

# TP-Projet

## Équations aux dérivées partielles

2A-IMA Modélisation et Simulation Numérique

Année universitaire 2016-2017

Contact : jeremy.rouot@laas.fr

Sources : <http://rouot.perso.math.cnrs.fr/Teaching/ENSEEIH/TP-EDP-2A/>

## 1 Partie A : Equations aux dérivées partielles elliptiques

### 1.1 Position du problème

Nous nous proposons d'obtenir par la méthode des éléments finis une approximation de la solution d'un problème dit de Laplace en deux dimensions muni de conditions aux limites mixtes (Dirichlet et Neumann). Soit  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[ \subset \mathbb{R}^2$  et  $\partial\Omega$  sa frontière partitionnée en deux sous-ensembles  $\partial\Omega_n \cup \partial\Omega_d = \partial\Omega$ . Etant donné  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $u_d \in H^1(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega_n)$ , le problème de Laplace revient à déterminer  $u$  solution de:

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) &= f(x, y) & \text{sur } \Omega, \\ u(x, y) &= u_d(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_d, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial n} &= g(x, y) & \text{sur } \partial\Omega_n, \end{cases} \quad (1)$$

Nous nous proposons de résoudre le problème (1) en le discrétisant par la méthode des éléments finis de Lagrange avec des éléments finis de type  $P_1$  ou  $Q_1$  (approximation polynômiale du premier degré sur un triangle ou quadrangle respectivement). Les différentes étapes qui vous sont proposées vous permettent de bâtir pas à pas le programme sous MATLAB.

### 1.2 Partie théorique

- Montrer qu'en supposant  $u \in H^1(\Omega)$ , en se plaçant sur l'espace

$$H_0^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur } \partial\Omega_d\}.$$

et en considérant  $v = u - u_d \in H_0^1(\Omega)$ , la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} f w \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g w \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_d \cdot \nabla w \, dx.$$

- Montrer que le problème admet alors une unique solution.
- Montrer que la forme variationnelle discrète aboutit au système linéaire d'équations  $Ax = b$  avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x, b \in \mathbb{R}^n$  tels que:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_j \, dx, \\ b_i &= \int_{\Omega} f \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g \eta_i \, dx - \sum_{k=1}^n U_k \int_{\Omega} \nabla \eta_i^\top \nabla \eta_k \, dx, \end{aligned}$$

où  $n$  désigne le nombre de degrés de liberté,  $\eta_k$  les fonctions de base des éléments finis et la décomposition nodale de la condition limite est  $u_d = \sum_{k=1}^n U_k \eta_k$ , avec  $U_k = 0$  si  $(x_k, y_k) \notin \partial\Omega_d$  et  $U_k = u_d(x_k, y_k)$  sinon. Justifier l'existence et l'unicité de la solution discrète de ce système.

## 1.3 Mise en œuvre pratique

### 1.3.1 Maillages

Deux maillages seront employés pour le projet. Ils se basent tous les deux sur cinq matrices/tableaux au format suivant:

**coordinates** : points du maillage, au format :  
abscisse    ordonnée

**elements3** : éléments triangle, donnés sous la forme :  
# noeud 1    # noeud 2    # noeud 3

**elements4** : éléments quadrangle, donnés sous la forme :  
# noeud 1    # noeud 2    # noeud 3    # noeud 4

**dirichlet** : sommets de la frontière de Dirichlet, donnés sous la forme :  
# Sommet

**neumann** : arêtes de la frontière de Neumann, données sous la forme :  
# Sommet arête 1    # Sommet arête 2

Dans chaque élément de type triangle ou quadrangle, les noeuds seront numérotés dans le sens contraire du sens des aiguilles d'une montre. La numérotation correspond à l'indice de ligne dans le tableau **coordinates**.

