M2 MIAGE INFORMATIQUE- FINANCE

2021/2022

Produits dérivés et pricing

SOMMAIRE

I. LES MARCHES FINANCIERS

Le secteur de la finance embrasse plusieurs types de marchés. Par extension, les marchés financiers sont des marchés où peuvent être négociés et échangés des instruments financiers de toute nature. Certains de ces marchés garantissent un rôle de financement, mais parfois les besoins de financement des entreprises peuvent être des besoins de court, moyen ou long terme.
Pour répondre à ces besoins de financement, il existe donc plusieurs types de marchés financiers, certains consacrés aux financements à long terme (marché des obligations et marché des actions) et d'autres, dédiés aux financements à court terme (marché monétaire et marché interbancaire).
Il existe en fait un marché financier spécifique pour chaque type d'instruments financiers négociés.

Les différentes catégories de marchés financiers sont donc :

- Le marché de capitaux à court terme
  - marché interbancaire
  - marché monétaire

- Le marché de capitaux à long terme
  - marché des actions
  - marché obligataire
  - marché des changes
  - marché des dérivés

- Les marchés du neuf et occasion
  - marché primaire : pour l'émission des titres
  - marché secondaire : pour l'achat et la revente des titres

Une première distinction très important est à opérer :

- **Les marchés « sous-jacents »** : qui se composent de marchés de matières premières, d'actions, obligataires, monétaires et enfin marché des changes
- **Les marchés « dérivés »** qui comportent 2 catégories fondamentales : marché à termes et marchés d'options.

Nous nous intéressons dans notre cas au marché « dérivés » et à l'évaluation de leurs prix théoriques.

II. LES MARCHES « SOUS-JACENTS »

2.1 Les actions

Une action est un titre de propriété sur une fraction du capital d'une entreprise. Sur un plan financier elle présente principalement deux sources espérées de revenus pour son détenteur :

- les dividendes à venir
- une éventuelle plus-value lors de la revente du titre

2.2 Les obligations

Une obligation est un titre de créance correspondant à un prêt effectué par le propriétaire de l'obligation à l'institution qui a émis et vendu l'obligation. Pendant la durée de vie de l'obligation, l'emprunteur paie des intérêts fixés contractuellement lors de l'émission; à l'échéance.

2.3Les matières premières

Les matières premières (ou commodities) sont des produits émanant de la nature comme les métaux, produits agricoles, minerais ou énergies.

2.4Les devises

Une devise est une monnaie considérée depuis un territoire autre que son territoire d'émission.Les devises sont échangées sur le marché des changes (FOREX) à des taux de changes plus généralement variables mais également fixes.

III. LES MARCHES « DERIVES »

3.1 Les contrats à terme

De manière générale, un contrat à terme est un engagementà acheter (ou vendre) à un certain prix et à une date future, une certaine quantité d'une marchandise.
Tout engagement à acheter (ou vendre) a fait l'objet, de la part d'une contrepartie, d'un engagement réciproque et irrévocable à acheter (ou vendre). On distingue des contrats à terme « forwards » et contrats à terme « futures ».

3.2 Les options

Les options sont des contrats donnant le droit d'acheter (ou vendre) à un certain prix et à une date future, une certaine quantité d'une « marchandise »appelée « sous-jacent ».
L'émetteur de l'option s'engage irrévocablement à vendre (ou acheter) le sous-jacent au détenteur de l'option si celui-ci désire exercer son droit.

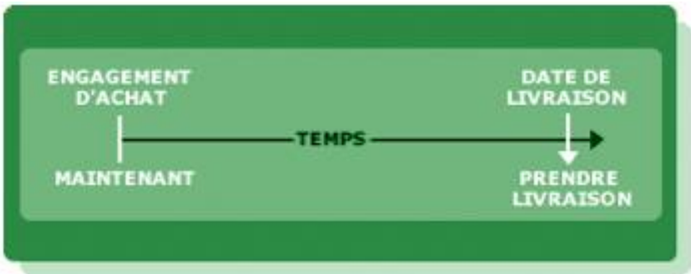
IV. LES PRODUITS DERIVES

Les produits dérivés sont des instruments financiers dont la valeur financière fluctue en fonction de l'évolution des taux ou des prix des produits sous-jacents.
Ils ne requièrent aucun placement initial.
Ces produits sont des contrats financiers d'une contrepartie entre acheteurs et vendeurs qui fixent des flux financiers futurs fondés sur les prix réels ou théoriques des actifs sous-jacents.

