xy} = *nombre d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y* ;

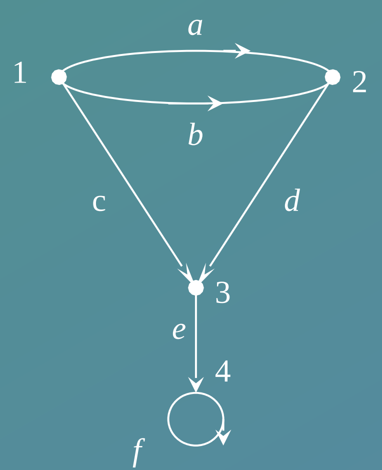


$$\boldsymbol{A}(G) : \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrice $n \times n$, appelée ***matrice d'adjacence*** $\mathbf{A}(G)=(a_{xy})$

dont les lignes et les colonnes sont indexées par X, définie par:

a_{xy} = *nombre d'arcs d'extrémité initiale x et d'extrémité terminale y ;*



$$\mathbf{A}(G) : \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

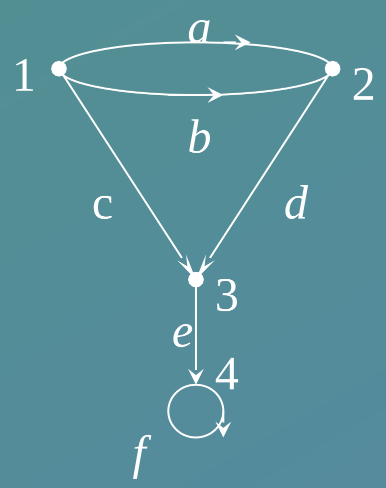
$\boldsymbol{O}(n^2)$

matrice $n \times m$, appelée ***matrice d'incidence*** $\boldsymbol{B}(G)=(b_{xa})$ dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par E, définie par:

$$b_{xe}= \begin{cases} +1 & \textit{si } x \textit{ est l'extrémité initiale de l'arc } a; \\ -1 & \textit{si } x \textit{ est l'extrémité terminale de l'arc } a; \\ 0 & \textit{si l'arc } a \textit{ est une boucle et les autres cas;} \end{cases}$$

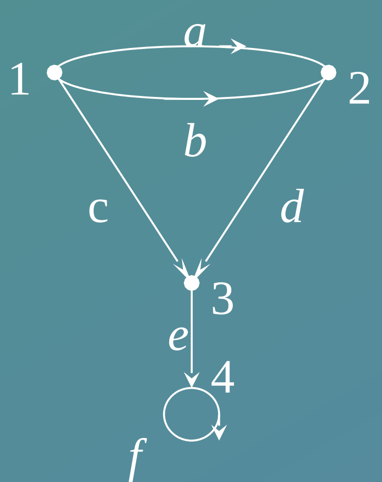
matrice $n \times m$, appelée ***matrice d'incidence*** $\mathbf{B}(G)=(b_{xa})$ dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par E, définie par:

$$b_{xe} = \begin{cases} +1 & \textit{si x est l'extrémité initiale de l'arc a;} \\ -1 & \textit{si x est l'extrémité terminale de l'arc a;} \\ 0 & \textit{si l'arc a est une boucle et les autres cas;} \end{cases}$$



matrice $n \times m$, appelée ***matrice d'incidence*** $\mathbf{B}(G)=(b_{xa})$ dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par E, définie par:

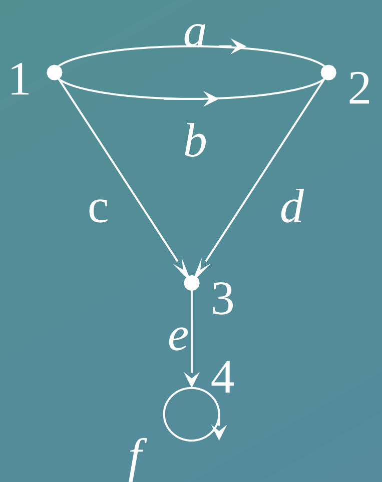
$$b_{xe} = \begin{cases} +1 & \textit{si x est l'extrémité initiale de l'arc a;} \\ -1 & \textit{si x est l'extrémité terminale de l'arc a;} \\ 0 & \textit{si l'arc a est une boucle et les autres cas;} \end{cases}$$



$$\mathbf{B}(G): \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

matrice $n\times m$, appelée ***matrice d'incidence*** $\mathbf{B}(G)=(b_{xa})$ dont les lignes sont indexées par X et les colonnes par E, définie par:

$$b_{xe}=\begin{cases} +1 & \text{si } x \text{ est l'extrémité initiale de l'arc } a; \\ -1 & \text{si } x \text{ est l'extrémité terminale de l'arc } a; \\ 0 & \text{si l'arc } a \text{ est une boucle et les autres cas;} \end{cases}$$

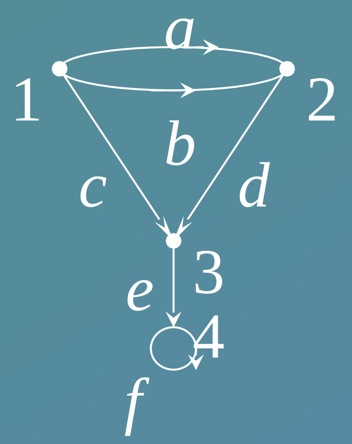


$$\mathbf{B}(G): \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \boldsymbol{O(n\cdot m)}$$

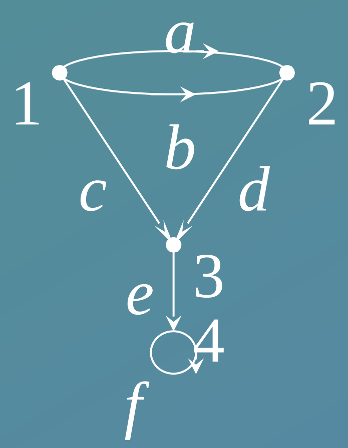
Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté

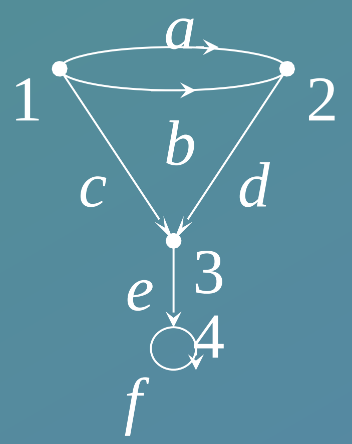


Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



on note :

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté

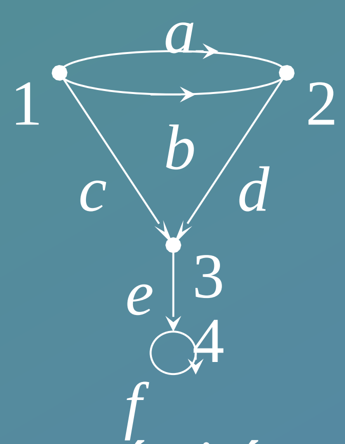


on note :

$d^{-}(x)$ le *degré rentrant*

Le ***degré*** *d(x)* d’un sommet *x* est le nombre d’arêtes incidentes à *x*.

Dans un graphe orienté

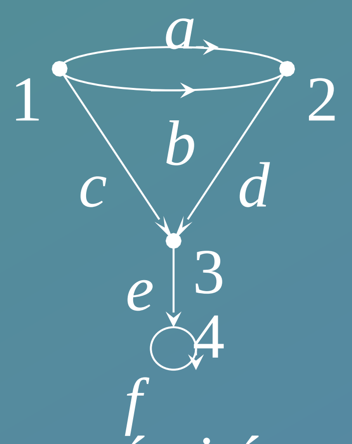


on note :

$d^{-}(x)$ le *degré rentrant*

le nombre d’arcs ayant *x* comme extrémité terminale

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



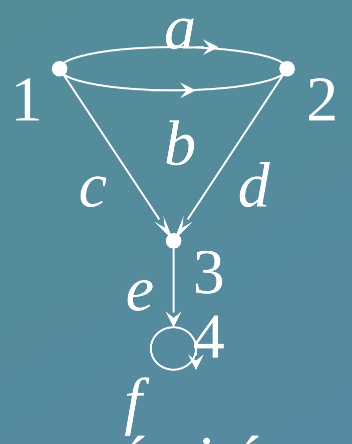
on note :

$d^{-}(x)$ le *degré rentrant*

le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité terminale

$d^{+}(x)$ le *degré sortant*,

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



on note :

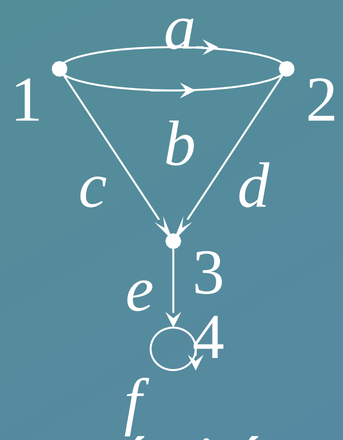
$d^-(x)$ le *degré rentrant*

le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité terminale

$d^+(x)$ le *degré sortant*,

le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité initiale

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



on note :

$d^-(x)$ le *degré rentrant*

le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité terminale

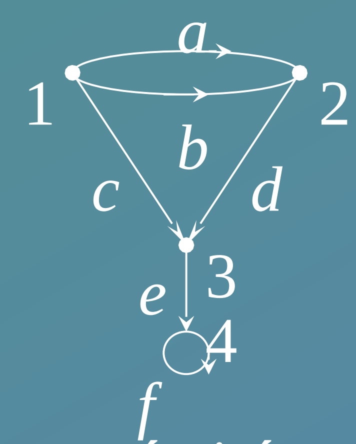
$d^+(x)$ le *degré sortant*,

le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité initiale

sur la figure : $d^+(2)=1$ et $d^-(2)=2$.

Le ***degré*** $d(x)$ d'un sommet x est le nombre d'arêtes incidentes à x.

Dans un graphe orienté



on note :

$d^-(x)$ le *degré rentrant*

le nombre d'arcs ayant x comme extrémité terminale

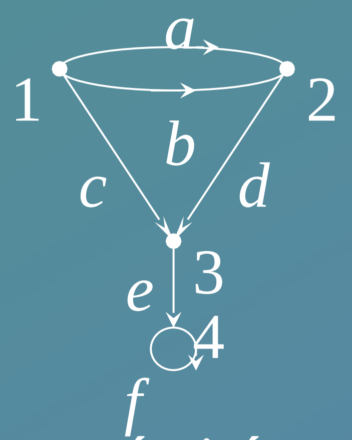
$d^+(x)$ le *degré sortant*,

le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale

sur la figure : $d^+(2)=1$ et $d^-(2)=2$.

On a toujours: $d^+(x)+d^-(x)=d(x)$

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



on note :

$d^{-}(x)$ le *degré rentrant*
le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité terminale

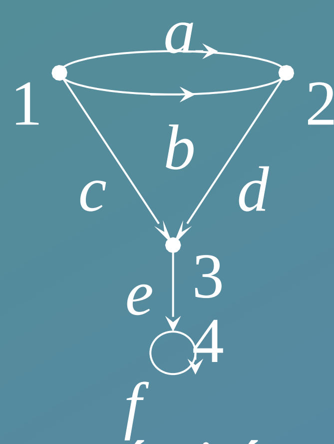
$d^{+}(x)$ le *degré sortant*,
le nombre d'arcs ayant *x* comme extrémité initiale

sur la figure : $d^{+}(2)=1$ et $d^{-}(2)=2$.

On a toujours: $d^{+}(x)+d^{-}(x)=d(x)$

une *source* = un sommet *s* avec $d^{-}(s)=0$

Le ***degré*** *d(x)* d'un sommet *x* est le nombre d'arêtes incidentes à *x*.
Dans un graphe orienté



on note :

$d^-(x)$ le *degré rentrant*
le nombre d'arcs ayant x comme extrémité terminale

$d^+(x)$ le *degré sortant*,
le nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale

sur la figure : $d^+(2)=1$ et $d^-(2)=2$.

On a toujours: $d^+(x)+d^-(x)=d(x)$

une *source* = un sommet s avec $d^-(s)=0$
un *puits* = un sommet p avec $d^+(p)=0$

Connexité dans des graphes orientés.

Connexité dans des graphes orientés.

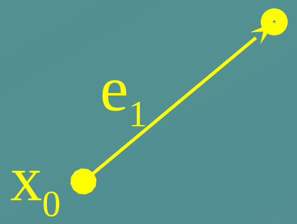
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.

x_0

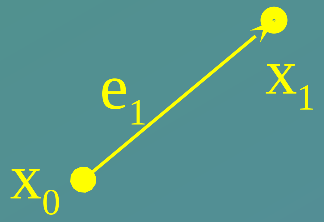
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



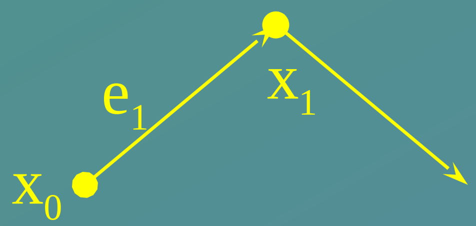
Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



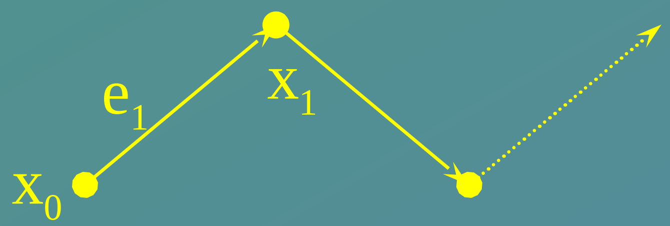
Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



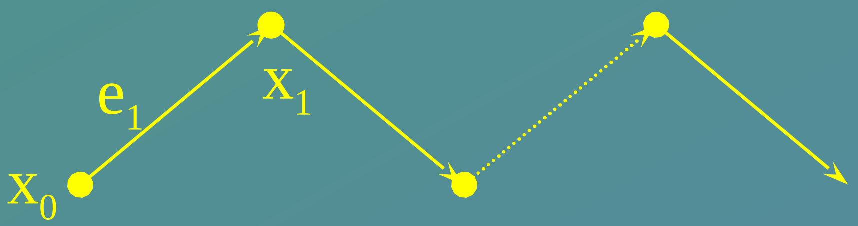
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



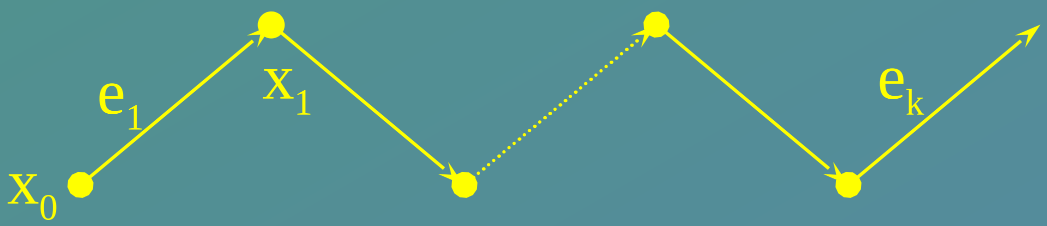
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



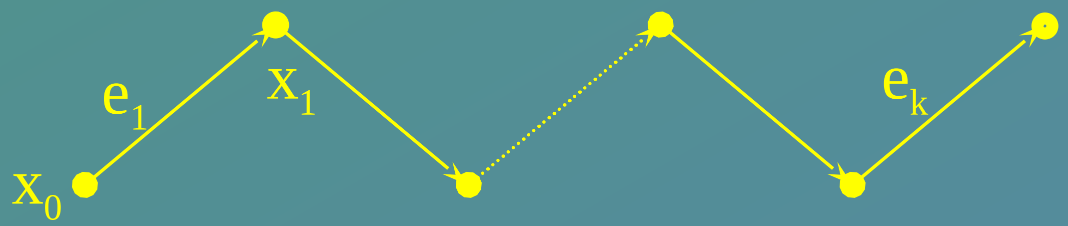
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



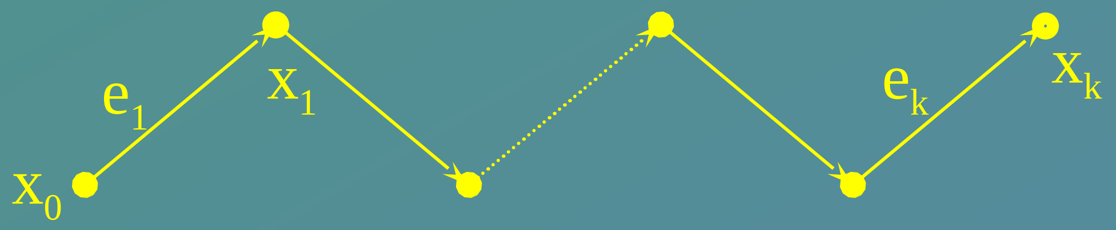
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\boldsymbol{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



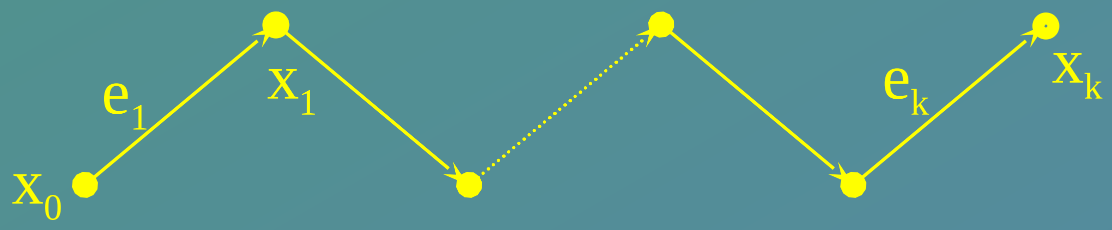
Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Connexité dans des graphes orientés.



Un ***chemin*** de longueur k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

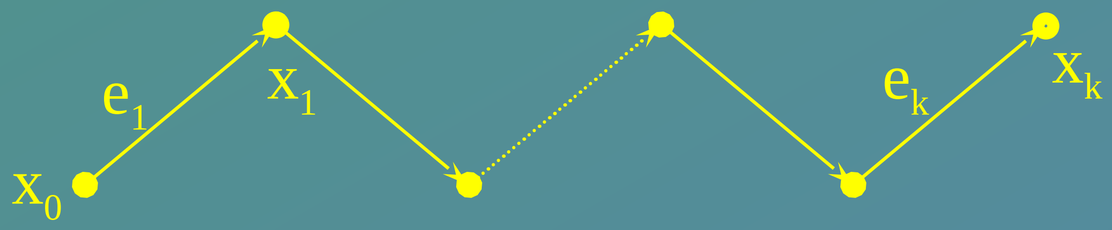
Connexité dans des graphes orientés.



Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Lorsque $k>0$ et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$est un ***chemin fermé***.

Connexité dans des graphes orientés.

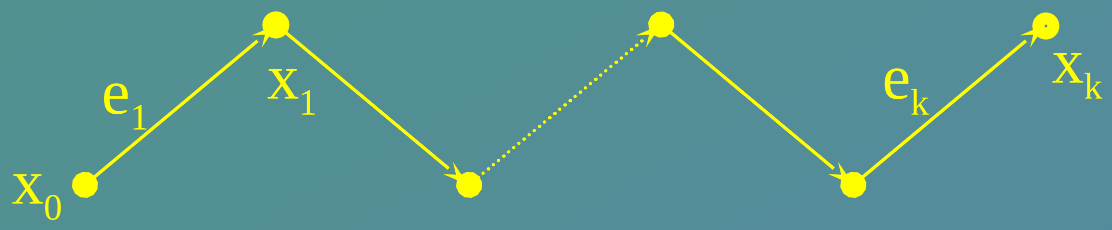


Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Lorsque $k>0$ et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$est un ***chemin fermé***.

Si e_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin simple***.

Connexité dans des graphes orientés.



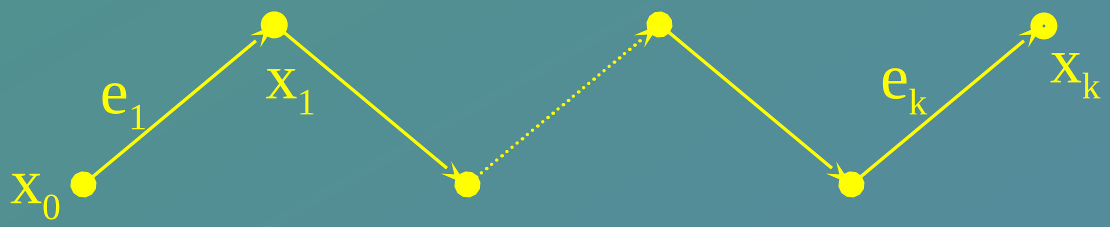
Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Lorsque k>0 et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin fermé***.

Si e_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin simple***.

Si les x_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin élémentaire***.

Connexité dans des graphes orientés.



Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

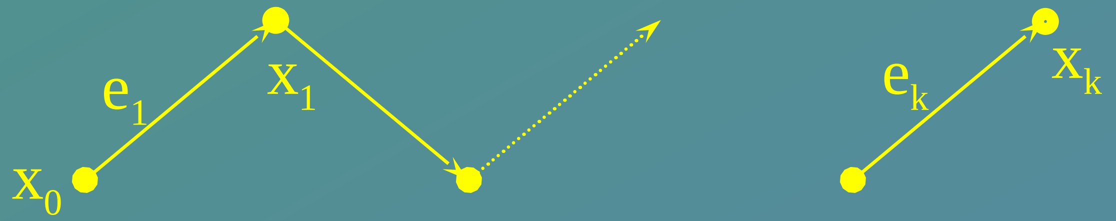
Lorsque k>0 et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin fermé***.

Si e_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin simple***.

Si les x_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin élémentaire***.

On appelle ***circuit*** tout chemin fermé simple. Les notions de chaîne et de cycle s'entendent au cas orienté; si l'on ne précise plus l'orientation – par exemple dans la définition d'une chaîne on considère que l'arc e_i est incident à x_{i-1} et x_i.

Connexité dans des graphes orientés.



Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

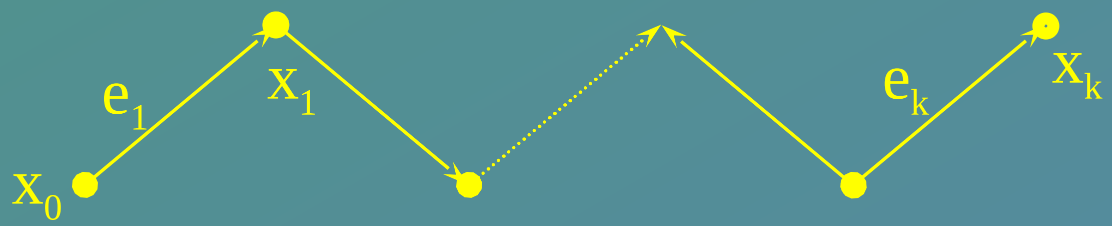
Lorsque k>0 et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin fermé***.

Si e_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin simple***.

Si les x_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin élémentaire***.

On appelle ***circuit*** tout chemin fermé simple. Les notions de chaîne et de cycle s'entendent au cas orienté; si l'on ne précise plus l'orientation – par exemple dans la définition d'une chaîne on considère que l'arc e_i est incident à x_{i-1} et x_i.

Connexité dans des graphes orientés.



Un ***chemin*** de <u>longueur</u> k est une séquence alternée de sommets et d'arcs $\mathbf{\Gamma}=(x_0,e_1,x_1,e_2,\ldots,x_{k-1},e_k,x_k)$ telle que, pour tout i, e_i admet x_{i-1} comme sommet initial et x_i comme extrémité terminale.

Lorsque k>0 et $x_0 = x_k$ $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin fermé***.

Si e_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin simple***.

Si les x_i sont distincts $\mathbf{\Gamma}$ est un ***chemin élémentaire***.

On appelle ***circuit*** tout chemin fermé simple. Les notions de chaîne et de cycle s'entendent au cas orienté; si l'on ne précise plus l'orientation – par exemple dans la définition d'une chaîne on considère que l'arc e_i est incident à x_{i-1} et x_i.

Dans un graphe avec m arcs,

un ***chemin*** simple de longueur m est dit ***eulérien***.

Dans un graphe avec m arcs,

un ***chemin*** simple de longueur m est dit ***eulérien***.

Un ***circuit eulérien*** est un circuit de longueur m.

Dans un graphe avec m arcs,

un ***chemin*** simple de longueur m est dit ***eulérien***.

Un ***circuit eulérien*** est un circuit de longueur m.

Un ***graphe*** est dit ***eulérien*** s'il possède un circuit eulérien.

Dans un graphe avec m arcs,

un ***chemin*** simple de longueur m est dit ***eulérien***.

Un ***circuit eulérien*** est un circuit de longueur m.

Un ***graphe*** est dit ***eulérien*** s'il possède un circuit eulérien.

Ces objets ont été étudiés par Leonhard Euler (1707-1783) – mathématicien suisse.

Sommets atteints à partir d'un sommet donné.

On dira que ***x peut atteindre y***
(ou que ***y peut être atteint à partir de x***)
s'il existe dans ***G*** un chemin de *x* à *y*.

Ce chemin peut être de longueur zéro, c'est-à-dire que l'on considère que chaque sommet peut s'atteindre lui-même; donc la relation ***x peut atteindre y*** est considérée comme ***réflexive***.

Cette relation est aussi ***transitive***, car
si x, y, z sont des sommets tels que :
x peut atteindre y
et y peut atteindre z,
alors x peut atteindre z.

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n'est pas symétrique

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n’est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.

x

En général il existe des graphes dans lesquels la relation

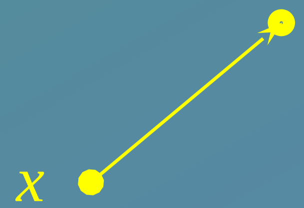
x peut atteindre y n’est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

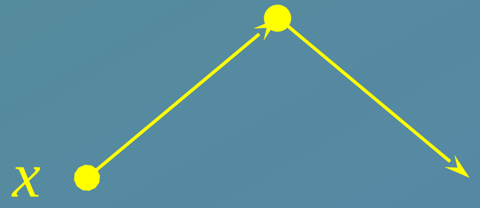
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

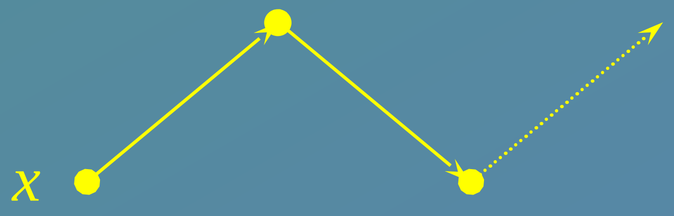
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

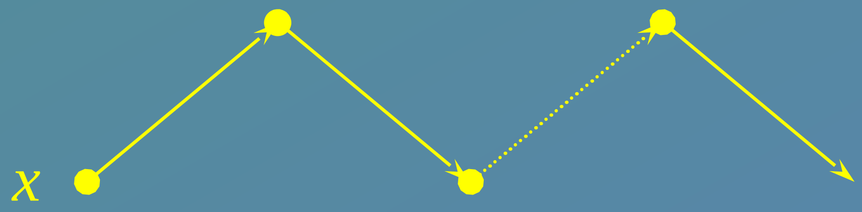
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

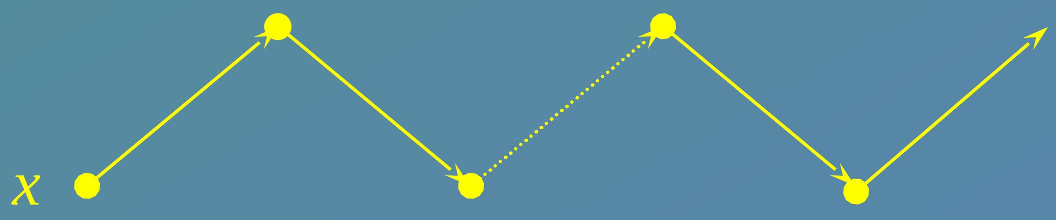
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

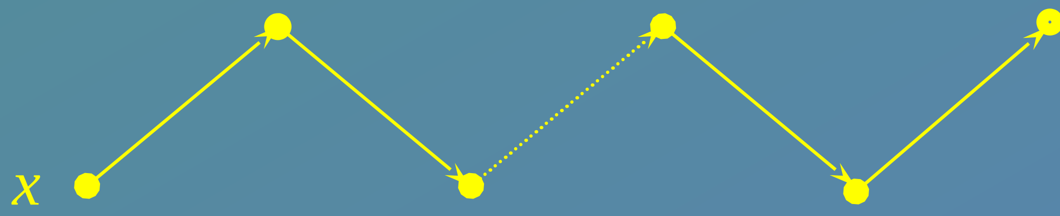
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

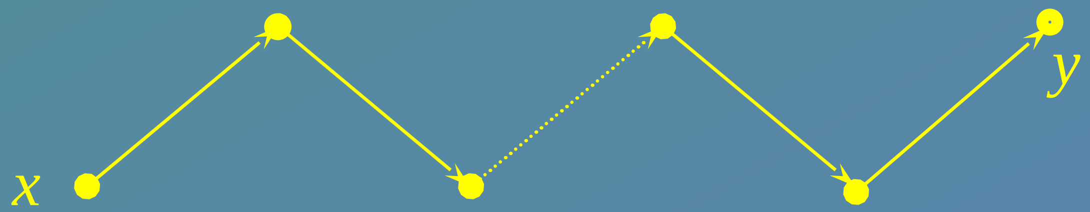
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

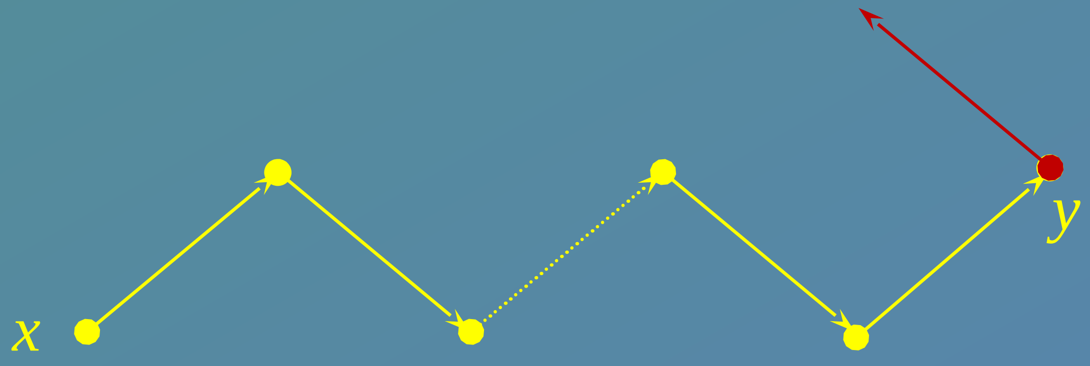
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

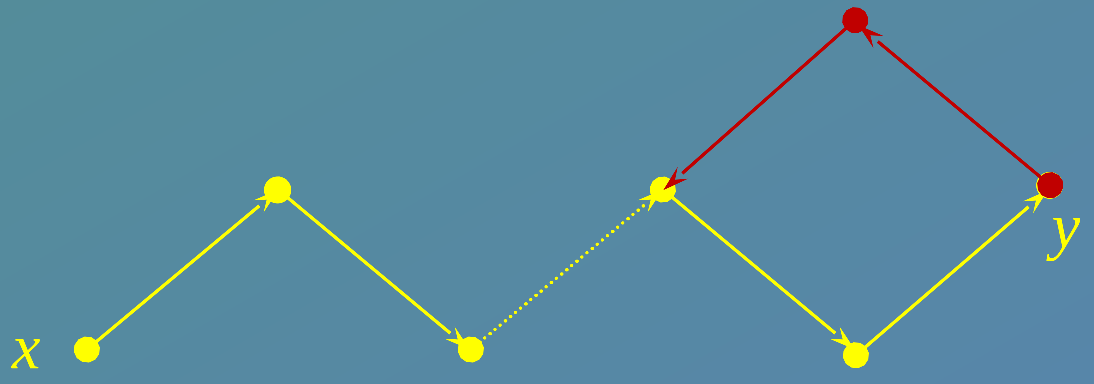
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

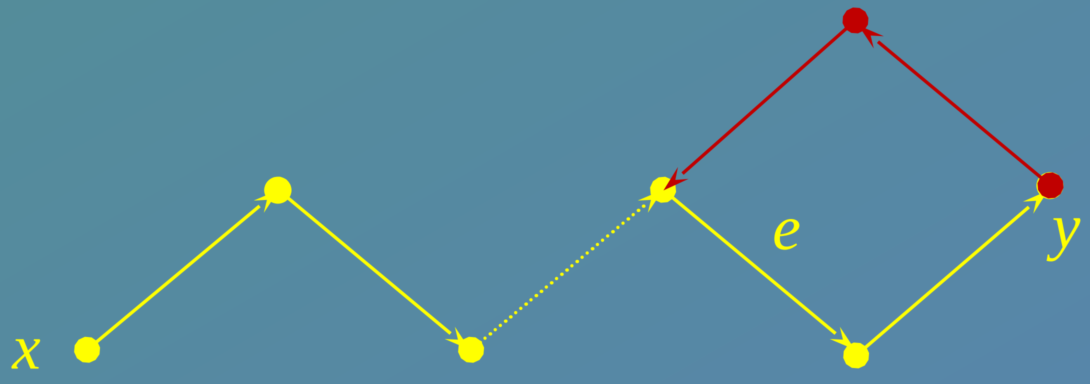
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté G=(X, E), la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

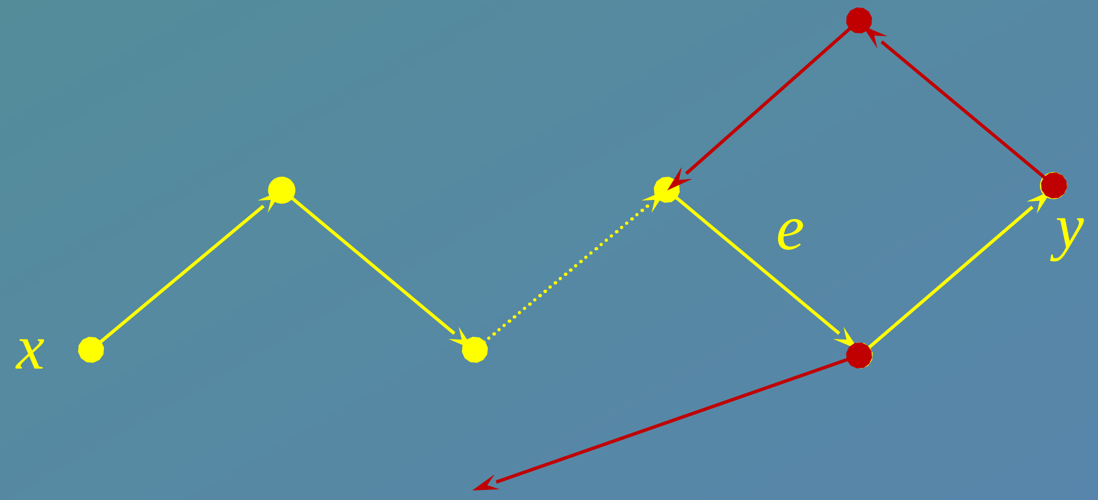
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



En général il existe des graphes dans lesquels la relation

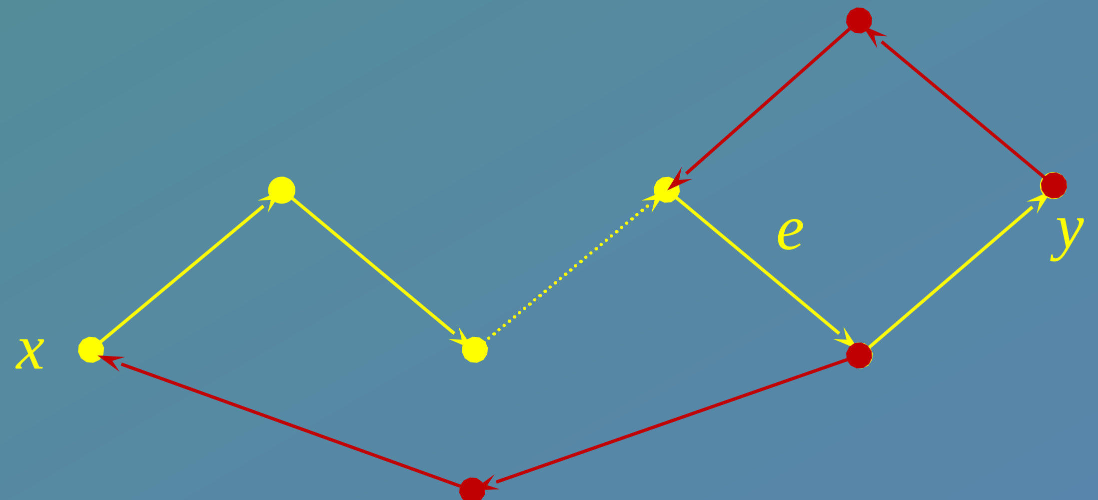
x peut atteindre y n'est pas symétrique

et dans un graphe orienté $G=(X, E)$, la propriété :

(1) Il existe deux sommets distincts x ,y tels que x peut atteindre y et y peut atteindre x;

est équivalente à :

(2) Le graphe G contient un circuit.



Graphes sans circuit

Graphes sans circuit

Si x et y sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors **au plus une** des assertions

Graphes sans circuit

Si *x* et *y* sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors **au plus une** des assertions

x peut atteindre y et ***y peut atteindre x*** est vraie.

Graphes sans circuit

Si *x* et *y* sont deux sommets distincts dans un graphe sans circuit, alors **au plus une** des assertions

x peut atteindre y et ***y peut atteindre x*** est vraie.

(éventuellement aucune)

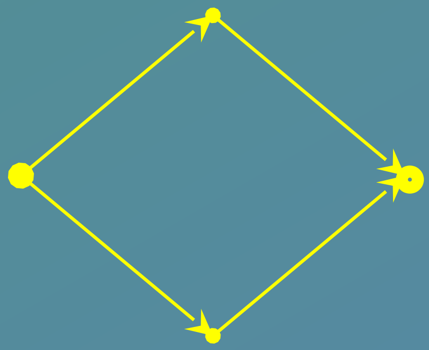
Sources et puits.

Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,

Sources et puits.

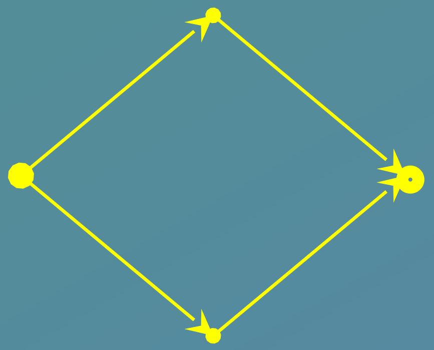
Dans un graphe orienté G,



Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,

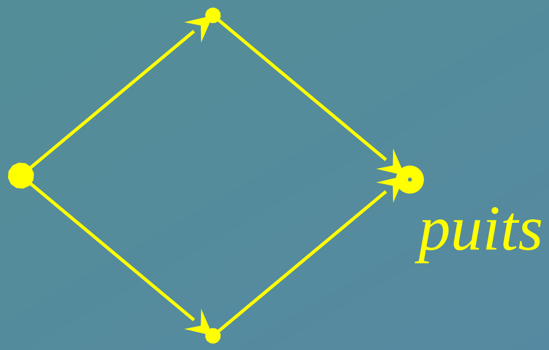
un *puits* est un sommet sans successeur



Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

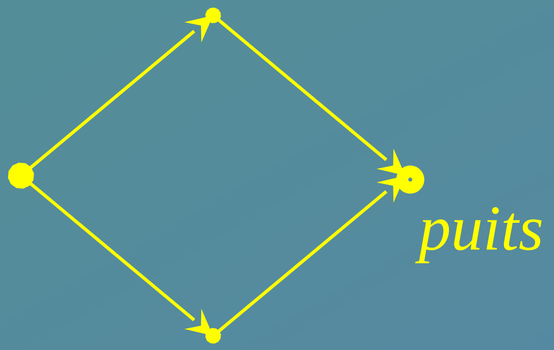


Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

un *puits* = un sommet p avec $d^{+}(p)=0$



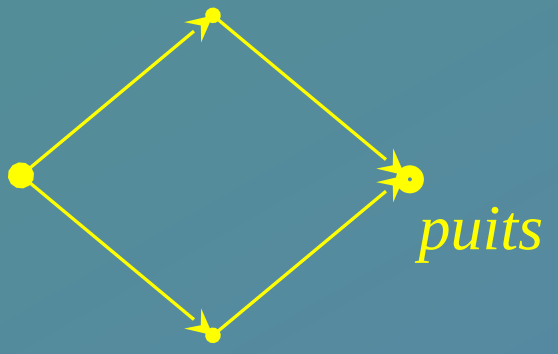
Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

un *puits* = un sommet p avec $d^+(p)=0$

et



Sources et puits.

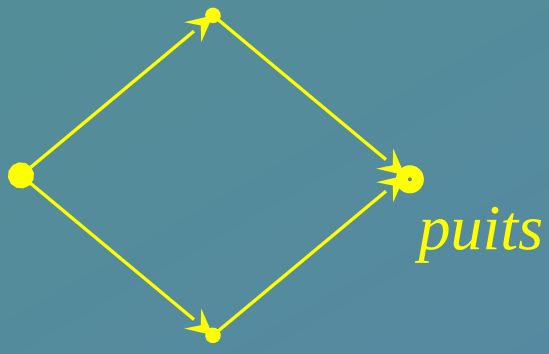
Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

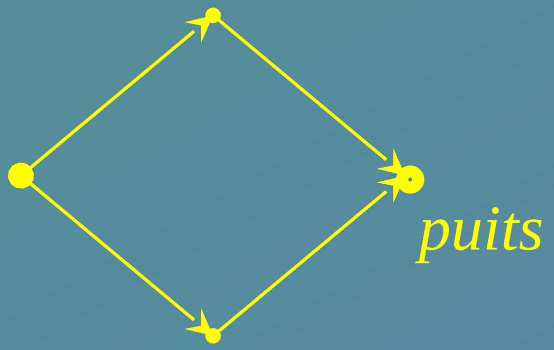
un *puits* = un sommet p avec $d^+(p)=0$

et

une *source* est un sommet sans prédécesseur



Sources et puits.



Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

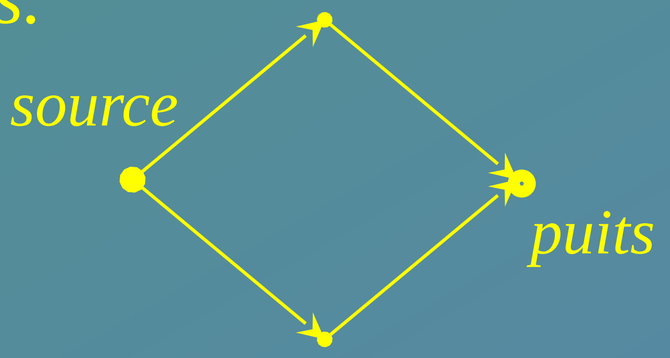
un *puits* = un sommet p avec $d^+(p)=0$

et

une *source* est un sommet sans prédécesseur

une *source* = un sommet s avec $d^-(s)=0$

Sources et puits.



Dans un graphe orienté G,

un *puits* est un sommet sans successeur

un *puits* = un sommet p avec $d^+(p)=0$

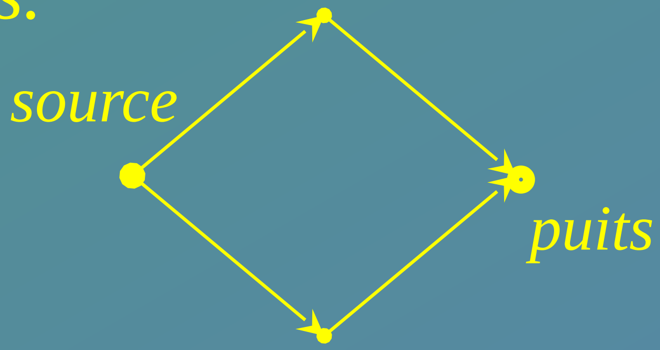
et

une *source* est un sommet sans prédécesseur

une *source* = un sommet s avec $d^-(s)=0$

Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,



un *puits* est un sommet sans successeur

un *puits* = un sommet p avec $d^{+}(p)=0$

et

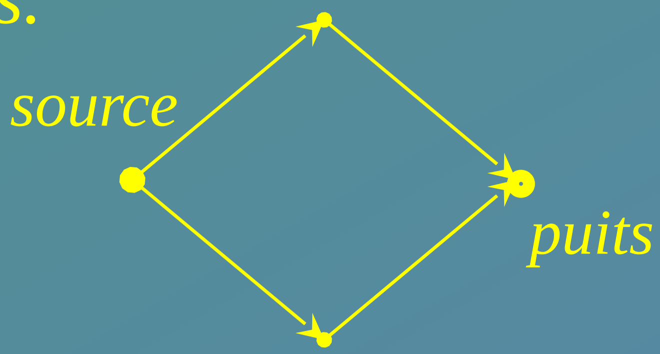
une *source* est un sommet sans prédécesseur

une *source* = un sommet s avec $d^{-}(s)=0$

Un graphe ne contient pas forcément un puits ou une source !

Sources et puits.

Dans un graphe orienté G,



un *puits* est un sommet sans successeur

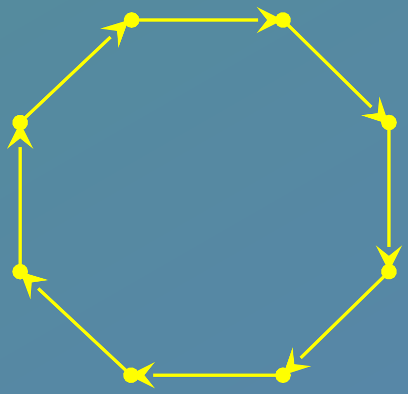
un *puits* = un sommet p avec $d^{+}(p)=0$

et

une *source* est un sommet sans prédécesseur

une *source* = un sommet s avec $d^{-}(s)=0$

Un graphe ne contient pas forcément un puits ou une source !



Un sommet puits ne peut pas atteindre un autre sommet que lui-même.

Un sommet puits ne peut pas atteindre un autre sommet que lui-même.

Un sommet source ne peut être atteint que par lui-même.

Un sommet puits ne peut pas atteindre un autre sommet que lui-même.

Un sommet source ne peut être atteint que par lui-même.

Cependant, un sommet source ne peut pas forcément atteindre tous les sommets (s’il existe plusieurs sources, chacune ne peut pas atteindre les autres).

Un sommet puits ne peut pas atteindre un autre sommet que lui-même.

Un sommet source ne peut être atteint que par lui-même.