Pour générer ces tableaux, une première solution est d'appeler la fonction **maillage\_carre.m**. Celle-ci crée un maillage sans quadrilatères, ni conditions de Neumann (i.e. les tableaux correspondants sont des matrices vides). Une seconde possibilité consiste à charger les tableaux stockés dans les fichiers **.dat**. Par exemple, la commande **load coordinates.dat** sera utilisée sous MATLAB pour lire le fichier de données correspondant. Un tableau nommé **coordinates** sera alors créé.

Le second exemple comporte toutes les "difficultés" possibles (les deux types d'éléments + les deux genres de conditions). Il permettra de valider l'implémentation complète.

### 1.3.2 Assemblage

La phase d'assemblage consiste à calculer sur chaque élément de la triangulation du maillage les éléments de la matrice raideur  $A$  et du second membre  $b$ . Les formules d'intégration dépendent donc du type d'élément considéré. Nous détaillons synthétiquement en premier lieu l'assemblage sur des éléments de type triangle, **pour plus de détails se référer à la section 4**.

**Les formules sur les éléments quadrangle doivent quant à elles être établies par les étudiants.**

**Triangle** Nous considérons les fonctions de base sur le triangle de noeuds  $(x_i, y_i)$ , ( $i = 1, \dots, 3$ ) définies par:

$$\eta_j(x_k, y_k) = \delta_{jk} \quad j, k = 1, 2, 3.$$

La phase d'assemblage utilisera notamment les relations suivantes (les indices sont à comprendre modulo 3):

$$\eta_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}}, \quad (2)$$

$$\nabla \eta_j(x, y) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Si  $(x_G, y_G)$  désignent les coordonnées du centre de gravité du triangle  $T$ , l'approximation suivante sera utilisée pour la quadrature du second membre:

$$\int_T f \eta_j dx \approx \frac{\alpha}{6} f(x_G, y_G).$$

**Quadrilatère** Pour déduire la forme de la matrice raideur sur un élément de type quadrangle, il faut utiliser la fonction affine  $\Phi_Q$  qui transforme le carré de côté unitaire  $[0, 1]^2$  ( $\xi \in [0, 1], \zeta \in [0, 1]$ ) en un parallélogramme de sommets  $(x_i, y_i)$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ):

$$\begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\zeta + x_1 \\ y &= (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\zeta + y_1. \end{aligned}$$

puis utiliser la relation  $\eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_Q^{-1}(x, y))$ , où  $\phi_j$  désignent les fonctions de base sur le carré unité définies par:

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)(1 - \zeta), \\ \phi_2(\xi, \zeta) &= \xi(1 - \zeta), \\ \phi_3(\xi, \zeta) &= \xi\zeta, \\ \phi_4(\xi, \zeta) &= (1 - \xi)\zeta. \end{aligned}$$

- Établir les formules donnant la matrice de raideur associée à un élément de type quadrangle.

Si  $(x_G, y_G)$  désignent les coordonnées du centre de gravité du quadrangle  $T$ , l'approximation suivante sera utilisée pour la quadrature du second membre:

$$\int_T f \eta_j dx \approx \frac{\alpha}{4} f(x_G, y_G).$$

### 1.3.3 Travail d'implémentation

Vous implanterez les différentes étapes de la discrétisation dans un fichier script `elliptic.m`. Il est fortement conseillé de suivre l'ordre ci-dessous :

1. Construction de la matrice de raideur élémentaire  $M_T^A$  relative à un élément triangle;
2. Assemblage de la matrice  $A$  dans le cas d'un maillage constitué uniquement d'éléments triangles;
3. Assemblage du second membre dans le cas de conditions de Dirichlet uniquement, puis tests sur le premier type de maillage (obtenu par appel à `maillage_carre`);
4. Construction de la matrice de raideur élémentaire  $M_Q^A$  relative à un élément quadrangle, en utilisant les formules que vous aurez établies;
5. Inclusion du traitement de tels éléments de type Q1 et des conditions de Neumann dans le script `elliptic.m`;
6. Validation sur le second type de maillage.