Il existe fondamentalement deux types de produits dérivés, dans lesquels on trouve une multitude d'autres produits :

- **Les dérivés fermes** comprenant les contrats de gré à gré (forwards), les contrats à terme (futures) et les swaps
- **Les dérivés optionnels** comprenant les options et les warrants

4.1 Les produits dérivés fermes



Source : http://www.directbroker.fr/debuter/10-expose-sur-les-produits-derives.html

4.1.1 Les forwards

Ce sont des contrats bilatéraux non standardisés, qui sont donc échangés de grès à grès (Over The Counter : OTC). Ils consistent en un engagement ferme à vendre ou à acheter un sous-jacent à une date future donnée pour un prix convenu. La partie qui s'engage à acheter l'actif prend une position dite longue, et celle qui s'engage à le vendre une position courte. Il existe pour ce type de dérivés un risque de non-paiement de la contrepartie, c'est-à-dire un risque de crédit.

4.1.2 Les futures

Le risque de crédit que l'on trouve avec les forwards n'existe quasiment pas avec les contrats futures. Le principe est le même, mais ce sont des contrats standardisés, ce qui permet une plus grande liquidité et donc un investissement à plus court terme.

Pour éliminer ce risque, il existe des chambres de compensation. Elles centralisent toutes les transactions pour leurs membres (des institutions financières pour la plupart), gèrent leurs comptes, et réalise les appels de marge. Ce système permet de remettre à jour quotidiennement les comptes d'un membre en fonction de ses gains et pertes, et de lui redemander de réapprovisionner ce compte (marge additionnelle) en cas de trop grosse perte. Ainsi, le risque de crédit est totalement limité, et les établissements n'ont de flux financiers qu'avec la chambre de compensation, qui leur sert de garant.

Afin de résumé les propos suivant nous joignons deux tableaux récapitulatifs :

Différence entre marché OTC et Organisé

OTC(gré à gré)	Organisé
Produit « sur mesure »	Produit identique pour tous
Liquidité faible	Liquide
Information non publique	Information disponible pour tous
Asymétrie d'information	Pas d'asymétrie d'information
Pas de chambre de compensation (risque de contrepartie)	Chambre de compensation

Différence entre contrats forward et futures

FORWARD	FUTURES
Gré à gré	Marché organisé
Produit non standardisé	Produit standardisé
Une date précise de livraison	Une période de livraison
Livraison ou dénouement en cash	Positions le plus souvent dénouées avant échéance

4.1.3 Les swaps

Les deux types de swaps les plus courants sont les swaps de taux d'intérêt et les swaps de change. Il en existe bien d'autres, comme les fameux Credit Default Swaps (CDS), qui furent à l'origine de la crise de 2008. Ils permettent d'échanger une protection sur le risque de crédit d'un émetteur d'obligations contre des versements réguliers.

Le premier permet d'échanger un taux d'intérêt variable contre un taux fixe, sans échange de capital, et ainsi de limiter le risque lié à l'évolution du taux variable.

Le second permet d'échanger des taux d'intérêt à moyen ou long terme entre deux devises différentes.

4.2 Les produits dérivés optionnels

4.2.1 Les options

Les options consistent en un droit et non une obligation d'acheter (on parle alors d'option «call») ou de vendre (option «put») une quantité fixée d'un sous-jacent donné, à un prix fixé («strikeprice») età une échéance convenue («option européenne») ou avant cette échéance («option américaine »).

C'est ce droit qui s'achète et se vend, contre un «premium». Si l'acheteur ne veut pas exercer son option, il perdra seulement ce premium. Le gain théorique est en revanche illimité. Contrairement, le gain d'un vendeur d'option est au maximum le premium, et sa perte peut être illimitée.

Source : http://www.directbroker.fr/debuter/10-expose-sur-les-produits-derives.html

Les options servent à se couvrir potentiellement contre un risque de hausse ou de baisse de l'actif sous-jacent, ou pour spéculer sur ce cours ou sa volatilité.

Considérons à présent l'exemple qui suit afin de détailler le comportement d'une option.

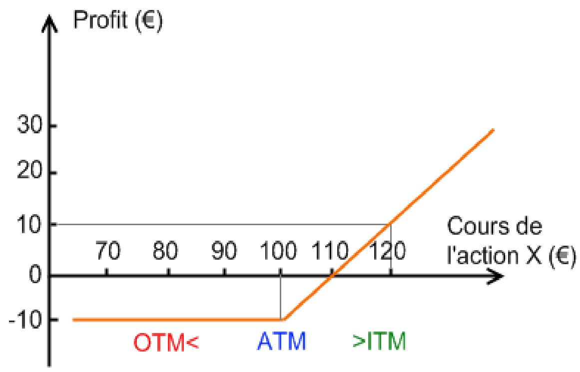
Exemple introductif :

Prenons l'exemple d'un investisseur qui achète un call européen sur l'action X avec un prix d'exercice de 100 €, lui conférant le droit d'obtenir 1 titre à l'échéance. On suppose que le cours de l'action X est de 95 € au moment de l'achat. La date d'échéance est fixée à 5 mois et le prix de cette option («premium») est de 10 €. Ainsi, si à la date d'échéance le cours de l'action X est inférieur à 100 € l'investisseur n'exercera pas l'option puisqu'il peut acquérir l'action X moins cher directement sur le marché sous-jacent. L'investisseur aura alors uniquement perdu le premium, soit 10 €. En revanche si à l'échéance le cours de l'action X est supérieur à 100 € celui-ci exercera l'option. Supposons que le cours de l'action X soit de 120 € à l'échéance, en exerçant l'option l'investisseur achètera 1 action X à 100 €. Si celui-ci revend cette action directement il réalise alors un gain de 120€-100€-premium=10€ (ce calcul ne tient pas compte des coûts de transaction).