Cependant, un sommet source ne peut pas forcément atteindre tous les sommets (s’il existe plusieurs sources, chacune ne peut pas atteindre les autres).

De même un sommet puits ne peut pas forcément être atteint par tous les sommets (s’il existe plusieurs puits).

Un sommet puits ne peut pas atteindre un autre sommet que lui-même.

Un sommet source ne peut être atteint que par lui-même.

Cependant, un sommet source ne peut pas forcément atteindre tous les sommets (s'il existe plusieurs sources, chacune ne peut pas atteindre les autres).

De même un sommet puits ne peut pas forcément être atteint par tous les sommets (s'il existe plusieurs puits).

EXERCICE: Montrer qu'un sommet source peut atteindre tous les autres sommets si et seulement si il n'existe qu'un seul sommet source.

Même question avec les puits.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

Preuve : Si x, un sommet quelconque, n’est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c’est-à-dire que l’on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l’exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L’existence d’un puits dans le graphe avec l’orientation opposée implique l’existence d’une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

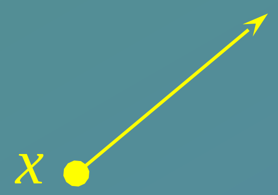
x

Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

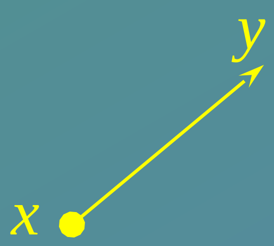


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME ***fondamental des graphes sans circuit*:**

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

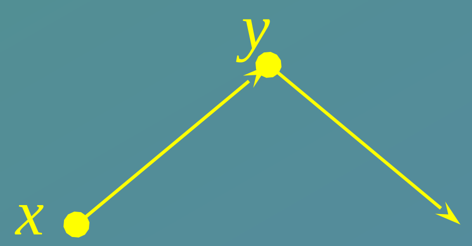


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

*Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet **puits** ($d^+(x)=0$) et un sommet **source** ($d^-(x)=0$).*

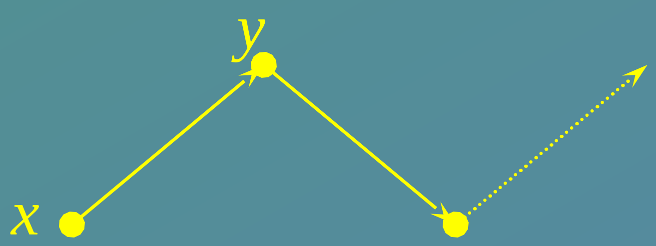


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

*Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet **puits** ($d^+(x)=0$) et un sommet **source** ($d^-(x)=0$).*

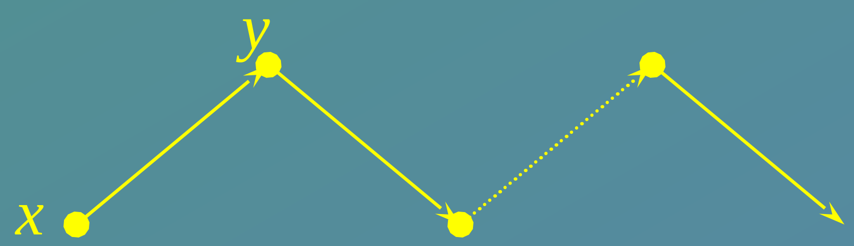


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

*Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet **puits** ($d^+(x)=0$) et un sommet **source** ($d^-(x)=0$).*

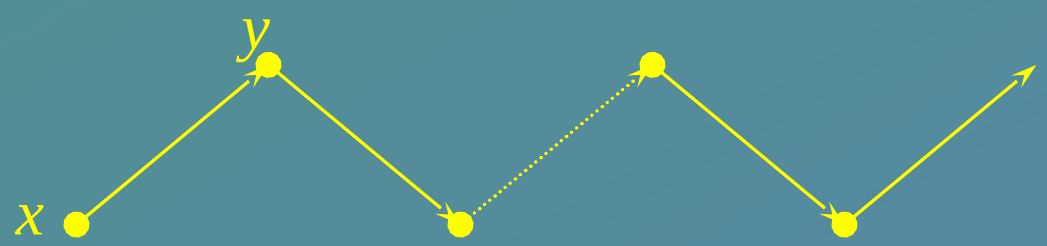


Preuve : Si *x*, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si *z* est le sommet terminal de ce chemin alors *z* est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

*Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet **puits** ($d^+(x)=0$) et un sommet **source** ($d^-(x)=0$).*

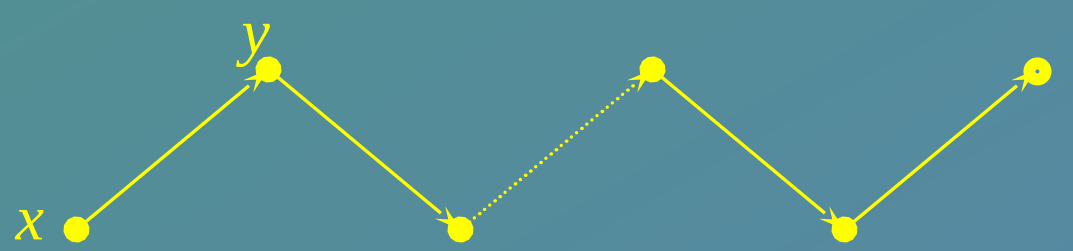


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*



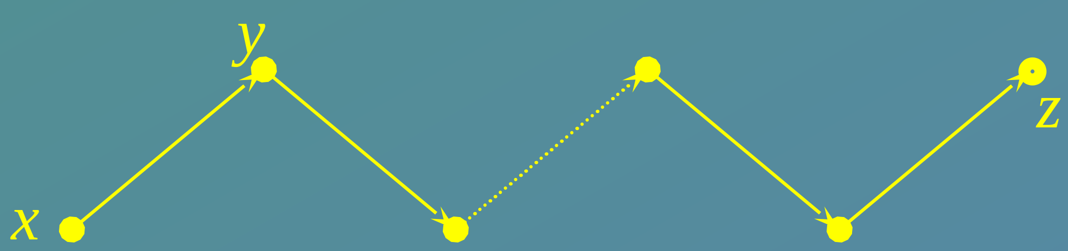
Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini,

contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*

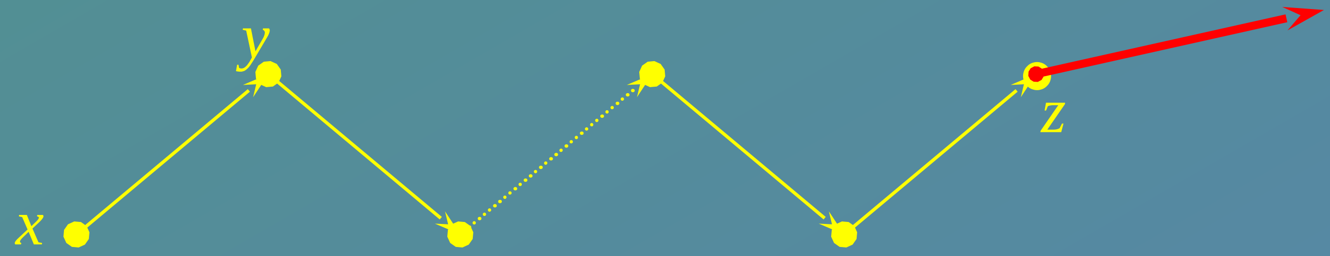


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

*Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet **puits** ($d^+(x)=0$) et un sommet **source** ($d^-(x)=0$).*

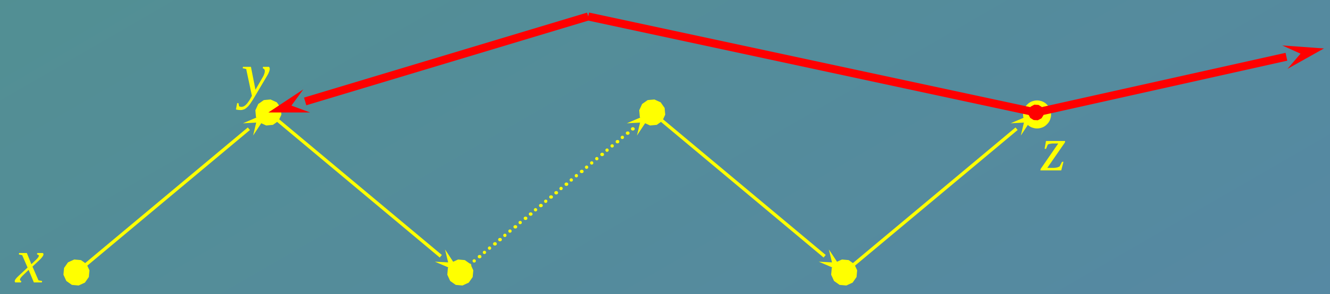


Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y \neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z \notin \Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z \in \Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

THÉORÈME *fondamental des graphes sans circuit*:

Tout graphe orienté sans circuit, avec un nombre de sommets fini, contient un sommet ***puits*** *($d^+(x)=0$) et un sommet* ***source*** *($d^-(x)=0$).*



Preuve : Si x, un sommet quelconque, n'est pas un puits, alors il existe un arc (x, y) avec $y\neq x$, car le graphe est sans circuit, donc sans boucle. Considérons un chemin élémentaire maximal Γ, c'est-à-dire que l'on ne peut plus augmenter sa longueur (penser à l'exploration en profondeur). Si z est le sommet terminal de ce chemin alors z est un puits. En effet, dans le cas contraire on peut augmenter la longueur du chemin (si le successeur de $z\notin\Gamma$) ou on ferme un circuit (si le successeur de $z\in\Gamma$) – contradiction dans les deux cas.

L'existence d'un puits dans le graphe avec l'orientation opposée implique l'existence d'une source dans le graphe original.

Graphes sans circuit possèdent une structure spéciale facile à déterminer.

Graphes sans circuit possèdent une structure spéciale facile à déterminer.

Un graphe G=(X;E) est ***sans circuit***

Graphes sans circuit possèdent une structure spéciale facile à déterminer.

Un graphe G=(X;E) est ***sans circuit***

si et seulement si

Graphes sans circuit possèdent une structure spéciale facile à déterminer.

Un graphe G=(X;E) est ***sans circuit***

si et seulement si

l'ensemble de ses sommets X admet une partition $X=N_0\cup N_1\cup\ldots\cup N_p$ *(appelée* ***partition en niveaux*** *stables), telle que, pour tout sommet x, pour tout* $i\leq p$*,*

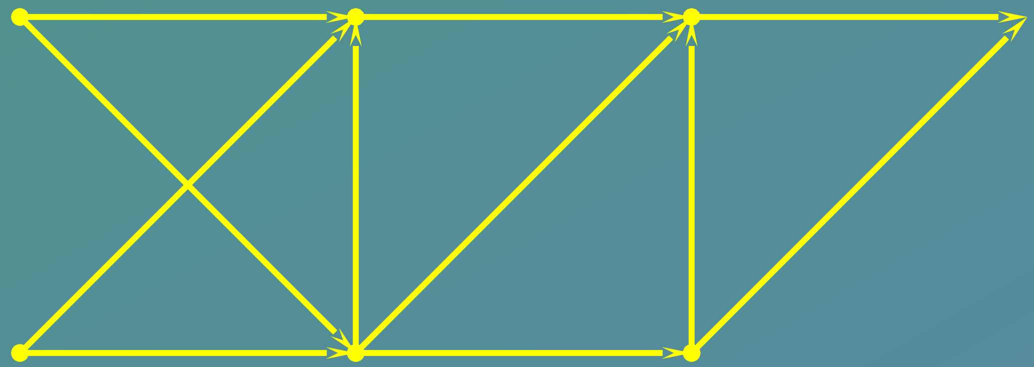
Graphes sans circuit possèdent une structure spéciale facile à déterminer.

Un graphe $G=(X;E)$ est ***sans circuit***

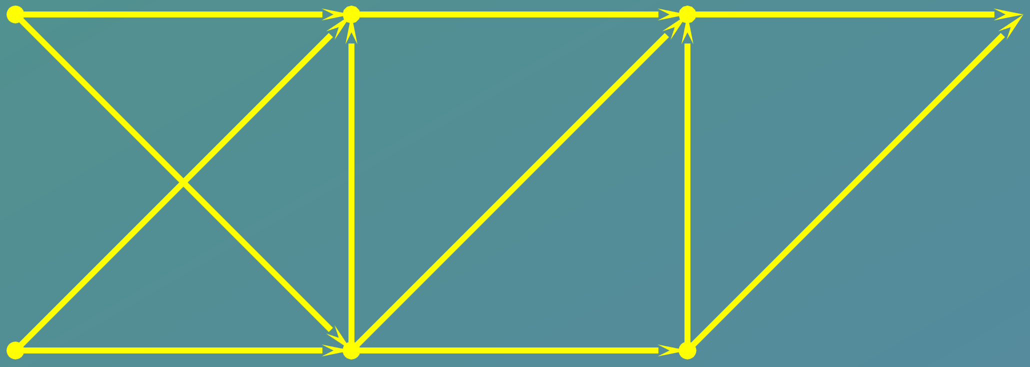
si et seulement si

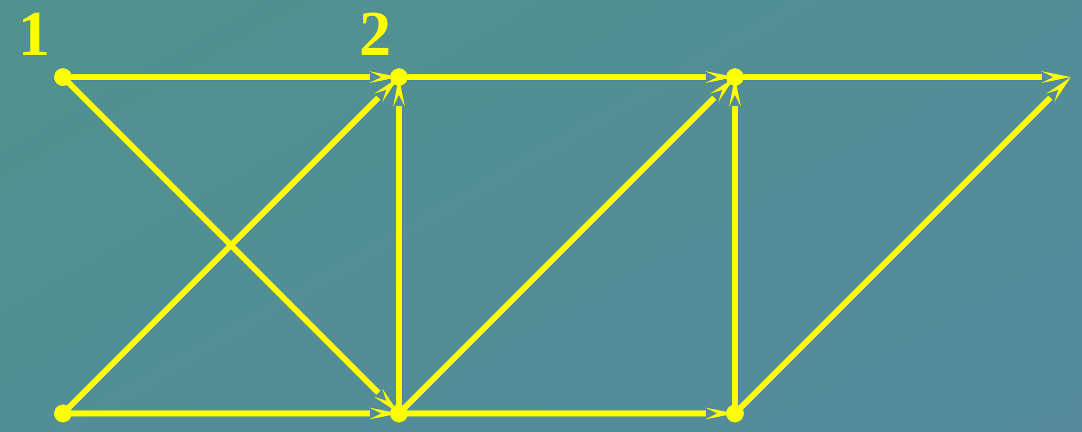
l'ensemble de ses sommets X admet une partition $X=N_0 \cup N_1 \cup \ldots \cup N_p$ (appelée ***partition en niveaux*** *stables), telle que, pour tout sommet x, pour tout $i \leq p$,*

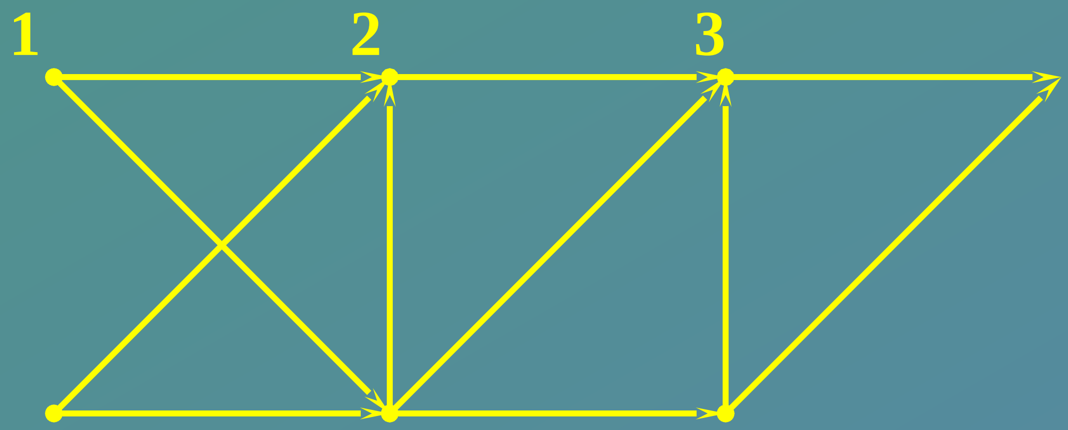
(*) $x \in N_i \Leftrightarrow$ *i est la longueur maximum d'un chemin se terminant en x.*

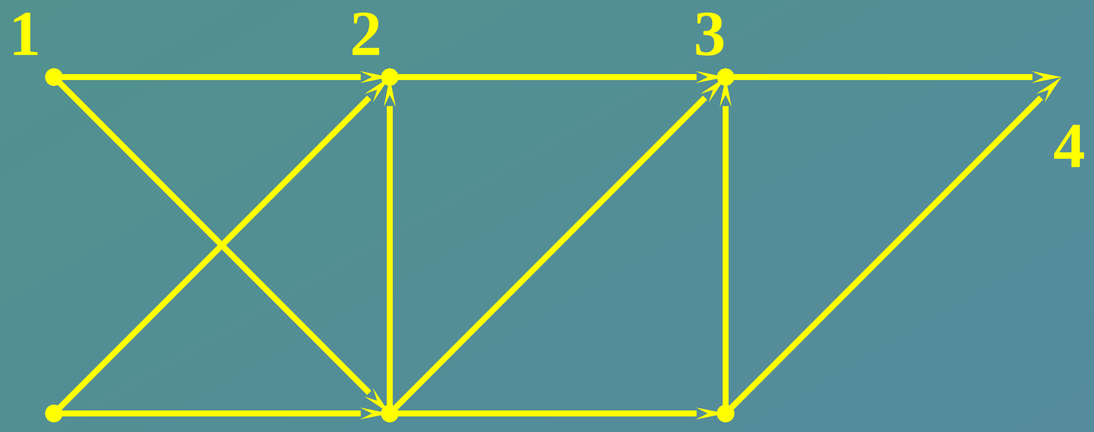


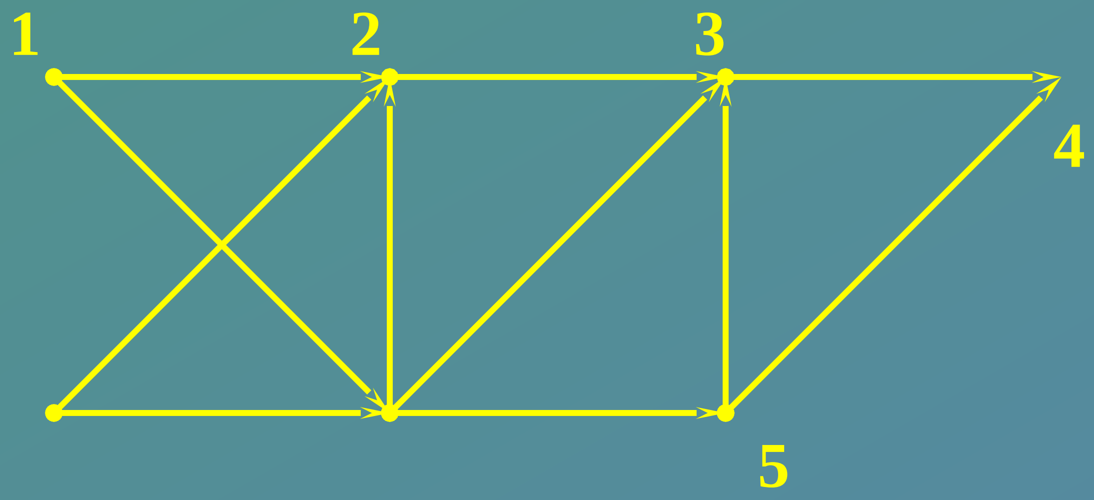
1

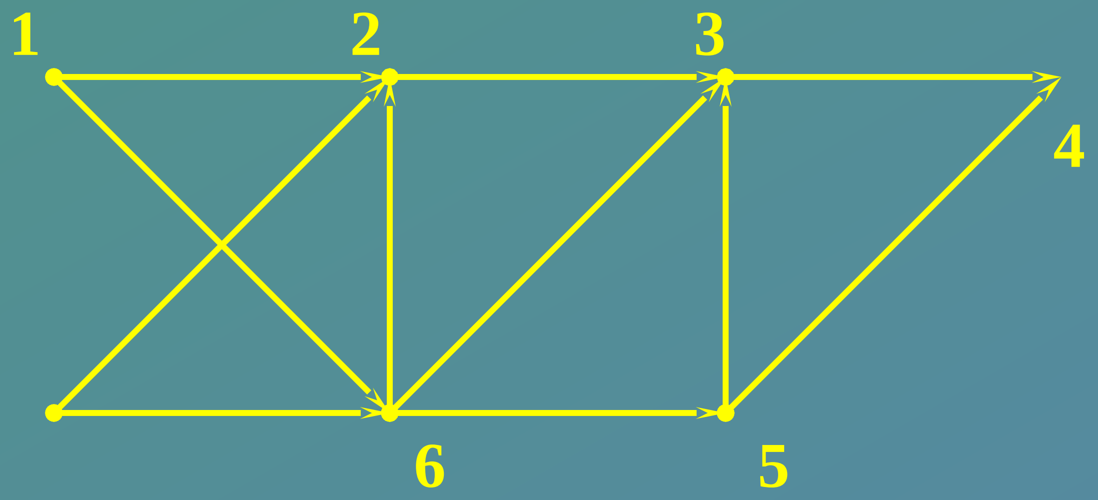


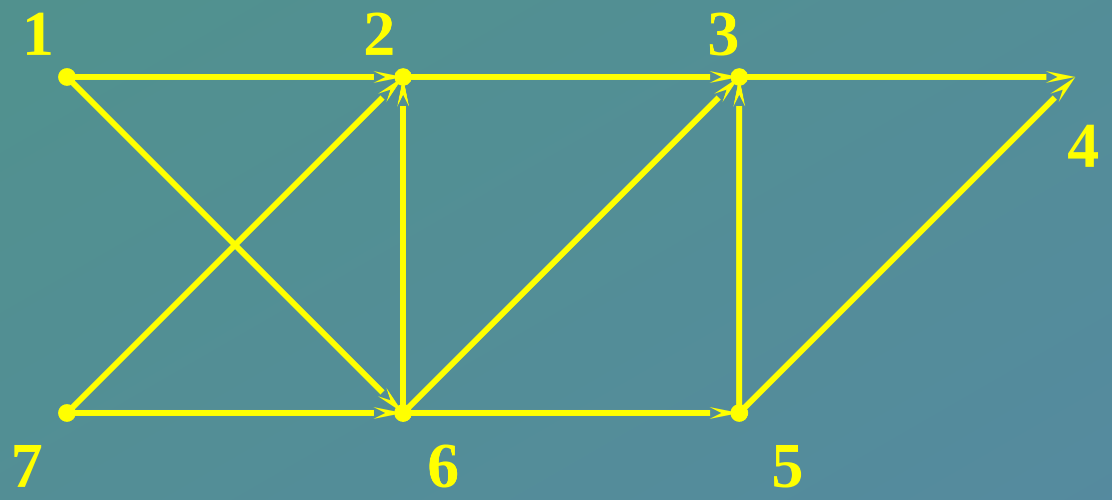

1
2

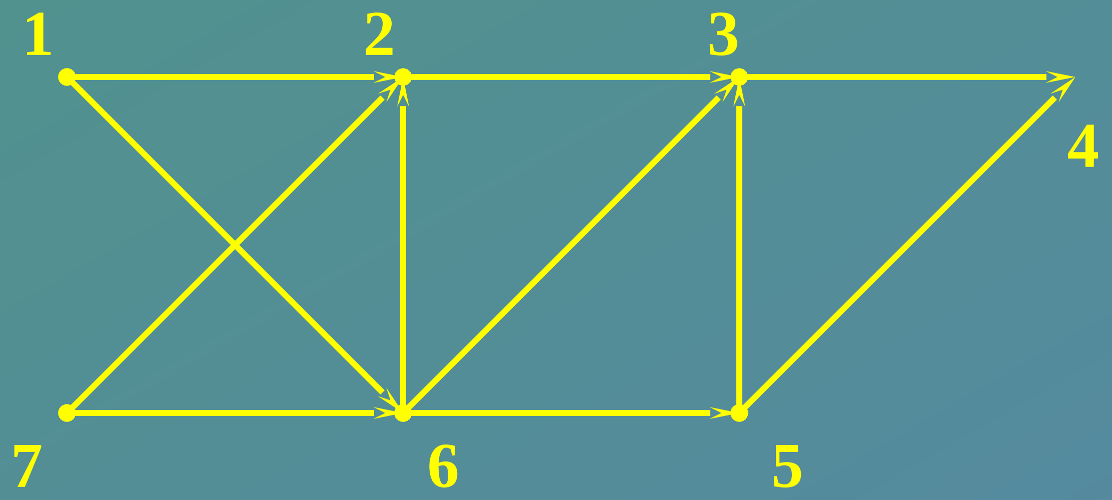

1
2
3

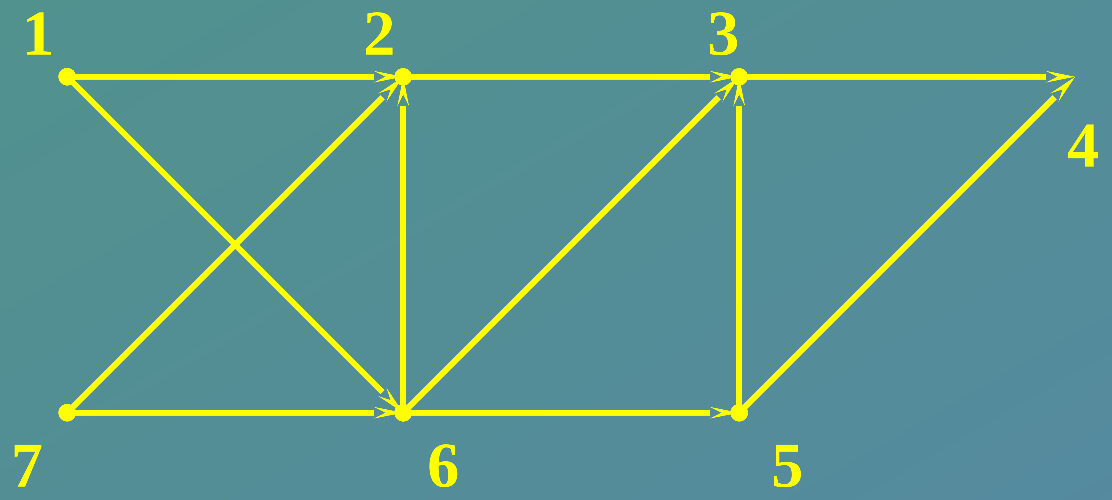

1
2
3
4


1
2
3
4
5

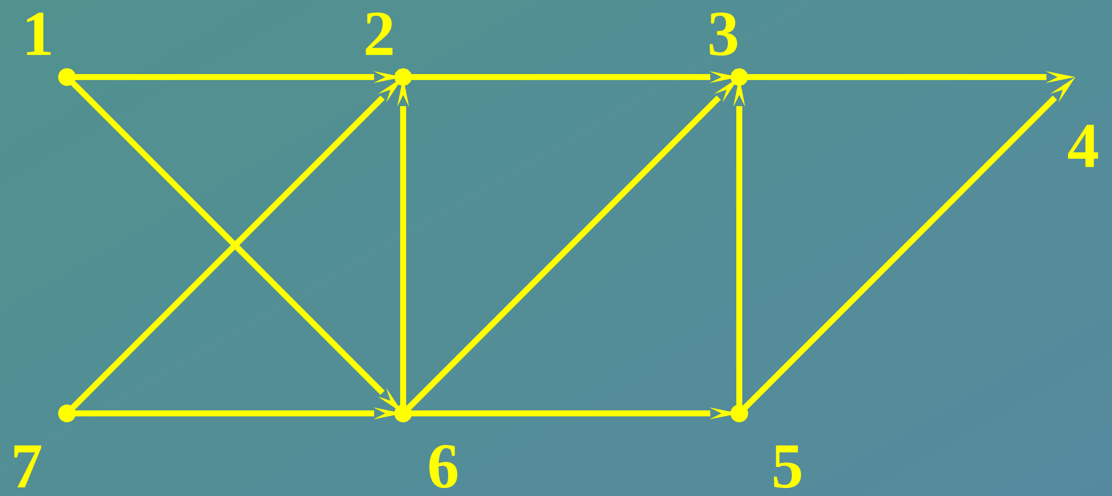

1
2
3
4
6
5


1
2
3
4
7
6
5

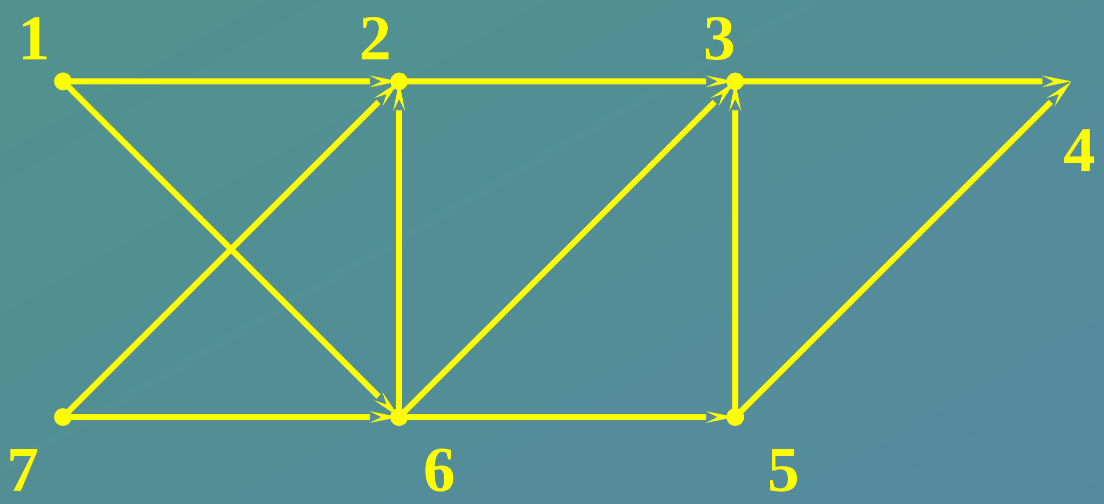

1
2
3
4
7
6
5



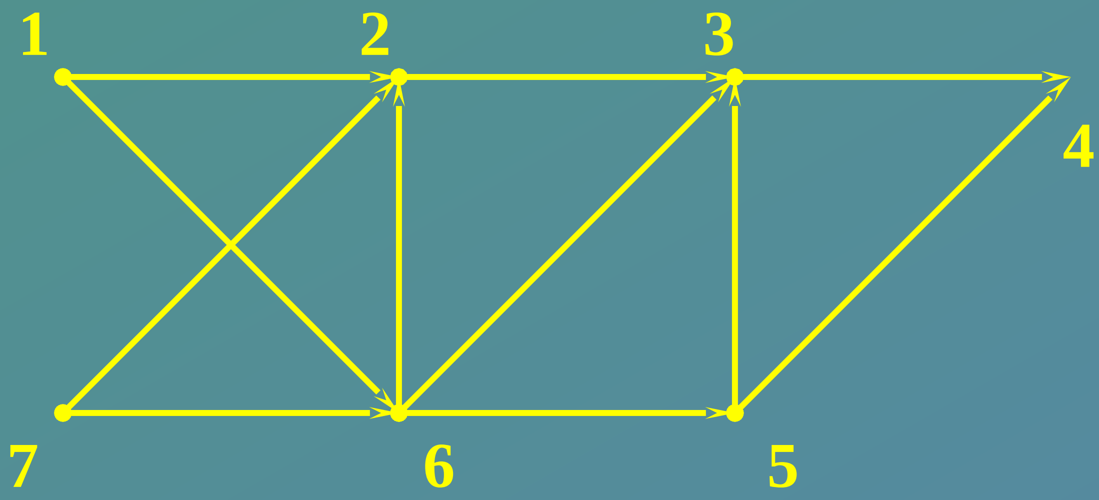
1.