## 1.4 Compléments d'analyse du système issu de la discrétisation

Les questions de cette partie sont à réaliser en utilisant le premier type de maillage, à taille variable, et devront figurer dans le rapport. Des scripts de tests pourront appuyer l'illustration des réponses.

#### 1.4.1 Analyse de l'ordre du schéma de discrétisation dans le cas d'éléments Triangle

- Montrer que la formulation discrète dans le cas  $P_1$  sur un maillage uniforme de  $\Omega$  correspond à la formule de discrétisation de type différences finies d'ordre deux à un facteur multiplicatif près. Qu'en est-il du second membre ?

Pour pouvoir étudier la précision du schéma de discrétisation, il est utile de comparer la solution approchée obtenue avec la solution exacte du problème de Laplace (1). A titre illustratif, nous choisissons donc comme solution exacte la fonction suivante:

$$u^{ex}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (5)$$

ce qui nous donne comme second membre:

$$f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Dans ce cas-là, le problème de Laplace ne comporte uniquement que des conditions limites de type Dirichlet homogène. Tracer en loi log-log l'évolution de  $\|u_h^{ex} - u_h\|_{2h}$  en fonction de  $h$  où  $\|\cdot\|_{2h}$  désigne la norme  $L_2$  discrète, i.e.  $\|v\|_{2h}^2 = h^2 \|v\|_2^2$  avec  $h^2 = 1/\text{length}(v)$ .

- Quel ordre de discrétisation obtenez-vous ? Est-ce le résultat attendu ?

#### 1.4.2 Résolution du système linéaire par une méthode directe

Une fois le système linéaire assemblé, la solution discrète sera obtenue par une méthode directe (factorisation de Cholesky dans ce cadre) par l'utilisation de la commande:

$$u = A \setminus b ;$$

où  $A$  désigne la matrice creuse et  $b$  le second membre.

La factorisation de Cholesky  $A = R^T R$  sera également réalisée grâce la commande  $R = \text{chol}(A)$ . Il est notamment demandé de tracer l'évolution du nombre d'éléments non nuls de  $R$  en fonction de la taille de la matrice (i.e. en faisant varier le nombre d'éléments du maillage).

- Que remarquez-vous ?
- Quel est le comportement mis en évidence ?
- Que suggérez-vous d'adopter pour réduire le coût mémoire de cette factorisation ?

## 2 Partie B: Equations aux dérivées partielles paraboliques

### 2.1 Position du problème

Nous nous proposons de résoudre le problème d'évolution instationnaire suivant connu sous le nom du problème de la chaleur conduisant à une équation aux dérivées partielles de type parabolique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \epsilon \Delta u(x, y, t) + f(x, y, t) \text{ sur } \Omega \times [0, T], \\ u(x, y, t)|_{\partial\Omega_d} = u_d(x, y, t), \quad \forall t \in [0, T], \\ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_n} = g, \quad \forall t \in [0, T], \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{array} \right. \quad (6)$$

avec  $T > 0$  et  $\epsilon > 0$ . Il est demandé de mettre en oeuvre un schéma de résolution implicite (classe des schémas qui présentent l'avantage d'être inconditionnellement stable). L'intervalle temporel  $[0, T]$  est décomposé en  $n_t$  intervalles réguliers de longueur  $\Delta t = T/n_t$ .