Nous pouvons déduire de cet exemple la valeurd'une option à maturité, appelée « payoff » :

- Payoff d'un call :$C(t = T) = Max(S_t - K; 0) = (S_t - K)^+$
- Payoff d'un put : $P(t = T) = Max(K - S_t; 0) = (K - S_t)^+$

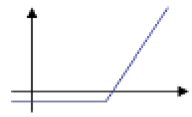
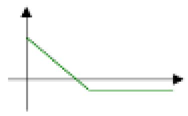
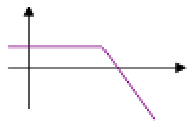
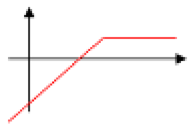
Donnons une représentation schématique du profit de l'option étudiée dans l'exemple :



On dira alors que l'option est :

- À la monnaie (At The Money) lorsque le cours de l'action est égal au prix d'exercice.
- En dehors de la monnaie (Out of The Money) lorsque le cours de l'action est inférieur au prix d'exercice.
- Dans la monnaie (In The Money) lorsque le cours de l'action est supérieur au prix d'exercice.

Afin de résumer les différents profils de gains entre call/put et achat/vente nous fournissons le tableau suivant, celui-ci se base sur le même raisonnement que l'exerciceprécédent.

Stratégie	Anticipation des cours	Gain potentiel	Perte potentielle	Profil
ACHAT d'un CALL	Hausse	Illimité (mais le prix ne monte pas à l'infini)	Limitée	
ACHAT d'un PUT	Baisse	Illimité (mais le prix ne descend pas sous zéro)	Limitée	
VENTE d'un CALL	Stabilité ou légère baisse	Limité	Illimité (mais le prix ne monte pas à l'infini)	
VENTE d'un PUT	Stabilité ou légère hausse	Limité	Illimité (mais le prix de descend pas sous zéro)	

Source : Remis Bachelet, http://rb.ec-lille.fr/l/Marches_financiers/Marches_Financiers_-_Les_produits_financiers.pdf

4.2.2 Les warrants

Ce sont des produits semblables aux options, à plusieurs différences près. Tout d'abord, ils sont émis uniquement par des banques, et ne peuvent être vendus à découvert. Ils permettent également un effet de levier important, car ils demandent une mise de fonds initiale assez faible. Les warrants sont des titres négociables qui peuvent être revendus à tout moment, ce qui rend leur structure semblable à celle des actions.

V. PRICING

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour calculer le montant du prix théorique d'une option, nous détaillerons ci-après les trois principales méthodes qui sont les suivantes : le modèle binomial, le modèle de Black&Sholes et la simulation de Monte-Carlo.

5.1 Pricing d'options/warrants

5.1.1 Le modèle binomial

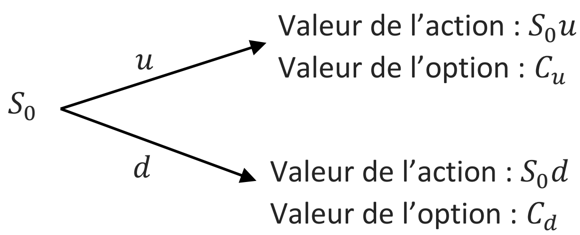
L'approche la plus représentative pour évaluer le prix d'une option sur action se caractérise par une représentation en arbre binomial. Cette approche fût introduite par Cox, Ross et Rubinstein en 1979.

L'arbre binomial est une représentation schématique des différentes trajectoires du sous-jacent jusqu'à l'échéance de l'option. A l'aide de ces différents scénarios sur les prix du sous-jacent nous pourrons par la suite donner une estimation de la valeur de l'option. Dans le modèle binomial la durée de l'échéance est divisée en sous-périodes, à chaque sous-période le sous-jacent pourra prendre deux valeurs possibles. Afin de simplifier notre explication nous nous intéresserons uniquement au modèle binomial à une période, c'est-à-dire que le sous-jacent ne pourra prendre que deux valeurs entre t=0 et l'échéance. Notons cependant que plus le nombre de sous-périodes sera important meilleur sera l'estimation du prix de l'option.