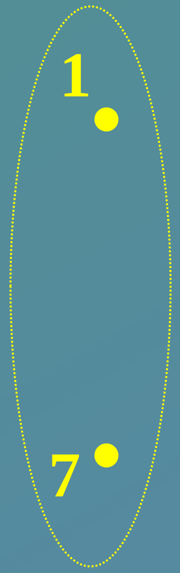


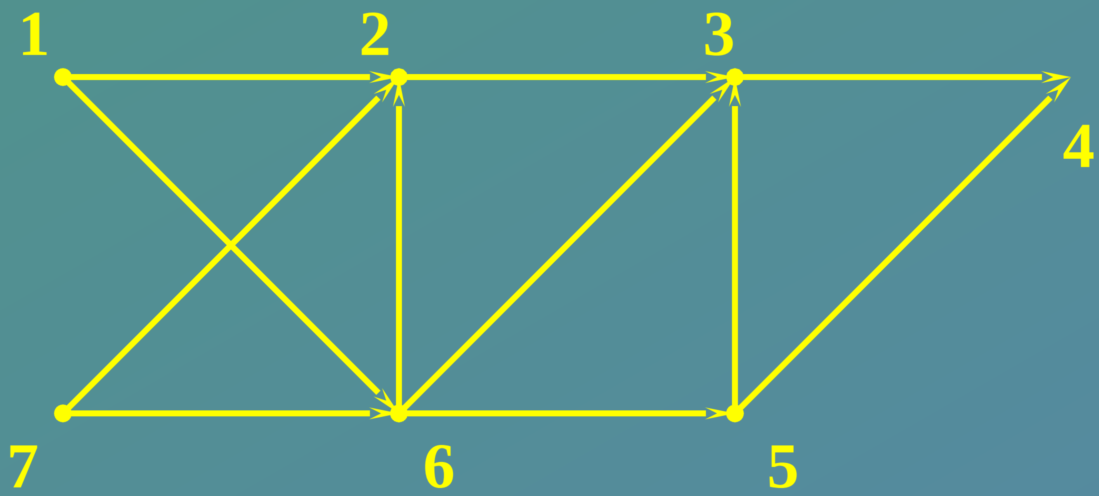
1

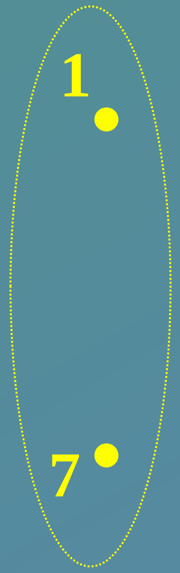

1
2
3
4
7
6
5


1
7

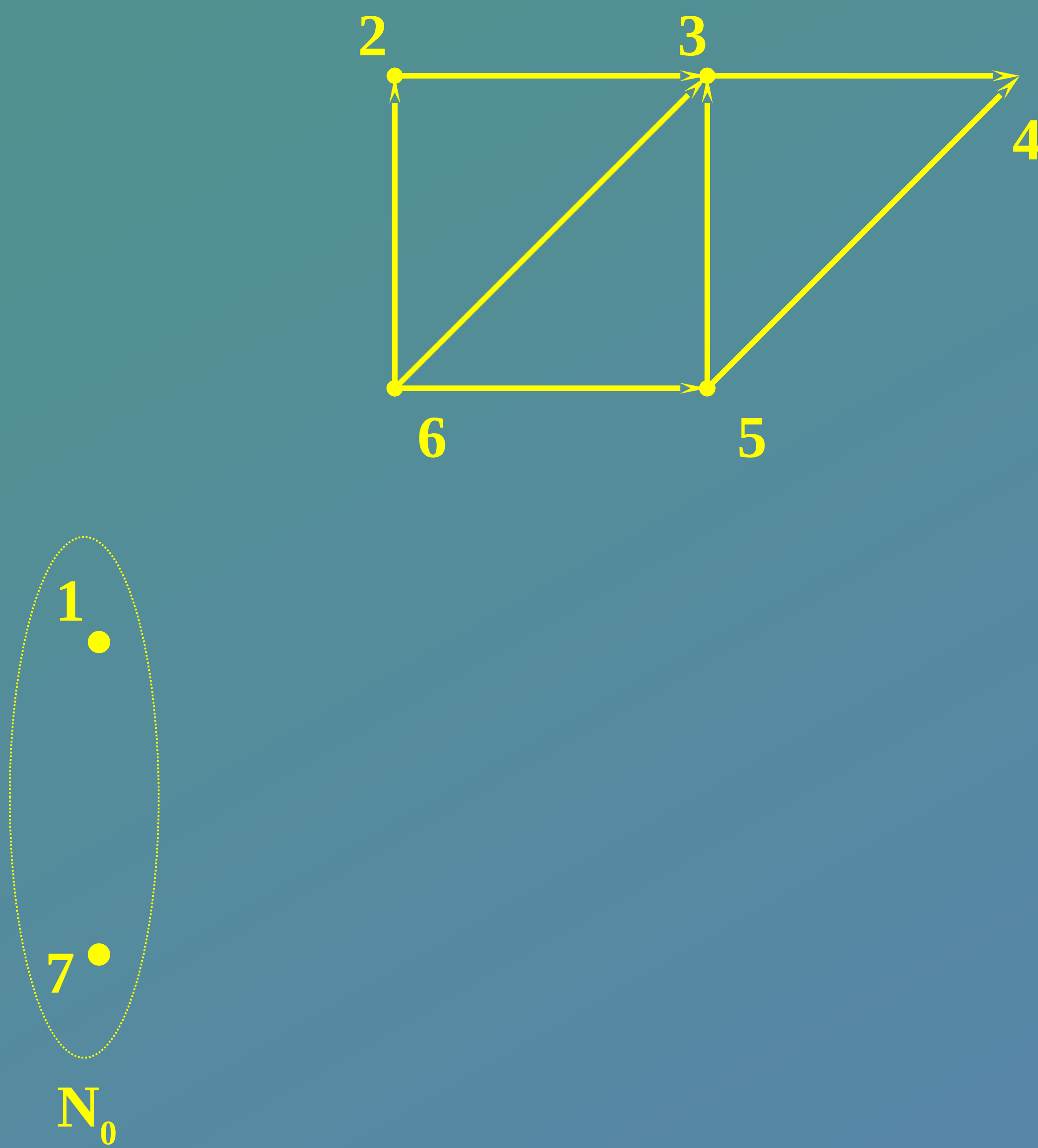

1
2
3
4
7
6
5

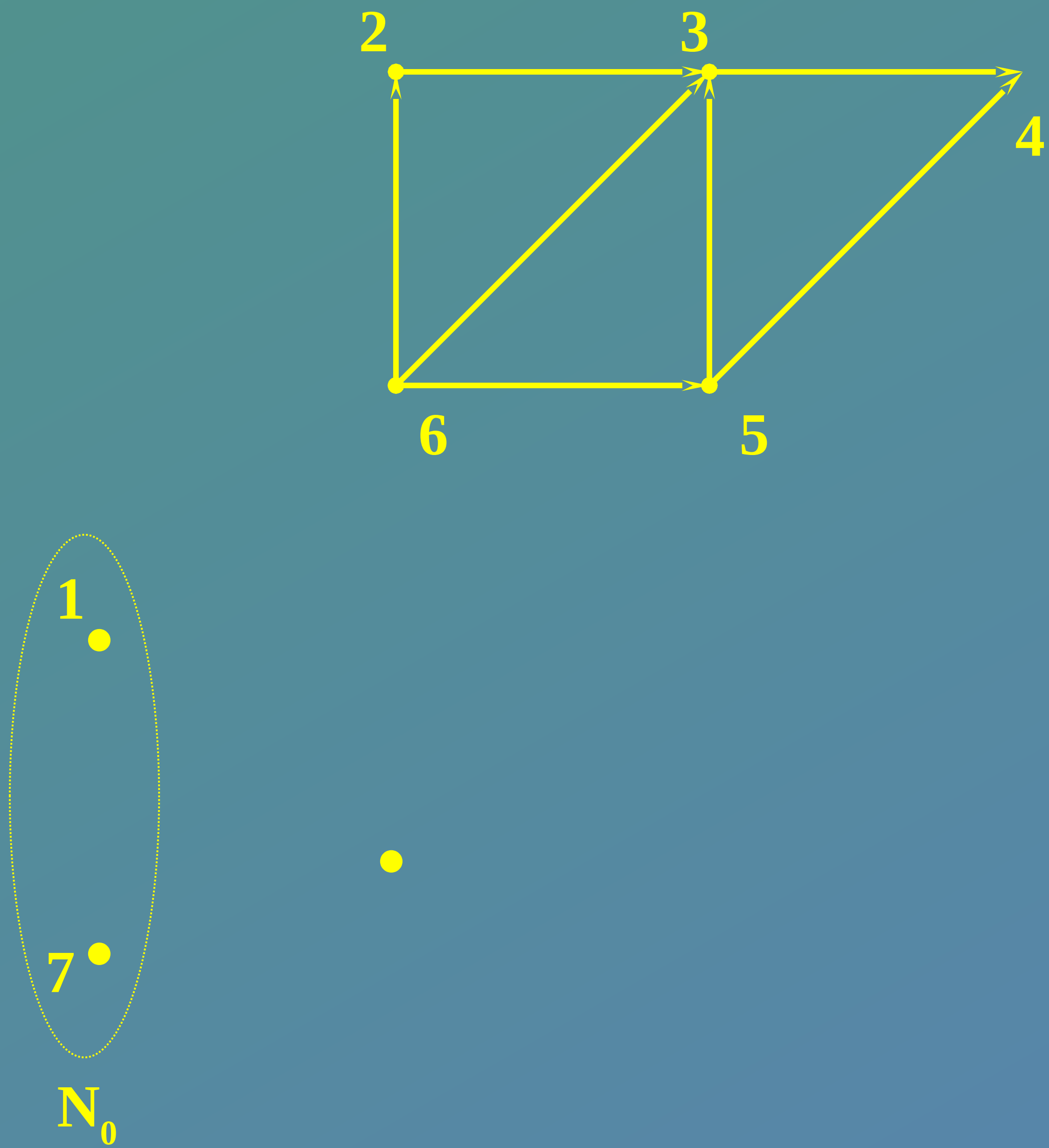

1
7

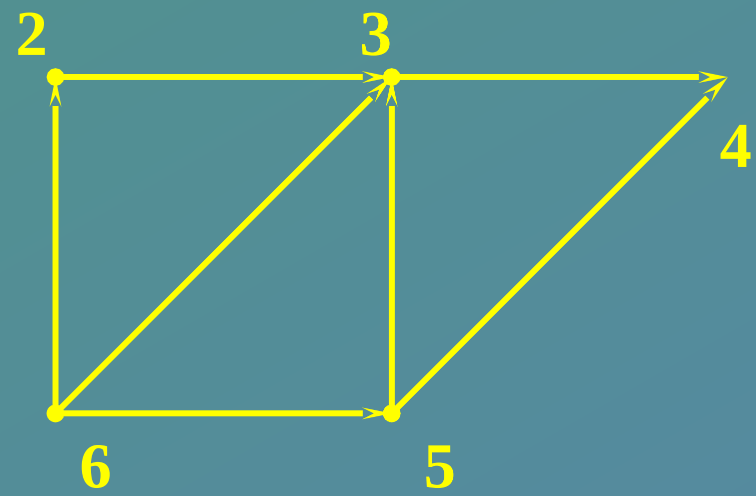


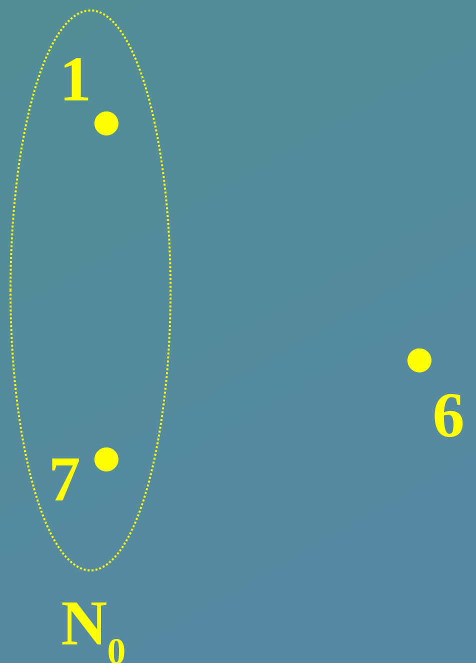


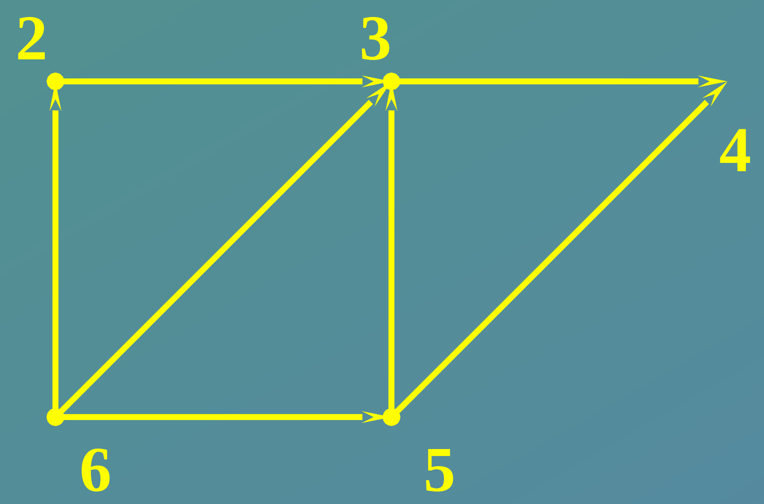
N_0

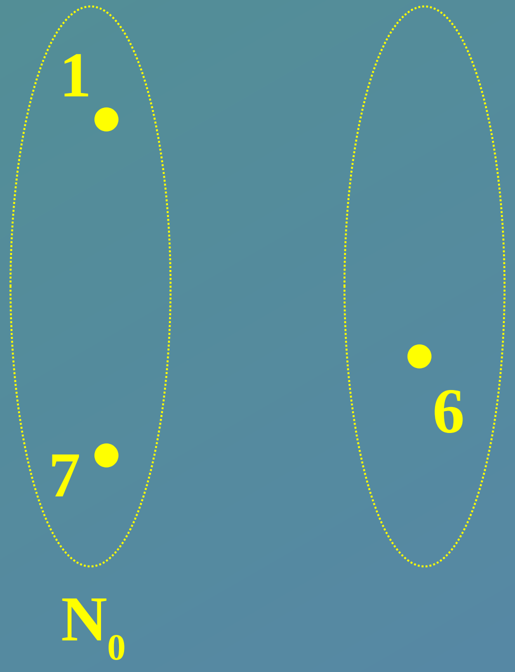

2
3
4
6
5
1
7
N_0

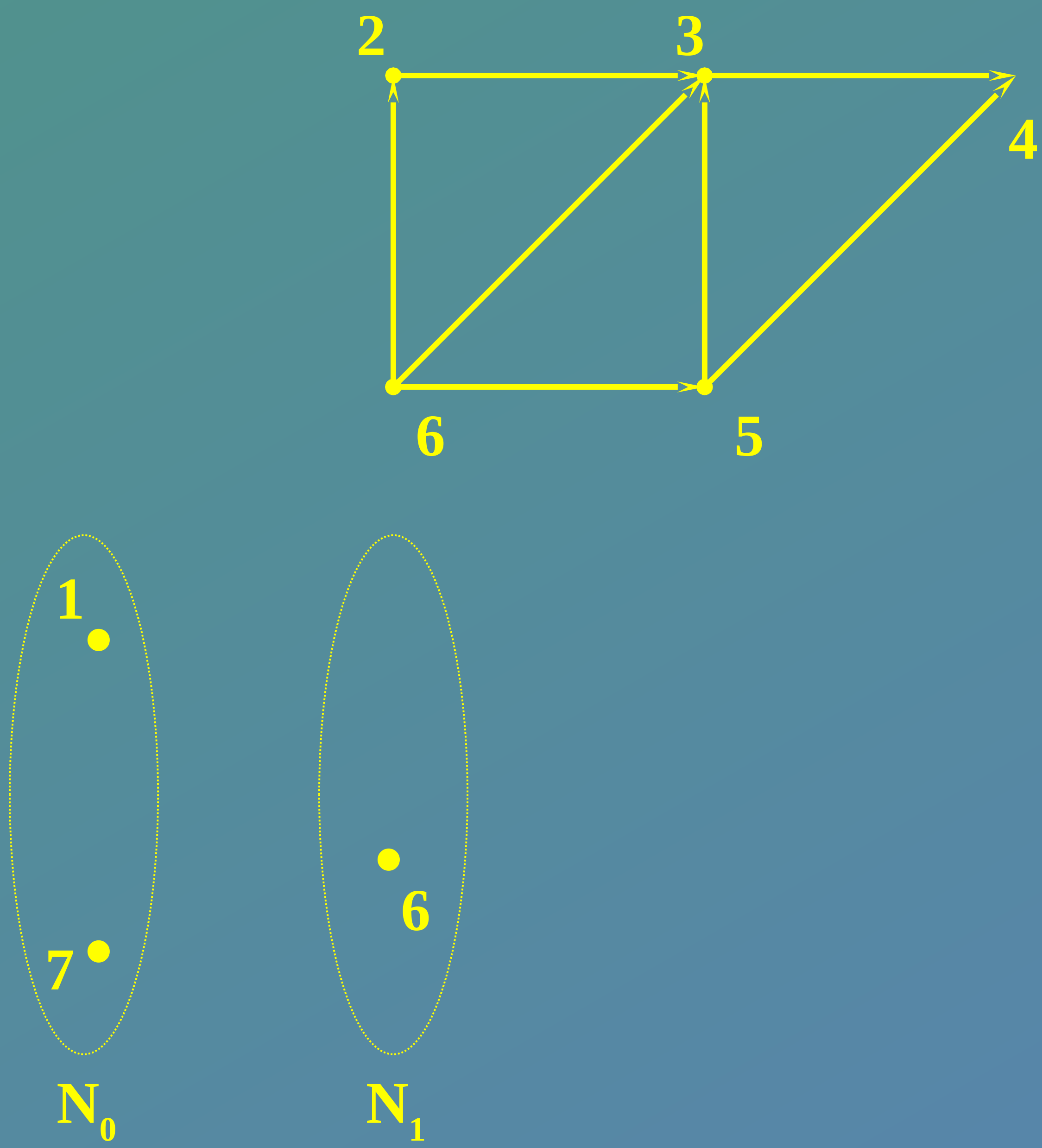

2
3
4
6
5
1
7
N_0

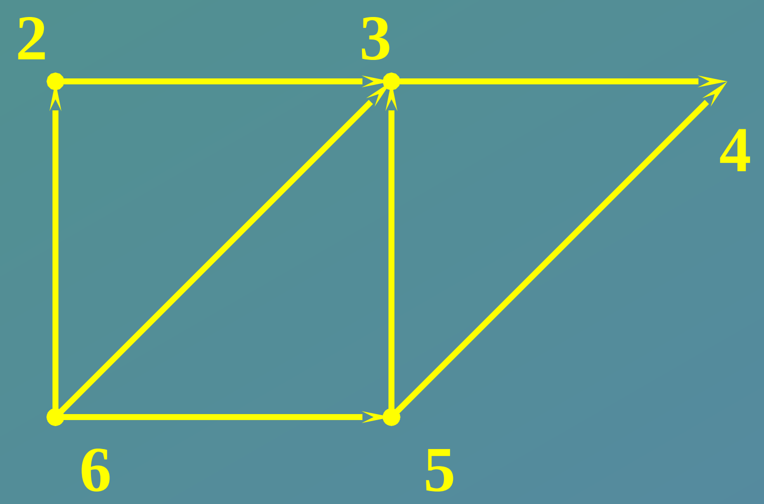

2
3
4
6
5

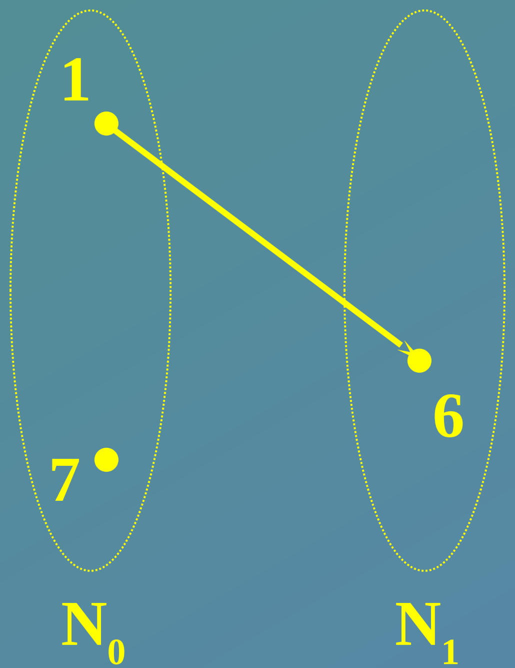

1
7
6
N0

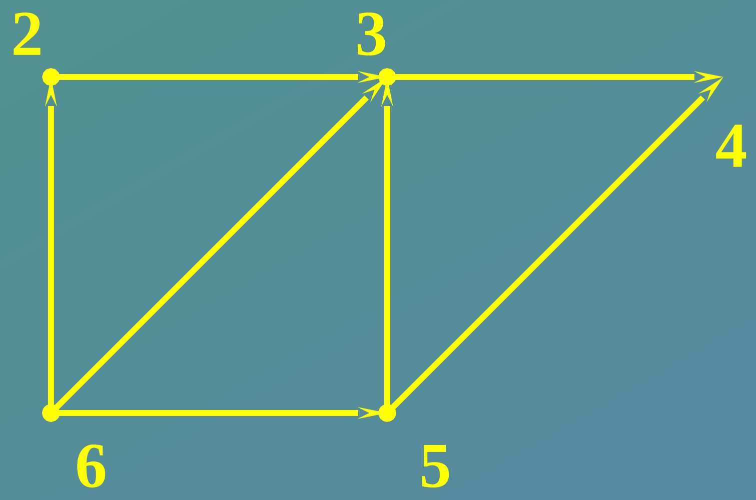

2
3
4
6
5

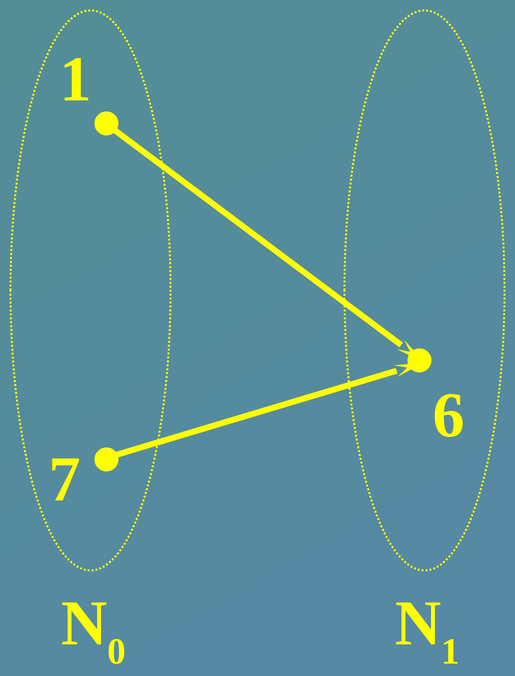

1
7
6
N_0

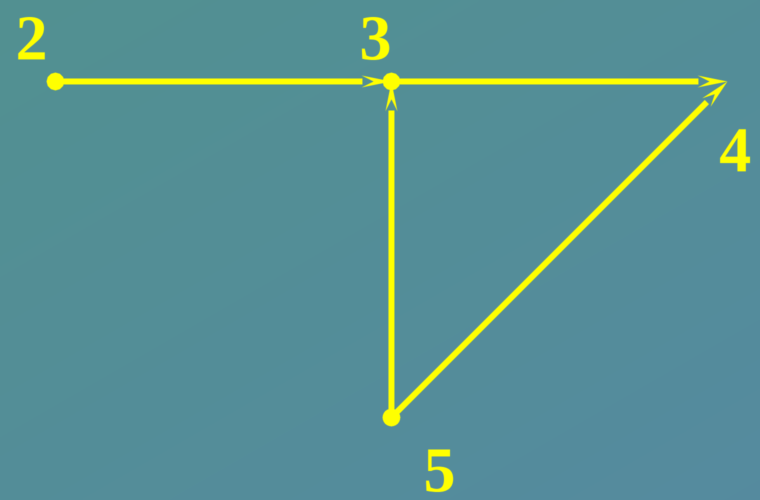

2
3
4
6
5
1
7
6
N_0
N_1

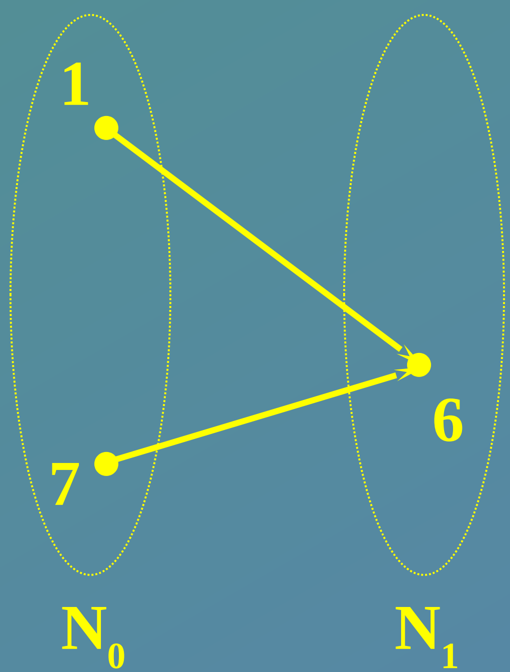

2
3
4
6
5

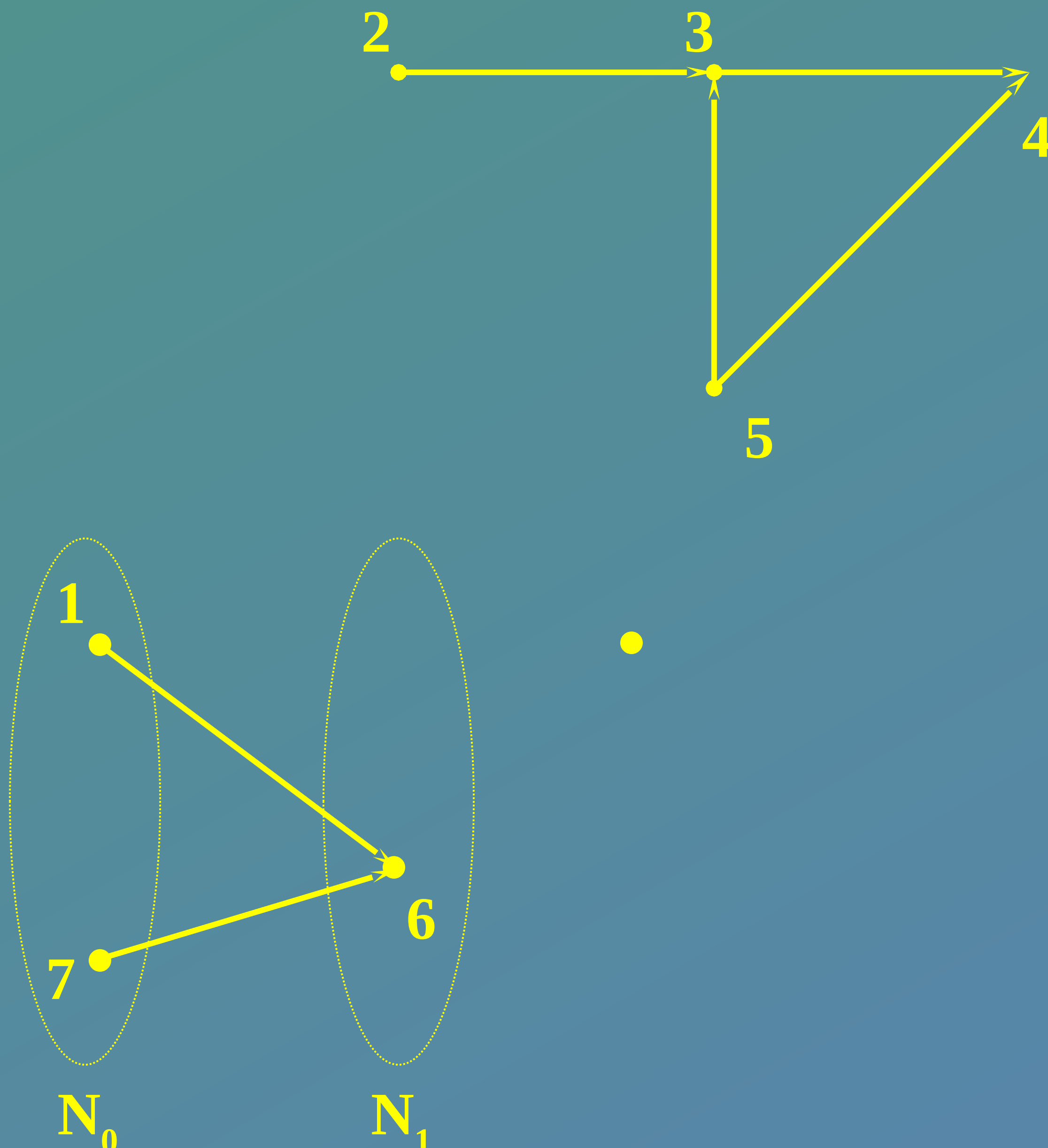

1
6
7
N_0
N_1

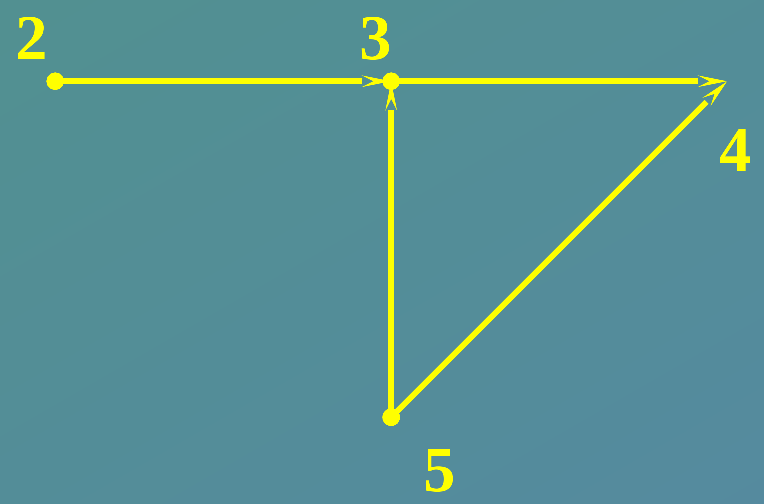

2
3
4
6
5

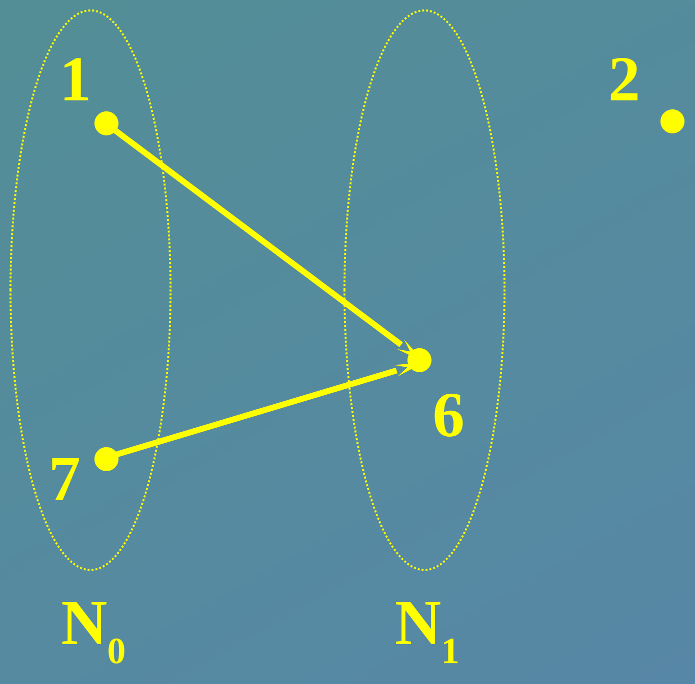

1
6
7
N_0
N_1

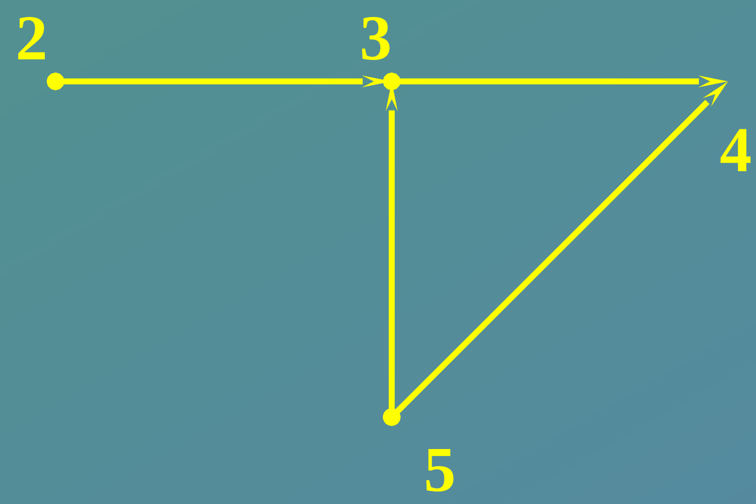

2
3
4
5

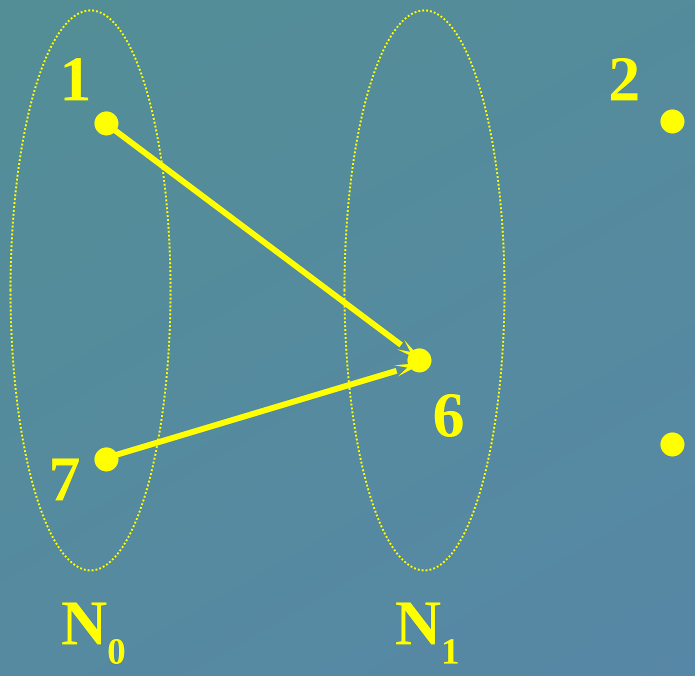

1
7
6
N_0
N_1

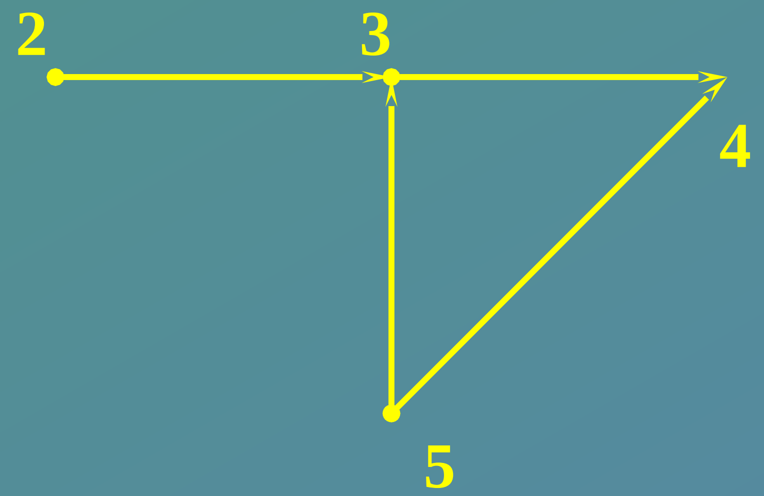

2
3
4
5
1
6
7
N0
N1

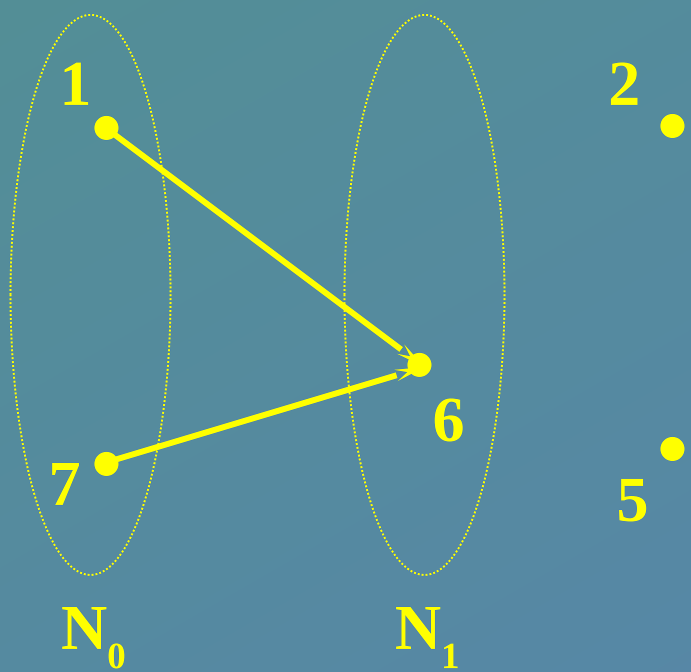

2
3
4
5

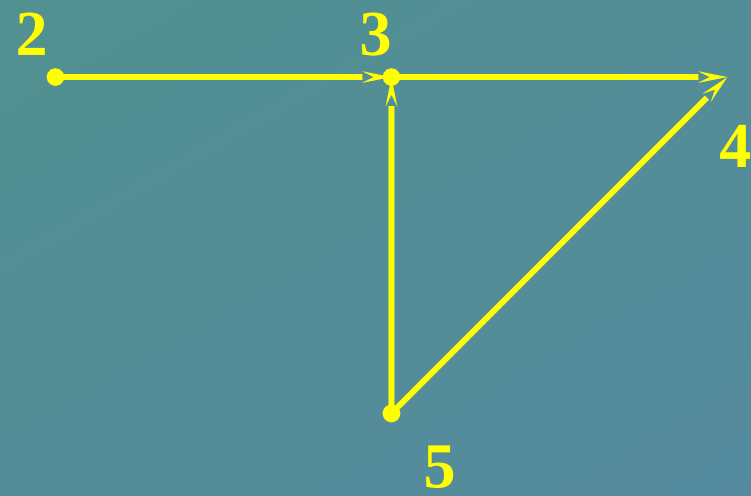

1
7
6
2
N_0
N_1

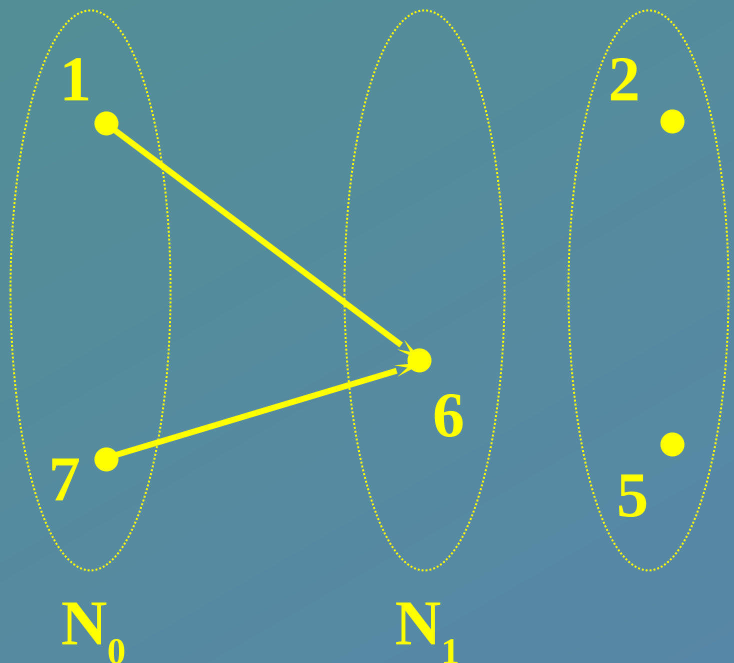

2
3
4
5

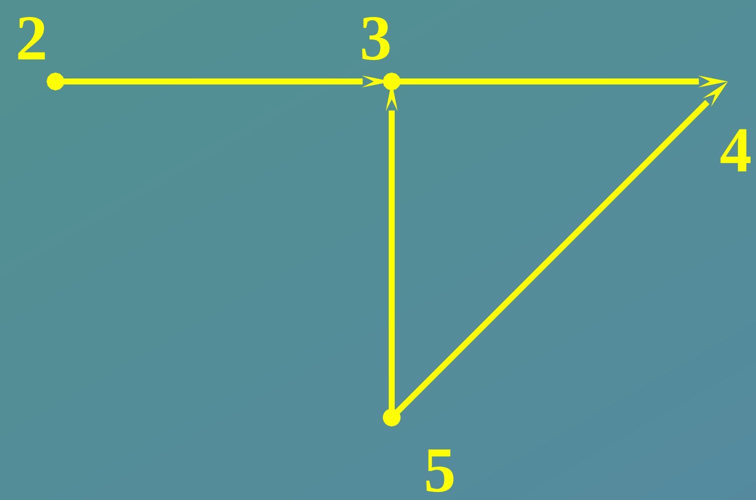

1
7
6
2
N_0
N_1

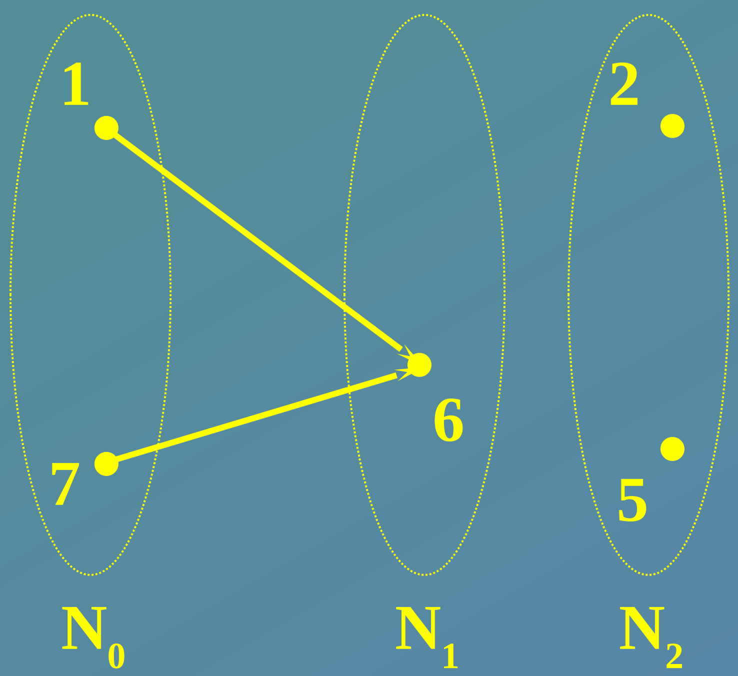

2
3
4
5

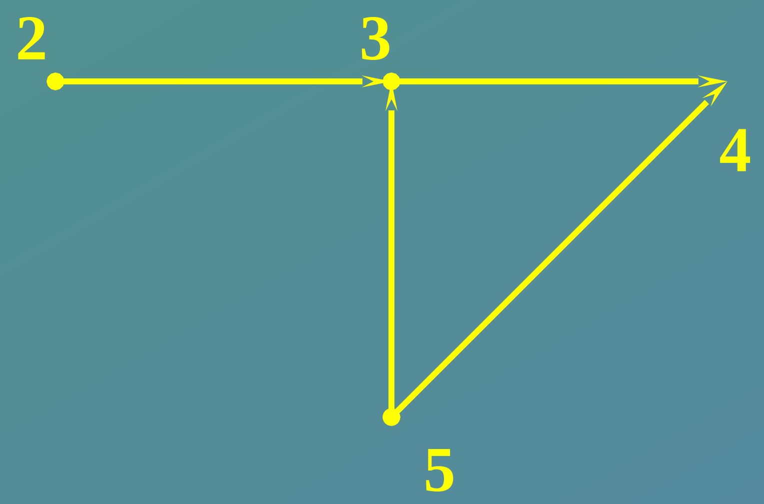

1
7
6
2
5
N_0
N_1

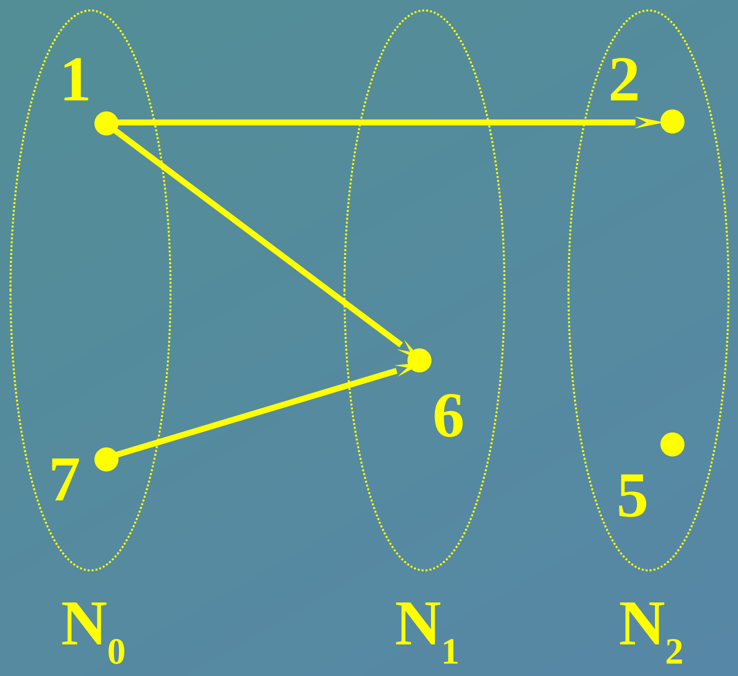

2
3
4
5

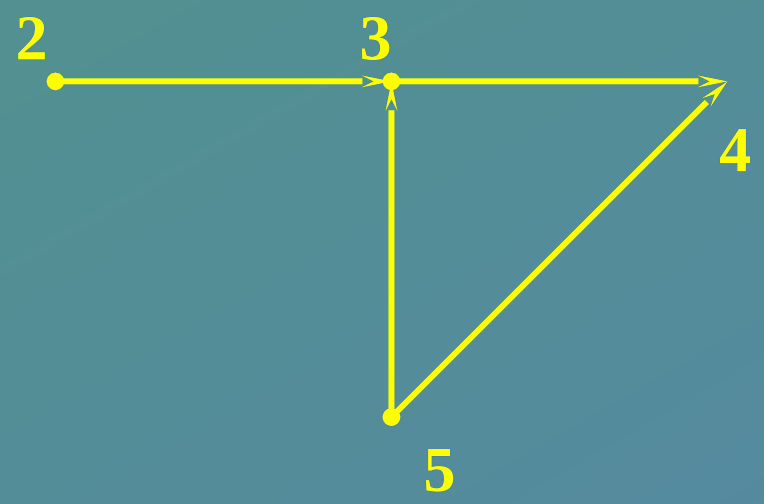

1
7
6
2
5
N_0
N_1

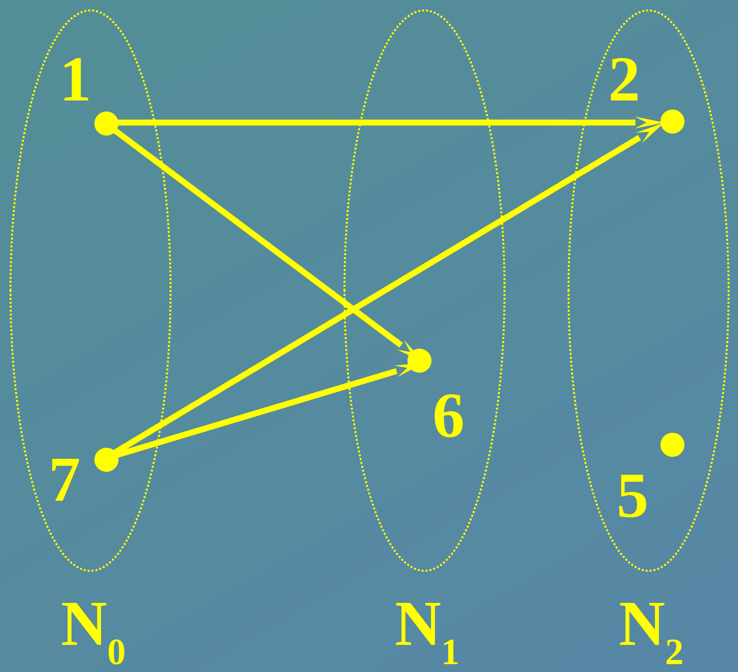

2
3
4
5

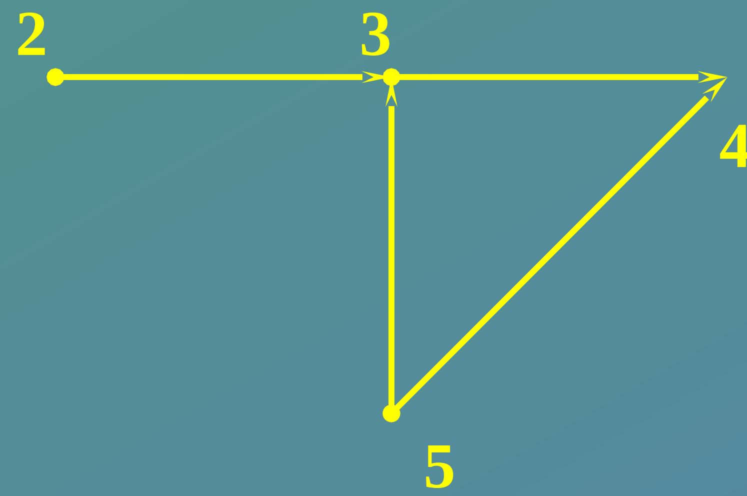

1
7
6
2
5
N0
N1
N2

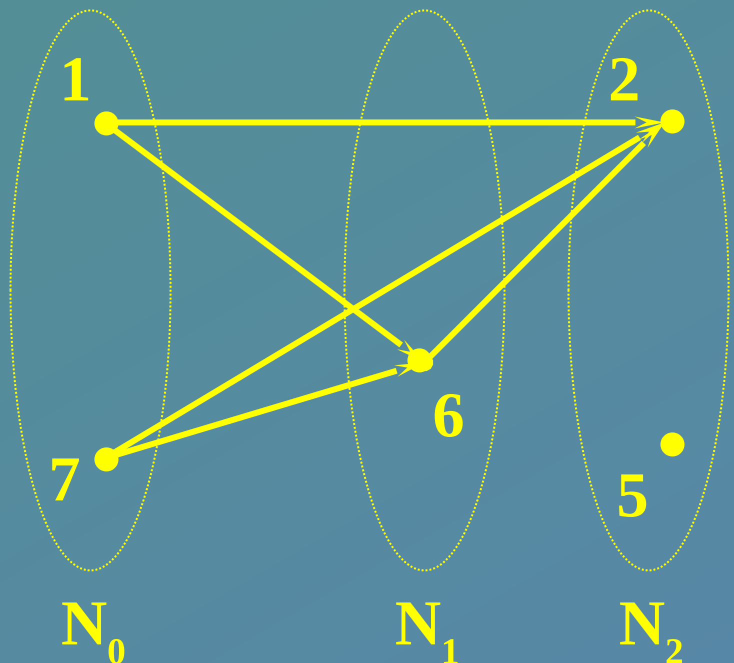

2
3
4
5

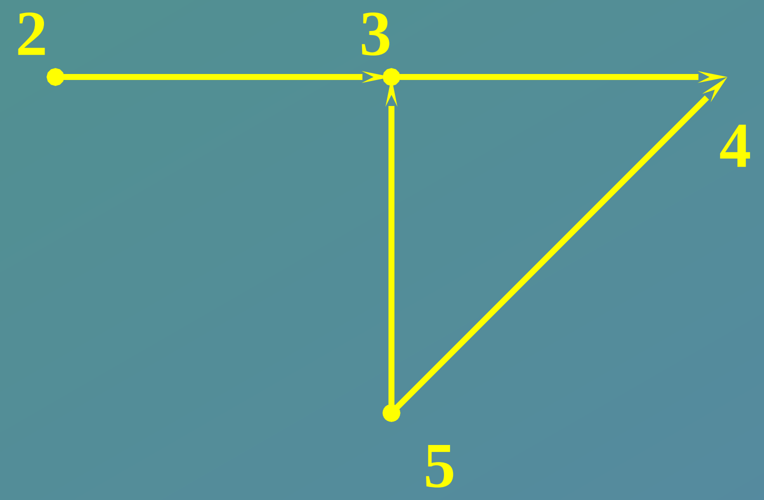

1
2
6
7
5
N0
N1
N2

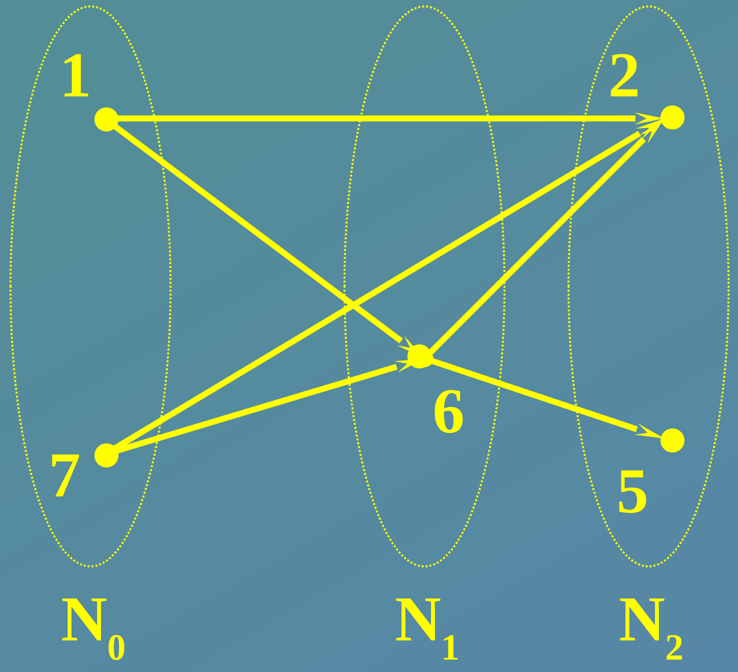

2
3
4
5

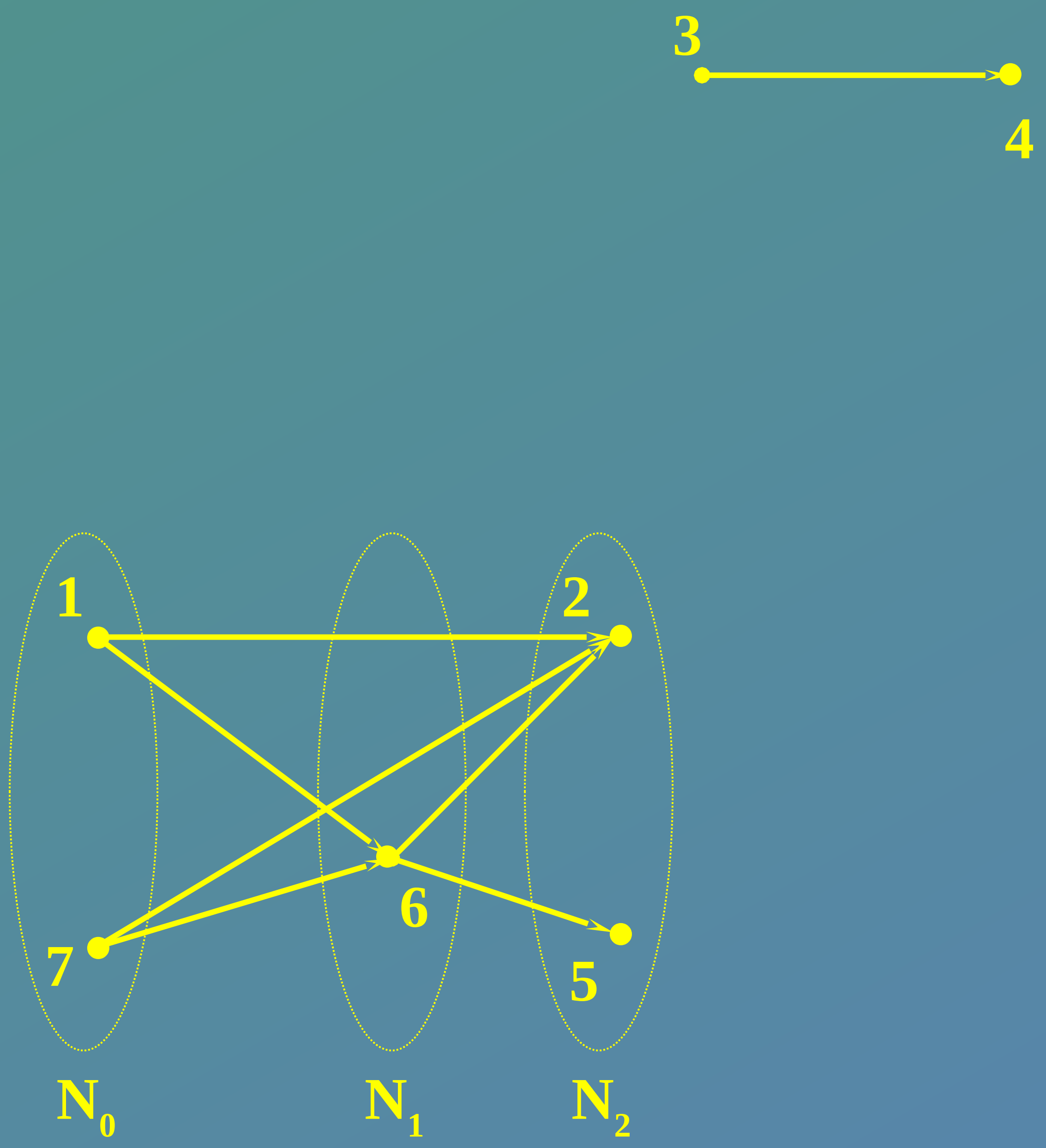

1
2
6
7
5
N_0
N_1
N_2


2
3
4
5

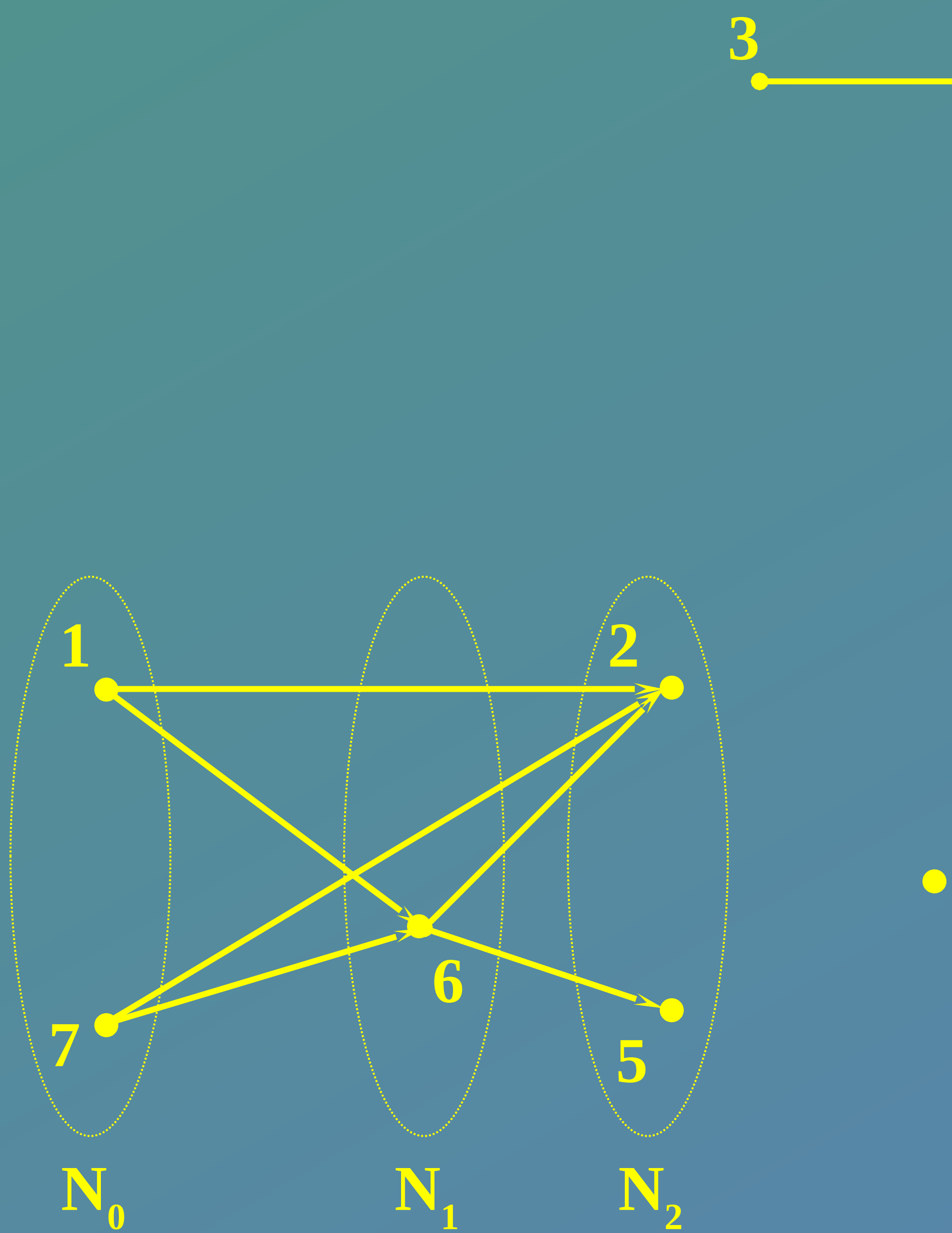

1
2
6
7
5
N_0
N_1
N_2

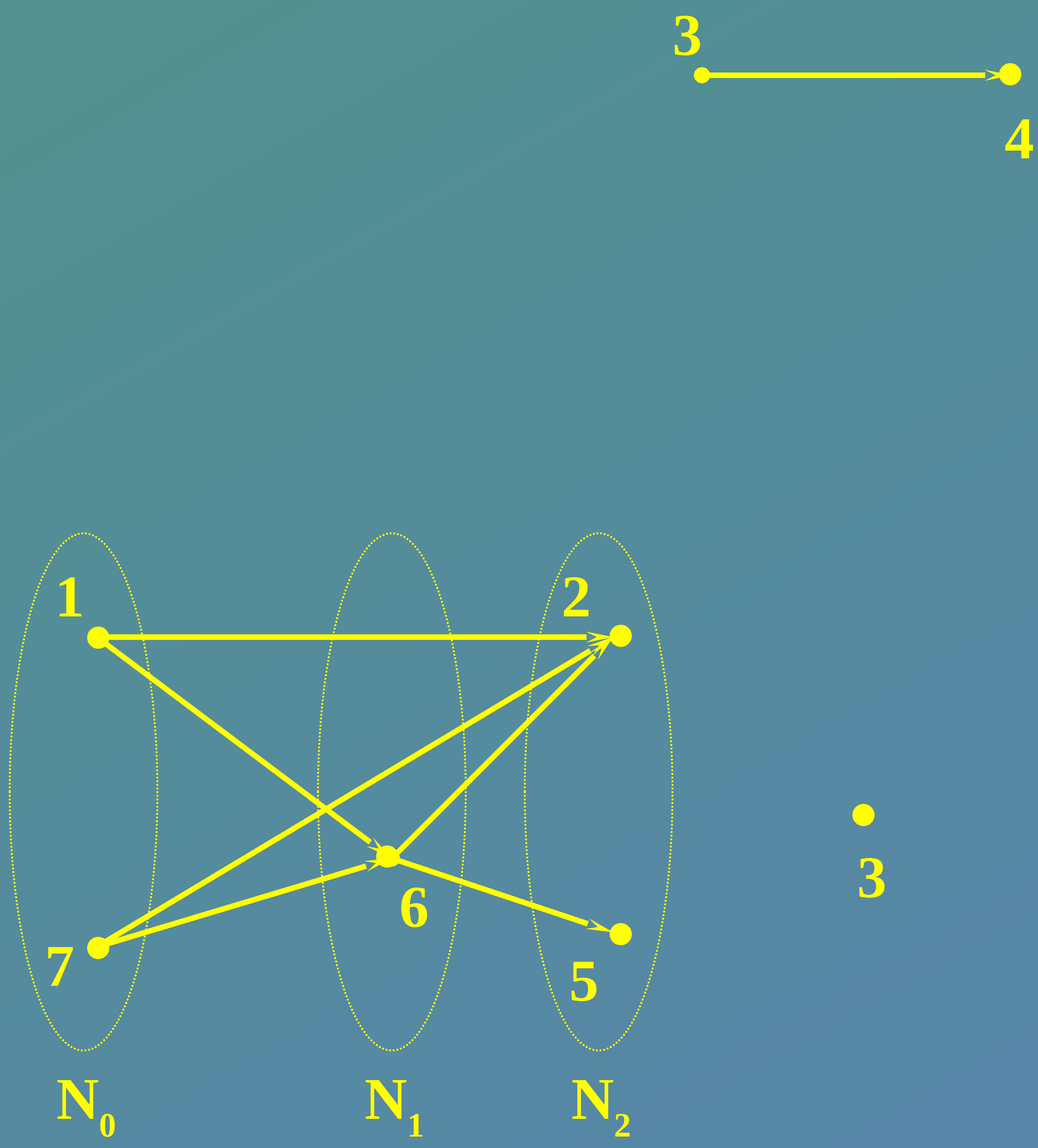

2
3
4
5


1
2
6
7
5
N_0
N_1
N_2



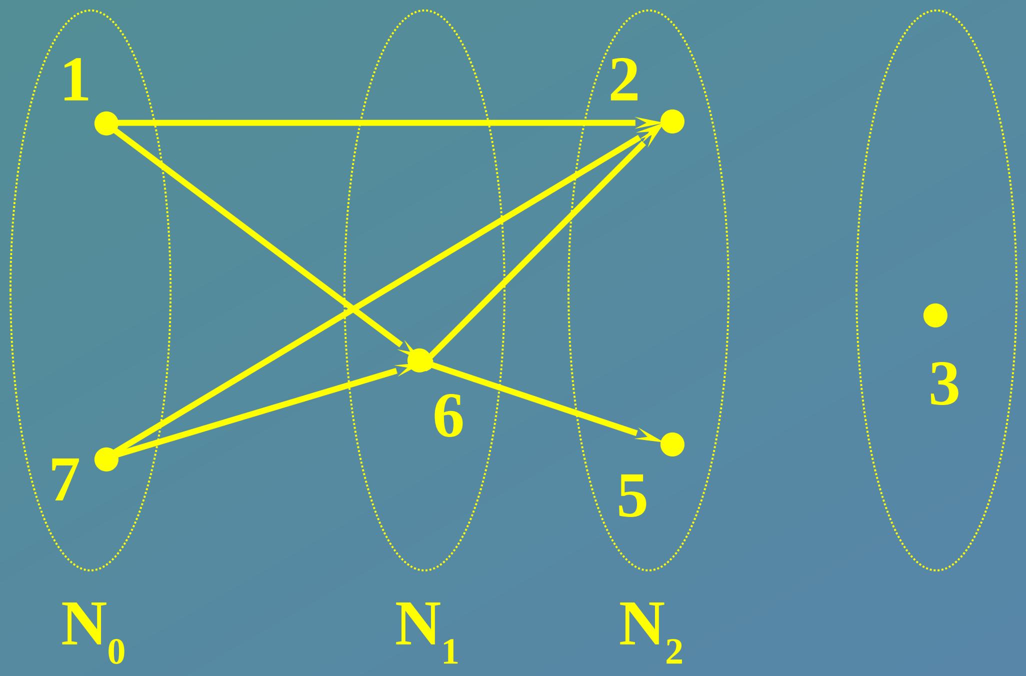
