Leçon 1
Trigonométrie

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1 Fonctions trigonométriques

1.1 Définition

1.1.1 Premières propriétés

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{-1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } -1 \leq \sin(x) \leq 1}$$

Théorème de Thales : pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$,

$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.}$$

Théorème de Pythagore : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.}$$

1.1.2 Fonctions

Les fonctions trigonométriques sont définies ainsi :

$$\sin,\ \cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1], \qquad \tan : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Pour tout x réel, on a

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x),$$

et pour tout x dans le domaine de définition de tan,

$$\tan(x + \pi) = \tan(x).$$

Remarque 1. On dit que cos et sin sont $2\pi-$**périodiques** et tan est $\pi-$**périodique**.

1.1.3 Valeurs usuelles

	$x = 0$	$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{\pi}{3}$	$x = \frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Les autres valeurs connues se déduisent à partir des valeurs usuelles et des symétries.

1.2 Symétries

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(-x) = \cos(x), \qquad \sin(-x) = -\sin(x).$$

Remarque 2. On dit que la fonction cos est **paire** et la fonction sin est **impaire**.

On a :

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x), \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x).$$

On a :

$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$
$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$

2 Formules d'addition et duplication

2.1 Formules d'addition

Ce sont les formules trigonométriques les plus importantes : elles permettent de déduire toutes les autres. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$$
$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \qquad \sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$$

Exemple 1.

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x)$$

Exemple 2.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Remarque 3. Pour calculer $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on utilisera plutôt les formules géométriques (de symétrie) vues ci-dessus.

2.2 Formules de duplication

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

Exemple 3.

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

Remarque 4. On peut utiliser les formules d'addition dans *l'autre sens* : passer d'une expression avec des $\cos^2$ ou des $\sin^2$ à une expression avec des cos et sin. Cette opération s'appelle la *linéarisation* et sera utilisée notamment pour calculer des primitives.

2.3 Autres formules

D'autres formules se déduisent des formules d'addition. Par exemple :

$$\begin{aligned}\cos(p)+\cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\ \sin(p)+\sin(q) &= \dots\end{aligned}$$

3 Equations trigonométriques

3.1 Résolution $\cos(\ ) = \cos(\ )$

L'équation $\cos(u) = \cos(\alpha)$ avec α fixé, se traduit :

$$\boxed{u = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad u = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Exemple 4. L'ensemble des solutions de $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{8} + k\pi,\ -\frac{\pi}{8} + k\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.2 Résolution $\sin(\ ) = \sin(\ )$

L'équation $\sin(u) = \sin(\alpha)$ avec α fixé, se traduit :

$$\boxed{u = \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{ou} \quad u = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$$

Exemple 5. L'ensemble des solutions de $\sin(4x) = \frac{1}{2}$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{24} + \frac{k}{2}\pi,\ \frac{5\pi}{24} + \frac{k}{2}\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.3 Résolution $\cos(\ ) = \sin(\ )$

On ne sait pas résoudre directement $\cos(u) = \sin(\alpha)$. Il faut utiliser les formules de symétrie pour changer le cos en sin **ou bien** changer le sin en cos et se ramener à l'un des cas précédent.

Exemple 6. L'ensemble des solutions de $\cos(2x) = \sin(x)$ est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + \frac{2k}{3}\pi, \text{avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Remarque 5. On ne sait pas résoudre directement $\cos(x) = 2\sin(3x)$ à cause du 2 devant le sin().

Remarque 6. Attention aux points suivants lors de la résolution d'une équation trigonométrique :

1. Se ramener à une équation de même type (sans coefficient devant les cos ou sin !)
2. Il y a toujours deux sortes de solutions, séparées par un **ou**
3. Les $+2k\pi$ à la fin de chaque sorte subissent aussi les opérations effectuées au cours de la résolution