Considérons le cas d'un callsur action et précisons que nous somme en *absence d'opportunités d'arbitrage* pour l'explication de ce modèle :

Notons S_0 le cours de l'action en $t = 0$. A l'échéance le cours de l'action peut monter pour atteindre S_0uou baisser jusqu'à S_0d(on suppose ici que $u > 1$ et $d < 1$). Notons $C_u$le payoff de l'option si le cours augmente pour atteindreS_0uet $C_d$le payoff de l'option si le cours baisse à pour atteindreS_0d.

Nous prouvons représenter graphiquement ces derniers paramètres sous la forme d'un « arbre à deux branches » (arbre binomial).



Prenons un portefeuille contenant une position longue d'actions et une position courte sur l'option. Lorsque le cours de l'action augmente la valeur du portefeuille est égale à $S_0u\Delta - C_u$. Inversement lorsque le cours de l'action baisse la valeur du portefeuille est $S_0d\Delta - C_d$.

Le portefeuille est alors dit sans risque lorsque$S_0u\Delta - C_u = S_0d\Delta - C_d$, ce qui revient à :

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0u - S_0d}$$

Notons r le taux sans risque, la valeur actualisée du portefeuille est donc $(S_0u\Delta - C_u)e^{-rT}$

Le coût en $t = 0$ du portefeuille est $S_0\Delta - C_0$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le profit de ce portefeuille sans risque doit avoir le même profit que le taux sans risque, nous avons alors :

$$S_0\Delta - C_0 = (S_0u\Delta - C_u)e^{-rT}$$

Ainsi, $C_0 = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d]$avec $p = \frac{e^{-rT} - d}{u-d}$

En pratique u et d sont définis par la volatilité de l'action et sont donnés par : $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$et $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$, avec Δt =T/n ou T représente la durée de l'échéance et n le nombre de période.Dans notre cas nous considérons n=1 donc $\Delta t = T$.

Exemple :

Afin d'illustrer la méthode binomiale déterminons le prix d'un call que l'on notera C. Par la suite nous déterminerons le prix de ce call par la méthode de Black &Sholes puis par la simulation de Monte-Carlo, nous reprendrons alors les paramètres de cetteoption.

Les paramètres du call C sont les suivantes :

S_0	σ	T (année)	R	K
100	0,25	1	2%	60

Calculons tout d'abord u et d,

$$u = e^{0,25\sqrt{1}} = 1,28$$
$$d = e^{-0,25\sqrt{1}} = 0,78$$

Nous pouvons alors en déduire S_0u et S_0d,

$$S_0u = 100 * 1,28 = 128,40$$
$$S_0d = 100 * 0,78 = 77,89$$

Il en vient alors C_u et C_d,

$$C_u = (S_0u - K)^+ = (128,40 - 60)^+ = 68,40$$
$$C_d = (S_0d - K)^+ = (77,89 - 60)^+ = 17,88$$

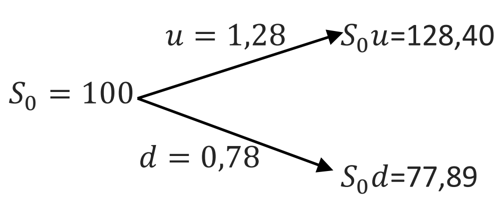
L'objectif est de calculer $C_0 = e^{-rT}[pC_u + (1-p)C_d]$avec $p = \frac{e^{-rT}-d}{u-d}$,

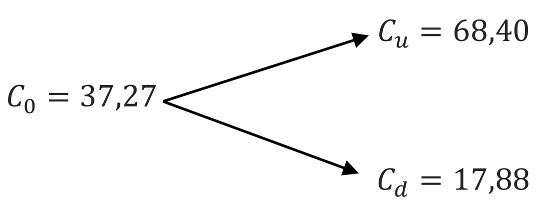
$$p = \frac{e^{-0,02*1} - 0,78}{1,28 - 0,78} = 0,40$$

On a donc $C_0 = e^{-0,02*1}[0,40 * 68,40 + (1 - 0,40) * 17,88] = 37,27€$

L'évaluation du prix du call C par le modèle binomial nous donne donc un prix théorique de 37,27€.

Nous avons alors la représentation binomiale suivante :





5.1.2 Le modèle de Black &Scholes

Un des plus célèbre modèle pour l'évaluation d'options est celui de Black&Scholes. Il fût introduit en 1970 par Fisher Black, Myron Sholes et Robert Merton. Ce modèle a eu un impact considérable sur les méthodes utilisées en ingénierie financière, aussi bien en évaluation d'options que dans les techniques de couverture. Nous détaillerons le modèle de Black&Scholes basic dans un premier temps puis nous intégrerons à ce modèle la notion de dividende.