### 2.2 Partie théorique

• Montrer que la discrétisation de (6) en espace par la méthode des éléments finis en un maillage de  $N$  points  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$  aboutit au système d'équations différentielles ordinaires suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} B \frac{dU_h(t)}{dt} + \epsilon A U_h(t) = b_h(t), \\ [U_h(t)]_i = u_d(x_i, y_i, t) \quad \forall (x_i, y_i) \in \partial\Omega_d, \\ U_h(t=0) = U_h^0, \end{array} \right.$$

où  $U_h(t) \in \mathbb{R}^N$  quel que soit  $t \in [0, T]$ ,  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  désigne la matrice de raideur déterminée en section précédente,  $B \in \mathbb{R}^{N \times N}$  est la matrice dite de masse définie par:

$$B_{ij} = \int_{\Omega} \eta_i \eta_j \, dx,$$

et  $b_h(t) \in \mathbb{R}^N$  quel que soit  $t \in [0, T]$ , avec

$$[b_h(t)]_i = \int_{\Omega} f(x, y, t) \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g(x, y, t) \eta_i \, dx.$$

Comme en partie A, les  $\eta_i$  correspondent aux fonctions de base adaptées en fonction du type d'éléments<sup>1</sup>.

*Il suffit de reprendre les arguments de la partie A, en incluant le terme additionnel correspondant à  $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ .*

• Soit  $U_h^n = U_h(t^n)$  la solution discrète au temps  $t^n$ . Nous considérons le schéma  $\theta$  de discrétisation en temps qui conduit à cette forme:

$$(\epsilon \theta \Delta t A + B) U_h^n = \theta \Delta t b_h^n + (1 - \theta) \Delta t b_h^{n-1} + B U_h^{n-1} - \epsilon (1 - \theta) \Delta t A U_h^{n-1}$$

où

$$(b_h^n)_i = \int_{\Omega} f(x, y, t^n) \eta_i \, dx + \int_{\partial\Omega_n} g(x, y, t^n) \eta_i \, dx.$$

Etudier l'ordre de discrétisation temporel en fonction de  $\theta$  ( $\theta = 1/2$  et  $\theta \neq 1/2$ ).

*Il faut retrouver un ordre de discrétisation de 1 pour  $\theta \neq 1/2$  et de 2 pour  $\theta = 1/2$ . Pour ce faire, il faut effectuer un développement limité de l'approximation donnée par le  $\theta$ -schéma.*

<sup>1</sup>Le maillage fourni sous Moodle ne comporte que des éléments de type P1.

## 2.3 Mise en œuvre pratique

La mise en œuvre pratique se base essentiellement sur la partie A. Dans la partie assemblage il faut désormais considérer l'assemblage de la matrice de masse  $B$ . Ainsi pour des éléments triangulaires, la matrice de masse élémentaire s'écrit:

$$M_T^B = \frac{\alpha}{24} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans la partie résolution, il ne faut pas oublier de retrancher la contribution des points sur la frontière de Dirichlet. Le second membre devient ainsi

$$\theta \Delta t b_h^n + (1 - \theta) \Delta t b_h^{n-1} + B U_h^{n-1} - \varepsilon (1 - \theta) \Delta t A U_h^{n-1} - (\varepsilon \theta dt A + B) U_d,$$

avec  $U_d(i) = u_d(x_i, y_i)$  si  $(x_i, y_i) \in \partial\Omega_d$  et  $U_d(i) = 0$  sinon. Ceci doit être fait à chaque pas de temps, avant de résoudre le système sur les points en dehors de cette frontière (on le faisait directement dans la partie A, il faut ici faire attention à le faire après avoir calculé le second membre).

- Indiquer précisément les modifications que vous devez apporter pour résoudre le problème parabolique en partant des fichiers déjà écrits pour le traitement du problème elliptique.

*Il faut faire une boucle sur les différents pas de temps, en faisant attention à conserver  $b_h^{n-1}$  et  $U_h^{n-1}$  afin de mettre à jour le second membre au pas de temps  $n$ .*

**Travail d'implémentation** En partant des fichiers écrits pour le traitement du problème elliptique, écrire un script `parabolic.m` pour résoudre le problème de la partie B. On vérifiera numériquement l'ordre de discrétisation temporel en fonction de  $\theta$  établi dans la partie précédente, avec  $\varepsilon = 1, \Delta t = 0.01, T = 0.2$  et une solution nulle au temps initial  $t = 0$ , soit  $u_0 \equiv 0$ .