3
4
1
2
6
7
5
N_0
N_1
N_2

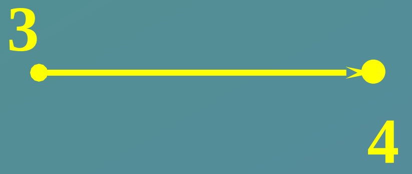

3
4
1
2
6
7
5
N_0
N_1
N_2

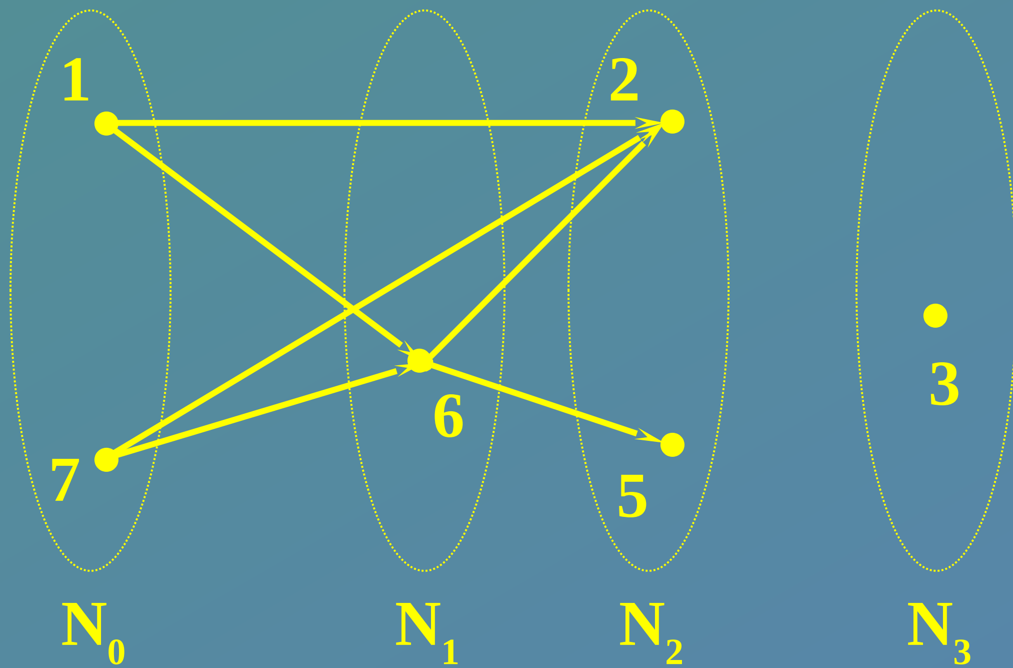


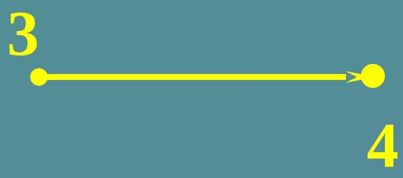
3
4
1
2
6
7
5
3
N_0
N_1
N_2

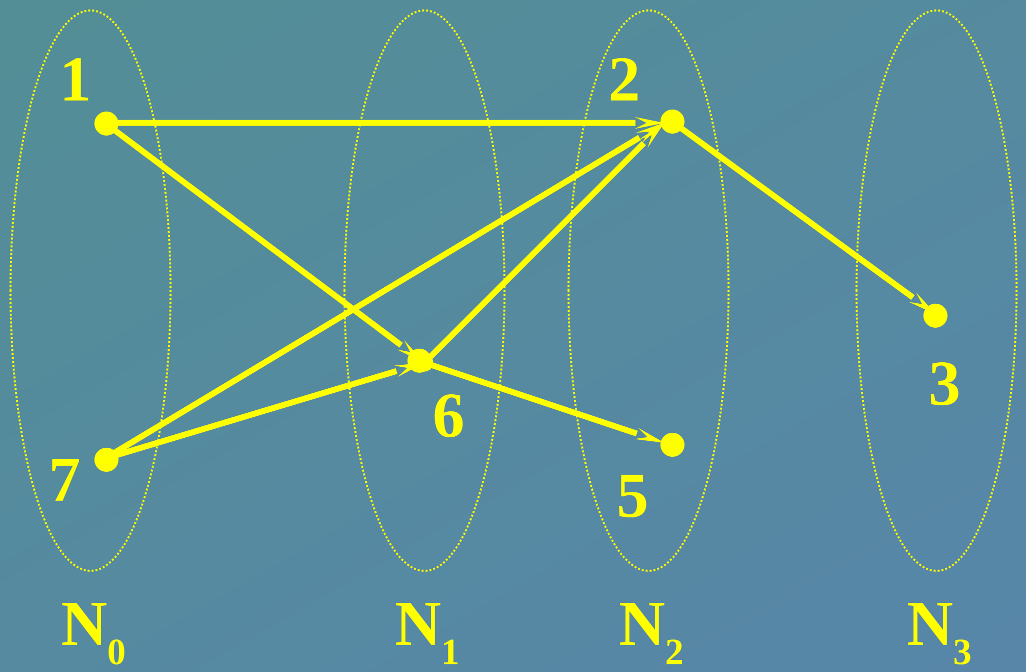

3
4

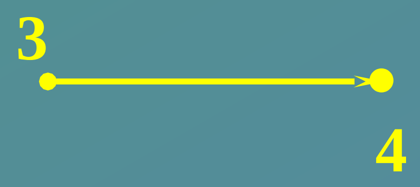

1
2
6
7
5
3
N_0
N_1
N_2

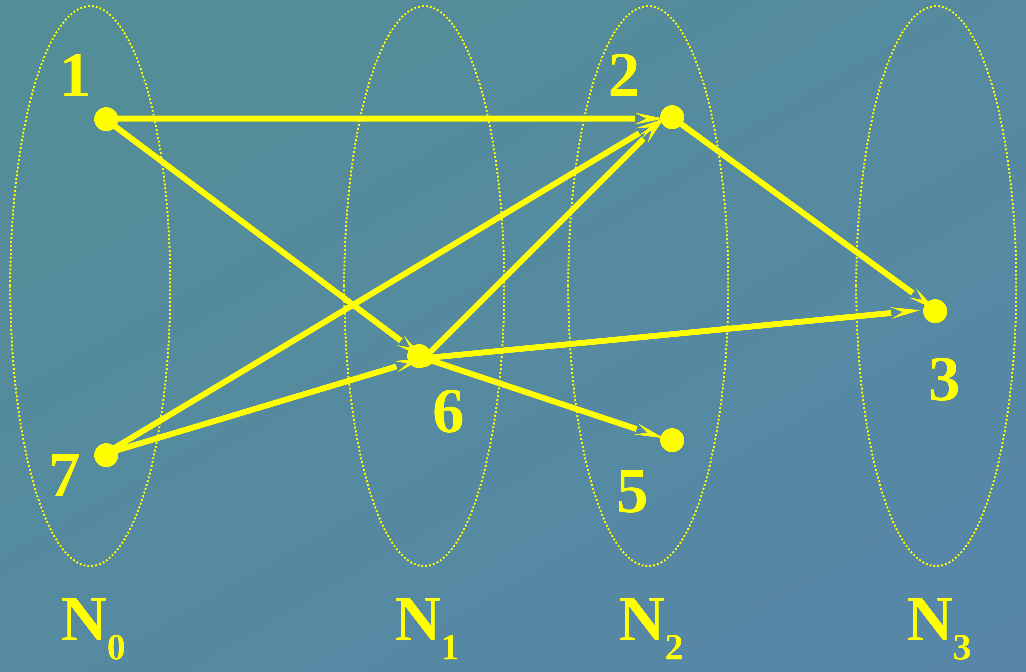

3
4

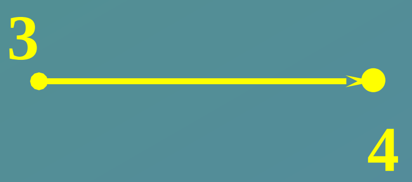

1
2
6
7
5
3
N_0
N_1
N_2
N_3

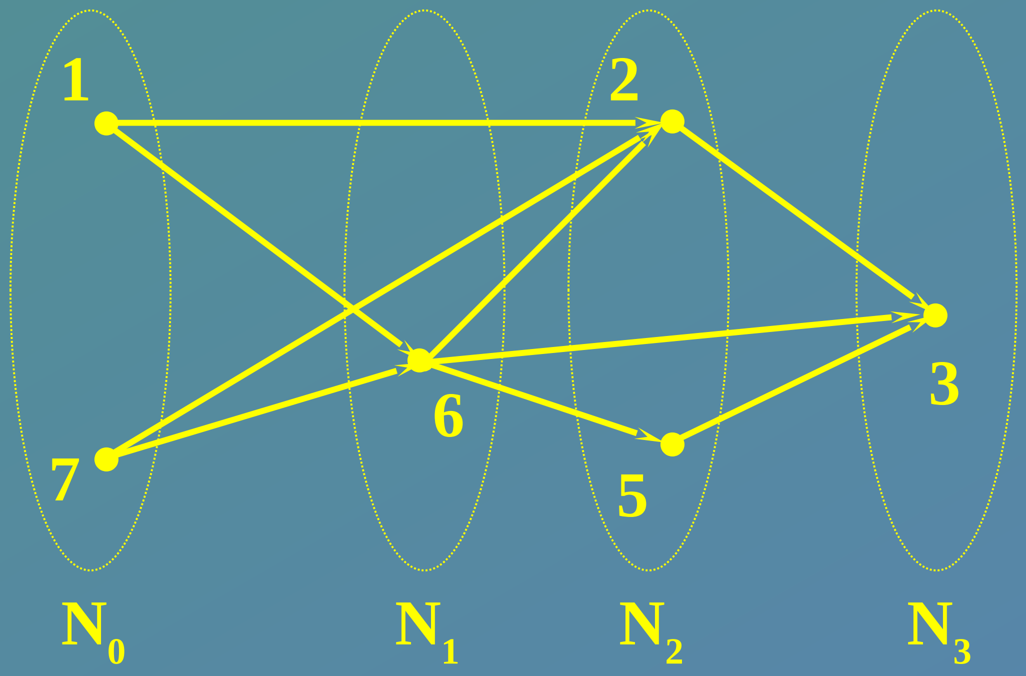

3
4

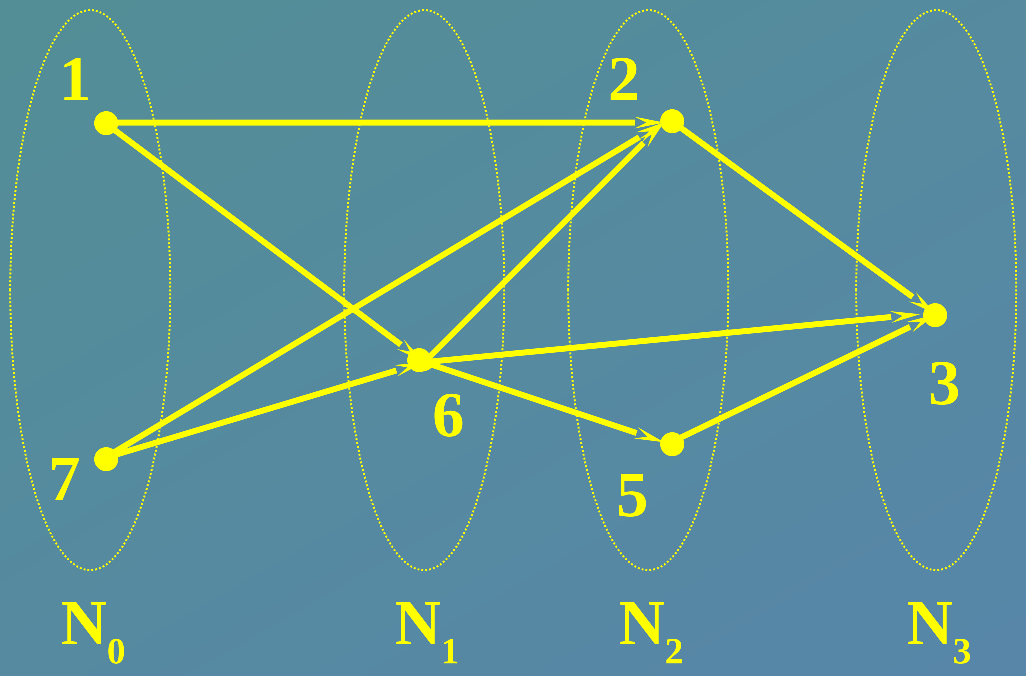

1
2
6
3
7
5
N_0
N_1
N_2
N_3

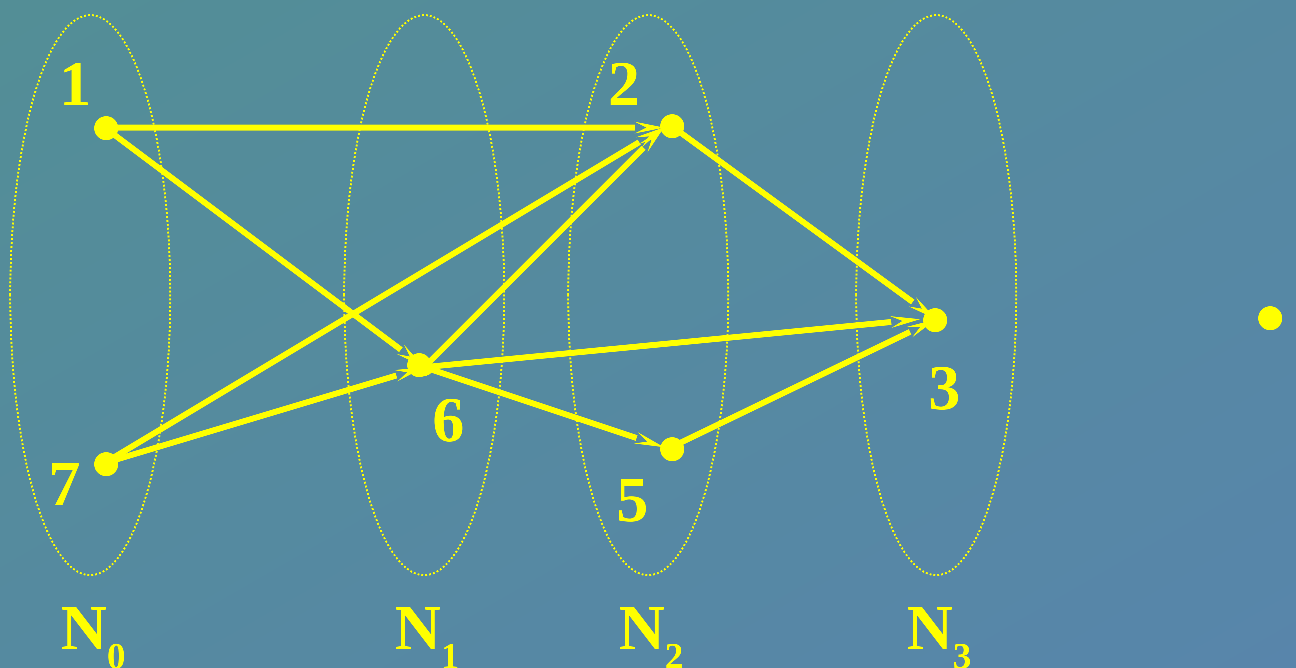

3
4

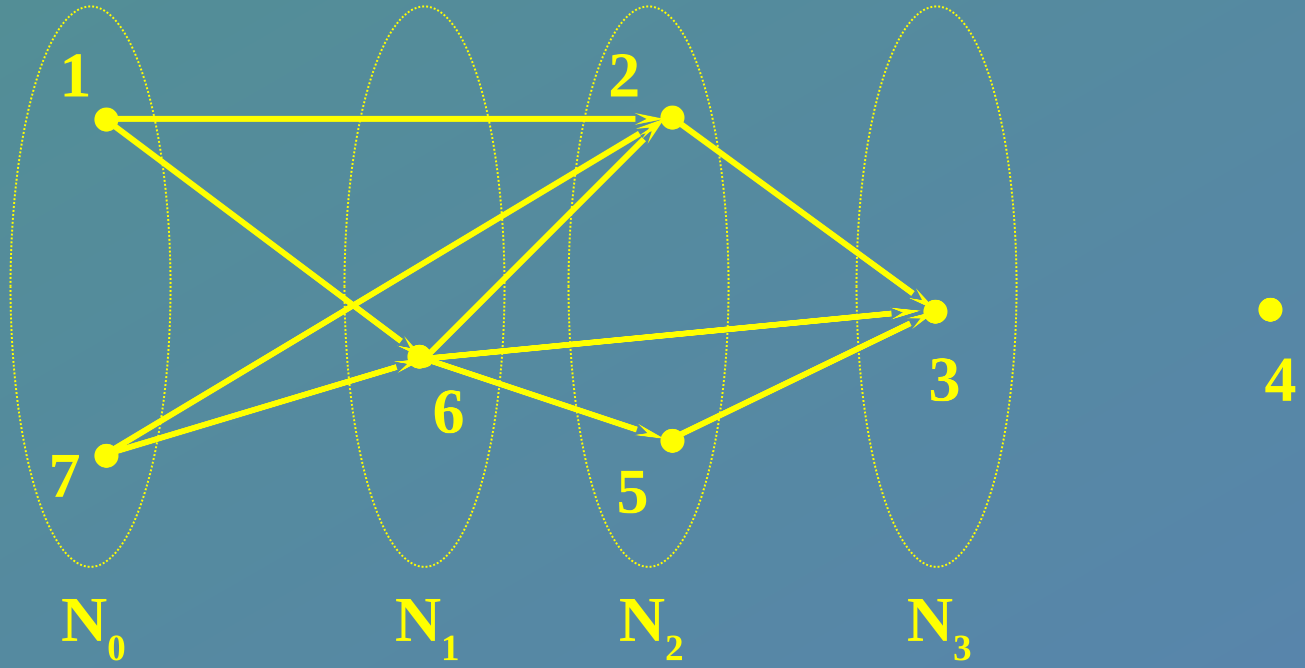

1
2
3
6
7
5
N_0
N_1
N_2
N_3

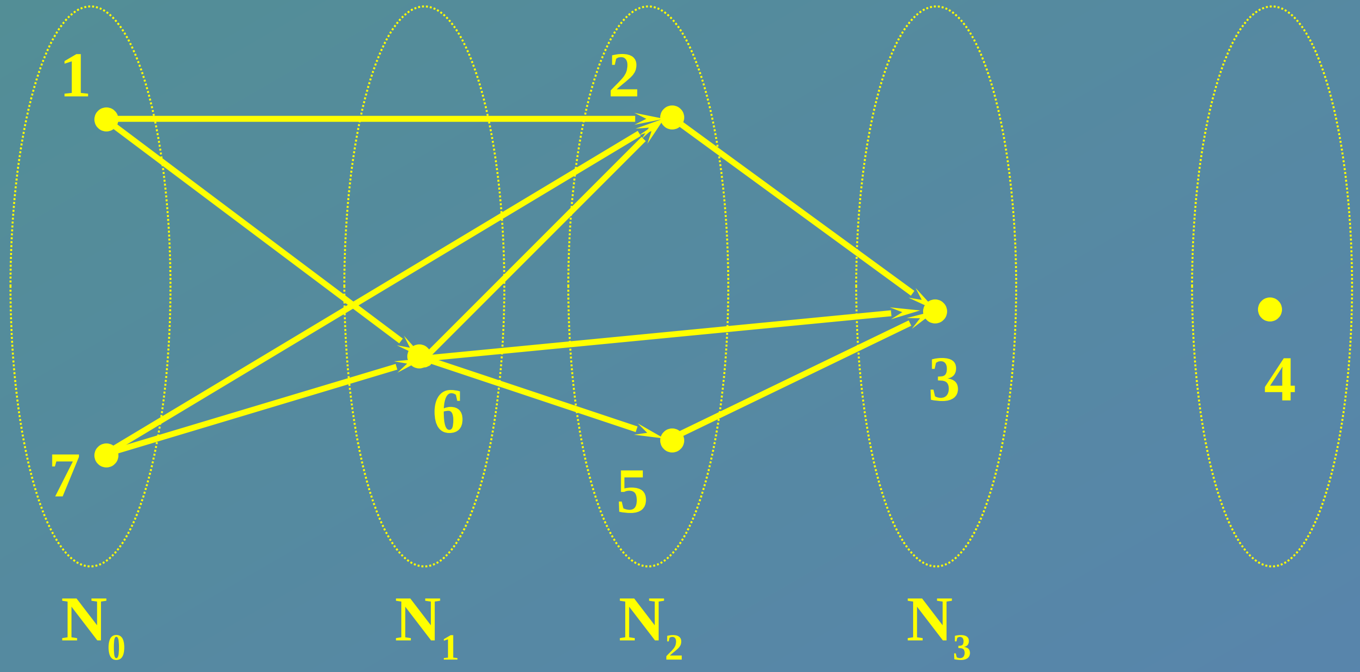

3
4

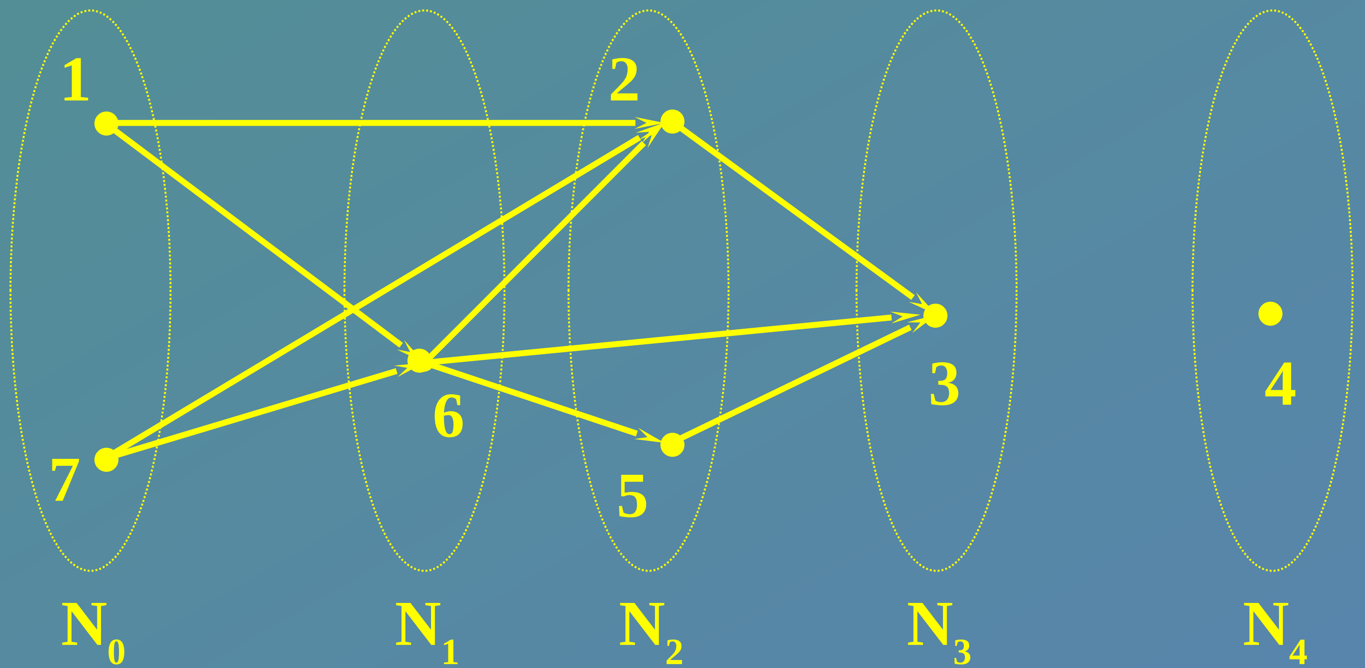

1
2
6
3
7
5
N_0
N_1
N_2
N_3

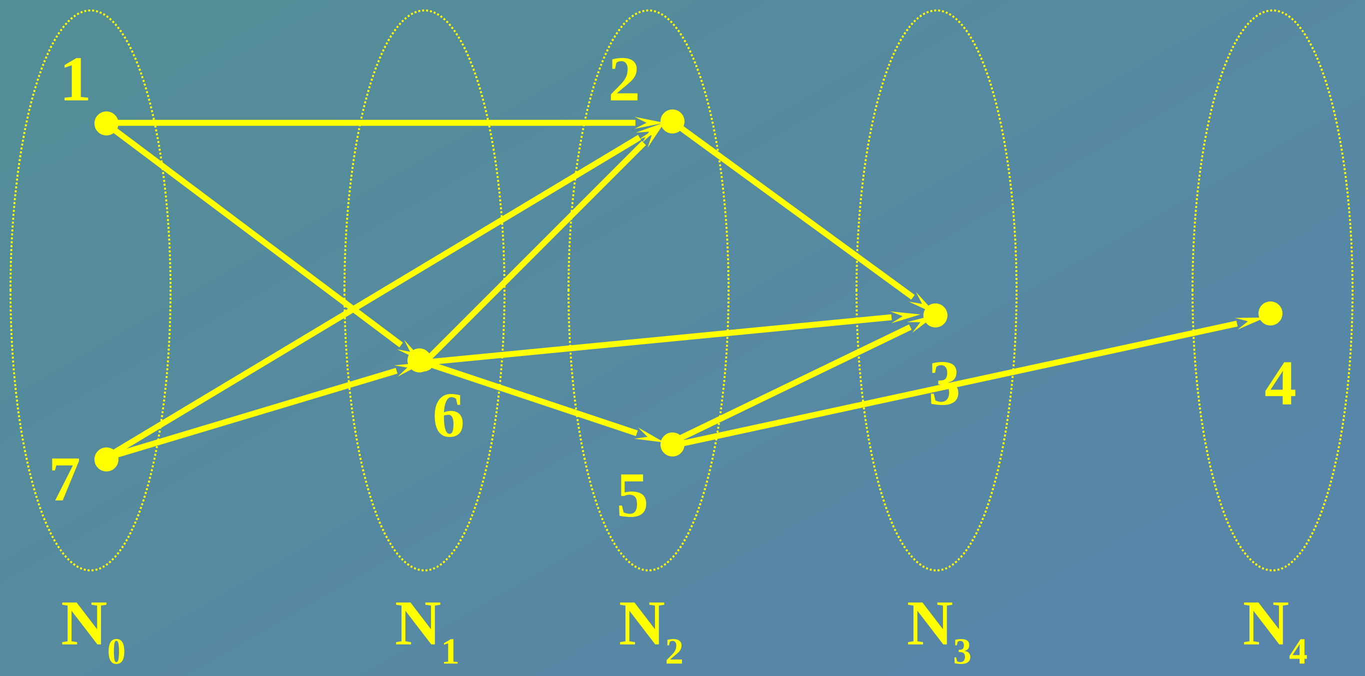

1
2
3
5
6
7
N_0
N_1
N_2
N_3


1
2
3
5
6
7
N0
N1
N2
N3

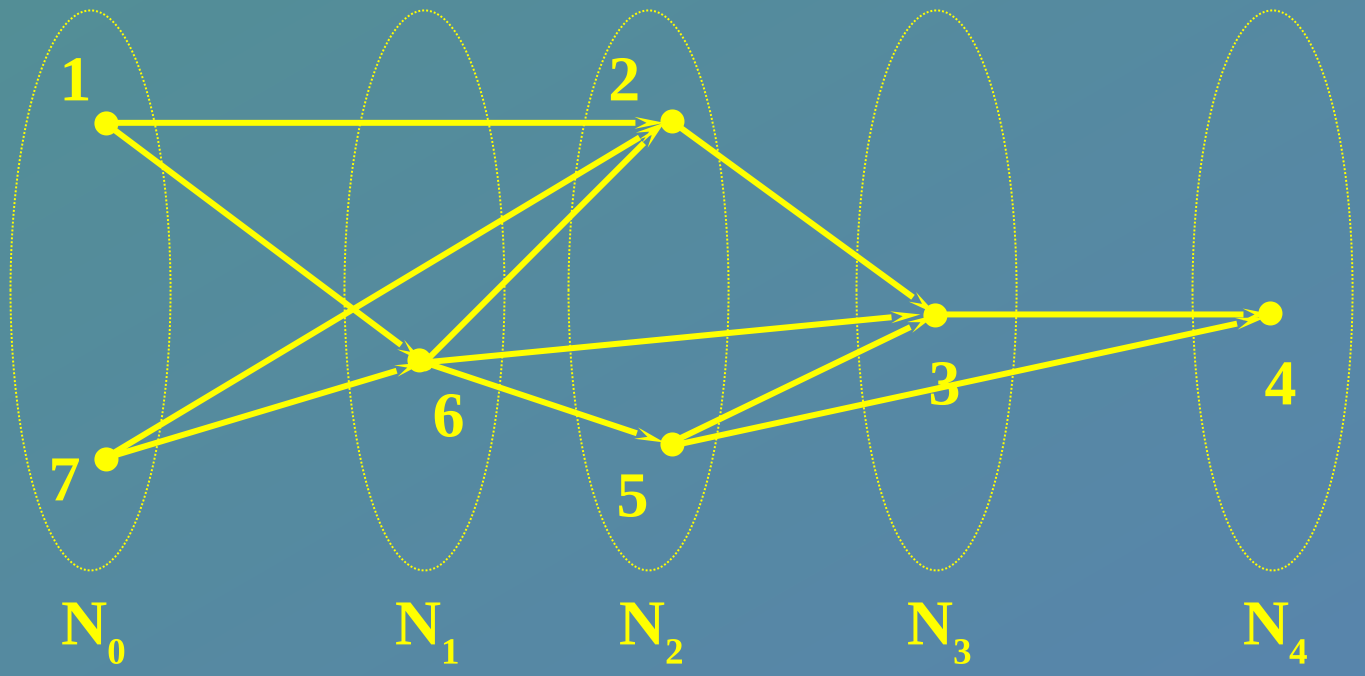

1
2
3
4
5
6
7
N0
N1
N2
N3

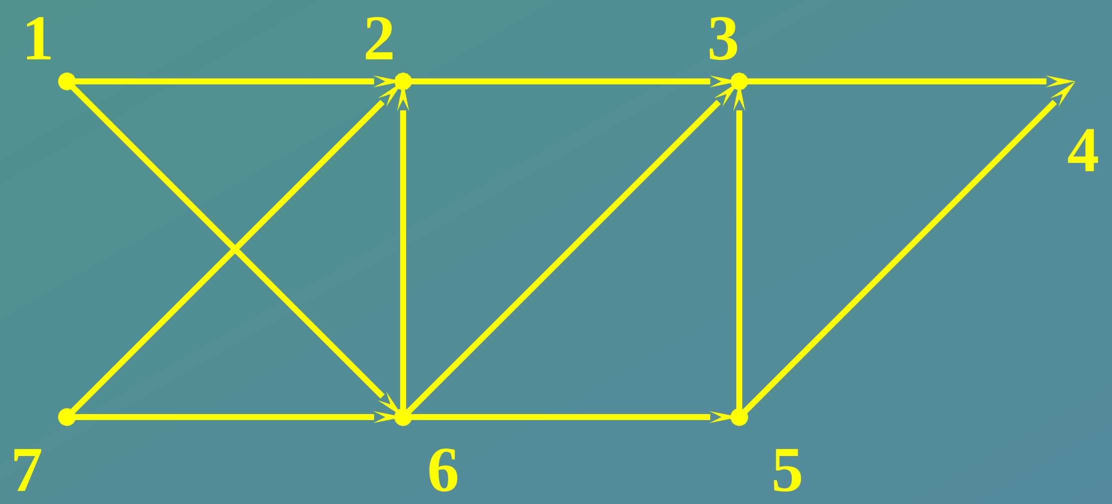

1
2
3
4
5
6
7
N_0
N_1
N_2
N_3

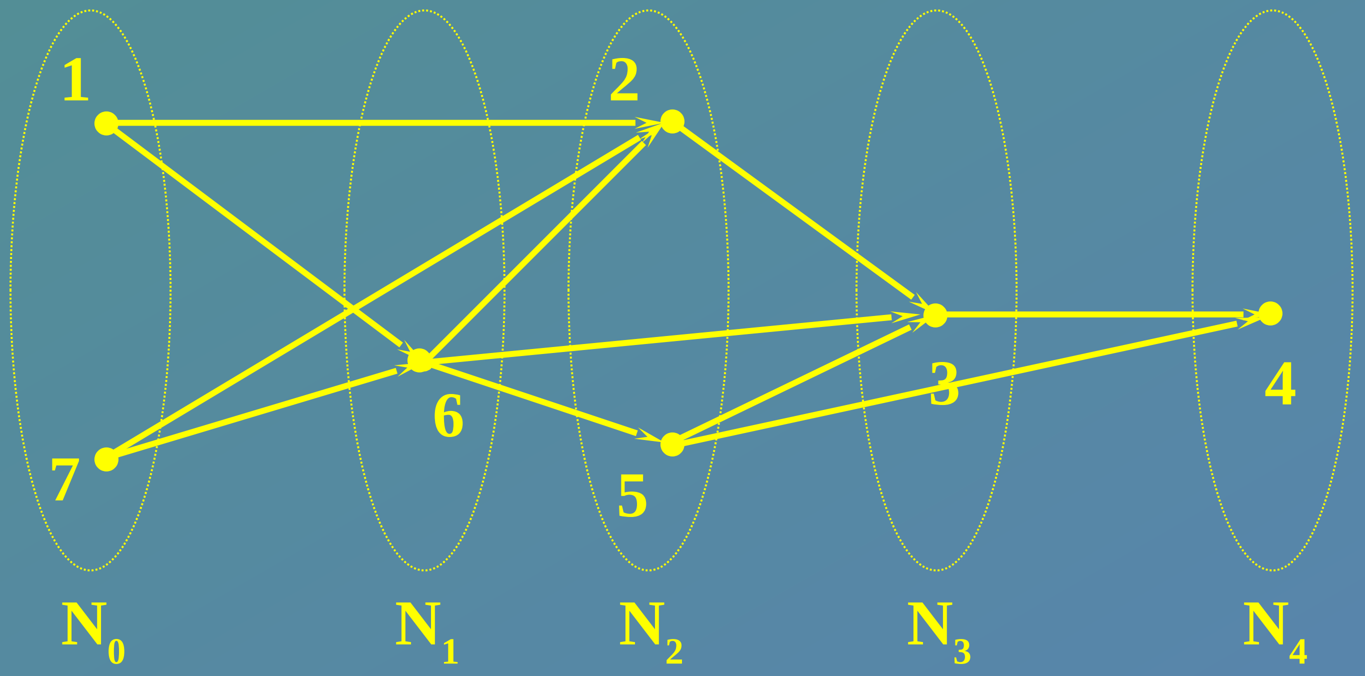

1
2
6
3
4
7
5
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4



1
2
3
4
5
6
7
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4


1
2
7
6
5
3
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4


1
2
3
4
7
6
5


1
2
6
7
5
3
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

Dans les graphes sans circuit il est possible de réaliser un

Dans les graphes sans circuit il est possible de réaliser un

tri topologique,

Dans les graphes sans circuit il est possible de réaliser un

tri topologique,

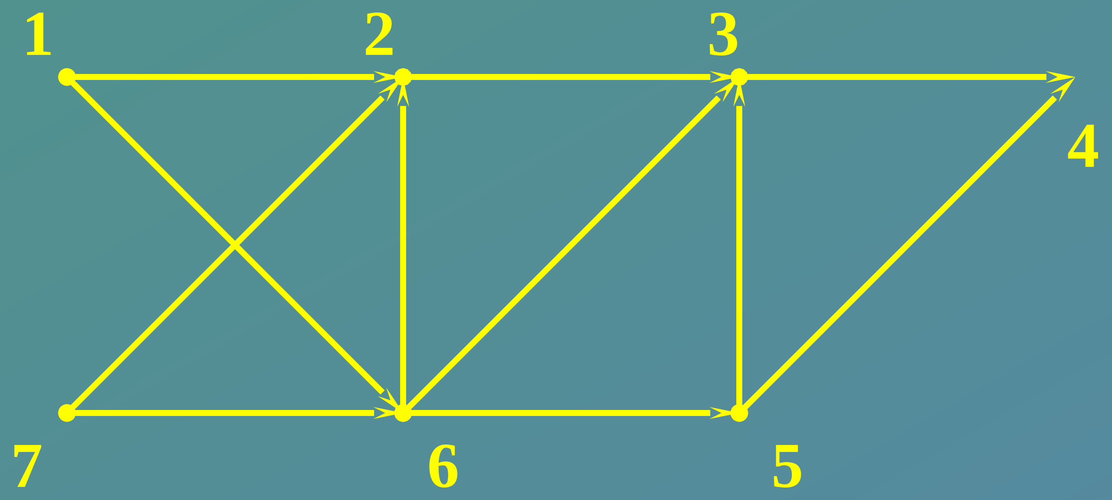
c’est-à-dire d’affecter des numéros différents aux sommets du graphe de telle façon que, quels que soient deux sommets *x* et *y*,

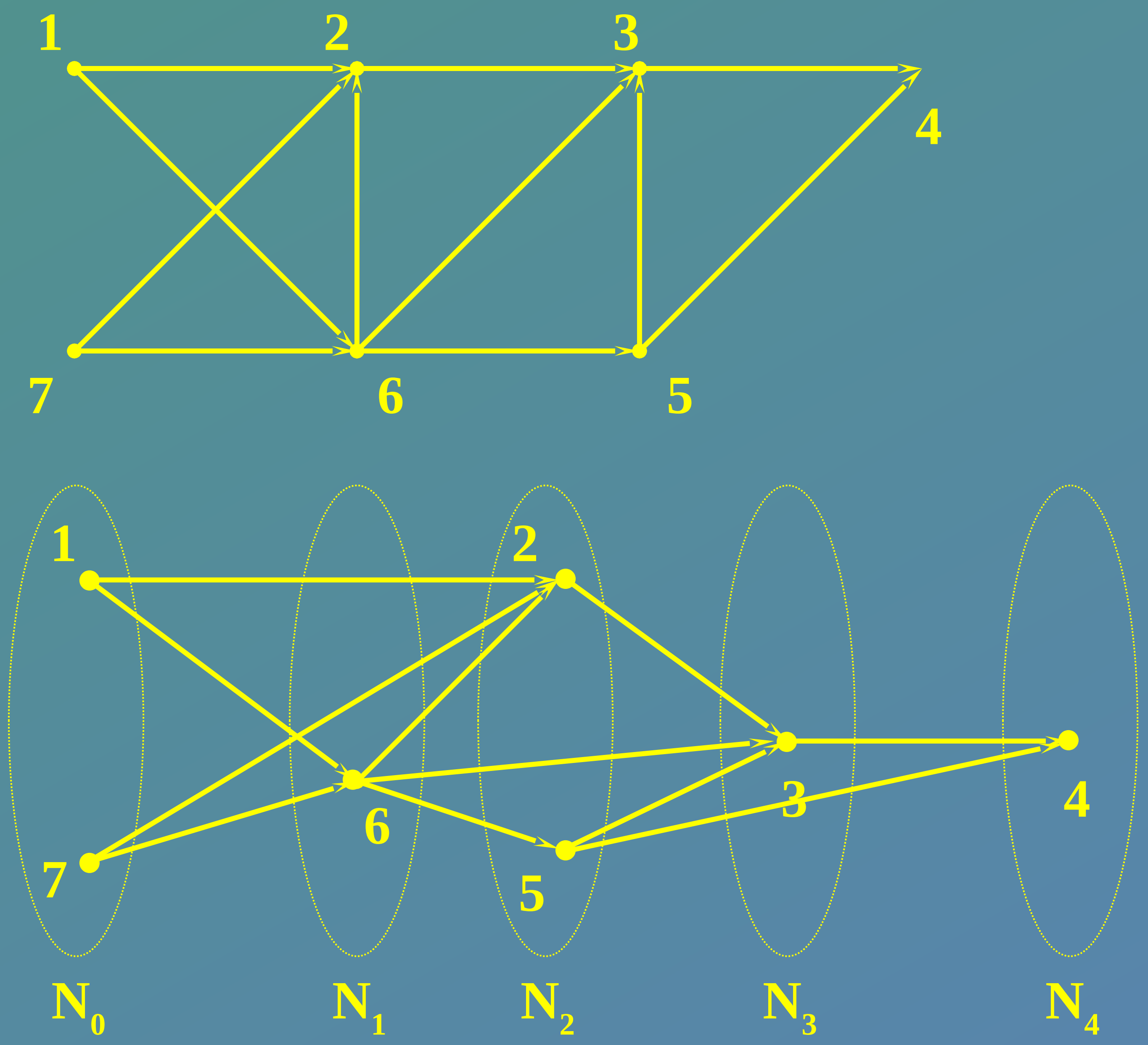
Dans les graphes sans circuit il est possible de réaliser un

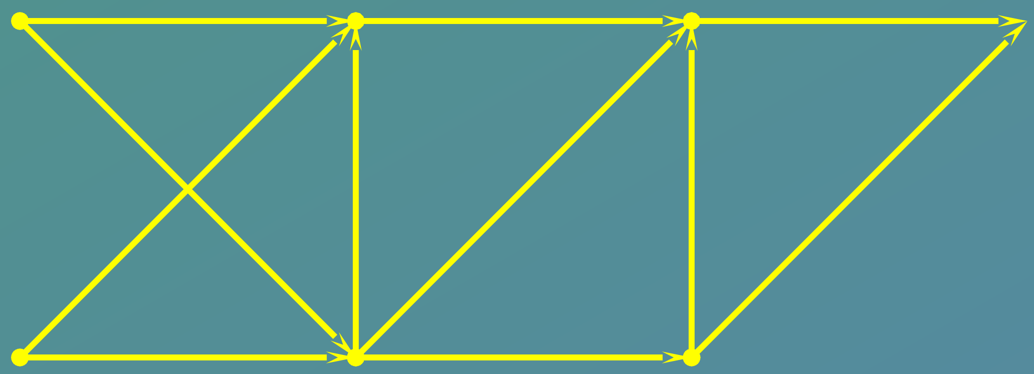
tri topologique,

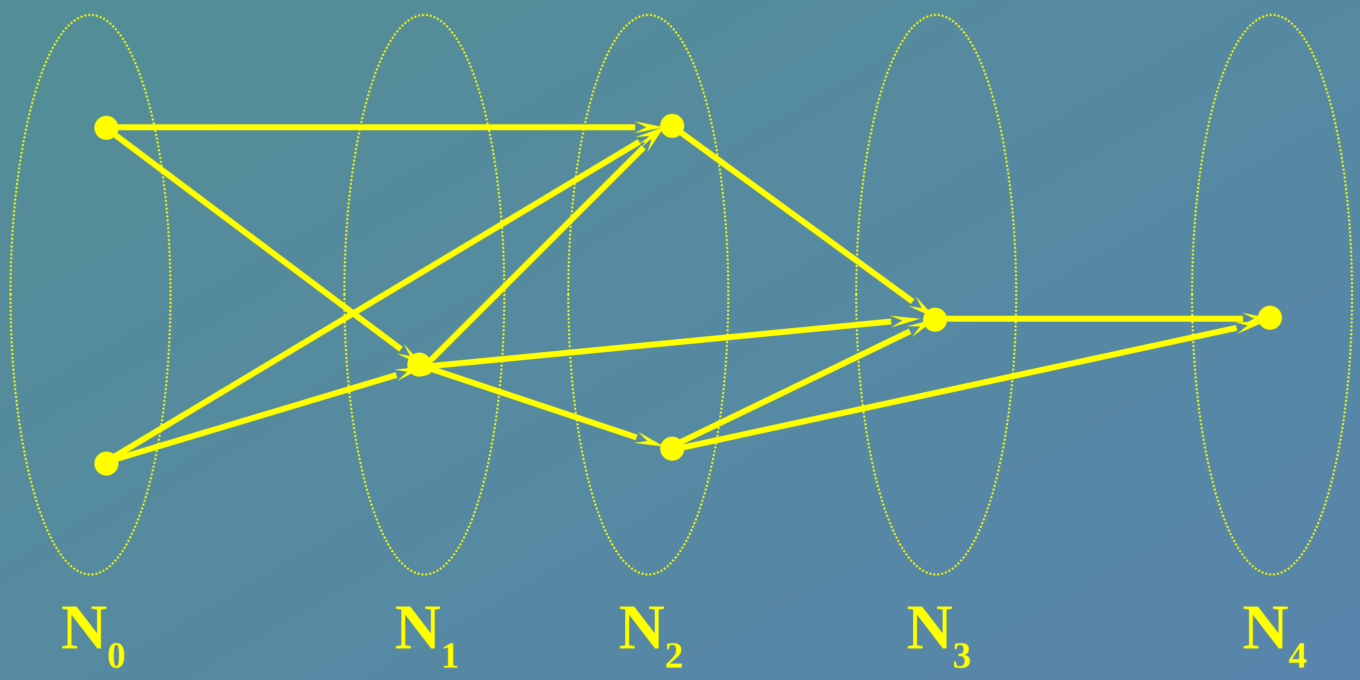
c’est-à-dire d’affecter des numéros différents aux sommets du graphe de telle façon que, quels que soient deux sommets *x* et *y*,

si *(x, y)* est un arc du graphe, alors $n(x) < n(y)$.