Les hypothèses du modèle deBlack&Scholes sont :

- Le prix du sous-jacent S_t suit un mouvement Brownien
- Absence d'opportunité d'arbitrage
- Le marché fonctionne en continu
- Les ventes à découverte sont autorisées
- Aucun coût de transaction ou d'impôt
- Le taux sans risque est constant et fixe quel que soit la maturité de produit dérivé
- Les sous-jacents sont parfaitement divisibles
- Absence de dividendes entre le moment de l'évaluation et l'échéance

Le calcul du prix d'une option nécessite 6 données :

- Le cours du sous-jacent, S_t
- Le prix d'exercice, K
- La date d'échéance, T
- La volatilité, σ (qui se calcule à partir de données historiques ou en déduisant de la valeur des options cotés grâce au modèle théorique)
- Le taux d'intérêt sans risque r, connu à l'avance et constant
- Le montant du dividende

1) Formule de Black&Sholes sans dividende

Le prix du sous-jacent$S_t$suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité σ constante et une dérivé μ constante. On a ainsi :$dS_t \ = \ \mu S_t dt + \ \sigma S_t dW_t$où W_t est un mouvement brownien.

Le prix théorique d'une option par le modèle de Black&Scholes est alors :

- Pour un **Call** : $C = S_t N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$
- Pour un **Put** : $P \ = Ke^{-rT}N(-d_2) - S_t N(-d_1)$

Avec,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

***N*(x)** : fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite, soit :

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

Exemple :

Reprenons les paramètres du call C et donnons le prix théorique de cette option par le modèle de Black &Scholes. Pour cela nous utiliserons le tableur Excel (les résultats qui suivront sont reportés dans le fichier Pricer.xlsx).

Option Européenne: Modèle de base - Black & Scholes (Sans Dividende)

Modèle basic de Black-Scholes, qui suppose que l'option est une option européenne qui ne paie pas de dividende

				Calculs	
St: Prix du sous-jacent	100,000 €	**Prix du Call :**	**41,3036 €**	d_1	2,2483025
K: prix d'exercice	60,000 €			$N(d_1)$	0,98772155
R_f: taux sans risque	2,00%				
σ: volatilité annuelle	25,00%	Parité Put-Call		d_2	1,9983025
t: date échéance (en année)	1,000	**Prix du Put :**	**0,1155 €**	$N(d_2)$	0,97715806

Le prix théorique du call C par la méthode de Black &Scholes est donc de 41,30€. Nous remarquons que ce prix a le même ordre de grandeur que celui issu du modèle binomial. Notons que la méthode binomiale peut s'avérer plus longue que celle de Black &Scholes lorsque nous considérons plusieurs sous-périodes. Cependant les arbres binomiaux permettent de tirer un prix théorique qui est plus précis.

2) Formule de Black &Sholes en présence de dividendes

Les anticipations sur le versement de dividendes peuvent être modélisées sous 2 formes :

a) Le cas où les dividendes sont un pourcentage (taux constant) du cours du titre aux dates de tombée des dividendes :

Dans le cas de versement continu de dividendes, notons$q$ le taux de dividende, tel que le détenteur du titre touche $qS_t dt$ pendant l'intervalledt.

La dynamique du prix s'écrit alors $dS_t = (\mu - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$

- Pour un **Call** :$C = S_t e^{-qT} N\left(\widetilde{d_1}\right) - K\, e^{-rT} N(\widetilde{d_2})$
- Pour un **Put** :$P = Ke^{-rT} N\left(-\widetilde{d_2}\right) - S_t e^{-qT} N(-\widetilde{d_1})$.

Avec$\widetilde{d_1} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)$.
Et $\widetilde{d_2} = \widetilde{d_1} - \sigma\sqrt{T}$.

Exemple :

Reprenons les paramètres du call C et ajoutons un taux de dividende de 2%. Nous calculons alors le prix théorique de cette option avec la méthode de Black &Scholesen prenant en compte lepointprécédent.

Option Européenne: Modèle à dividende (la dividende est un taux constant)

			Modèle Basic (Sans Dividende)	Taux constant (Avec Dividende)
St: Prix du sous-jacent	100,000 €			
X: prix d'exercice	60,000 €			
R_f: taux sans risque	2,00%	**Prix du Call :**	**41,3036 €**	**39,3505 €**
σ: volatilité annuelle	25,00%			
t: date échéance (en année)	1,000			
q: taux du dividende	2,00%	Parité Put-Call		
valeur annuel du dividend	2,000 €	**Prix du Put**	**0,1155 €**	**0,1425 €**
Prix effectif de l'option (S) à dividendes en continu	98,020 €			

Calculs
Fonction de loi Normal Standard Cumulative

	Sans dividende	Avec dividende
d_1	2,2483025	2,1683025
$N(d_1)$	0,98772155	0,98493216
d_2	1,9983025	1,9183025
$N(d_2)$	0,97715806	0,97246367

Ce modèle modifie le modèle Black &Scholes de base en supposant que l'actif sous-jacent paie des dividendes à un rendement constant et que les dividendes sont payés en continu.Le modèle permet de réduire efficacement le prix de l'actif par la valeur actualisée du dividende, en temps continu au taux sans risque $e^{-r \times temps}$.