Les figures 1 et 2 présentent les valeurs de la solution sur quatre pas de temps lorsque  $\theta = 1$  et  $\theta = 0.5$ , respectivement. Les valeurs affichées sont calculées en  $t = 0.01, 0.04, 0.1$  et  $0.2$ .

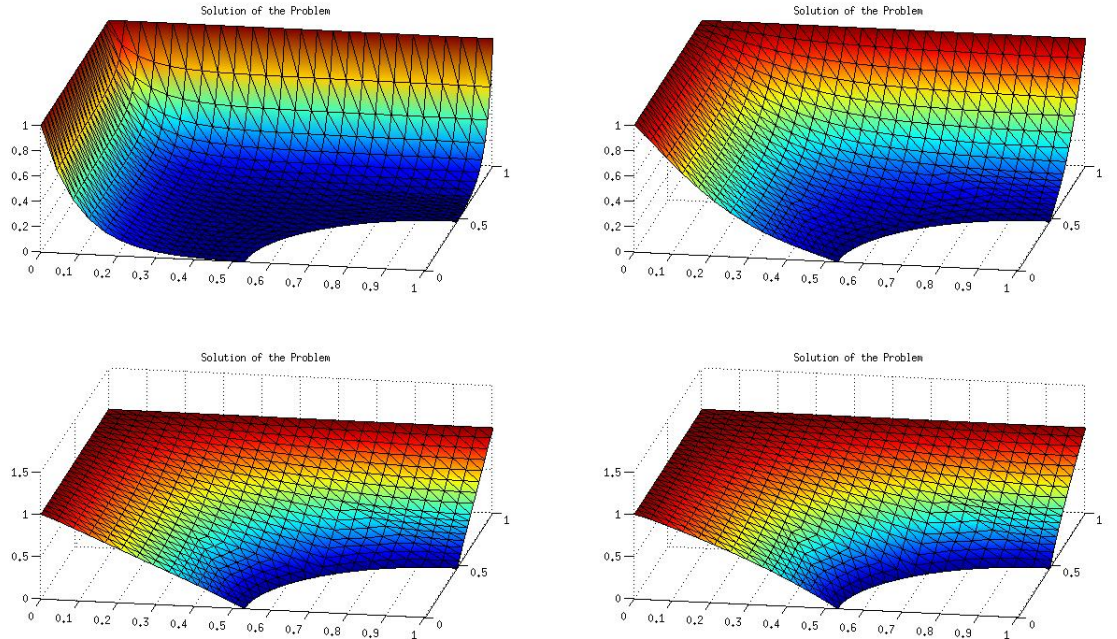


Figure 1: Valeurs de la solution pour  $t \in \{0.01, 0.04, 0.1, 0.2\}$  lorsque  $\theta = 1$ .