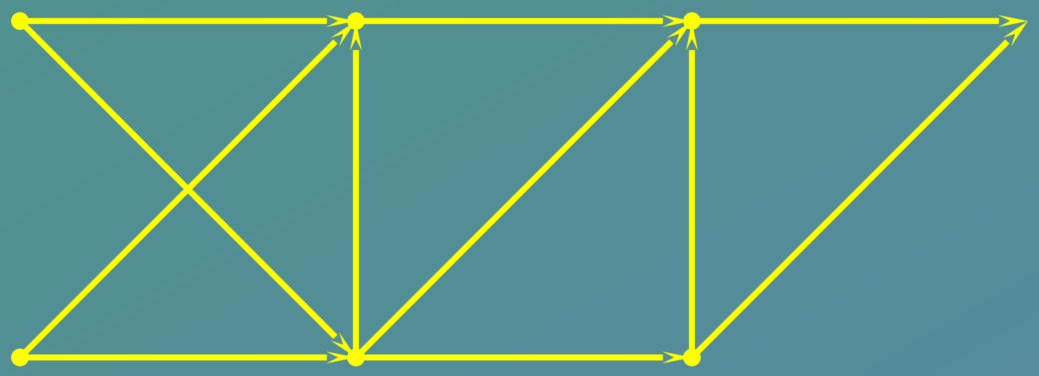

1
2
3
4
7
6
5

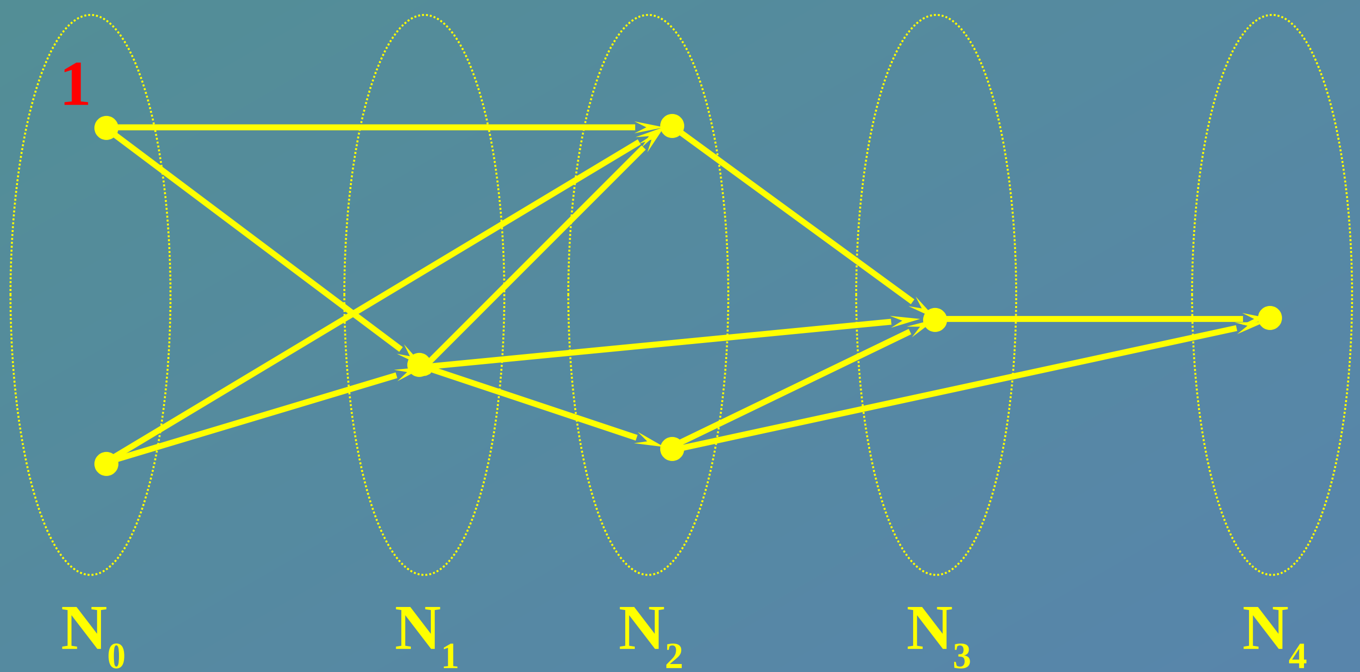

1
2
3
4
7
6
5
1
2
6
7
5
3
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

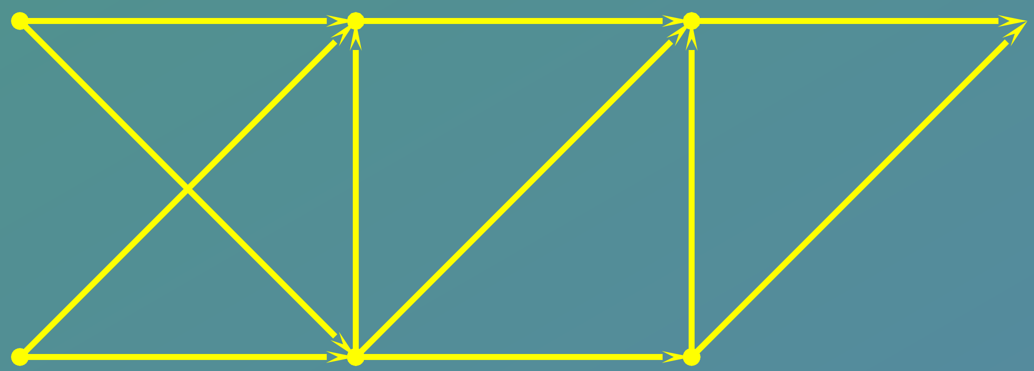


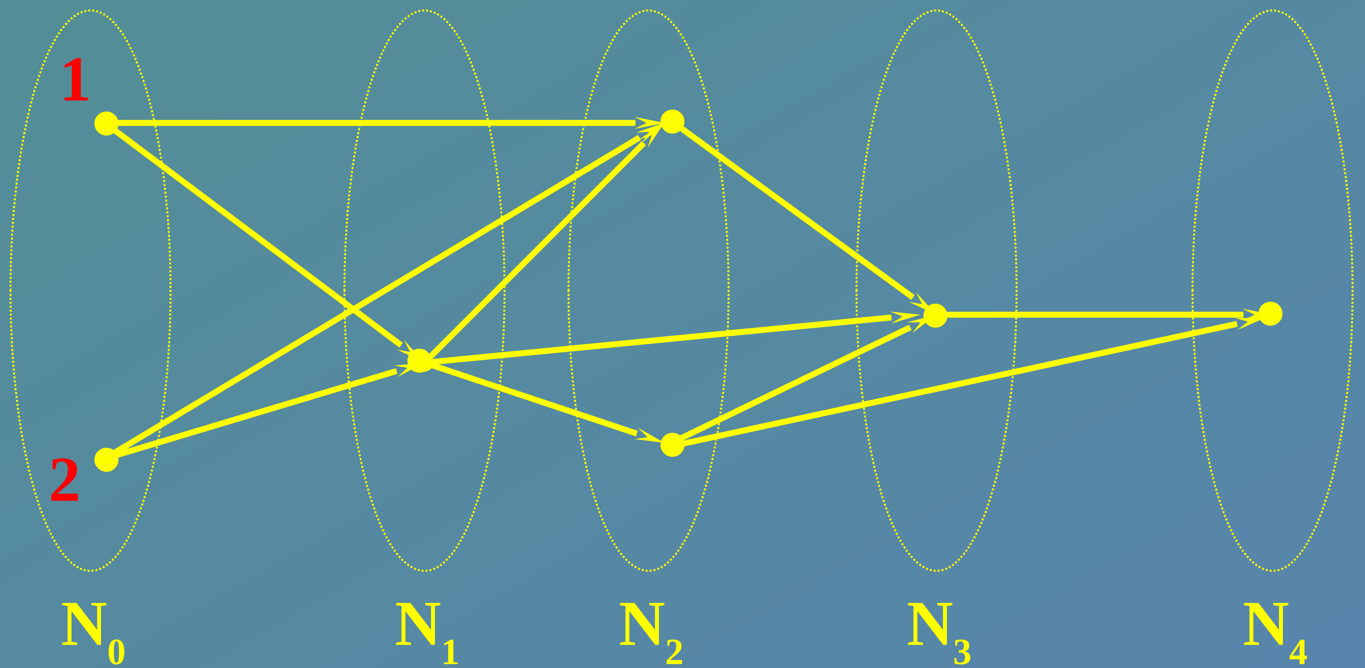


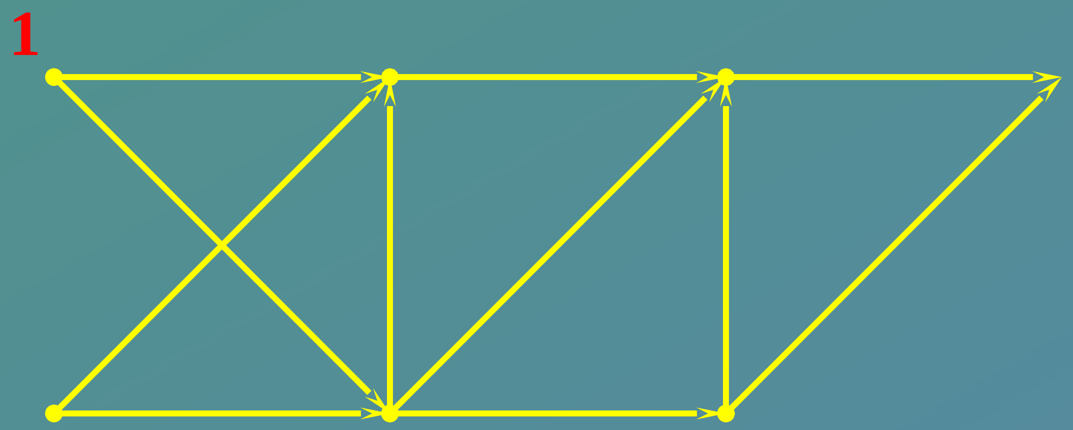
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