b) Le cas où les dividendes sont un certain capital, vus alors que des flux futurs (éventuellement certains) :

Considérons le cas d'un titre, versant des dividendes $-D_1, \dots, -D_{N-1}$aux dates $T_1, \dots, T_{N-1}$, entre 0 et t. Le prix en t = 0 est la somme actualisée des flux futurs

$$S_0 = E\left(\sum_{i=1}^{N} D_i\, e^{-\int_0^{T_i} r\, ds} + S_T e^{-\int_0^{T} r\, ds}\right)$$

Exemple :

Reprenons les paramètres du call C et ajoutons un dividende trimestriel de 0,50€en considérant qu'il reste 12 jours avant le prochain dividende. Nous calculons alors le prix théorique de cette option avec la méthode de Black &Scholesen prenant en compte le point précédent.

Option européenne: Modèle à dividende (les dividendes sont connus)

			Modèle de base (Sans Dividende)	Modèle (Avec Dividende)
St: Prix du sous-jacent	100,000 €			
K: prix d'exercice	60,000 €			
R_f: taux sans risque	2,00%	**Prix du Call :**	**41,3036 €**	**39,8319 €**
σ: volatilité annuelle	25,00%			
t: date échéance (en année)	1,000			
Jour prochaine dividende	12	Parité Put-Call		
Dividende (trimestrielle)	0,500 €	**Prix du Put :**	**0,1155 €**	**0,1353 €**
Prix effectif de l'option (S) à dividendes en continu	98,508 €			

Calculs

Fonction de loi Normal Standard Cumulative

	Sans Dividende	Avec Dividende
d_1	2,2483025	2,18819107
$N(d_1)$	0,98772155	0,98567216
d_2	1,9983025	1,93819107
$N(d_2)$	0,97715806	0,97370004

Informations sur les dividendes

	1er div.	2ème div.	3ème div.
Periode de versement (en année)	0,0329	0,2829	0,5329
Montant de la dividende sur chaque periode	0,5	0,5	0,5

Ce modèle modifie le modèle de base de Black &Scholes pour inclure les dividendes qui sont connus tout au long de la vie de l'option. Au lieu du prix du sous-jacent, le modèle utilise le prix de l'actif moins la valeur actualisée des dividendes au cours de la vie de l'option, actualisés en temps continu au taux sans risque $e^{-r \times temps}$. Ceci est la valeur effective de l'actif pour le détenteur de l'option, puisque le titulaire de l'option ne reçoit aucun dividende et que le prix de l'actif devrait baisser du montant du dividende à la date ex-dividende.

3) Bornes sur les prix et relations de parité

Les bornes sont des outils précieux pour vérifier qu'un algorithme de valorisation est bien implémenté.

- Une option d'achat ne peut jamais valoir plus que l'action sous-jacente (S_0), que l'option soit européenne ou américaine. Aussi, $\boldsymbol{C \leq S_t}$(sinon une opportunité d'arbitrage serait possible en achetant l'action, et en vendant le call).

- De même, une option de vente ne peut jamais valoir plus que que le strike (K),en particulier, à maturité. On peut en déduire que sa valeur aujourd'hui ne peut pas dépasser la valeur actualisée du strike, i.e. $\boldsymbol{P \leq Ke^{-rT}}$.

- Une option d'achat ne peut jamais valoir moins que$\boldsymbol{S_t - Ke^{-rT}}$, Aussi, on en déduit que $\boldsymbol{C \geq max\{S_t - Ke^{-rT}, 0\}}$.

- Une option de vente ne peut jamais valoir moins que $\boldsymbol{e^{-rT} - S_t}$, Aussi, on en déduit que $\boldsymbol{P \geq max\{Ke^{-rT} - S_t, 0\}}$

- Pour des options européennes la formule deparité call-put est$\boldsymbol{C - P = S_t - Ke^{-rT}}$

- Pour des options américaines la formule de parité call-put est$\mathbf{C - P \leq S_t - Ke^{-rT}}$

Toutes ces caractéristiques peuvent se résumer dans les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Dans le cas d'**options européennes**, si C et P désignent les prix du call et du put à la date 0,et S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente

$$\boldsymbol{max\{S_t - Ke^{-rT}, 0\} \leq C \leq S_0}$$

$$\boldsymbol{max\{Ke^{-rT} - S_t, 0\} \leq P \leq Ke^{-rT}}$$

On a de plus la **formule de parité**

$$\boldsymbol{C - P = S_t - Ke^{-rT}}$$

Propriété 2 : Dans le cas d'**options américaines**, si C et P désignent les prix du call et du put à la date 0,et S_t la valeur actuelle de l'action sous-jacente

$$\boldsymbol{max\{S_t - Ke^{-rT}, 0\} \leq C \leq S_0}$$
$$\boldsymbol{max\{Ke^{-rT} - S_t, 0\} \leq P \leq K}$$

On a de plus la **formule de parité**

$$\boldsymbol{S_t - K \leq C - P \leq S_t - Ke^{-rT}}$$

4) Les grecques

Les grecques sont des instruments de base de gestion des options et sont issus du modèle de Black&Sholes. Ils sont utilisés comme des indicateurs de risque pour celui qui a acheté ou vendu l'option.