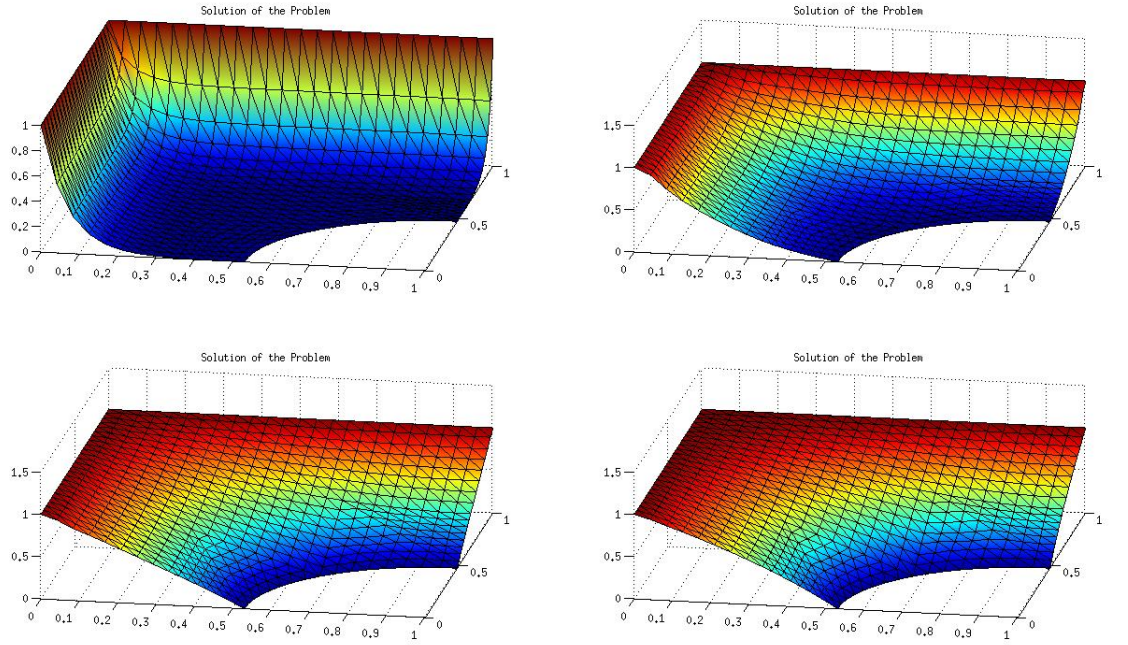


Figure 2: Valeurs de la solution pour  $t \in \{0.01, 0.04, 0.1, 0.2\}$  lorsque  $\theta = 0.5$ .

### 3 Rédaction du compte rendu

Il vous est demandé de:

- rendre une archive rassemblant l'ensemble de vos fichiers MATLAB. Ces fichiers correspondent aux développements demandés ainsi qu'un fichier README pour spécifier comment utiliser ces programmes;
- rédiger un compte-rendu succinct détaillant les réponses aux questions (précédées d'un • dans le texte).

**Date limite: Vendredi 21 avril 2017.**

## 4 Annexe

Cette annexe détaille les étapes qui aboutissent aux formules des contributions relatives à des éléments triangulaires présentées en section 1.3.2.

### 4.1 Rappels des définitions et notations du problème

La formulation variationnelle discrète du problème (1) permet de le réduire à une résolution de système linéaire. On considère donc  $N$  points  $\{A_k = (x_k, y_k)\}_k$  sur  $\Omega$  et sa frontière, que l'on associe à  $N$  fonctions de base  $\eta_j$  par la relation:

$$\eta_j(x_k, y_k) = \delta_{jk}. \quad (7)$$

On considère un maillage du domaine  $\Omega$  composé d'éléments triangulaires et on note  $\mathcal{T}$  l'ensemble de ces éléments. Chaque triangle  $T \in \mathcal{T}$  possède ainsi trois sommets qui correspondent à trois points de la discrétisation, et pour un triangle  $T = A_i A_j A_k$ , les fonctions  $\eta_i, \eta_j, \eta_k$  sont affines sur ce triangle. L'équation (7) permet même d'affirmer que pour tout  $i$ , le support de  $\eta_i$  est exactement l'ensemble des triangles auxquels appartient le point  $A_i$ .

Le système à résoudre est donc  $Ax = b$ , avec  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  définie par:

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \eta_i(x, y)^\top \nabla \eta_j(x, y) dx dy = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \nabla \eta_i(x, y)^\top \nabla \eta_j(x, y) dx dy.$$

**Remarque :** D'après la remarque précédente sur les supports des fonctions de base, la plupart de ces intégrales seront nulles. De fait, seules les intégrales sur les triangles contenant à la fois les points  $A_i$  et  $A_j$  auront une contribution non nulle à la valeur de  $A_{ij}$ .