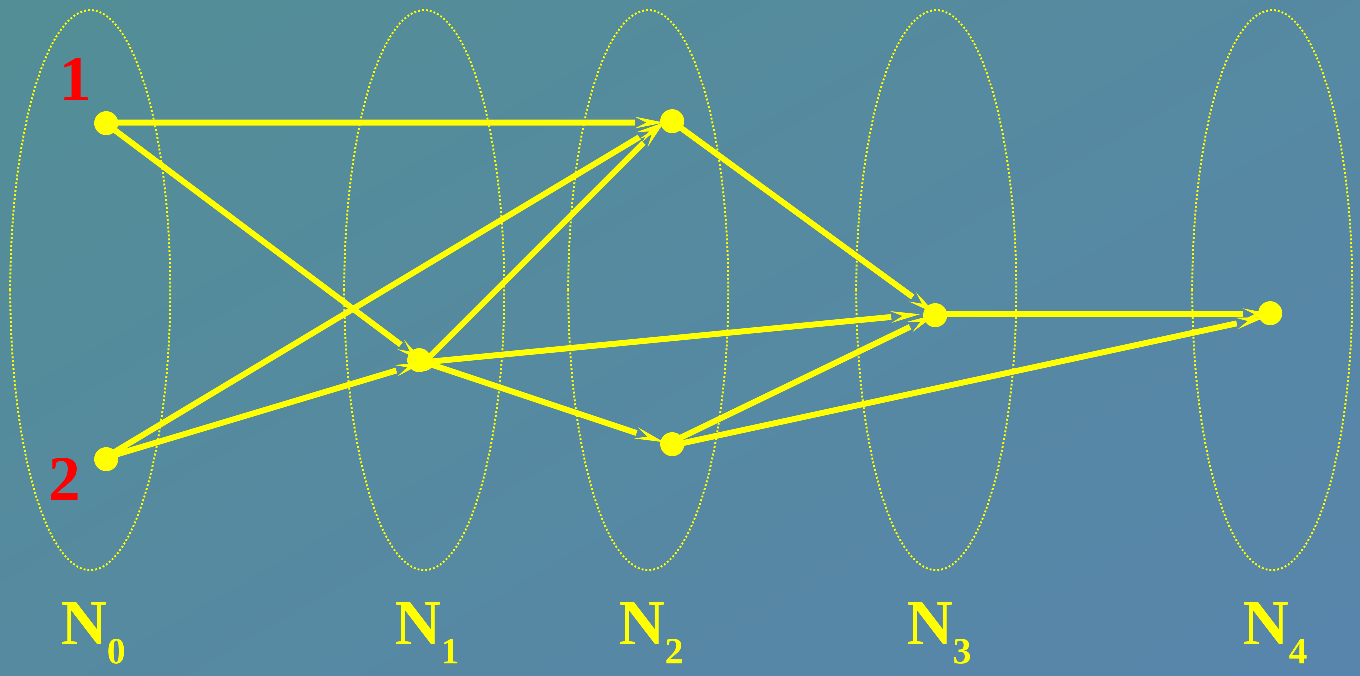


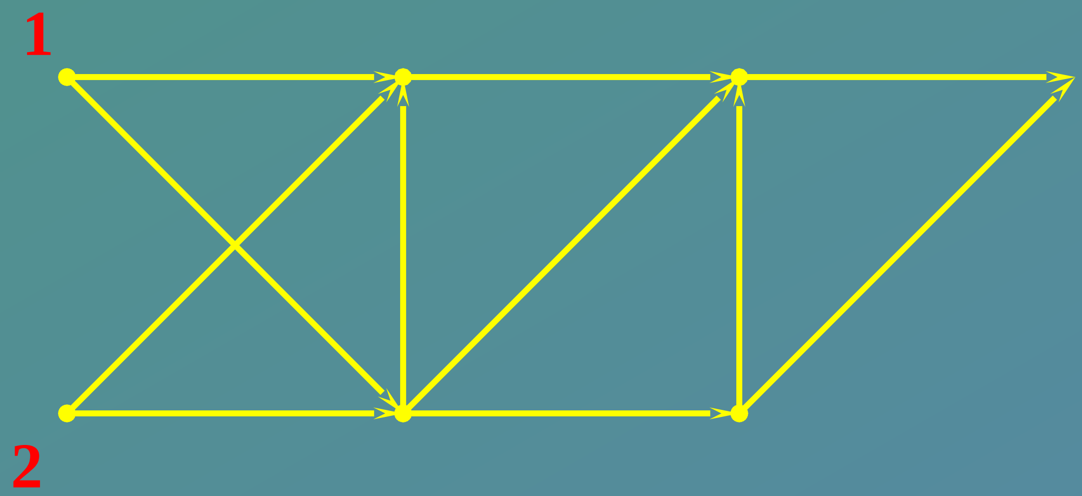

1
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

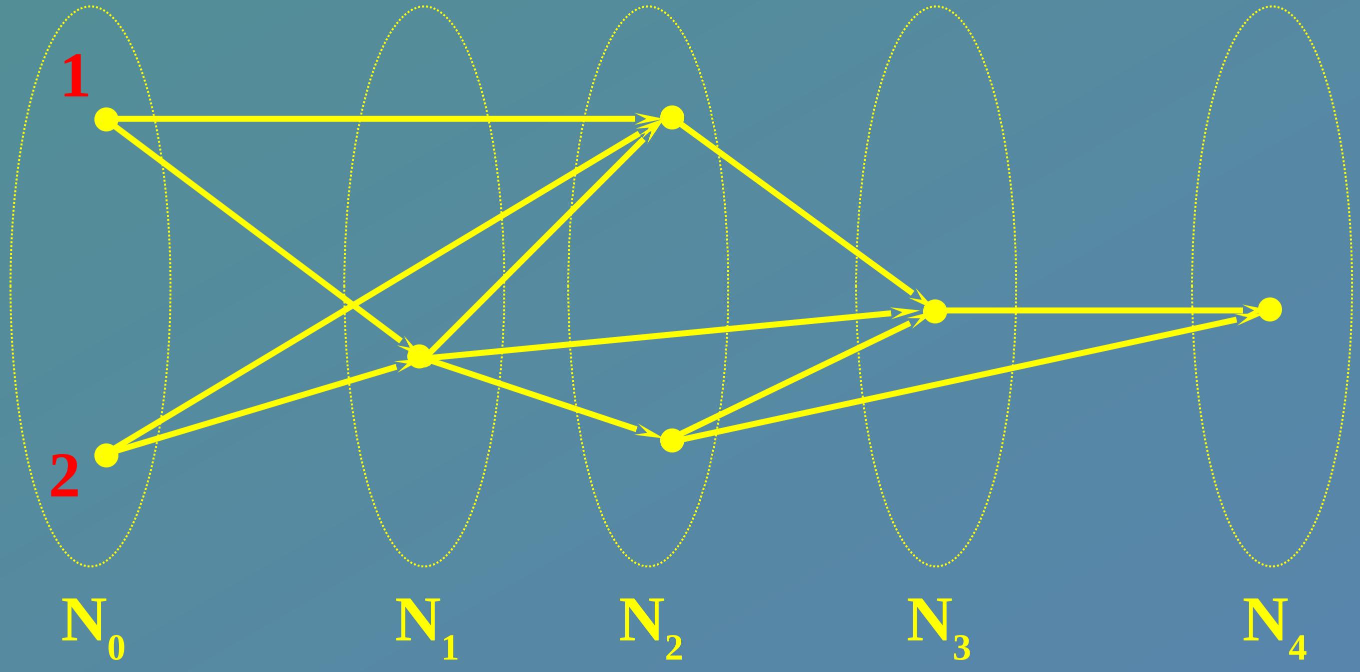


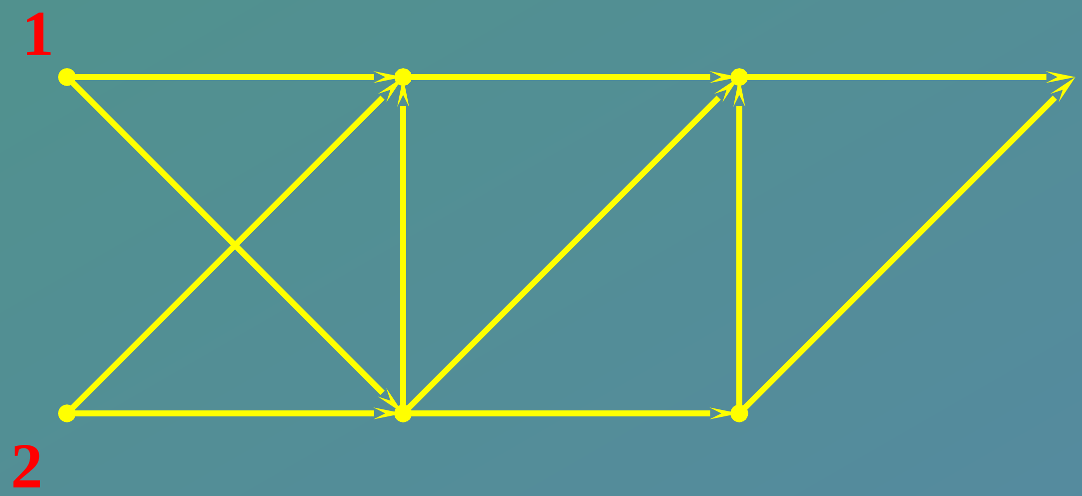

1
2
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

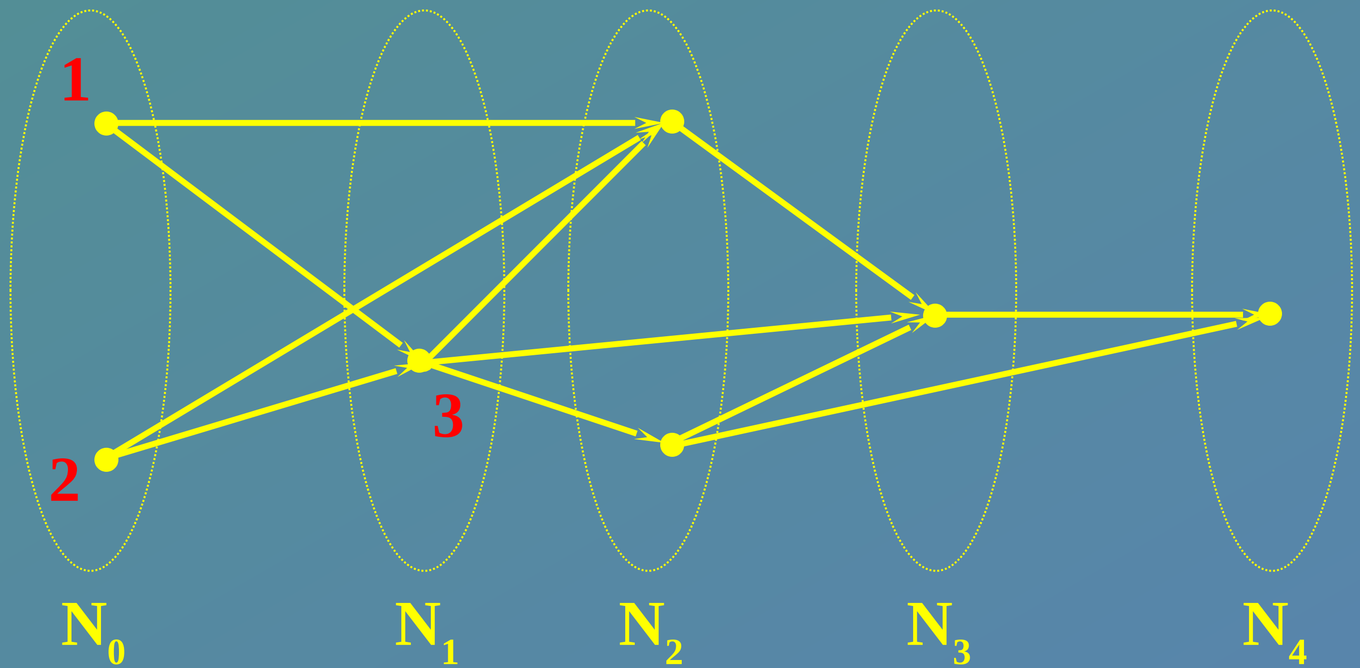

1

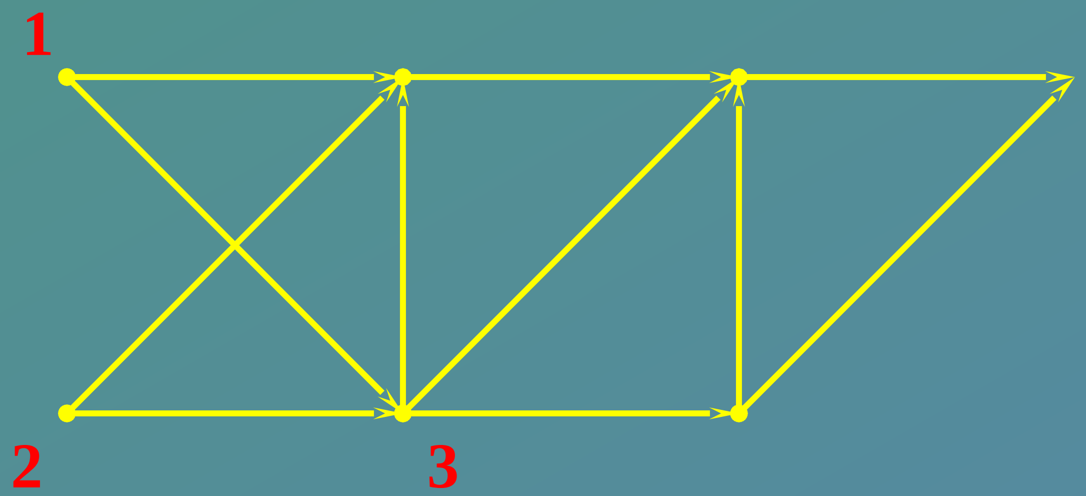

1
2
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

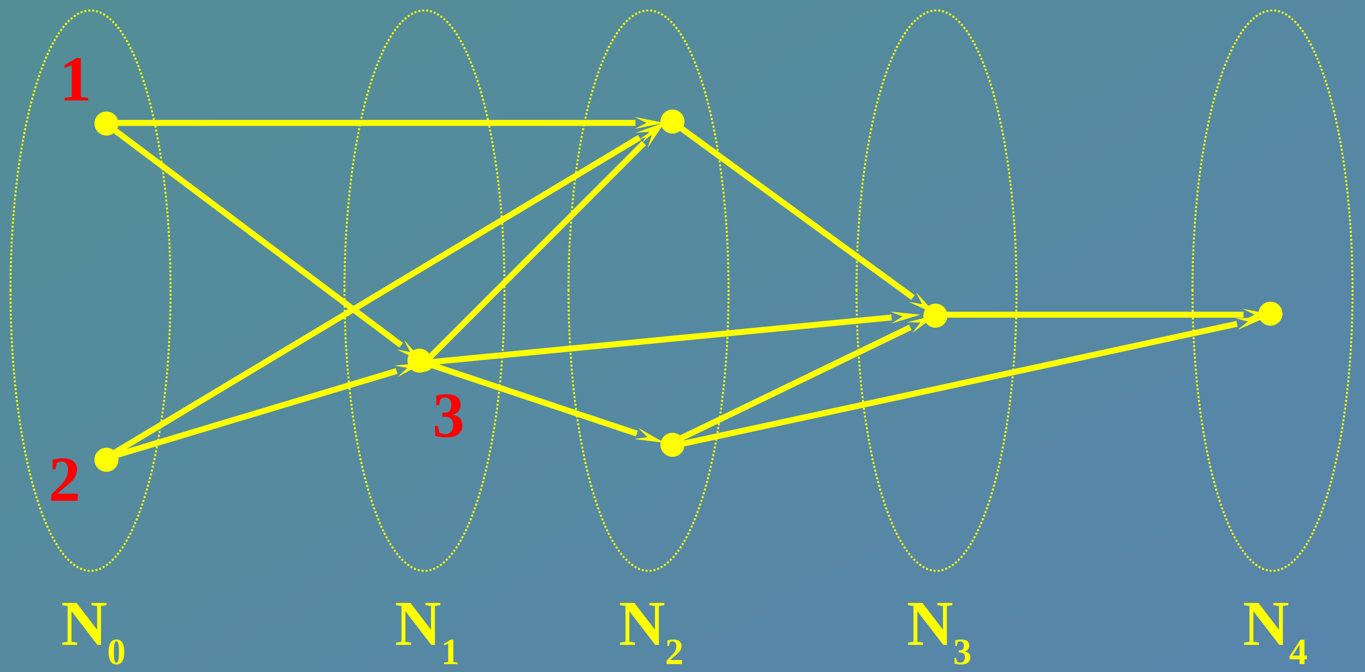

1
2

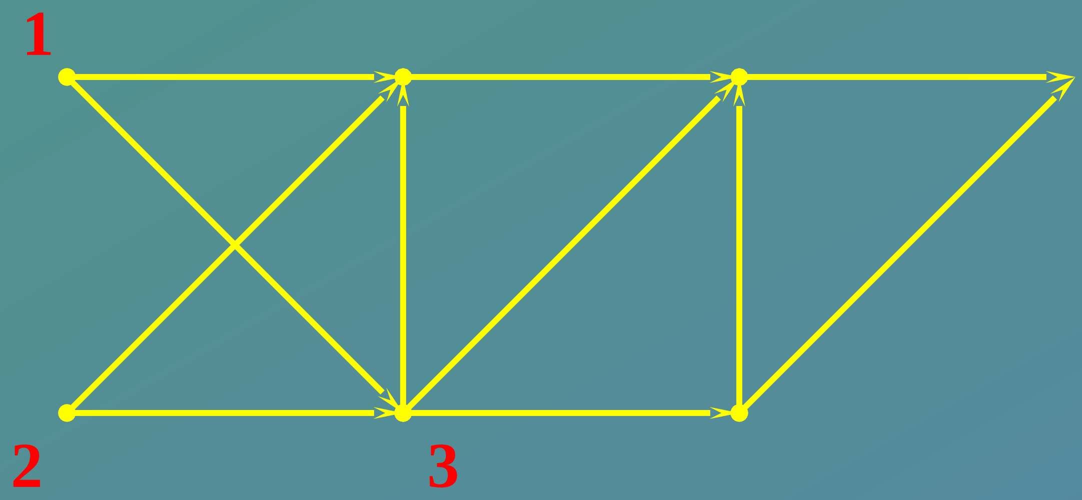

1
2
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4


1
2

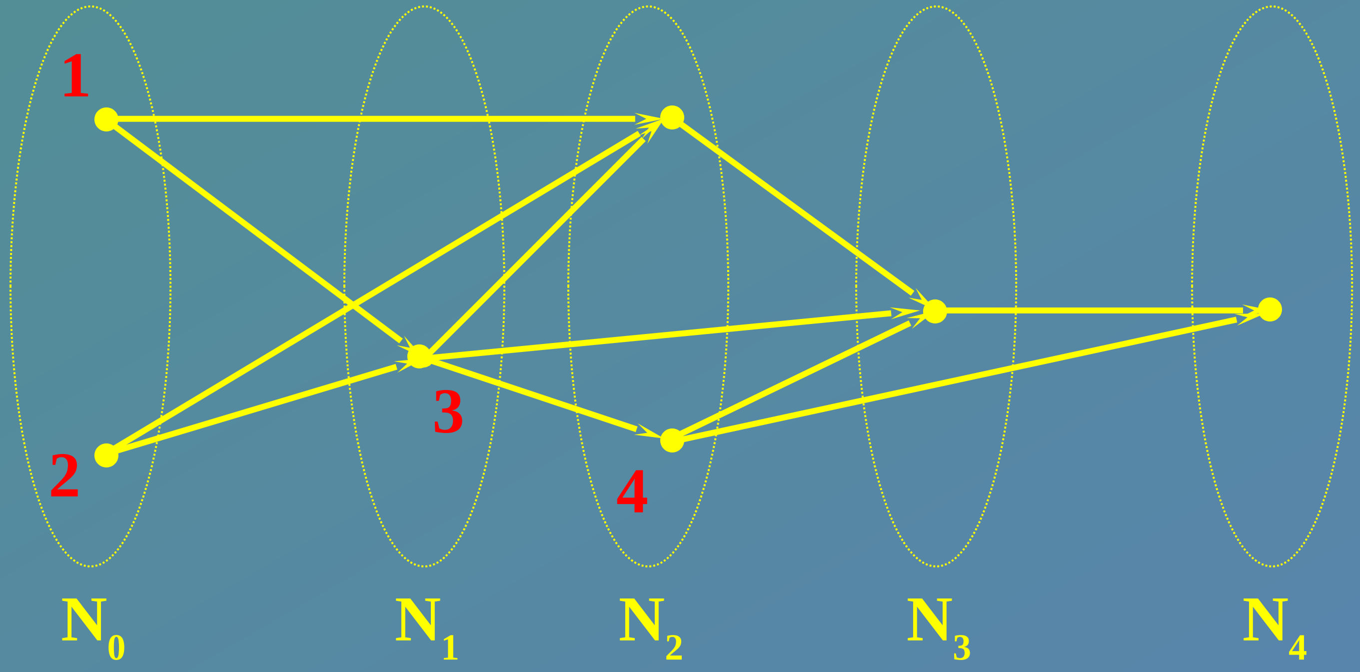

1
2
3
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4


1
2
3

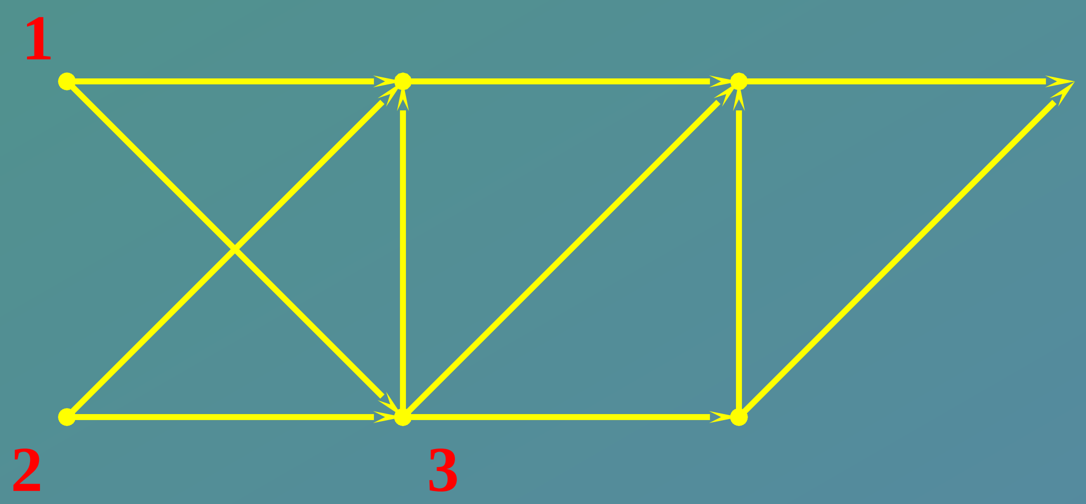

1
2
3
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

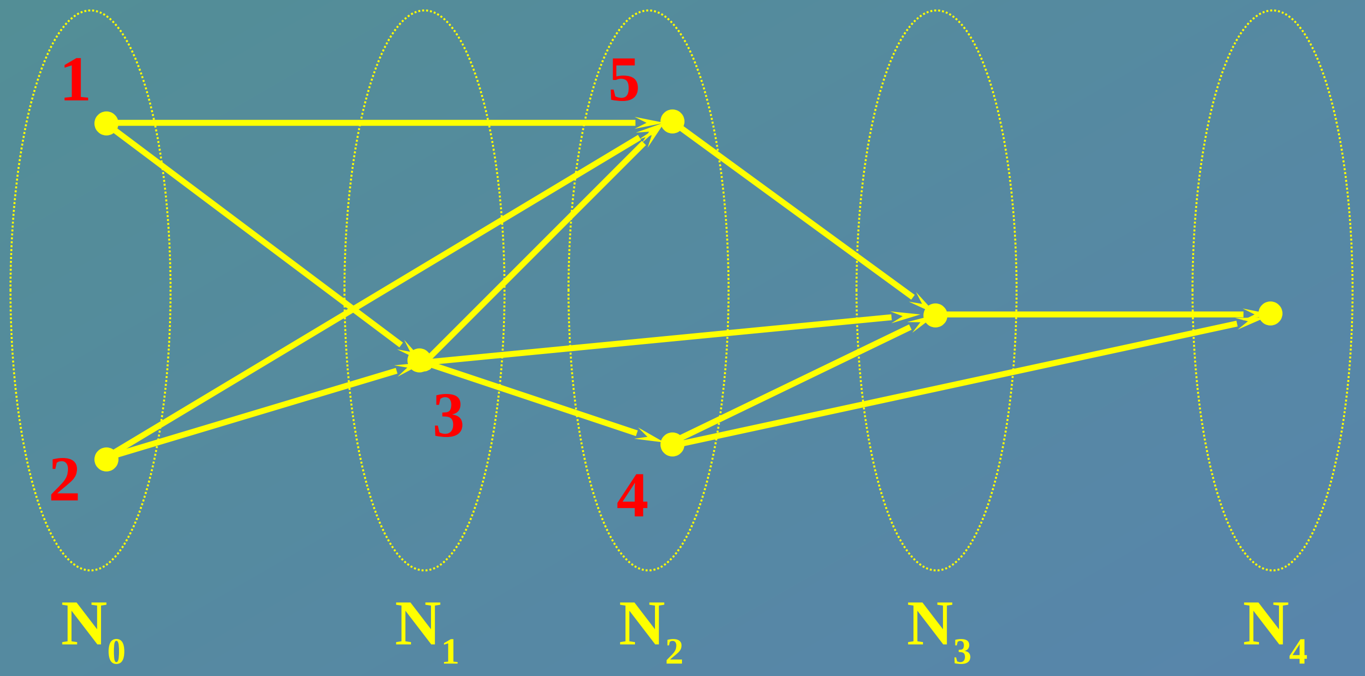


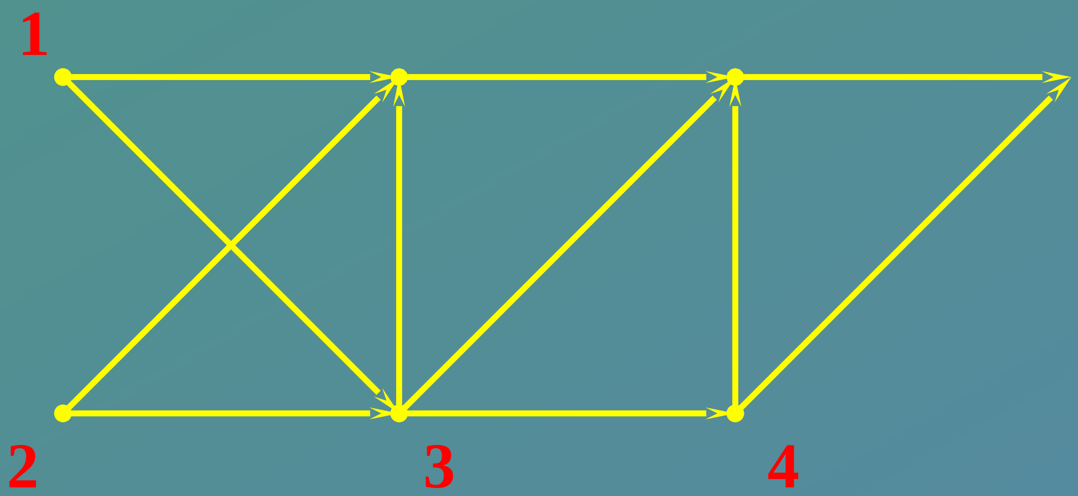
1
2
3

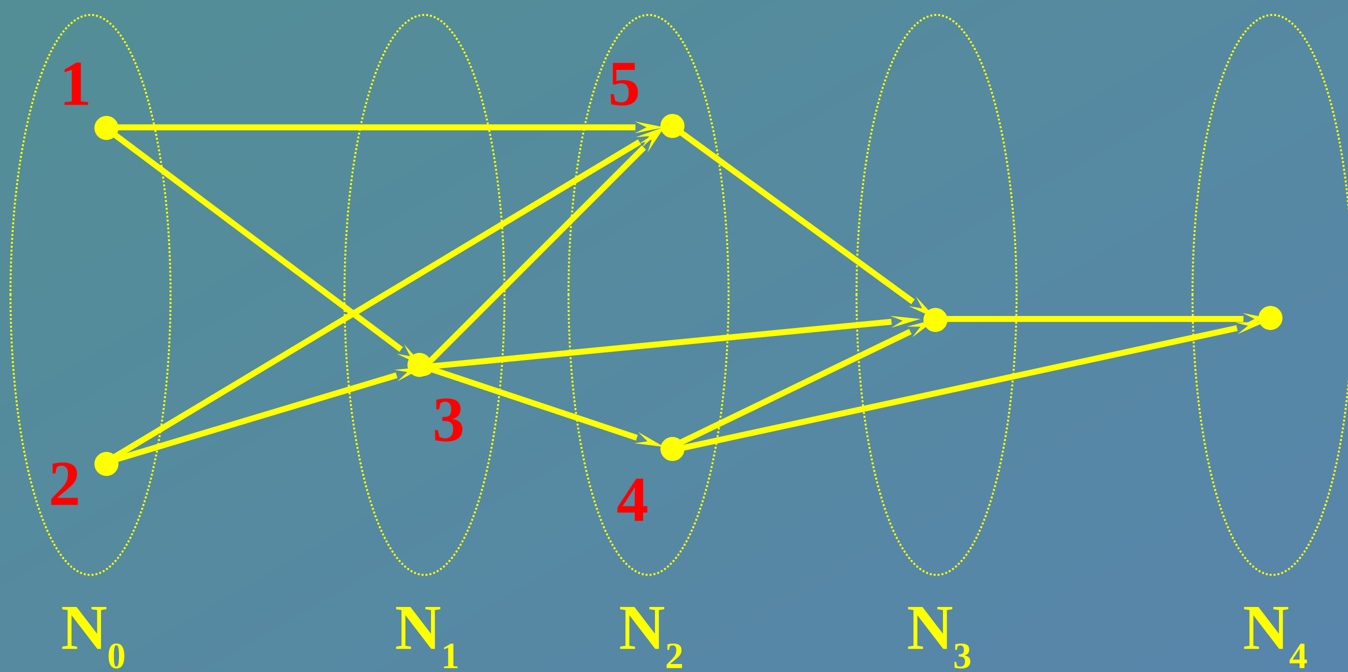


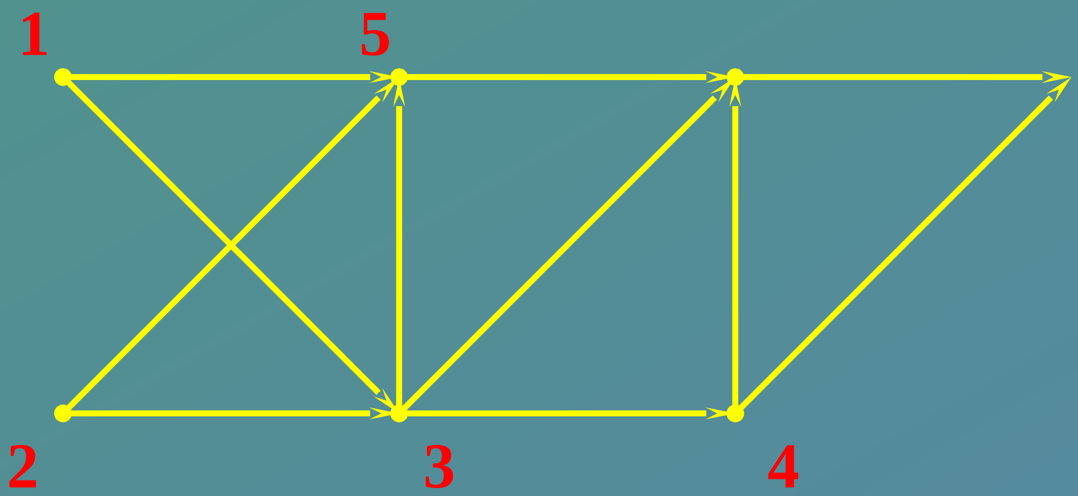
1
2
3
4
N0
N1
N2
N3
N4

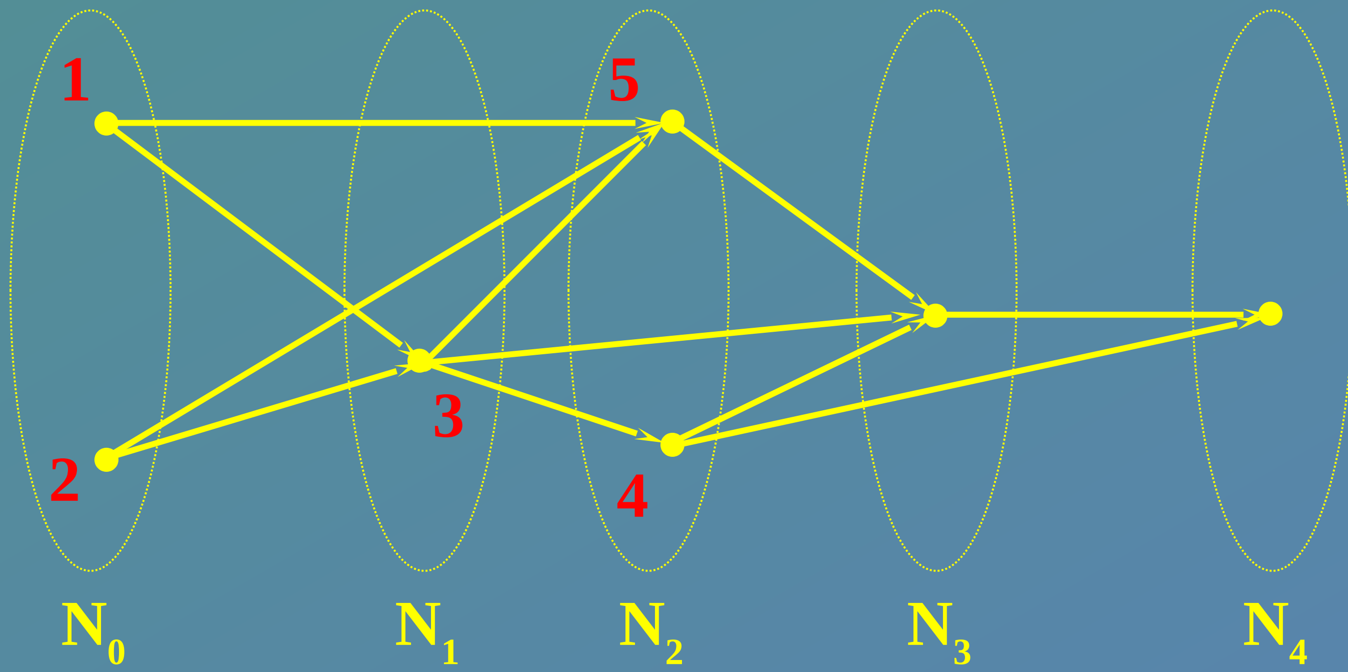

1
2
3

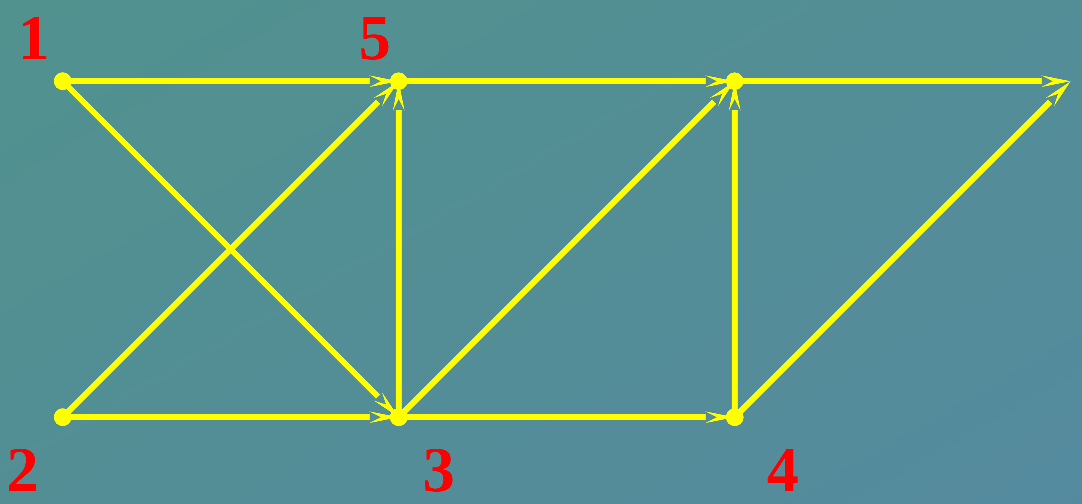

1
2
3
4
5
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

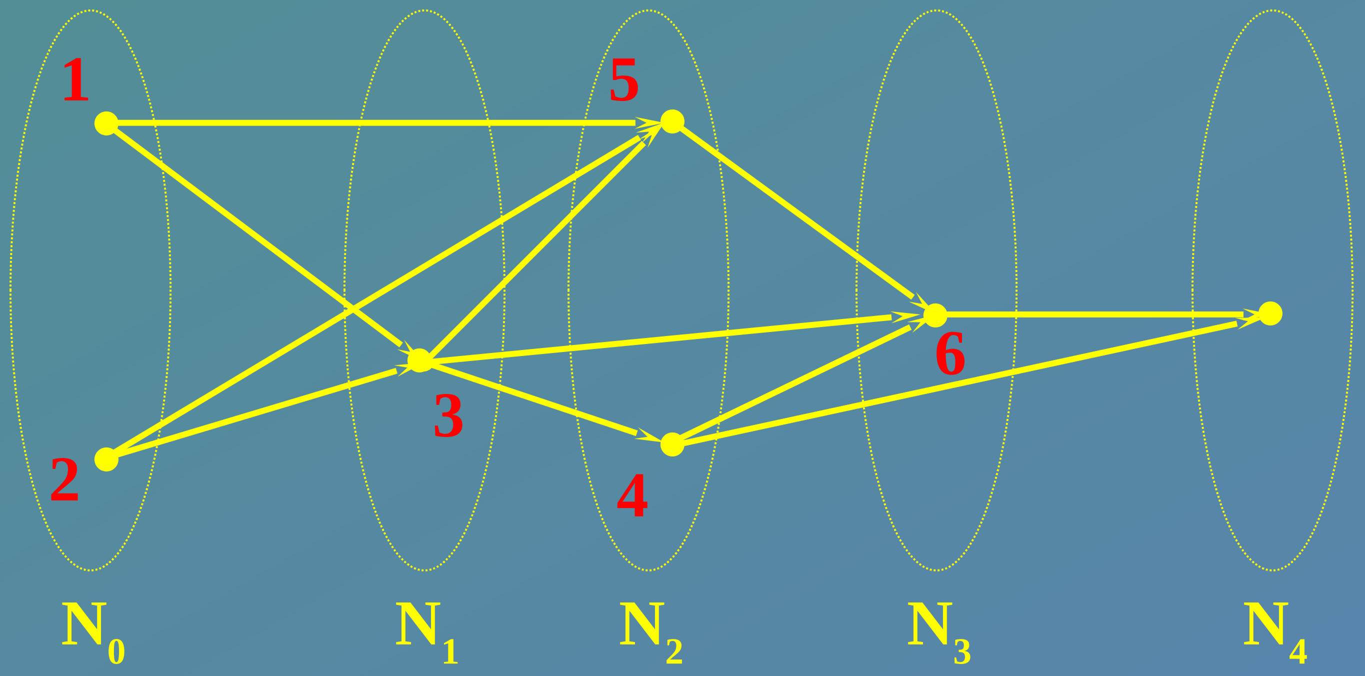

1
2
3
4

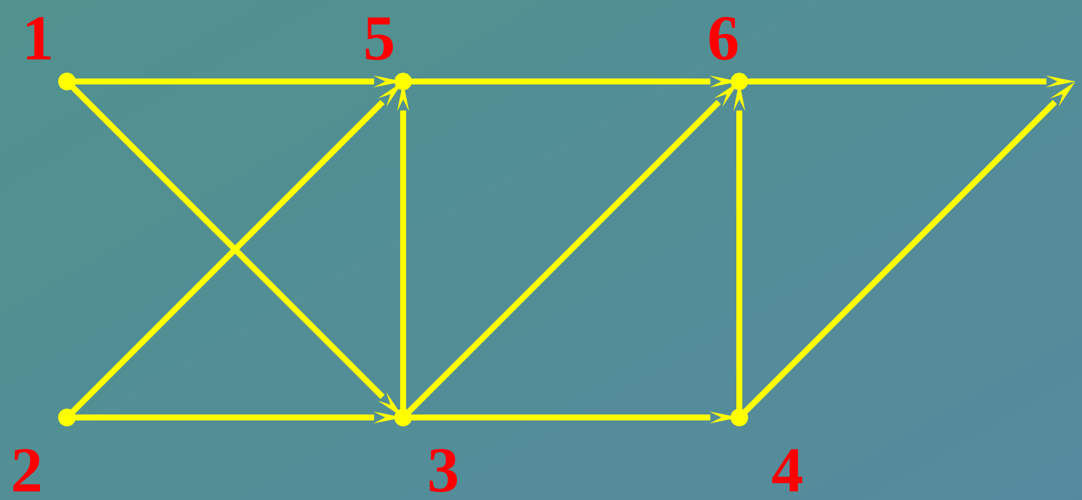

1
5
3
2
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

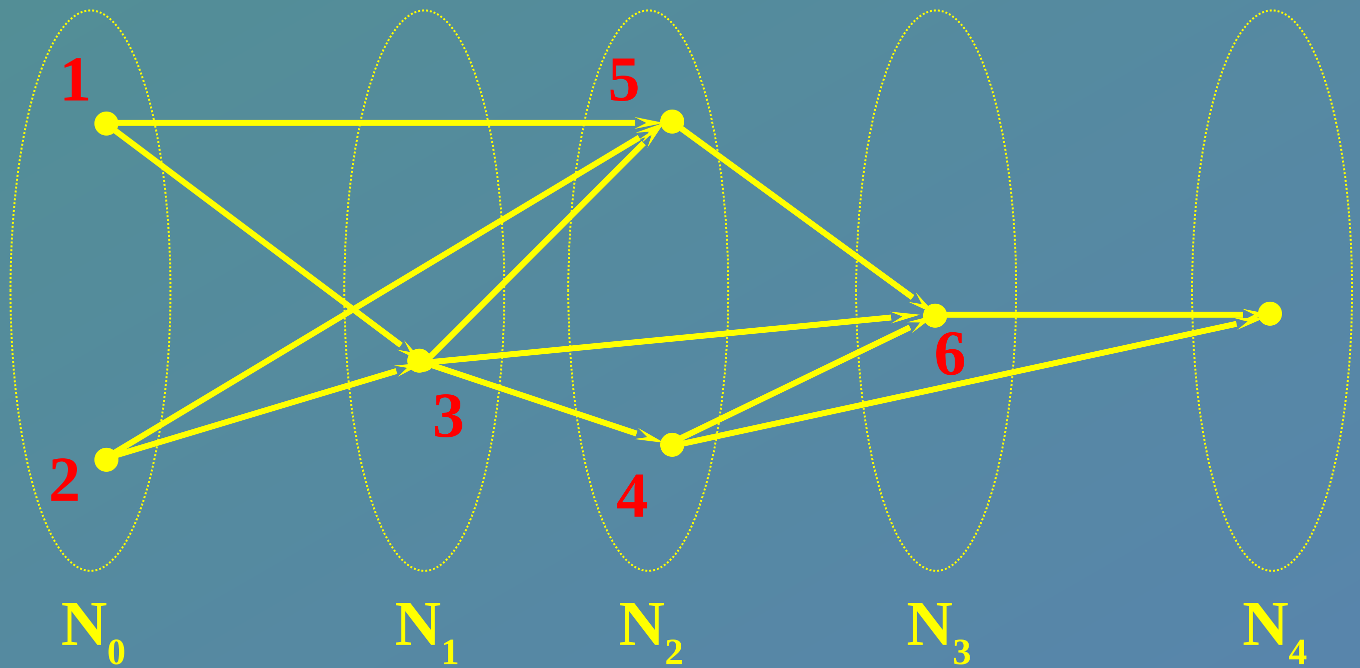

1
5
2
3
4

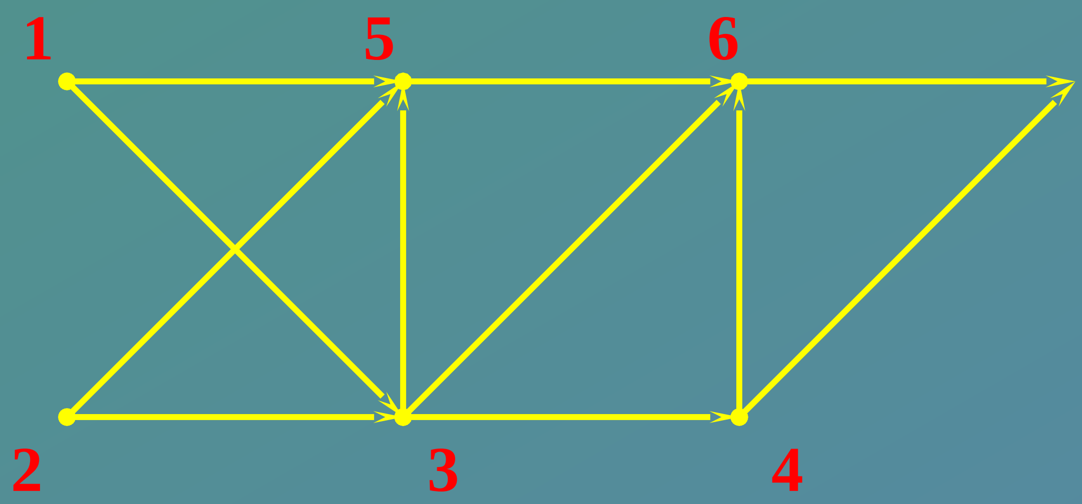

1
5
3
2
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

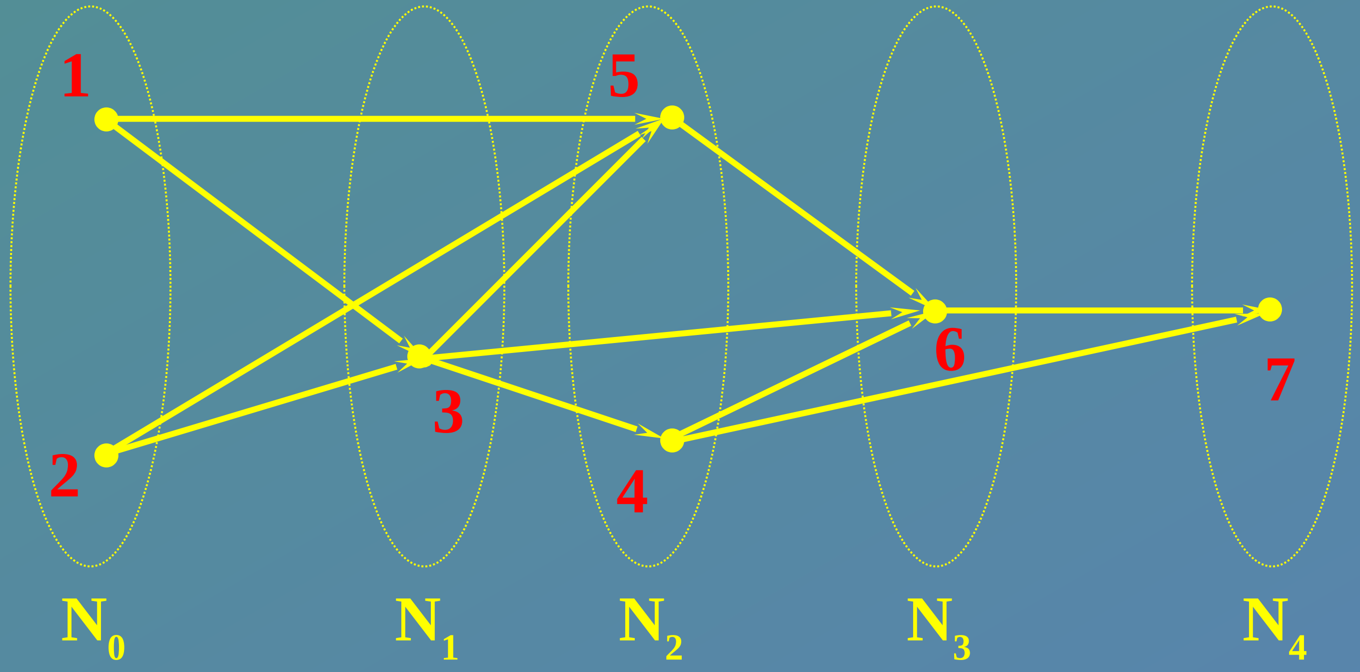

1
5
2
3
4

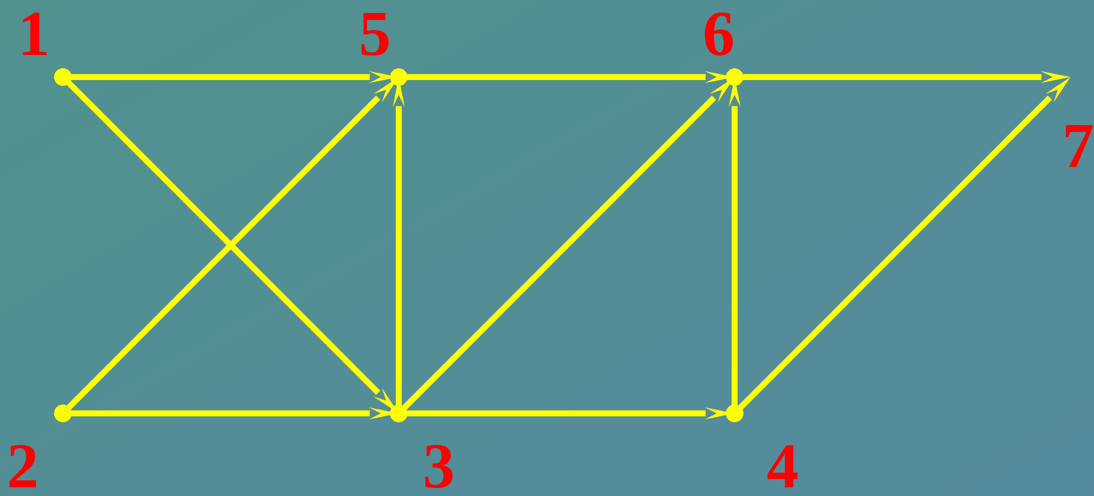

1
5
6
3
2
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

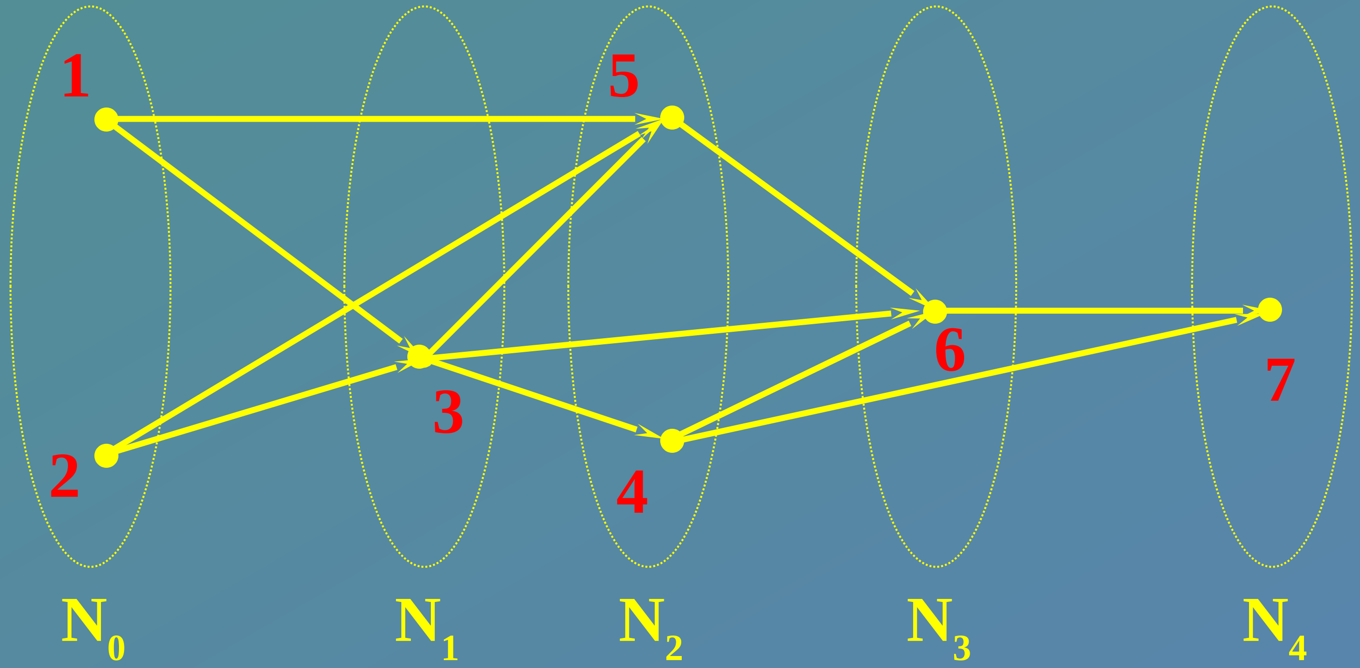

1
5
6
2
3
4


1
5
6
3
2
4
N0
N1
N2
N3
N4


1
5
6
2
3
4


1
5
6
7
3
2
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4


1
5
6
7
2
3
4


1
5
6
7
3
2
4
N_0
N_1
N_2
N_3
N_4

Composantes fortement connexes.

Composantes fortement connexes.

Soit ***G***$=(X, A)$ un graphe orienté. Soit ***R*** la relation binaire définie sur X par:

Composantes fortement connexes.

Soit $\boldsymbol{G}=(X, A)$ un graphe orienté. Soit $\boldsymbol{R}$ la relation binaire définie sur X par:

$x\boldsymbol{R}y$ si et seulement si ***x peut atteindre y*** et ***y peut atteindre x***.

Composantes fortement connexes.

Soit $\boldsymbol{G}=(X, A)$ un graphe orienté. Soit $\boldsymbol{R}$ la relation binaire définie sur X par:

$x\boldsymbol{R}y$ si et seulement si ***x peut atteindre y*** et ***y peut atteindre x***.

On vérifie aisément que $\boldsymbol{R}$ est une relation d'équivalence.

Composantes fortement connexes.

Soit ***G***$=(X, A)$ un graphe orienté. Soit ***R*** la relation binaire définie sur X par:

x***R***y si et seulement si ***x peut atteindre y*** et ***y peut atteindre x***.

On vérifie aisément que ***R*** est une relation d'équivalence.

Cette relation définit donc une partition de X formée par les classes d'équivalence de ***R***.

Composantes fortement connexes.

Soit ***G****=(X, A)* un graphe orienté. Soit ***R*** la relation binaire définie sur *X* par:

*x**R**y* si et seulement si ***x peut atteindre y*** et ***y peut atteindre x***.

On vérifie aisément que ***R*** est une relation d'équivalence.

Cette relation définit donc une partition de *X* formée par les classes d'équivalence de ***R***.

Le sous-graphe de ***G***, engendré par une classe d'équivalence de cette relation s'appelle ***composante fortement connexe*** du graphe ***G***.

Une composante fortement connexe peut avoir n'importe quelle taille, de *1* jusqu'à $|X|$.

Un ***graphe*** est ***fortement connexe*** s'il ne possède qu'une seule composante connexe. Si au contraire il a plusieurs composantes fortement connexes nous dirons qu'il n'est pas fortement connexe.

Le fait qu'un graphe soit fortement connexe signifie, dans le langage courant, que l'on "peut aller de n'importe quel point à n'importe quel autre". C'est souvent une propriété désirable dans un réseau de communications. D'autres réseaux, cependant, n'ont pas cette propriété (pour diverses raisons, il est alors considéré comme souhaitable que des sommets privilégiés puissent atteindre plus de sommets que d'autres).

LEMME :

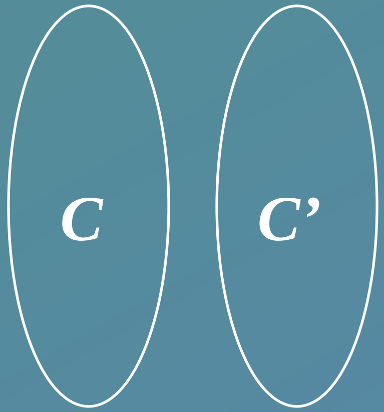
LEMME :

*Soit **G** est un graphe ayant <u>au moins deux</u> composantes fortement connexes, et soit C, C' deux composantes fortement connexes quelconques de **G**. Alors,*

LEMME :

*Soit **G** est un graphe ayant <u>au moins deux</u> composantes fortement connexes, et soit C, C' deux composantes fortement connexes quelconques de **G**. Alors,*

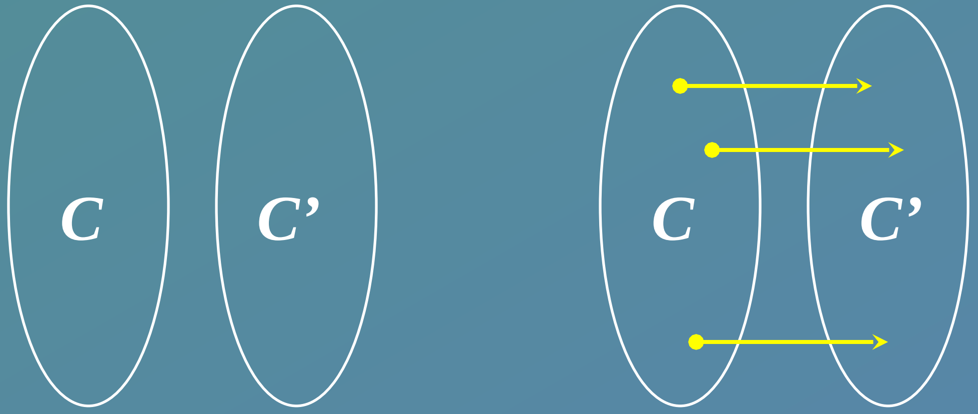
- *soit il n'y a aucun arc entre C et C';*



LEMME :

*Soit **G** est un graphe ayant <u>au moins deux</u> composantes fortement connexes, et soit C, C’ deux composantes fortement connexes quelconques de **G**. Alors,*

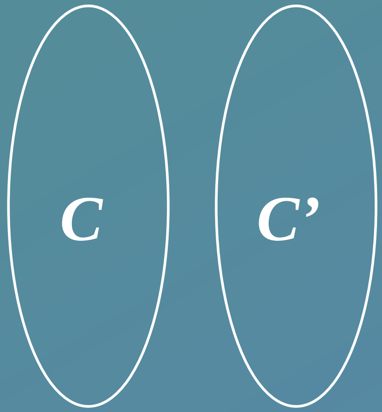
- *soit il n’y a aucun arc entre C et C’;*
- *soit tous les arcs entre ces deux composantes vont de C vers C’;*

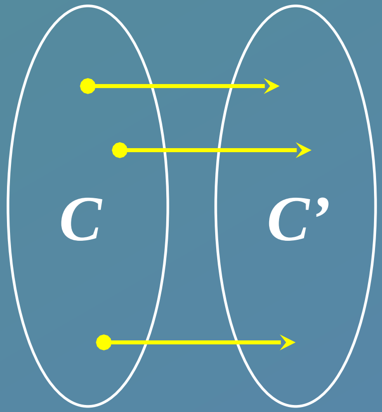


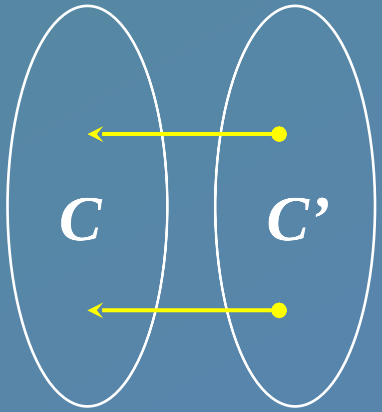
LEMME :

*Soit **G** est un graphe ayant <u>au moins deux</u> composantes fortement connexes, et soit C, C' deux composantes fortement connexes quelconques de **G**. Alors,*

- *soit il n'y a aucun arc entre C et C';*
- *soit tous les arcs entre ces deux composantes vont de C vers C';*
- *soit tous les arcs entre ces deux composantes vont de C' vers C.*

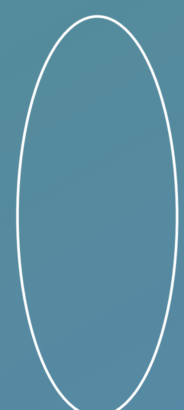




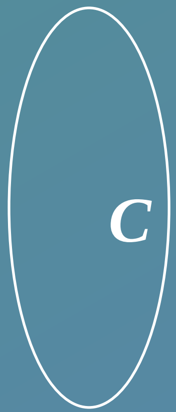


DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C’*** de ***G*** soient telles qu’il existe au moins un arc de ***C*** à ***C’*** et au moins un arc de ***C’*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C’***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C”*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C”*** contient ***C***∪***C’***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.

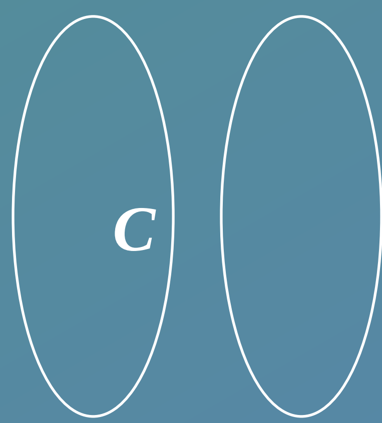
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



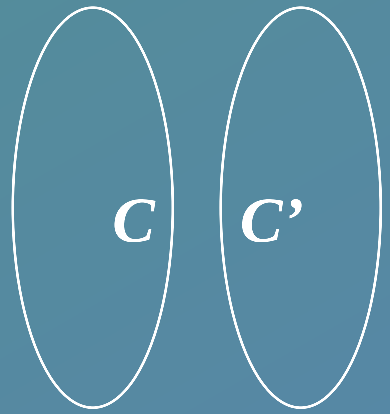
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C’*** de ***G*** soient telles qu’il existe au moins un arc de ***C*** à ***C’*** et au moins un arc de ***C’*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C’***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C”*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C”*** contient ***C***$\cup$***C’***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



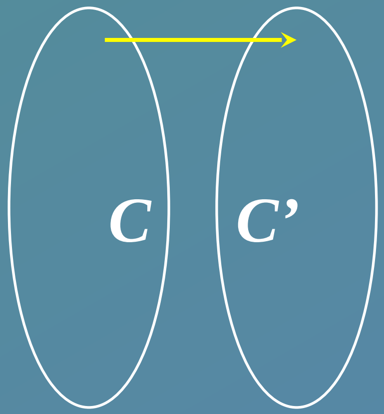
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C∪C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



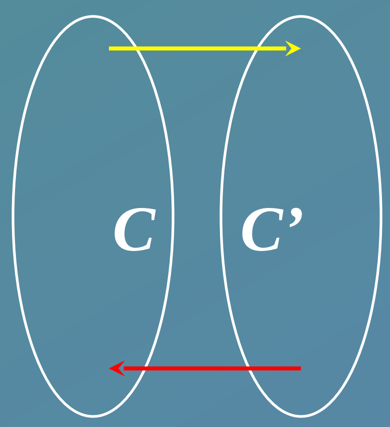
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C∪C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



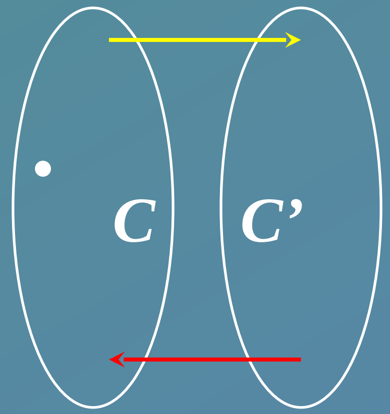
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C∪C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



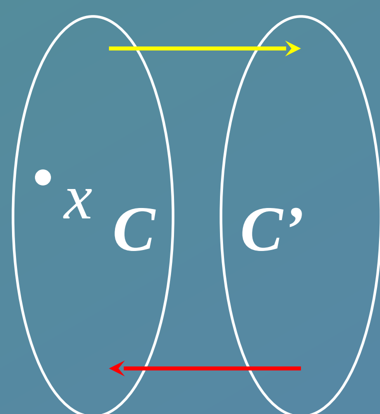
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C’*** de ***G*** soient telles qu’il existe au moins un arc de ***C*** à ***C’*** et au moins un arc de ***C’*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C’***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C”*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C”*** contient ***C***∪***C’***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



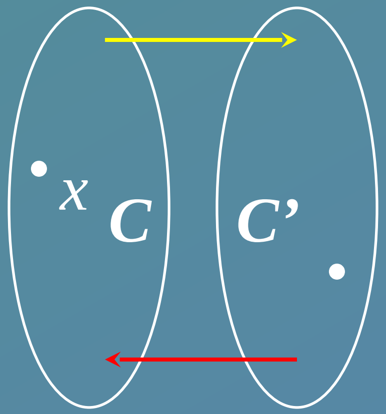
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



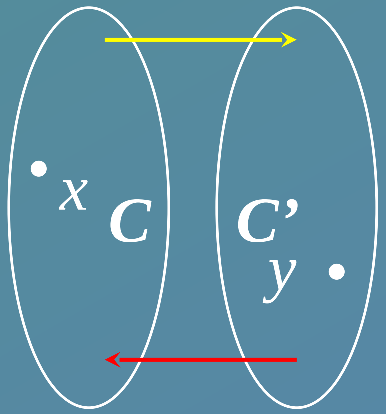
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C’*** de ***G*** soient telles qu’il existe au moins un arc de ***C*** à ***C’*** et au moins un arc de ***C’*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C’***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C”*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C”*** contient ***C∪C’***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



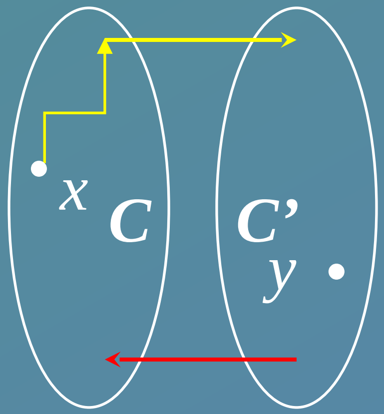
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



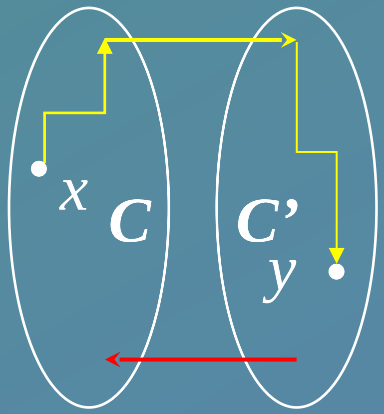
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C∪C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



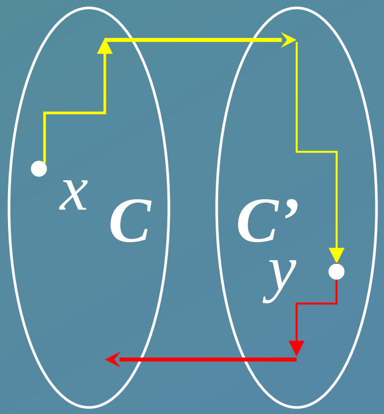
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



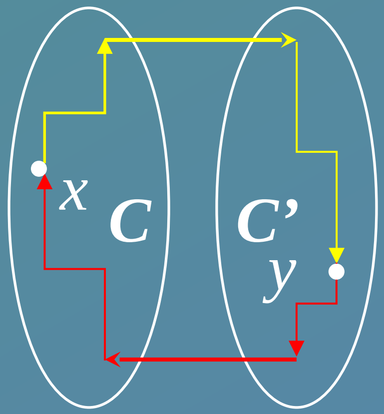
DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***∪***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.



DÉMONSTRATION: Supposons au contraire que deux composantes fortement connexes ***C***, ***C'*** de ***G*** soient telles qu'il existe au moins un arc de ***C*** à ***C'*** et au moins un arc de ***C'*** à ***C***. On vérifie alors facilement que pour toute paire de sommets *(x, y)* avec *x* dans ***C*** et *y* dans ***C'***, il existe un chemin de *x* à *y* et un chemin de *y* à *x*; il doit donc exister une composante fortement connexe ***C''*** contenant *x* et *y* (et en fait ***C''*** contient ***C***$\cup$***C'***), ce qui contredit la définition des composantes fortement connexes.

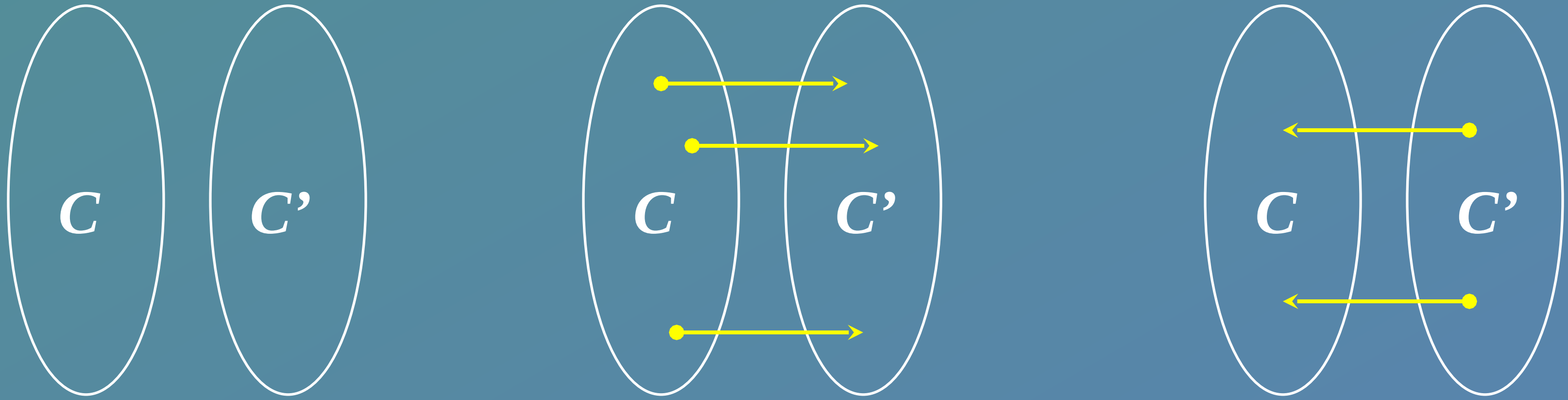


Composantes fortement connexes initiales et terminales.

Composantes fortement connexes initiales et terminales.

Composantes fortement connexes initiales et terminales.

Une composante fortement connexe est dite initiale s'il n'existe aucun arc entrant dans cette composante à partir d'une autre composante. Une composante fortement connexe est dite terminale s'il n'existe aucun arc sortant de cette composante vers une autre composante. Nous allons voir immédiatement que tout graphe orienté possède au moins une composante initiale et une terminale (éventuellement égales).



Condensation d’un graphe orienté.

Soit ***G*** un graphe orienté et $\boldsymbol{C_1}$,..., $\boldsymbol{C_p}$ ($p \geq 1$) ses composantes fortement connexes. On définit un graphe ***C(G)***, appelé ***condensation de G***, dont l’ensemble des sommets est $\{C_1,\ldots,C_p\}$, et où $\boldsymbol{(C_i C_j)}$ est un arc de ***C(G)*** si et seulement si, il existe au moins un arc dans ***G*** entre les deux composantes fortement connexes $\boldsymbol{C_i}$ et $\boldsymbol{C_j}$ et tous les arcs entre elles vont de $\boldsymbol{C_i}$ vers $\boldsymbol{C_j}$.

Cette définition est cohérente, grâce au LEMME.

Quelques remarques:

– Pour tout graphe orienté ***G***, le graphe ***C(G)*** est sans circuit.
– Si ***G*** est sans circuit, alors ***C(G)=G***.
– Si ***G*** est fortement connexe, alors ***C(G)*** a un seul sommet.
– Un sommet *x* peut atteindre un sommet *y* dans ***G*** si, et seulement si, soit:

(a) *x* et *y* sont dans la même composante fortement connexe de ***G*** (et dans ce cas *y* peut atteindre *x*),

(b) *x* dans $\boldsymbol{C_i}$, *y* dans $\boldsymbol{C_j}$, où $\boldsymbol{C_i}$, $\boldsymbol{C_j}$ sont deux composantes fortement connexes différentes de ***G***, et $\boldsymbol{C_i}$ peut atteindre $\boldsymbol{C_j}$ dans la condensation ***C(G)*** (et dans ce cas, *y* ne peut pas atteindre *x* dans ***G***).

THÉORÈME:

THÉORÈME:

Tout graphe orienté G possède au moins une composante fortement connexe initiale et au moins une composante fortement connexe terminale.

THÉORÈME:

Tout graphe orienté G possède au moins une composante fortement connexe initiale et au moins une composante fortement connexe terminale.

On peut déterminer les composantes fortement connexes de n'importe quel graphe orienté par une version de l'algorithme très efficace d'exploration Depth-First Search (recherche en profondeur) dû à Tarjan.

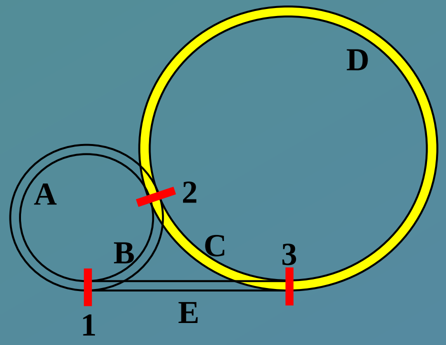
Exemple :

Exemple :

Les rails du train électrique de Yann sont composés de cinq parties A, B, C, D et E assemblées à l’aide de trois aiguillages 1, 2 et 3, d’après le schéma suivant:

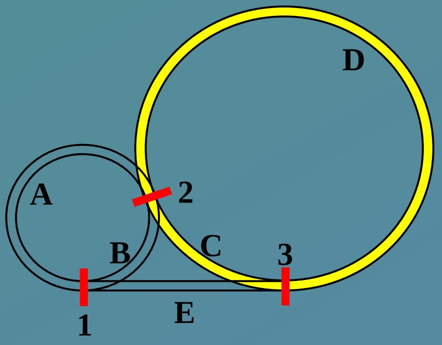
Exemple :

Les rails du train électrique de Yann sont composés de cinq parties A, B, C, D et E assemblées à l'aide de trois aiguillages 1, 2 et 3, d'après le schéma suivant:



Exemple :

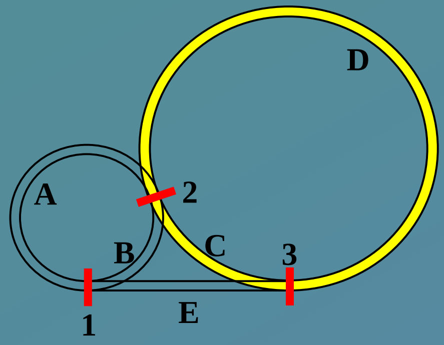
Les rails du train électrique de Yann sont composés de cinq parties A, B, C, D et E assemblées à l'aide de trois aiguillages 1, 2 et 3, d'après le schéma suivant:



Si le train avance (sans faire de marche arrière), alors il peut traverser le segment E <u>au plus une fois</u>, quelle que soit sa position de départ.

Exemple :

Les rails du train électrique de Yann sont composés de cinq parties A, B, C, D et E assemblées à l'aide de trois aiguillages 1, 2 et 3, d'après le schéma suivant:

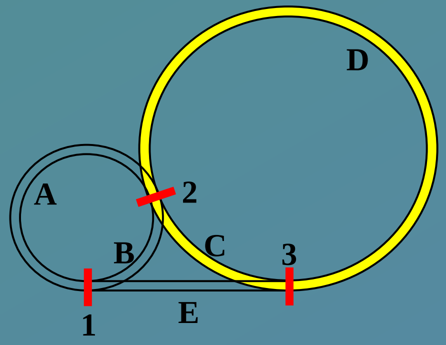


Si le train avance (sans faire de marche arrière), alors il peut traverser le segment E <u>au plus une fois</u>, quelle que soit sa position de départ.

Expliquer ce phénomène.

Exemple :

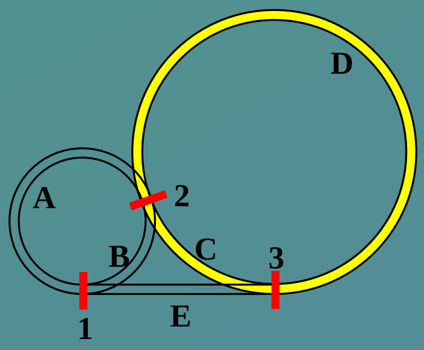
Les rails du train électrique de Yann sont composés de cinq parties A, B, C, D et E assemblées à l'aide de trois aiguillages 1, 2 et 3, d'après le schéma suivant:

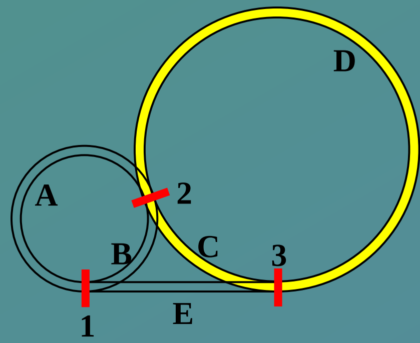


Si le train avance (sans faire de marche arrière), alors il peut traverser le segment E <u>au plus une fois</u>, quelle que soit sa position de départ.

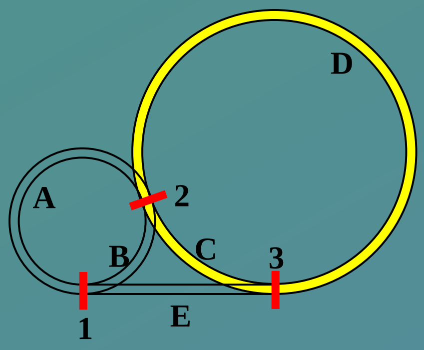
Expliquer ce phénomène.

Discuter la situation où l'on ajoute un segment F (symétrique à E) reliant A et D.