Ces indicateurs permettent de calculer l'impact sur le prix d'une variation des paramètres suivants :

- prix du sous-jacent S
- Le prix d'exercice K
- la volatilité implicite
- Le temps T
- le taux d'intérêt r

Nous livrons ci-après les différents grecques ainsi que leur signification.

Delta :

Sensibilité du prix d'un call/put à une variation du sous-jacent.

$$\Delta(C) = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$
$$\Delta(P) = \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Gamma :

Sensibilité du Delta d'un call/put à une variation du sous-jacent (il représente l'accélération).

$$\Gamma(C) = \Gamma(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial^2 S} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$$

Vega :

Sensibilité du prix d'un call/put à une variation de la volatilité du sous-jacent.

$$\mathrm{N}(C) = \mathrm{v}(P) = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = SN'(d_1)\sqrt{T}$$

Theta :

Sensibilité du prix d'un call/put à une variation de la maturité de l'option.

$$\Theta(C) = \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(d_2)$$

$$\Theta(P) = \frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2)$$

Rho :

Sensibilité du prix d'un call/put à une variation du taux sans risque

$$\rho(C) = \frac{\partial C}{\partial r} = KTe^{-rT}N(d_2)$$
$$\rho(P) = \frac{\partial C}{\partial r} = -KTe^{-rT}N(-d_2)$$

5.1.3 Simulation de Monte-Carlo

La simulation de Monte-Carlo, introduite par Nicholas Metropolis en 1947, va nous permettre de simuler un échantillon aléatoire d'un processus stochastique décrivant la trajectoire d'un sous-jacent et ainsi d'en tirer le prix de l'option.

Supposons que nous somme en probabilité risque neutre, c'est-à-dire que les agents sont neutres face au risque. Dans un univers risque neutre nous avons alors la rentabilité espérée qui est égale au taux sans risque.

Soit,
r : Le taux sans risque
S : Le prix du sous-jacent
σ : La volatilité
G : Une variable aléatoire de la loi normale centrée réduite
T : L'échéance de l'option
K : La prime de l'option

La méthode de Monte Carlo pour le pricing des options peut se décrire en plusieurs étapes :

1. Simuler des trajectoires aléatoires du sous-jacent suivant le processus :

   $$S_T = S_0 e^{[(r-\frac{\sigma}{2})T+\sigma\sqrt{T}*G]}$$

   $S_T$représente ici la valeur finale de la trajectoire
   G une variable aléatoire de la loi normale centrée réduite

   Précisons que la qualité de l'estimation du prix de l'option est dépendante du nombre (N) de trajectoires simulées. En effet, en se référant à la loi des grands nombres, plus N est grand meilleure est l'estimation.

2. Calculer les payoff de l'option sur les sous-jacent à l'échéance, soit $C_T = Max(0, S_T - K)$

3. Calculer l'espérance de ces payoff

4. Actualiser le flux terminal espéré pour obtenir une estimation du prix de l'option

   On aura alors $C_0 = e^{-rT}E[(S_0 e^{\left[\left(r-\frac{\sigma}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}*G\right]} - K)^+]$ dans le cas d'un Call

5. Donner un intervalle de confiance afin d'avoir une évaluation de notre estimation

Exemple :

Afin d'expliciter les étapes précédentes, reprenons les paramètres du call C et donnons une estimation du prix de cette option avec la simulation de Monte Carlo. Pour cela nous utiliserons le tableur Excel (les résultats qui suivront sont reportés dans le fichier Pricer.xlsx).

Insérons tout d'abord les paramètres du call C dans le tableur Excel :

	A	B	C	D	E
1	S_0	sigma	T	r	K
2	100	0,25	1	2%	60

1. Nous choisissons de simuler 1000 valeurs finales des trajectoires de l'action sous-jacente (soit N=1000), notre plage de valeurs pour S_T commence en A5 et finira donc en A1005.