## 4.2 Calcul des intégrales sur les éléments triangulaires

Considérons un triangle  $T$  du maillage. Pour simplifier les notations, on renomme les sommets de ce triangle  $A_1, A_2, A_3$ . Sur ce triangle, on va calculer la matrice  $M_T^A$  de taille  $3 \times 3$  dont les coefficients sont donnés par :

$$[M_T^A]_{ij} = \int_T \nabla \eta_i(x, y)^\top \nabla \eta_j(x, y) dx dy.$$

On sait que les fonctions de base sont affines sur ce triangle et vérifient (7) pour  $j, k \in 1, 2, 3$ . Une manière simple de déterminer l'expression de ces fonctions pour tout couple  $(x, y) \in T$  est de se ramener au triangle de référence  $U$ , de sommets  $(u_1, v_1) = (0, 0)$ ,  $(u_2, v_2) = (1, 0)$  et  $(u_3, v_3) = (0, 1)$ . En effet, sur ce triangle, les fonctions de base correspondant à ces sommets sont définies pour tout couple  $(u, v) \in [0, 1]^2$  par :

$$\begin{aligned} \phi_1(u, v) &= 1 - u - v, \\ \phi_2(u, v) &= u, \\ \phi_3(u, v) &= v. \end{aligned}$$

L'équivalent de la propriété (7) pour les fonctions  $\phi_j$  est bien vérifié. Il reste donc à établir une relation entre les triangles  $U$  et  $T$  pour pouvoir relier les  $\phi_j$  et les  $\eta_j$ .

## 4.3 Transformations affines

On veut donc définir une transformation bijective  $\Phi_T : U \rightarrow T$  vérifiant :

$$\forall i \in 1, 2, 3, \quad (x_i, y_i) = \Phi_T(u_i, v_i).$$

Les conditions précédentes permettent d'obtenir le résultat pour tous couples  $(u, v) \in U$  et  $(x, y) \in T$  tels que  $(x, y) = \Phi_T(u, v)$ . On a ainsi :

$$\begin{cases} x &= (x_2 - x_1)u + (x_3 - x_1)v + x_1 \\ y &= (y_2 - y_1)u + (y_3 - y_1)v + y_1. \end{cases} \quad (8)$$

L'inversion du système (8) permet d'obtenir ce que l'on souhaite, à savoir une expression de  $(u, v) = \Phi_T^{-1}(x, y)$  pour tout couple  $(x, y)$  :

$$\begin{aligned} u &= \frac{(y_3 - y_1)(x - x_1) - (x_3 - x_1)(y - y_1)}{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}, \\ v &= \frac{(y_2 - y_1)(x - x_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1)}{(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)}. \end{aligned}$$



**Remarque :** En posant  $U = [u \ v]^T$ ,  $X = [x \ y]^T$ ,  $X_1 = [x_1 \ y_1]^T$  et

$$J_T = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix},$$

on observe que les relations précédentes décrivent deux fonctions affines. En effet,

$$X = \Phi_T(U) = J_T U + X_1 \quad \text{et} \quad U = \Phi_T^{-1}(X) = J_T^{-1} X - J_T^{-1} X_1.$$

sont bien équivalentes. Une telle écriture peut faciliter l'implémentation MATLAB des fonctions de base.

#### 4.4 Formules finales

En utilisant ce qui précède, on passe des fonctions de base sur  $U$  aux fonctions de base sur  $T$  grâce à une formule de composition :

$$\forall (x, y) \in T, \quad \eta_j(x, y) = \phi_j(\Phi_T^{-1}(x, y)), \quad (9)$$

pour  $j \in \{1, 2, 3\}$ , et on retrouve bien la relation (2):

$$\eta_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_{j+1} & y_{j+1} \\ 1 & x_{j+2} & y_{j+2} \end{vmatrix}},$$

où les indices  $j+1$  et  $j+2$  sont à comprendre modulo 3. Par composition des dérivées (cf cours Calcul Différentiel 1A), on obtient également la relation suivante sur les gradients des fonctions de base :

$$\nabla \eta_j(x, y) = (J_T^{-1})^T \nabla \phi_j(\Phi_T^{-1}(x, y)), \quad (10)$$

où  $J_T^{-1}$  est la matrice Jacobienne de  $\Phi_T^{-1}$ , constante pour tout  $(x, y)$  puisque  $\Phi_T^{-1}$  est affine (cf Cours Calcul Différentiel 1A).