D
A
2
B
C
3
1
E

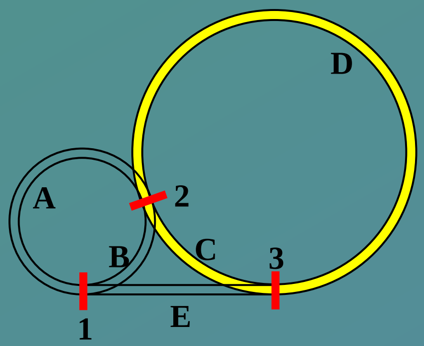


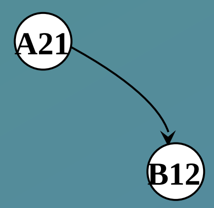
A21

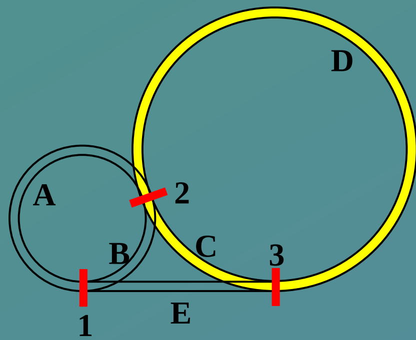


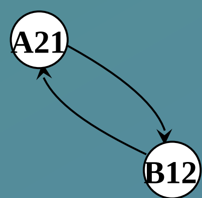
A21

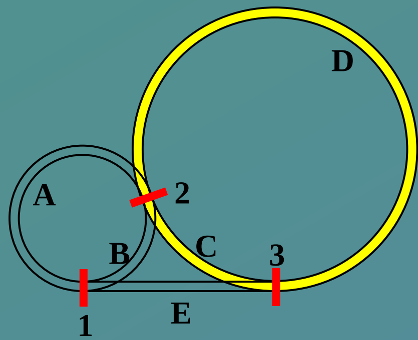
B12

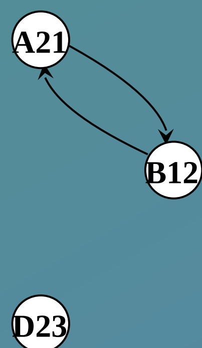

D
A
2
B
C
3
E
1

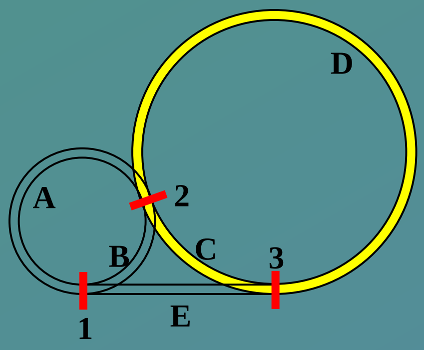

A21
B12

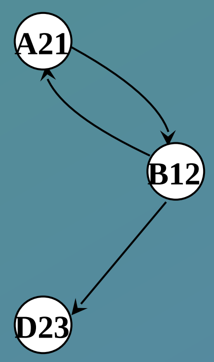

D
A
2
B
C
3
1
E

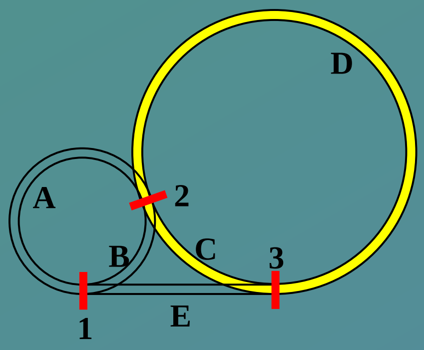

A21
B12

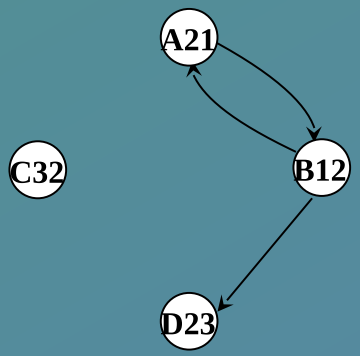

D
A
2
B
C
3
E
1

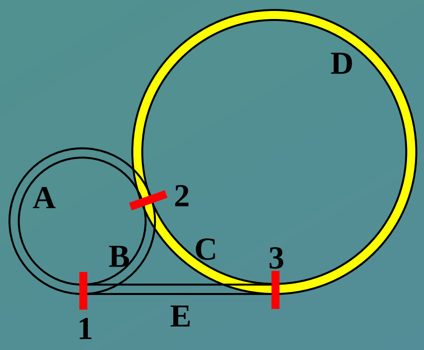

A21
B12
D23

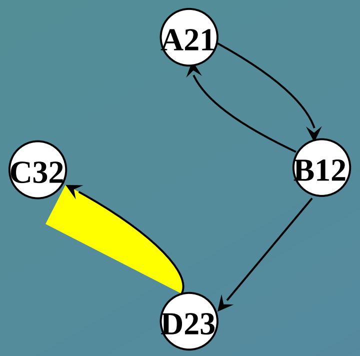

D
A
2
B
C
3
1
E

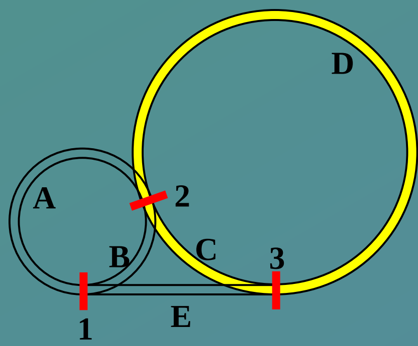

A21
B12
D23

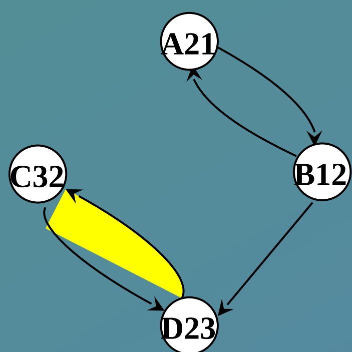

D
A
2
B
C
3
1
E

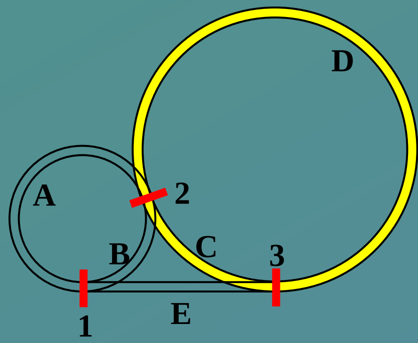

A21
C32
B12
D23

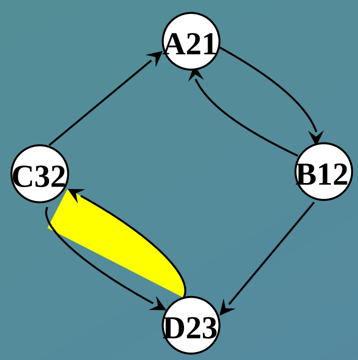

D
A
2
B
C
3
1
E

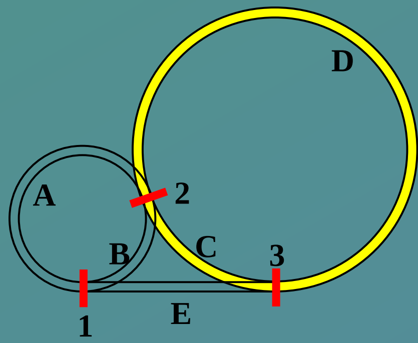

A21
C32
B12
D23

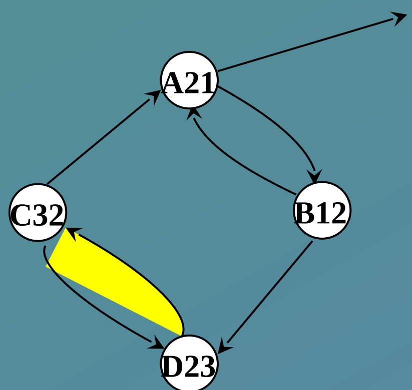

D
A
2
B
C
3
E
1

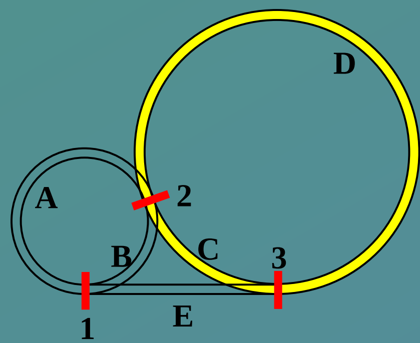

A21
C32
B12
D23

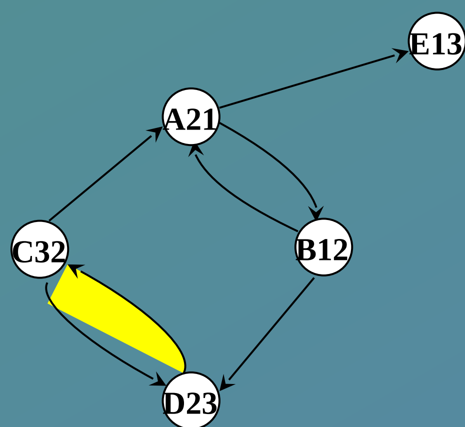

D
A
2
B
C
3
1
E

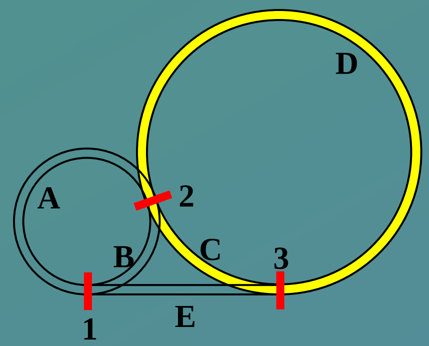

A21
C32
B12
D23

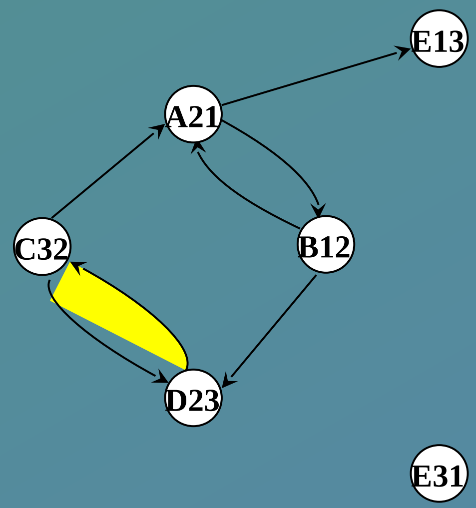

D
A
2
B
C
3
E
1

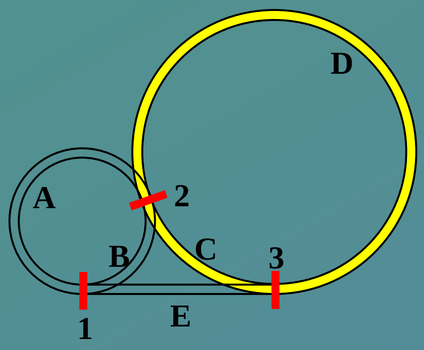

A21
C32
B12
D23

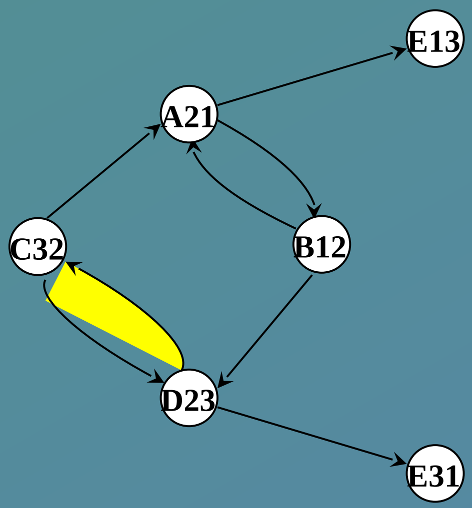

D
A
2
B
C
3
1
E

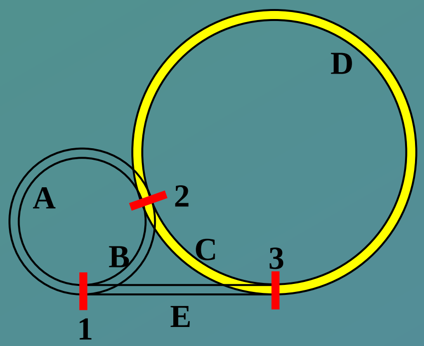

E13
A21
C32
B12
D23

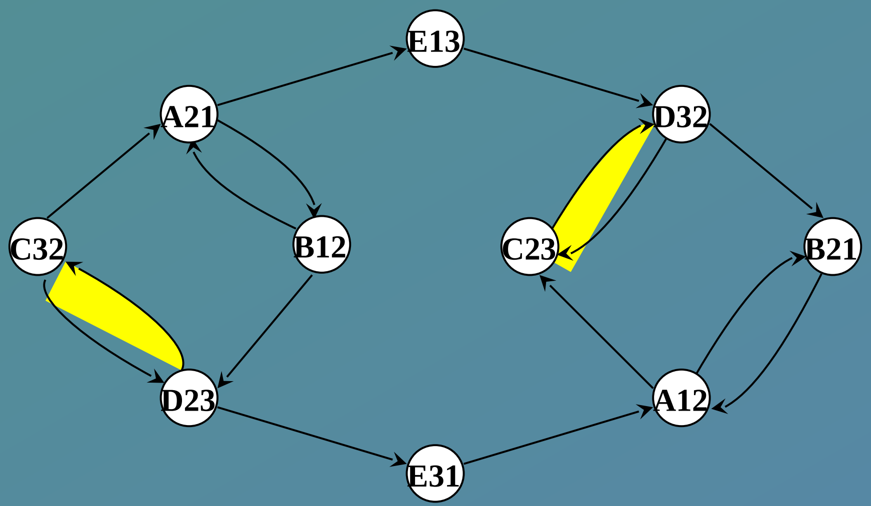

D
A
2
B
C
3
1
E

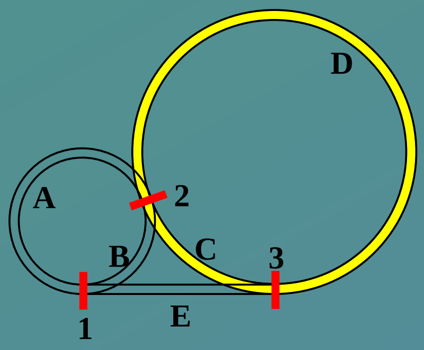

E13
A21
C32
B12
D23
E31

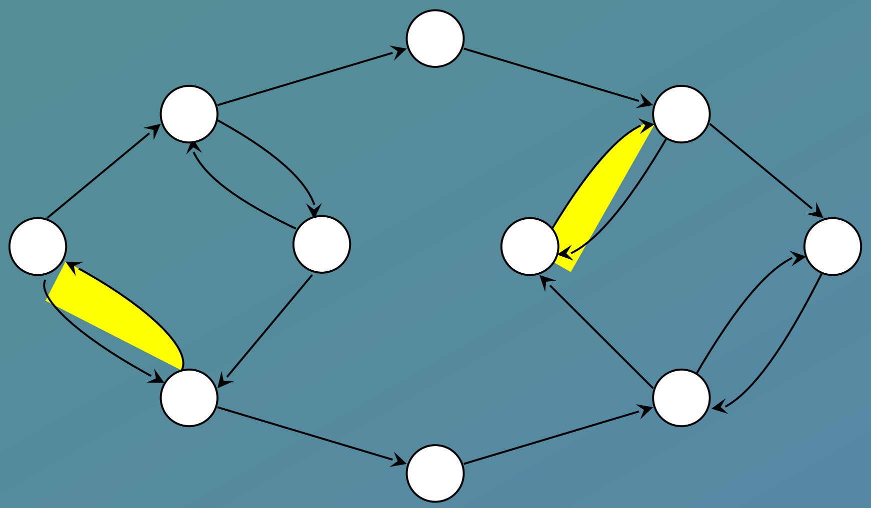

D
A
2
B
C
3
E
1

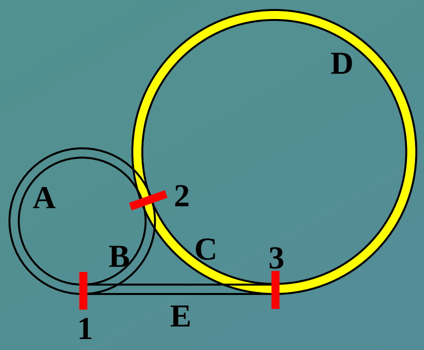

E13
A21
C32
B12
D23
E31


D
A
2
B
C
3
E
1

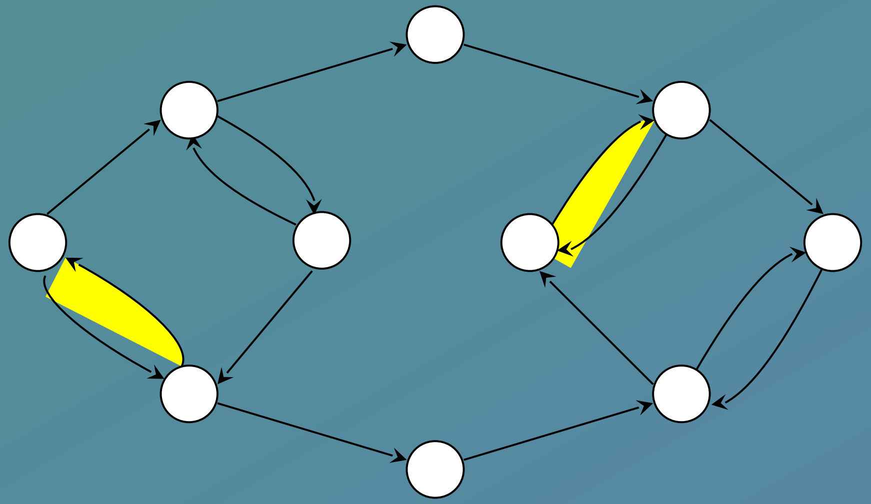

E13
A21
D32
C32
B12
C23
B21
D23
A12
E31

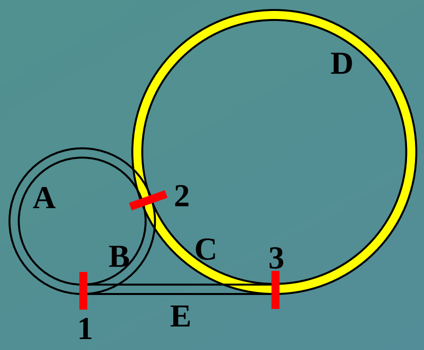

D
A
2
B
C
3
E
1

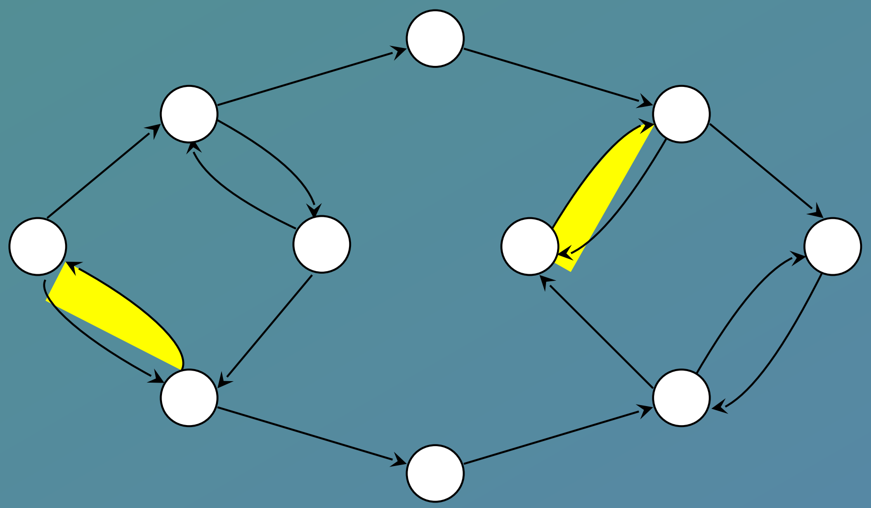


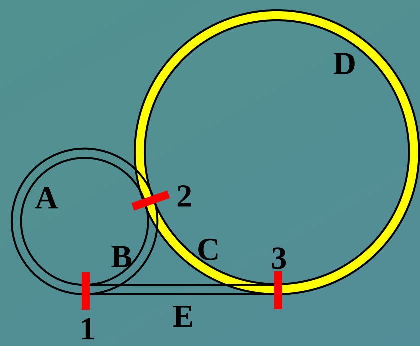


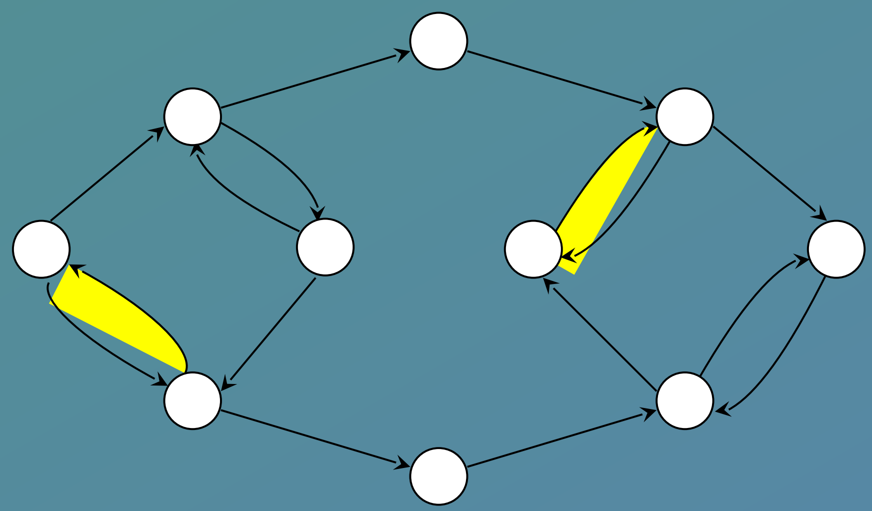
D
A
2
B
C
3
E
1

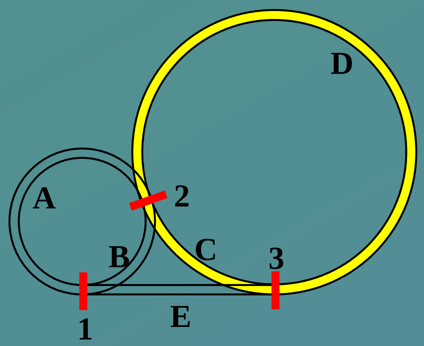


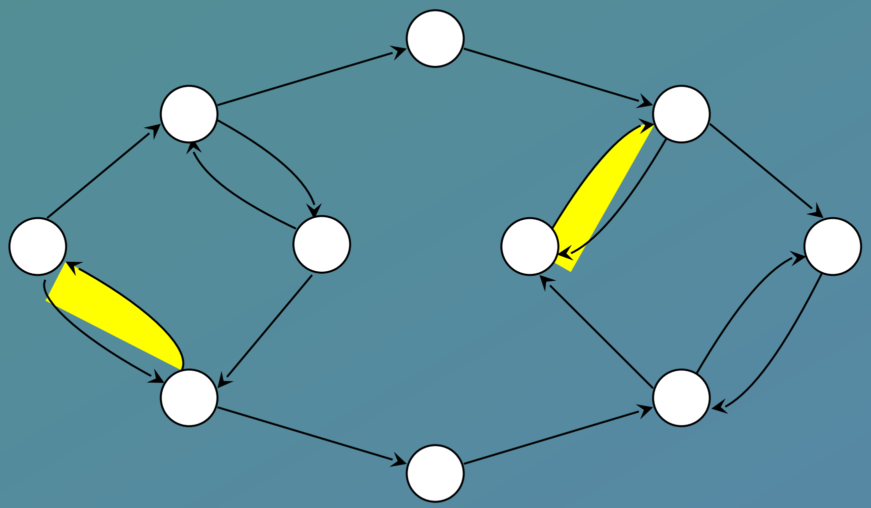

D
A
2
B
C
3
E
1

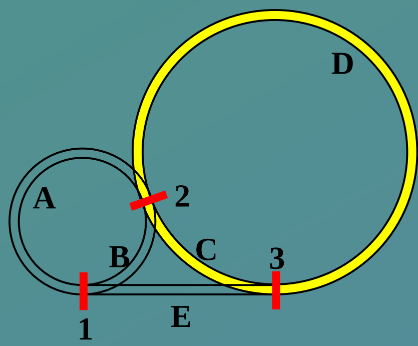


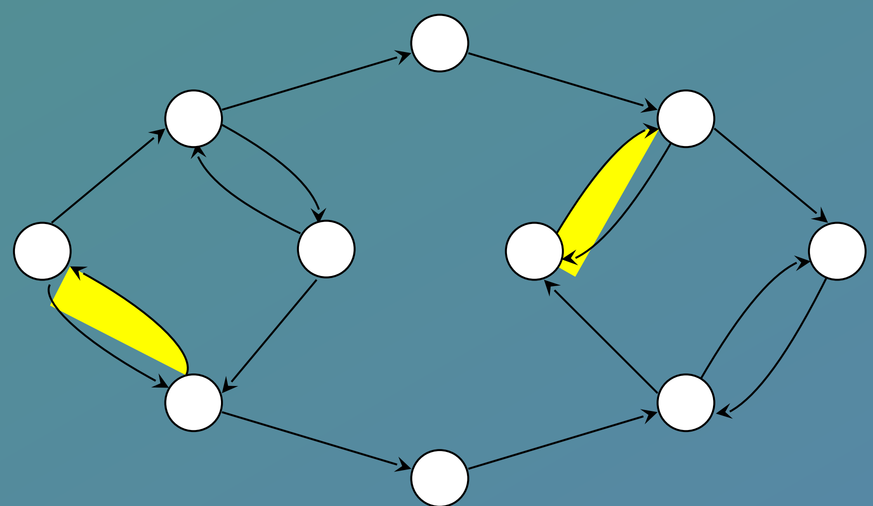

D
A
2
B
C
3
E
1

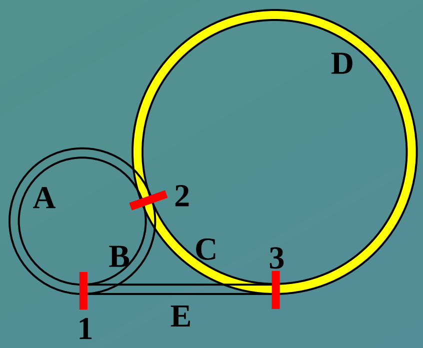


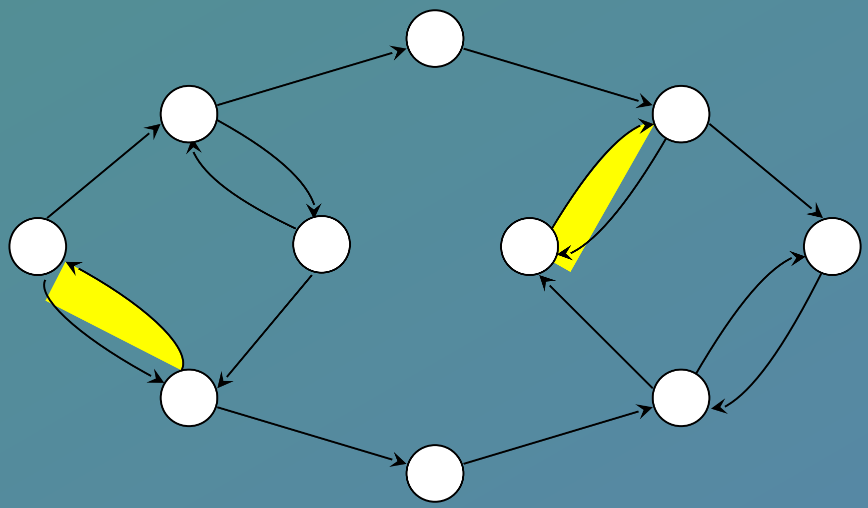

D
A
2
B
C
3
E
1

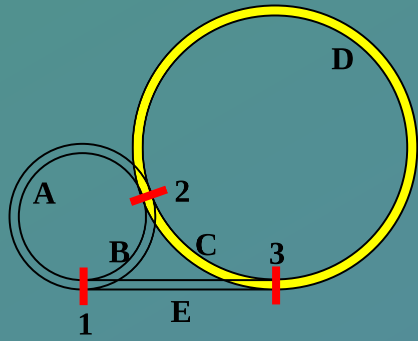


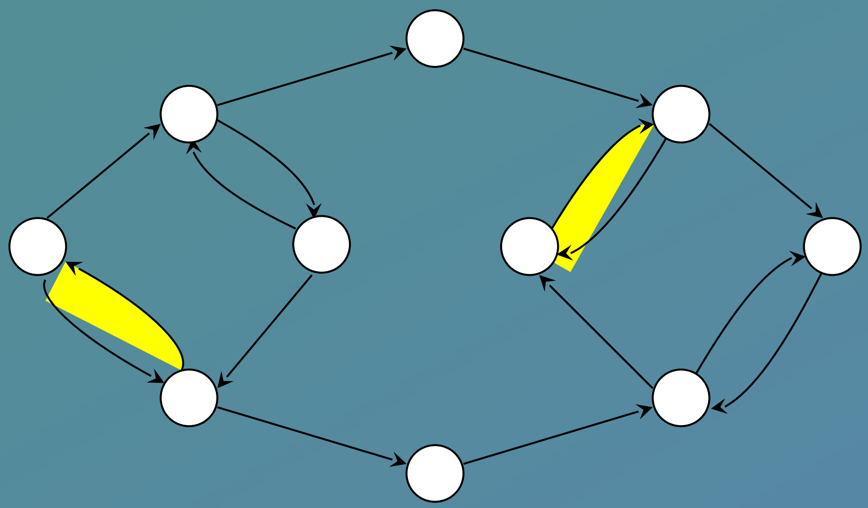

D
A
2
B
C
3
E
1

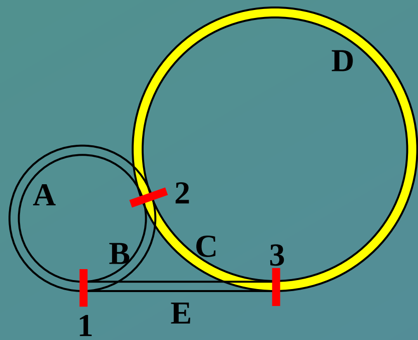


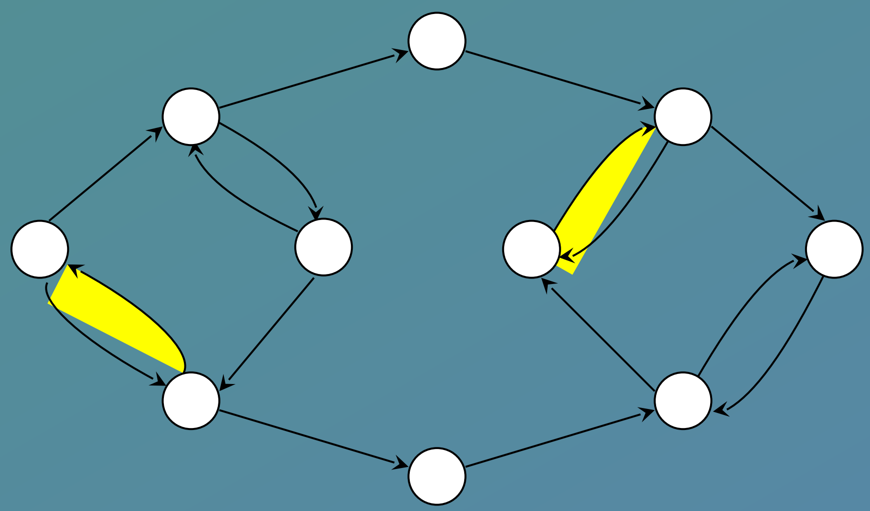

D
A
2
B
C
3
E
1

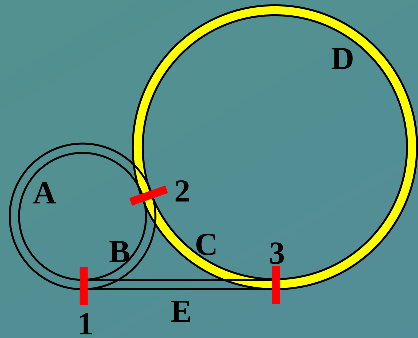


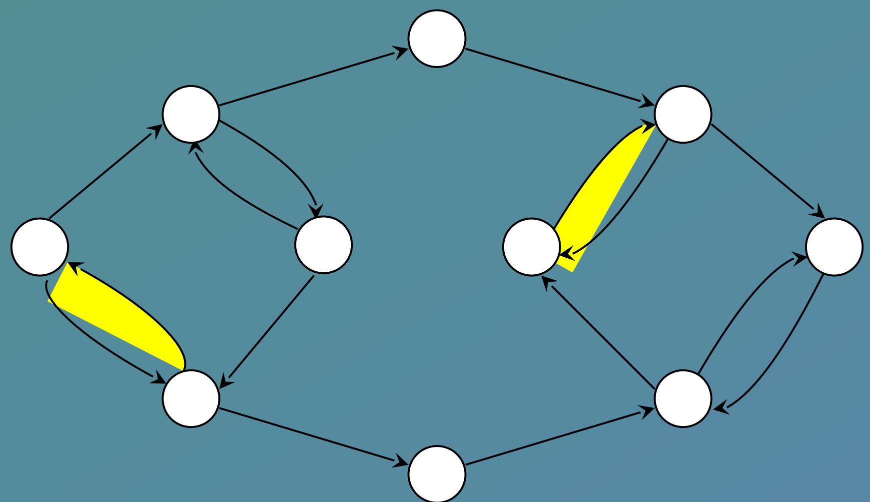

D
A
2
B
C
3
E
1

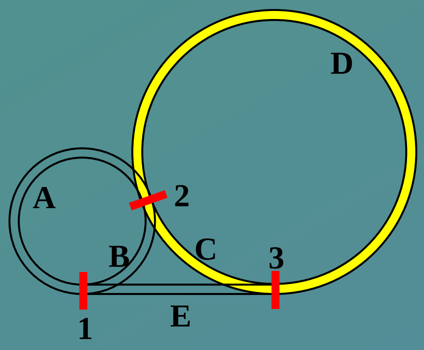


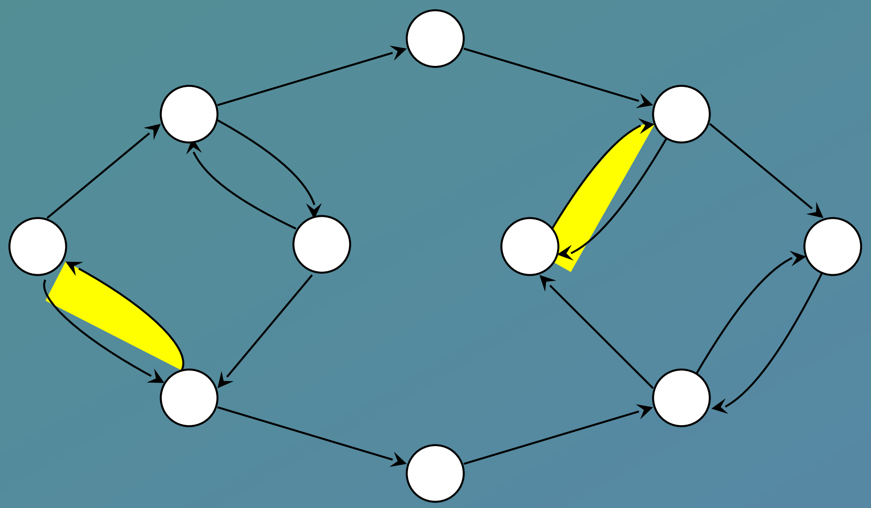

D
A
2
B
C
3
E
1

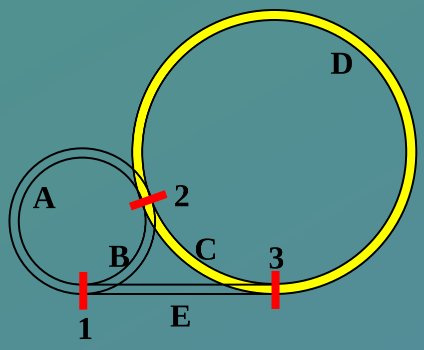


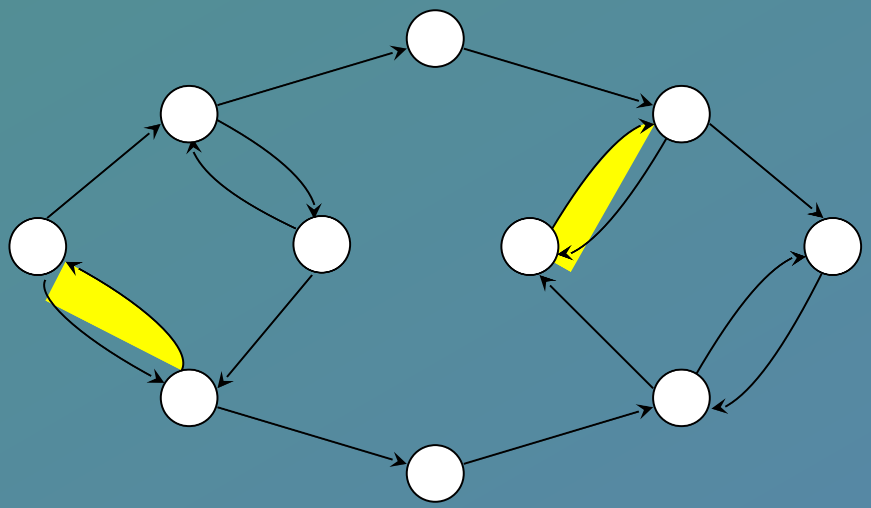

D
A
2
B
C
3
E
1

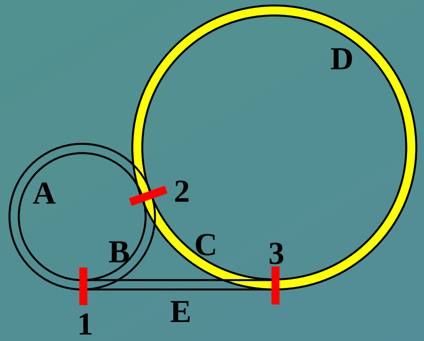


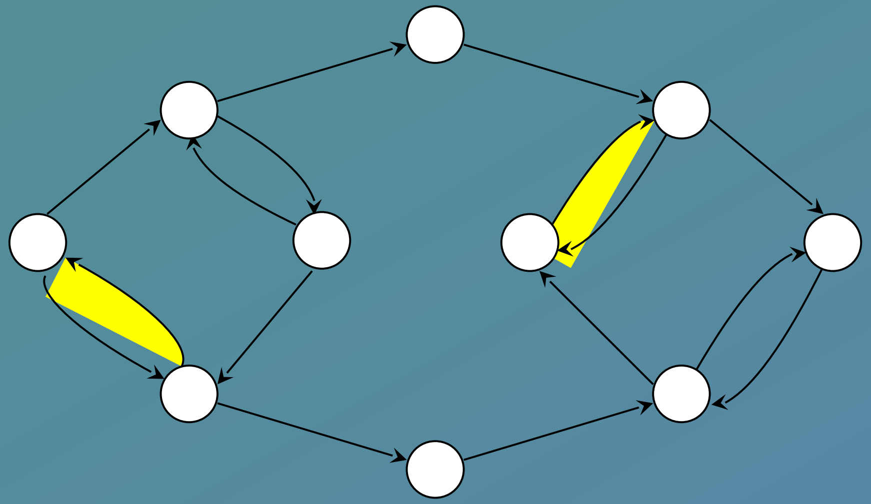

D
A
2
B
C
3
E
1

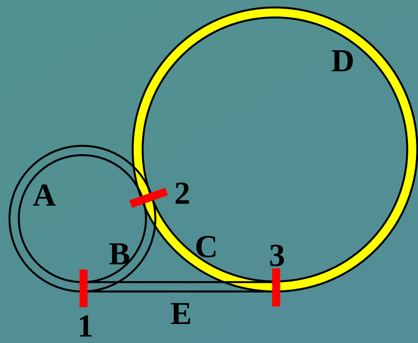


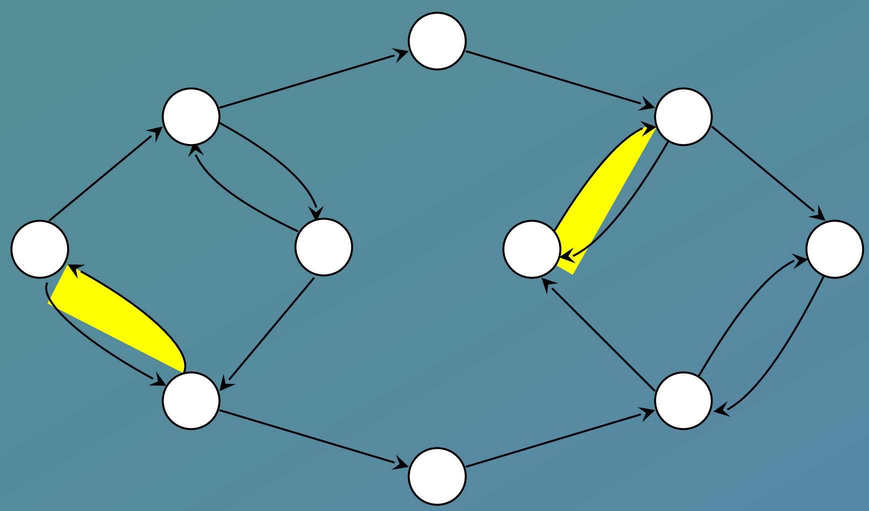

D
A
2
B
C
3
E
1

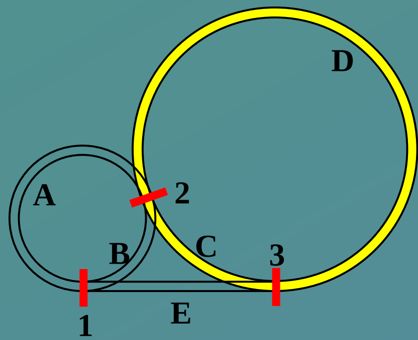


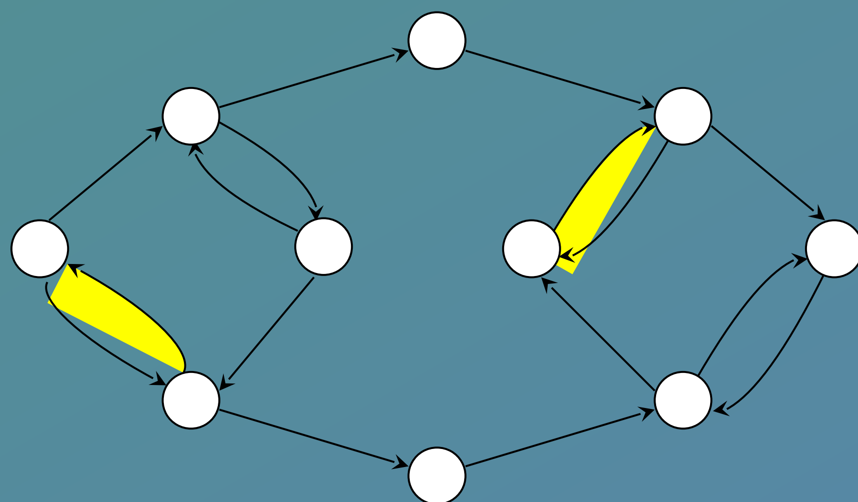

D
A
2
B
C
3
E
1

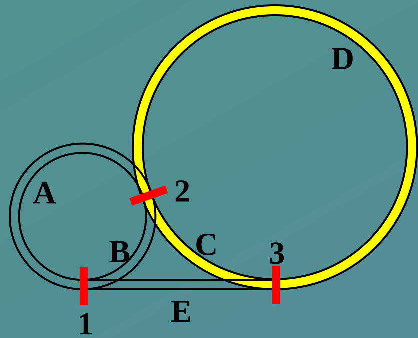


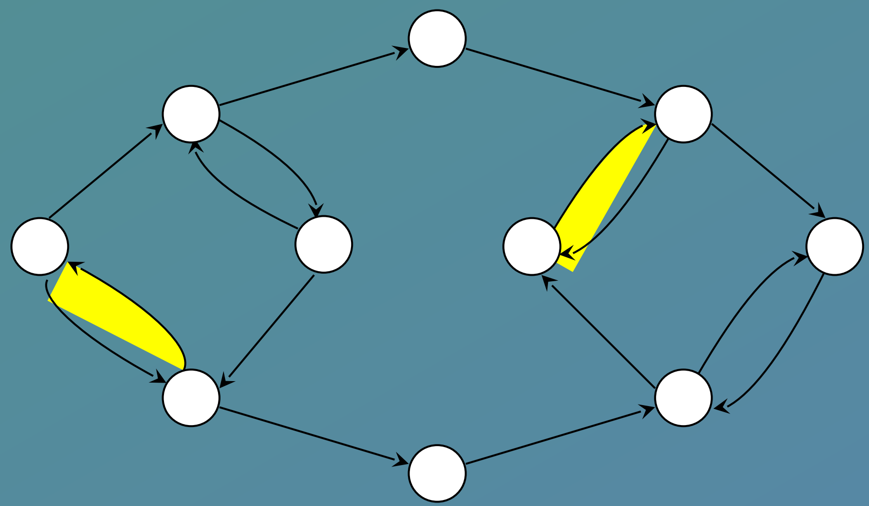

D
A
2
B
C
3
E
1

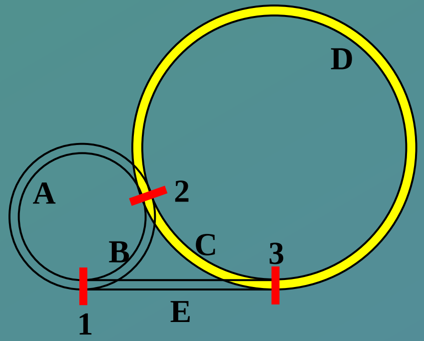


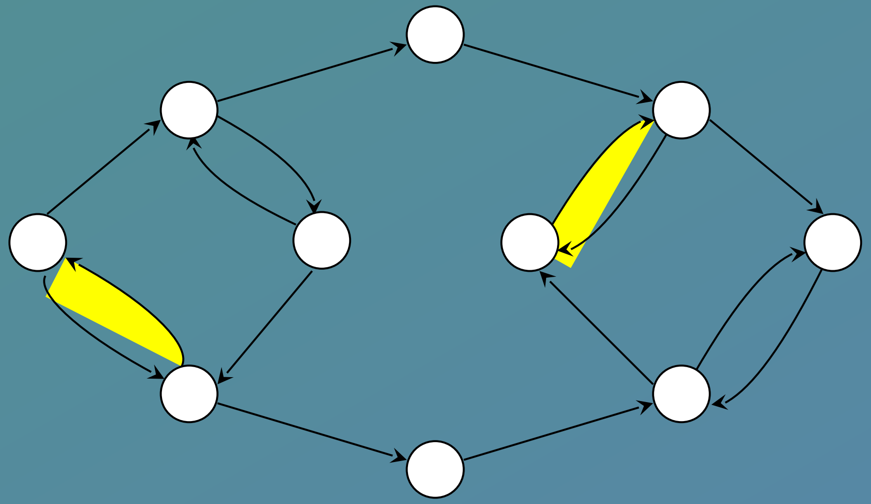

D
A
2
B
C