Là encore, on retrouve la formule (3) (avec des indices à comprendre modulo 3), à savoir :

$$\nabla \eta_j(x, y) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} y_{j+1} - y_{j+2} \\ x_{j+2} - x_{j+1} \end{pmatrix},$$

où  $\alpha = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$

On s'aperçoit que les gradients ne dépendent pas de  $x$  ou  $y$  ; on peut donc les “sortir” de l'intégrale et on arrive à :

$$[M_T^A]_{ij} = \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j \int_T dx dy = |T| \nabla \eta_i^T \nabla \eta_j, \quad (11)$$

où  $|T|$  est l'aire du triangle  $T$ ; par la formule du parallélogramme, on a  $2|T| = \alpha$ .

#### 4.5 Cas d'autres éléments

Les fonctions de base n'apparaissent qu'au sein d'intégrales ; au lieu d'essayer d'établir une formule directe pour  $\eta_j$  et  $\nabla \eta_j$ , on peut donc effectuer le changement de variables  $\Phi_T$  directement dans l'intégrale et intégrer ensuite les fonctions  $\phi$  sur le triangle de référence  $U$  ; c'est ce qui est demandé pour les éléments quadrilatères. Il faut donc :

- à partir de  $\Phi_Q$  et  $\{\phi_i\}_{i=1,4}$  (données dans le sujet), calculer  $\Phi_Q^{-1}$ ,  $J_Q$  (Jacobienne de  $\Phi_Q$ ) et  $\{\nabla \phi_i\}_{i=1,4}$  ;
- appliquer ensuite les formules de changement de variables pour calculer la matrice  $M_Q^A$  de taille  $4 \times 4$  relative au quadrilatère  $Q$ .

## Addendum : Formules de changement de variables

On considère une fonction  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et une transformation  $\Phi$ ,  $\mathcal{C}^1$  et bijective de  $U$  dans  $T \subset \mathbb{R}^2$ . On note  $J_\Phi(u, v)$  la matrice Jacobienne de  $\Phi$  et  $|J_\Phi(u, v)|$  le déterminant de celle-ci au point  $(u, v)$ . Dans ce cas, on a la formule de changement de variables suivante :

$$\int_T \phi(\Phi^{-1}(x, y)) dx dy = \int_U \phi(u, v) |J_\Phi(u, v)| du dv.$$

On explicite ci-dessous un corollaire du résultat précédent, utile dans le cadre des éléments finis.

Soit une autre fonction  $\psi$  définie sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . En plus des hypothèses précédentes, on suppose maintenant que  $\Phi$  est affine, ce qui signifie que les matrices Jacobiennes de  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont constantes; si on désigne par  $J_\Phi$  et  $J_{\Phi^{-1}}$  ces matrices, on a  $J_{\Phi^{-1}} = (J_\Phi)^{-1}$ .

Soit l'intégrale suivante :

$$\mathcal{I} = \int_T \nabla(\phi \circ \Phi^{-1})(x, y)^T \nabla(\psi \circ \Phi^{-1})(x, y) dx dy.$$

Par application de la formule de changement de variables, on obtient l'expression suivante pour  $\mathcal{I}$  :

$$\mathcal{I} = \int_U \nabla\phi(u, v)^T (J_\Phi^T J_\Phi)^{-1} \nabla\psi(u, v) |J_\Phi| du dv.$$