3
E
1

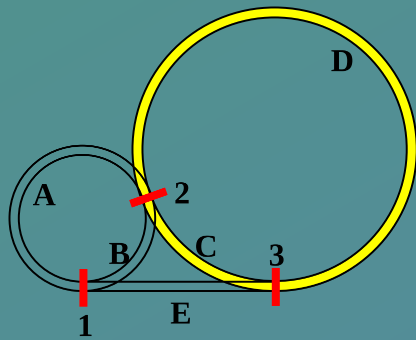


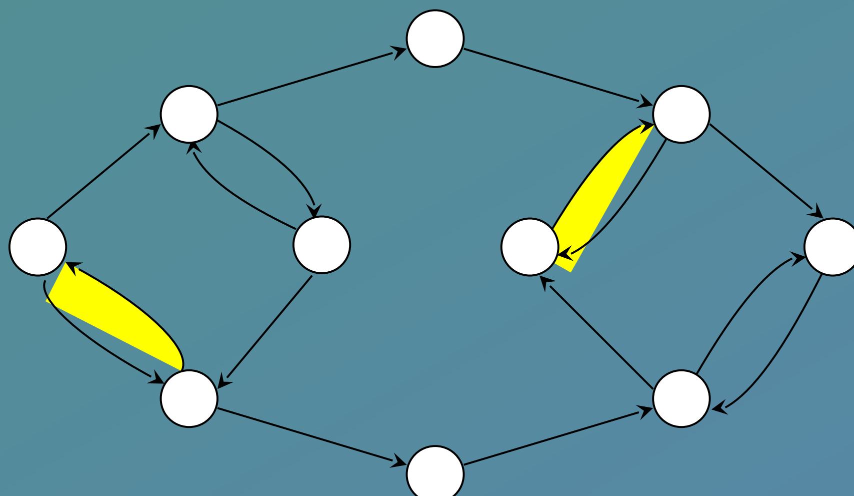

D
A
2
B
C
3
E
1

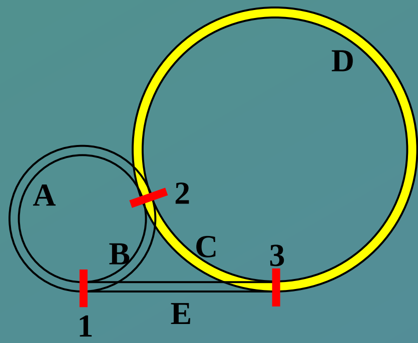


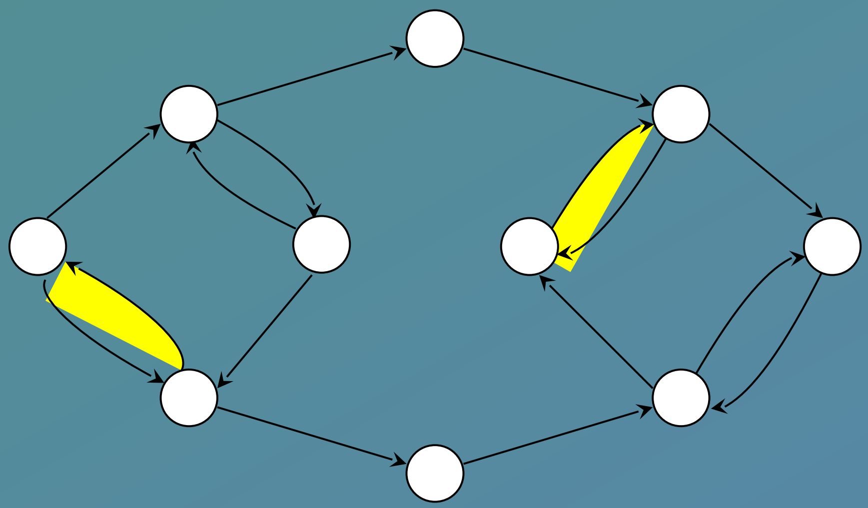

D
A
2
B
C
3
E
1

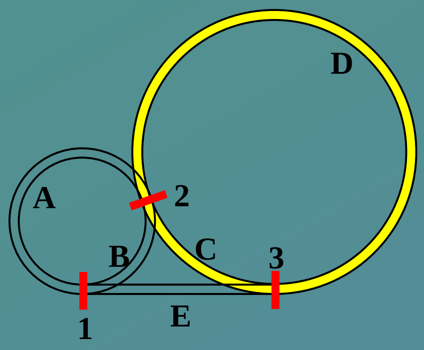


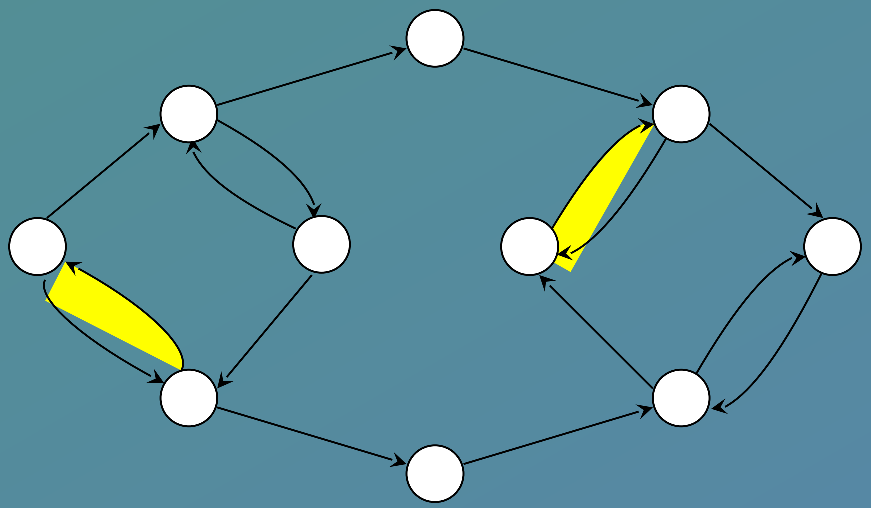

D
A
2
B
C
3
E
1

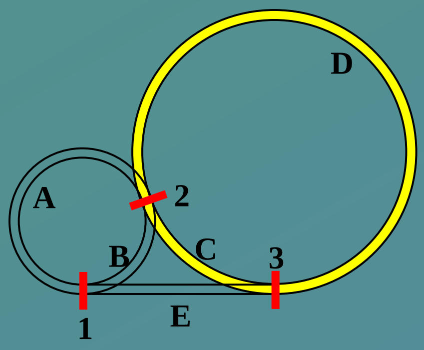


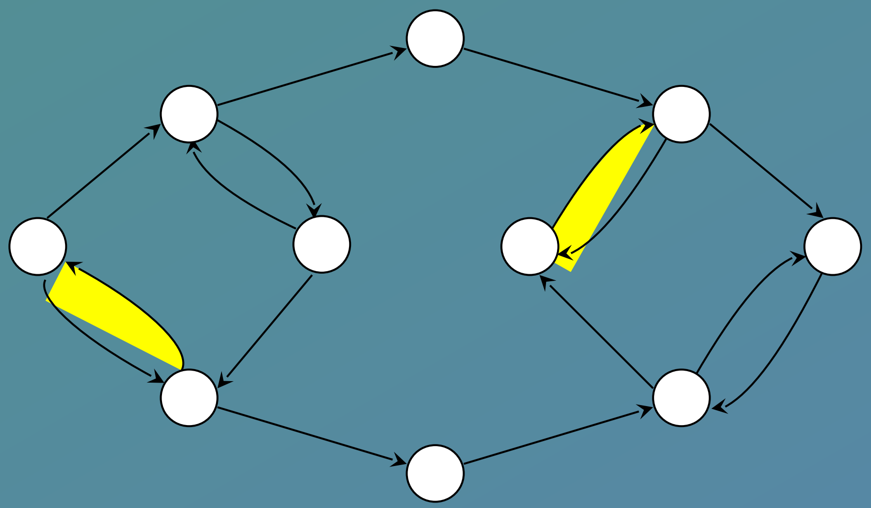

D
A
2
B
C
3
E
1

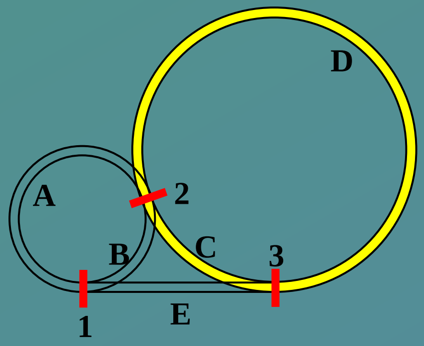


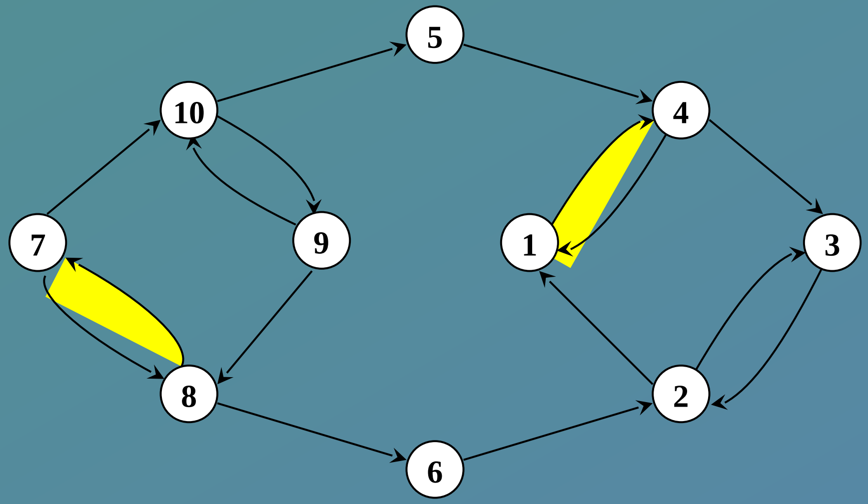

D
A
2
B
C
3
E
1

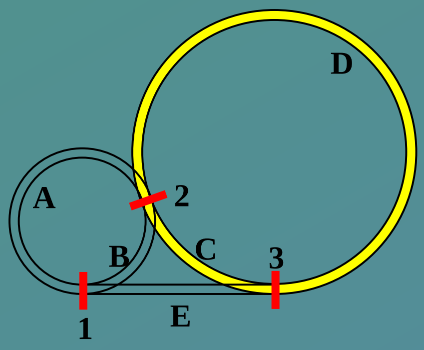


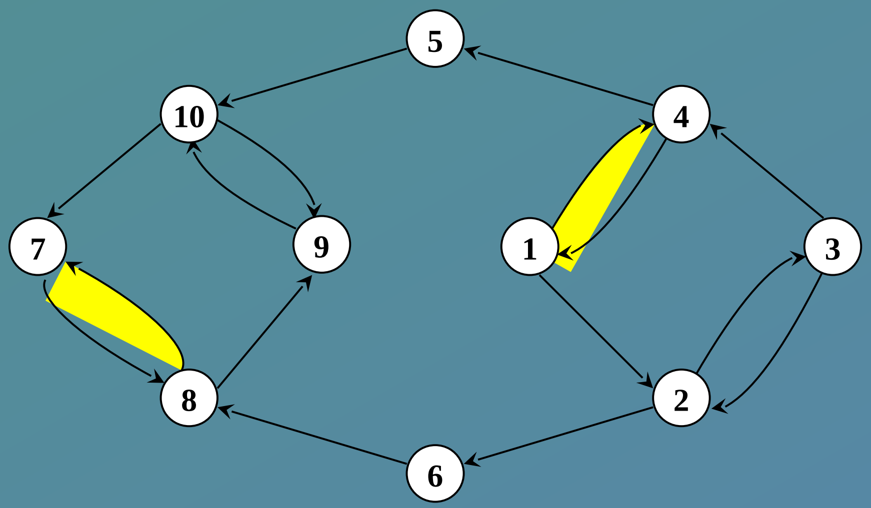

D
A
2
B
C
3
1
E

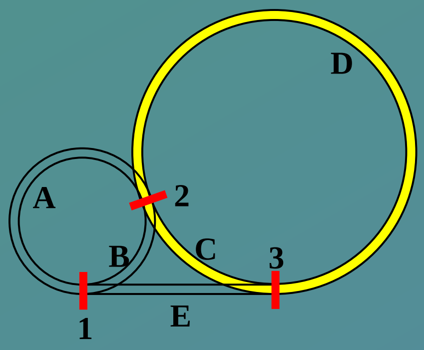


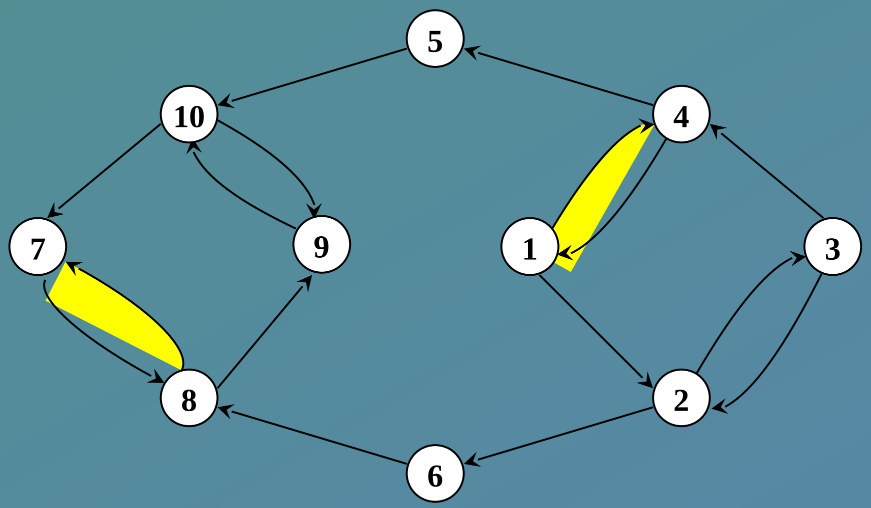

D
A
2
B
C
3
1
E

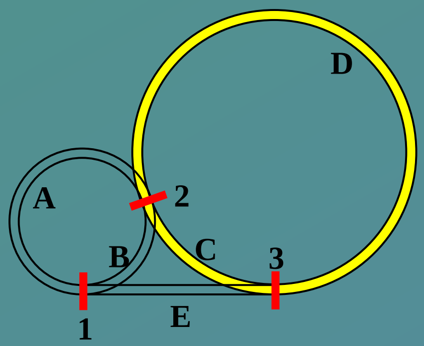

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

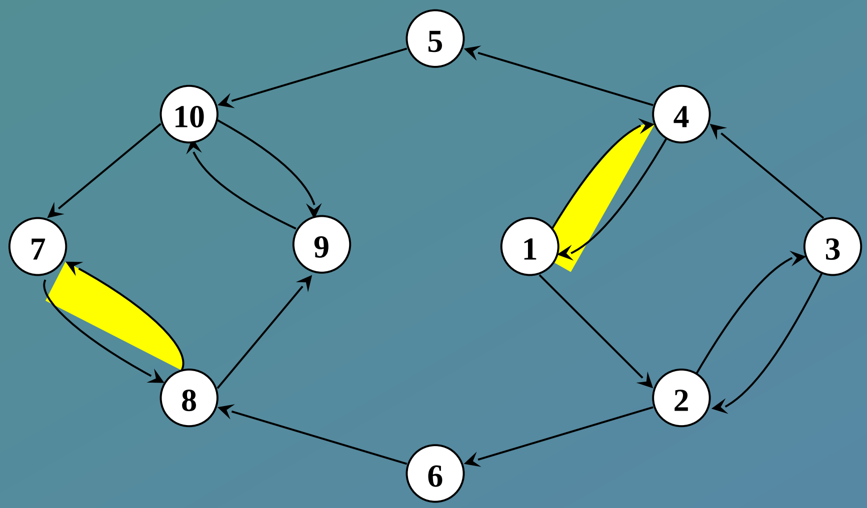

A
B
C
D
E
1
2
3

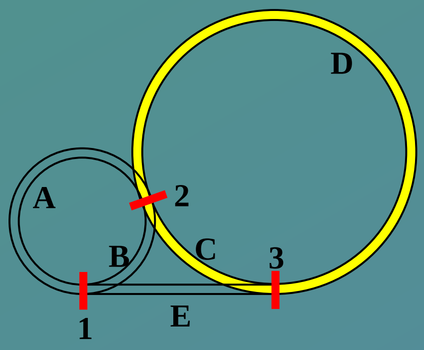

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

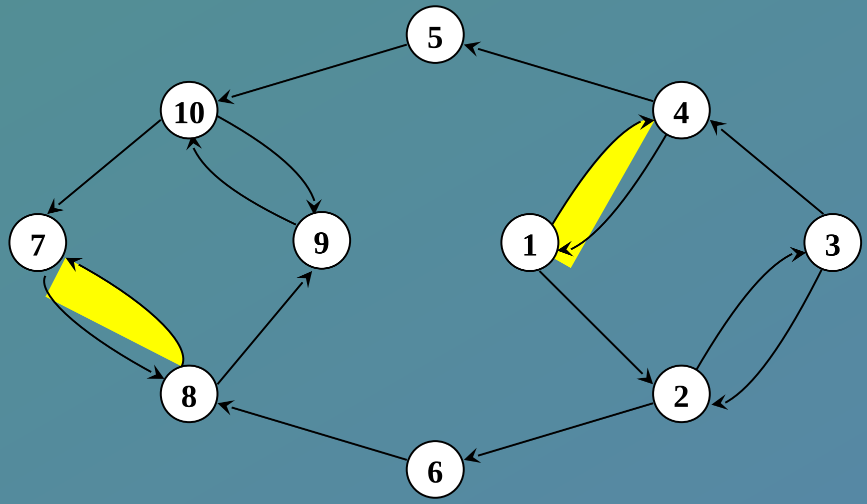

D
A
2
B
C
3
1
E

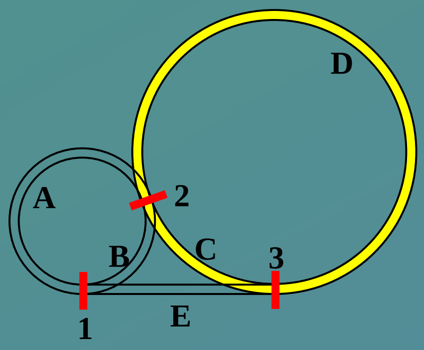

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

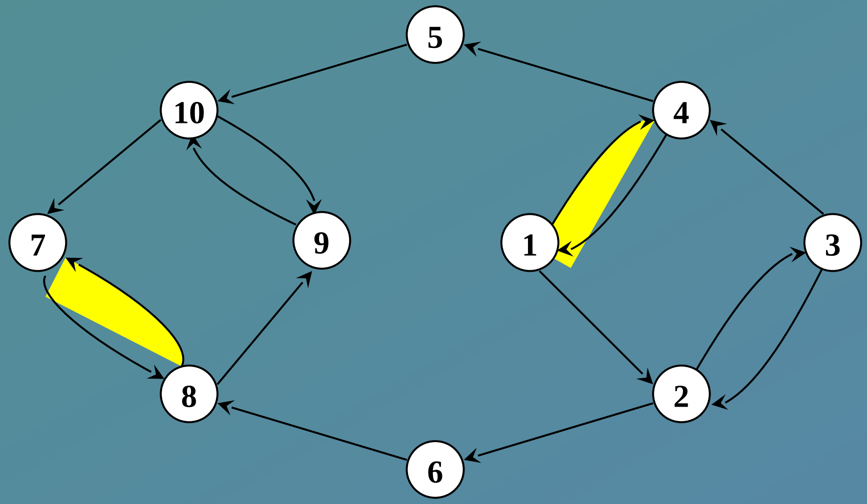

D
A
2
B
C
3
E
1

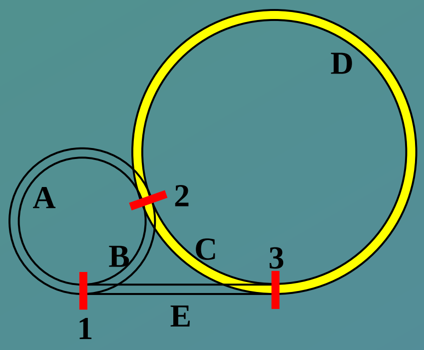

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6


D
A
2
B
C
3
1
E

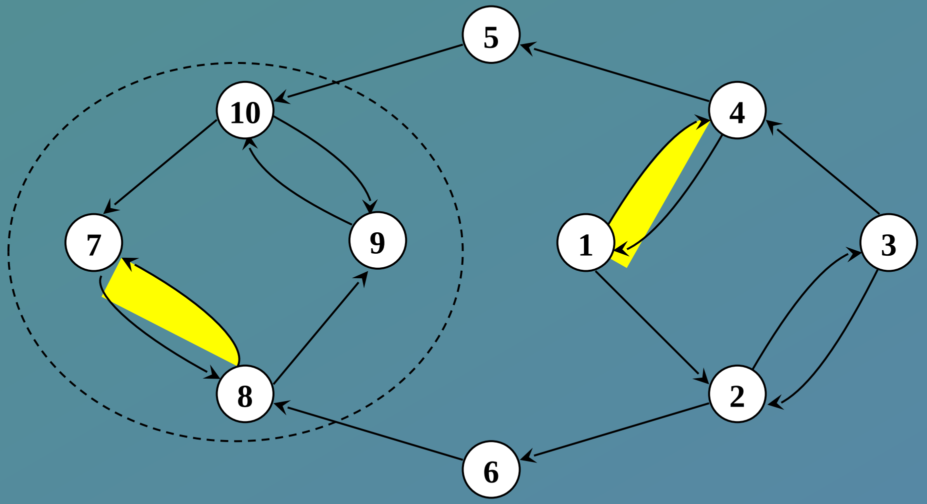

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6


D
A
2
B
C
3
1
E

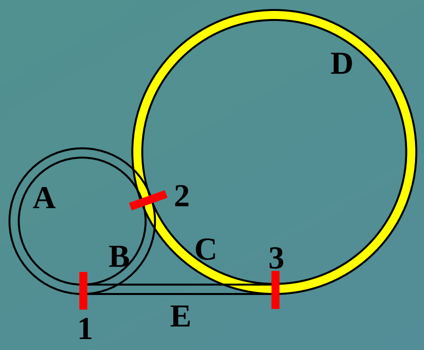

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

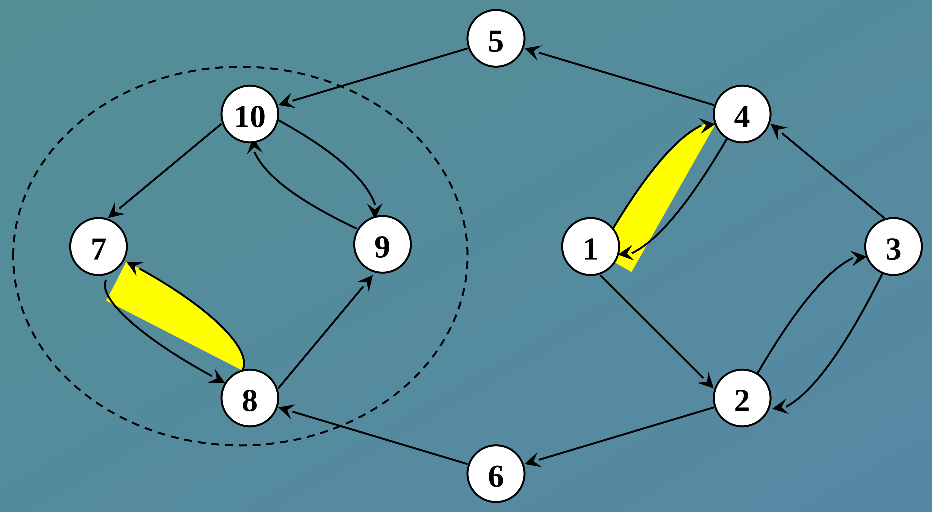


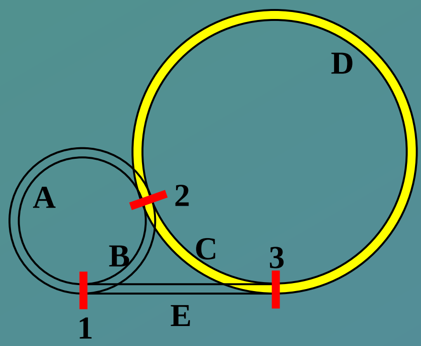
D
A
2
B
C
3
1
E

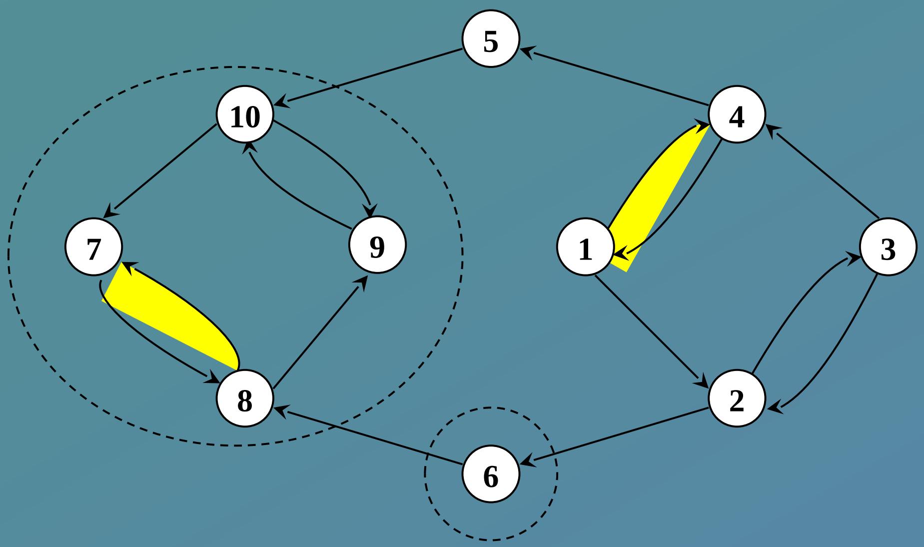


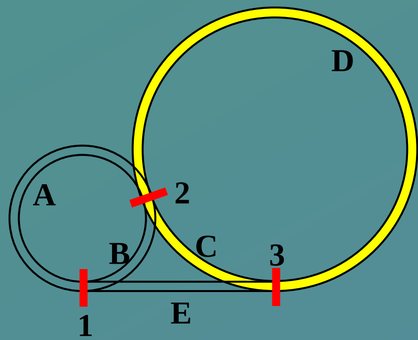
5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

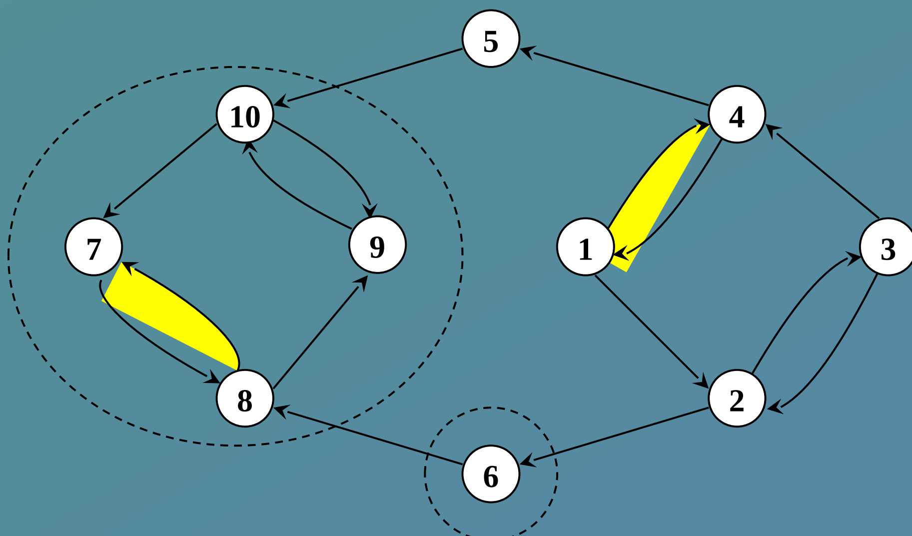

D
A
2
B
C
3
1
E

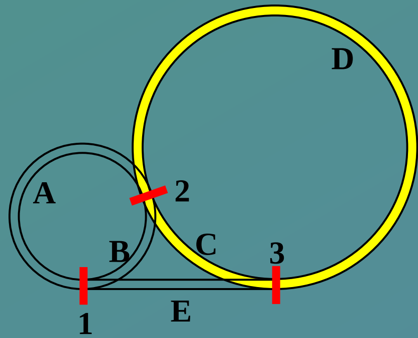

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

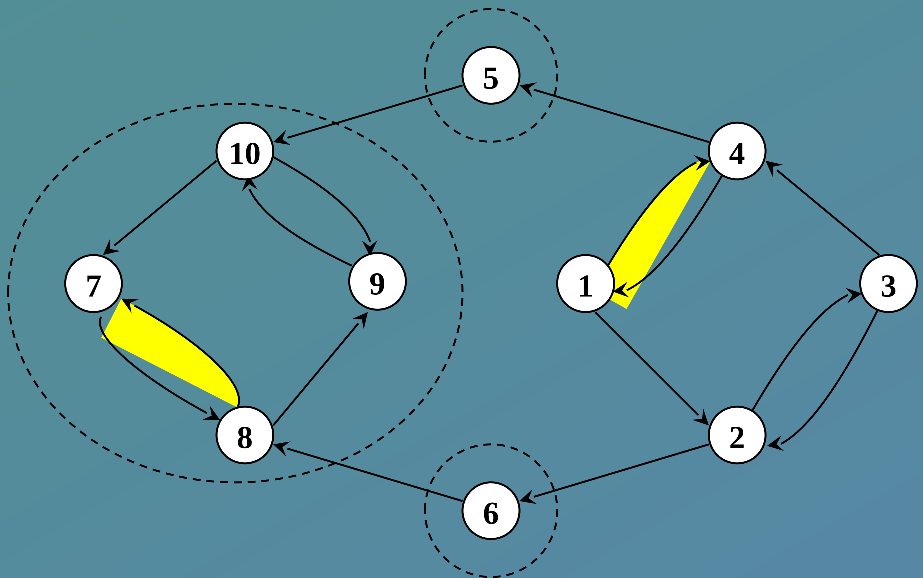

D
A
2
B
C
3
1
E

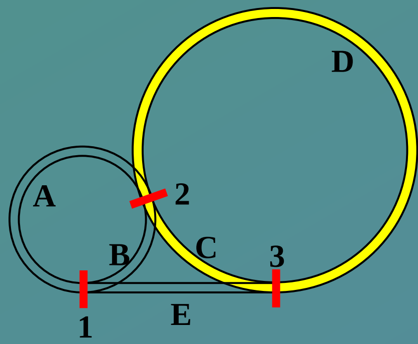

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

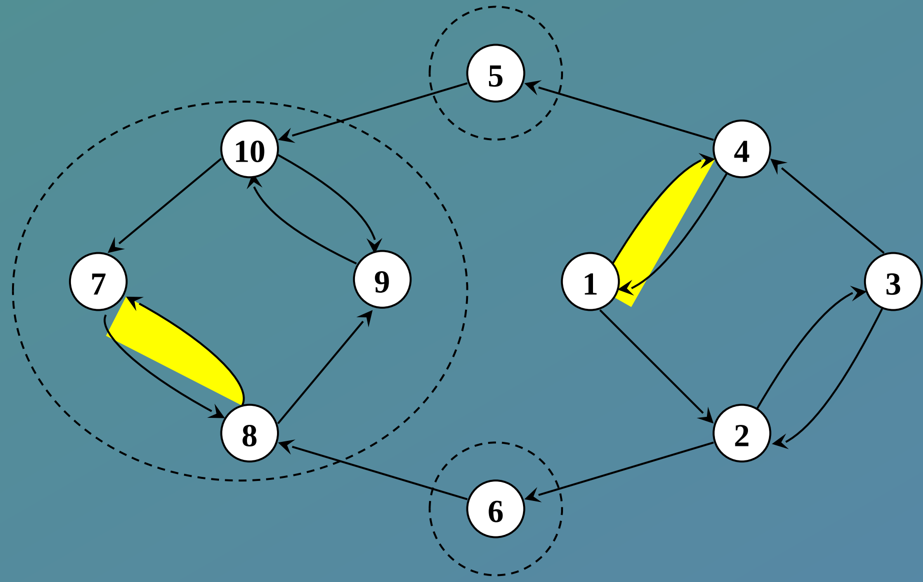

D
A
2
B
C
3
1
E

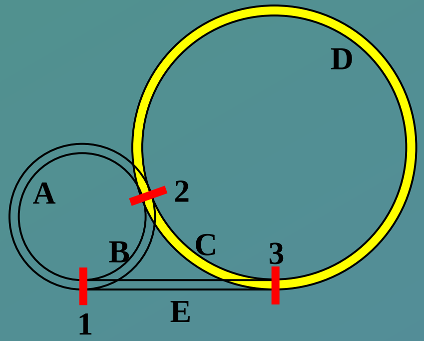

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

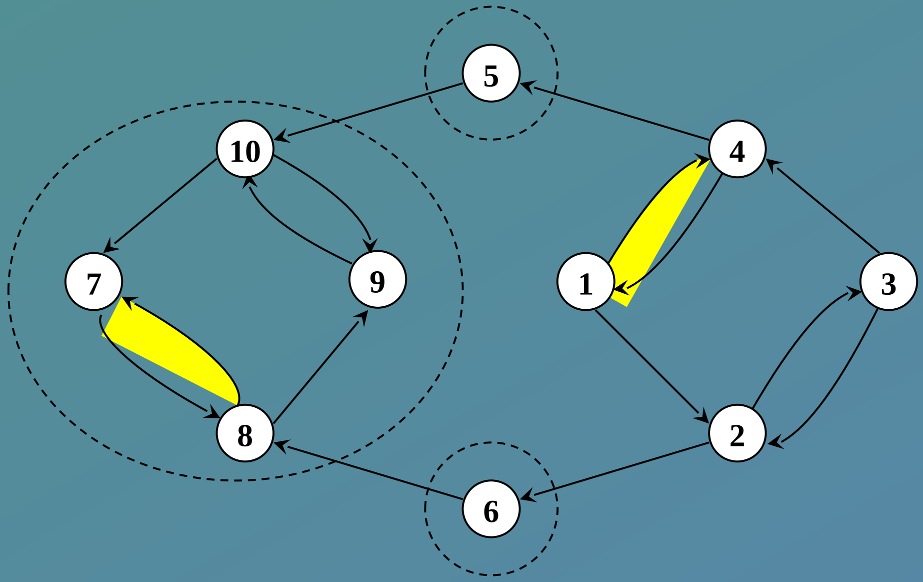

D
A
2
B
C
3
E
1

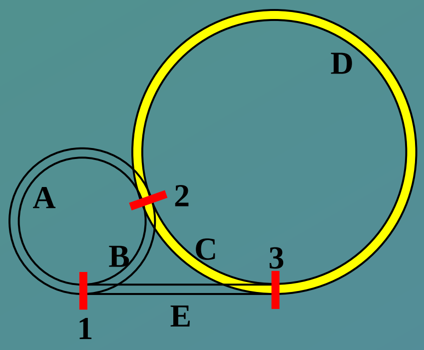

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

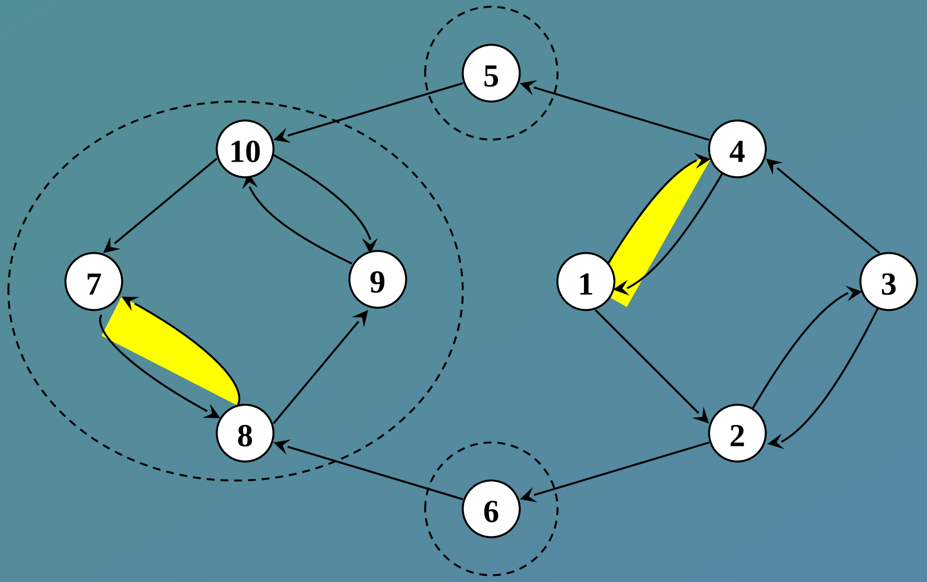

D
A
2
B
C
3
1
E

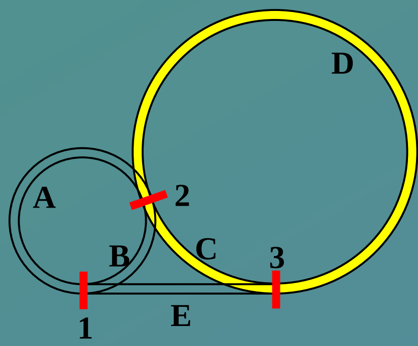

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

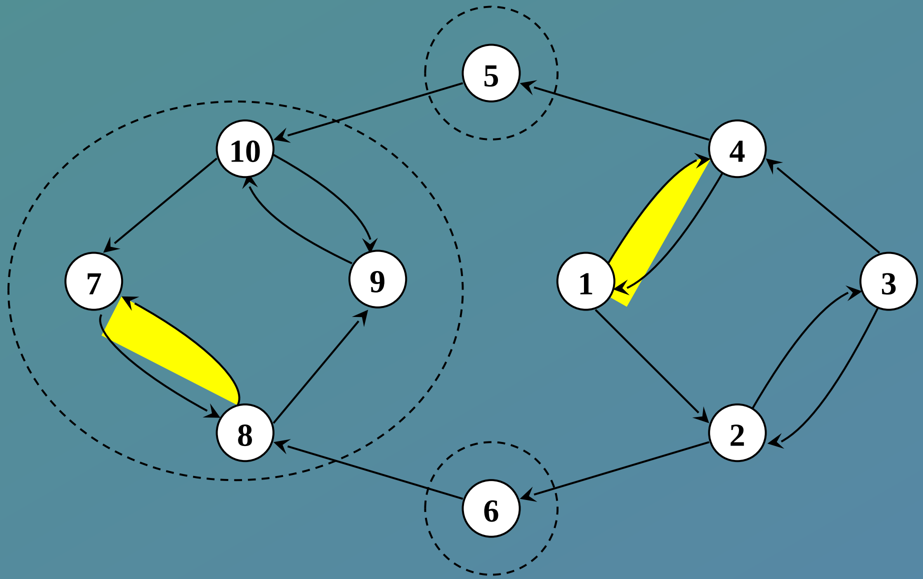

D
A
2
B
C
3
1
E

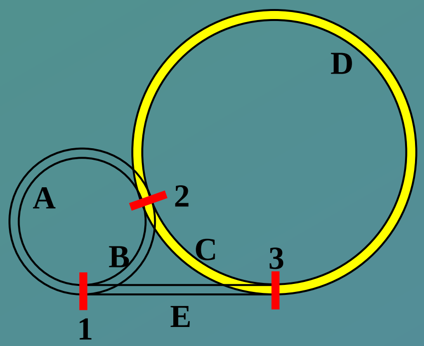

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

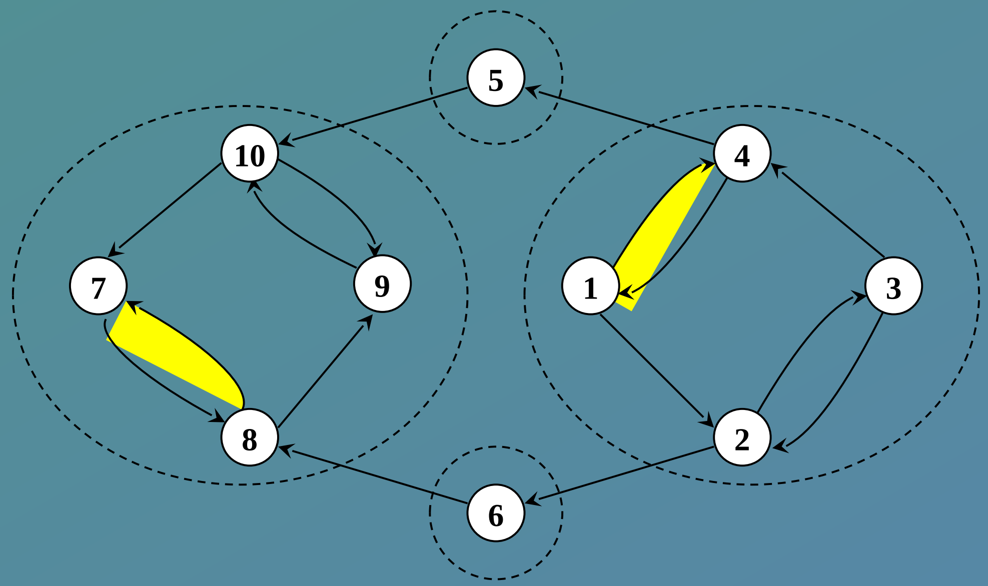

D
A
2
B
C
3
1
E

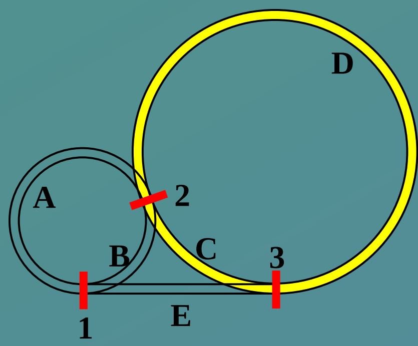

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6

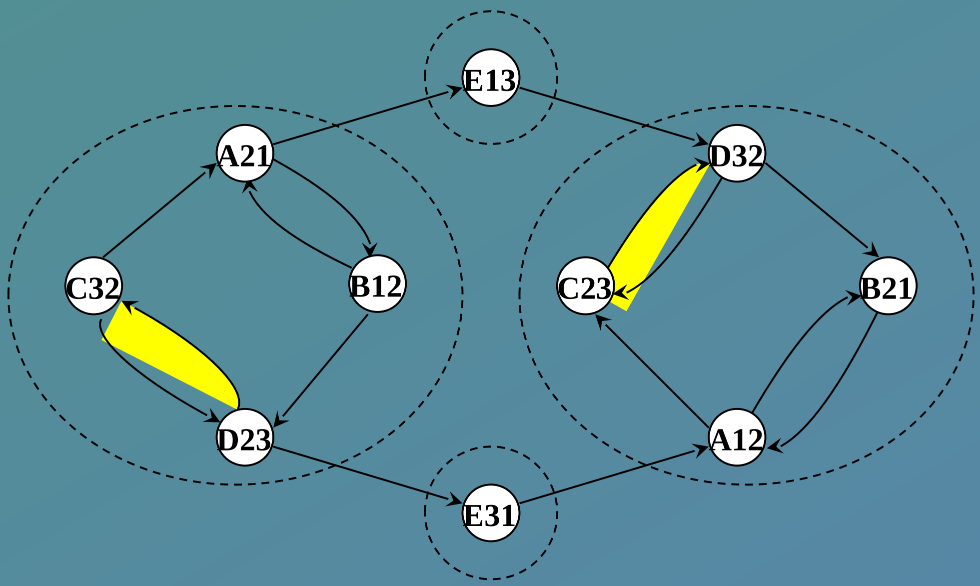

D
A
2
B
C
3
1
E

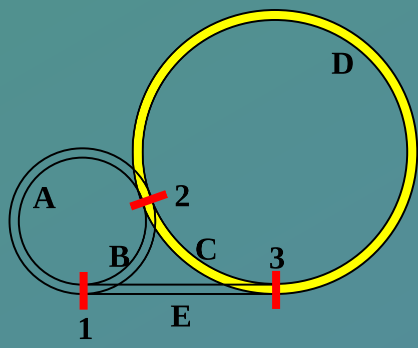

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6


D
A
2
B
C
3
1
E

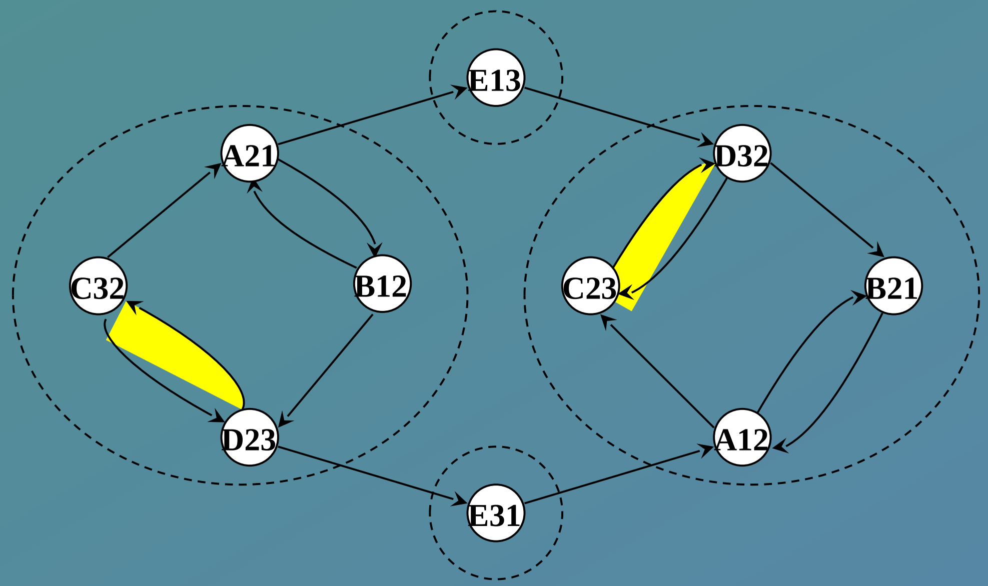

5
10
4
7
9
1
3
8
2
6


D
A
2
B
C
3
1
E

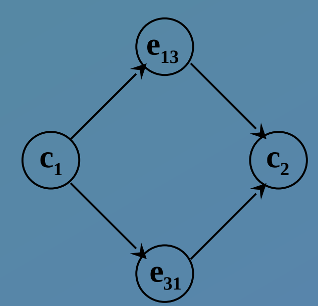

E13
A21
D32
C32
B12
C23
B21
D23
A12
E31



D
A
2
B
C
3
1
E



E13
A21
D32
C32
B12
C23
B21
D23
A12
E31



e_{13}
c_1
c_2
e_{31}