   Nous utilisons pour cela le processus suivant :$S_T = S_0 e^{\left[\left(r-\frac{\sigma}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}*G\right]}$

```
=$A$2*EXP(($D$2-$B$2/2)*$C$2+RACINE($C$2)*LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(ALEA()))
```

	A
1	S_0
2	100
3	
4	S_T
5	83,035268
6	85,5323537

2. Nous calculons les payoff du call C pour toutes les valeurs finales des trajectoires :

	A	B
1	S_0	sigma
2	100	0,25
3		
4	S_T	Payoff
5	83,035268	23,035268
6	85,5323537	25,5323537

3. Nous calculons ensuite l'espérance de ces payoff

C5 =MOYENNE(B5:B1005)

	A	B	C
1	S_0	sigma	T
2	100	0,25	1
3			
4	S_T	Payoff	E(Payoff)
5	83,035268	23,035268	34,48750561

4. Afin s'obtenir le l'estimation du prix du call nous actualisons le flux terminal espéré, soit :

$$C_0 = e^{-rT} E[(S_0 e^{\left[\left(r-\frac{\sigma}{2}\right)T+\sigma\sqrt{T}*G\right]} - K)^+]$$

	A	B	C	D
1	S_0	sigma	T	r
2	100	0,25	1	2%
3				
4	S_T	Payoff	E(Payoff)	Prix du Call
5	83,035268	23,035268	34,4875056	33,80460724

Le prix de du call C estimé avec la simulation de Monte-Carlo est donc de 33,80 €. Nous obtenons un prix théorique de l'ordre de celui trouvé avec le modèle binomial et celui de Black &Scholes. Notons néanmoins qu'avec desoptions plus complexes,comme les options américaines, nouspouvons utiliser uniquement le modèle binomial ou la simulation de Monte-Carlo puisqu'aucune formule analytique n'existe.

5. Enfin nous livrons un intervalle de confiance afin d'encadrer l'erreur commise, nous choisissons ici un niveau de risque égal à 5%.

Soit e_n l'erreur, nous avons pour $\alpha = 5\%$:

$$|e_n| \leq 1{,}96 \frac{\sigma_{Payoff}}{\sqrt{N}}$$

Nous donnons alors la borne supérieure et inférieure de cet intervalle :

Formule	BorneSup
=D5+1,96*ECARTYPE(B5:B1005)/RACINE(1000)	35,3161171

Formule	BorneInf
=D5-1,96*ECARTYPE(B5:B1005)/RACINE(1000)	32,2930974

Ainsi, au niveau de risque de 5% notre prix théorique est compris entre 32,30 € et 35,32 €. Notons que plus nous augmenterons le nombre de simulations plus l'erreur diminuera, cela pourra cependant s'avérer plus coûteux en terme de temps d'exécution pour lepricing.Afin d'améliorer la simulation de Monte-Carlo des techniques de réduction de variance pourront être mises en œuvre.

5.2 Pricing des contrats à termes :futures/forward

L'évaluation du prix d'un contrat à terme, se fait par la construction d'une stratégie d'arbitrage et en considérant l'hypothèse d'bsence d'opportunité d'arbitrage (A0A).

Le calcul du prix d'une option nécessite 4 données :

r : Le taux de rendement sans risque
q : Coût de transaction ou d'impôt
S_0 : Le prix de l'actif *à t=0* (aujourd'hui)
D_i :Le dividende à payer à la date t_i où $0 < t_i < T$

Soit F_T le prix du contratà terme à payer en fin de période T. Nous expliciterons le prix d'un contrat à terme sans dividende et coût puis nous intégrerons ces deux notions au prix du contrat à terme.

5.2.1 Cas basique : absence de dividende et de coût

Le prix du contrat à terme est donné par :

$$F_T = S_0 e^{rT}$$

Parallèlement nous avons,

$$S_0 = F_0 e^{-rT}$$

Considérons un marché dynamique, à l'instant$t = 0$.

- Si$F_0 > S_0 e^{rT}$ alors :

  1. Il faut acheter l'actif (le prendre au prix S_0)
  2. Ecourter le contrat forward, (et promettre de vendre l'actif au prix F_0 dans le futur)
  3. La plus-value à l'échéance sera donc : $Pv = F_0 - S_0 e^{rT}$

- Si $F_0 < S_0 e^{rT}$ alors :

  1. Il faut emprunter maintenant l'actif et le vendre au prix S_0
  2. Rechercher des contrats forward sur l'actif, (promettre d'acheter l'actif au prix F_0 dans le futur)
  3. La plus-value à l'échéance sera donc : $Pv = S_0 e^{rT} - F_0$

- Les étapes précédentes se répètent tant que la plus-value est nulle$(Pv = 0)$:

  - S_0 sera à la hausse (quand $F_0 > S_0e^{rT}$) et à la baisse (quand $F_0 < S_0e^{rT}$) parce que les arbitragistes essaient aujourd'hui d'acheter ou de vendre.
  - F_0 sera à la hausse (quand $F_0 > S_0e^{rT}$) et à la baisse (quand $F_0 < S_0e^{rT}$) parce que les arbitragistes proposent aujourd'hui d'acheter ou de vendre dans le futur

- Il y a convergence quand le prix du sous-jacent est égale au prix du (future/forward) actualisé en continu sur la période :

$$S_t = F_te^{r(T-t)} \Leftrightarrow S_T = F_T$$

5.2.2 Cas d'existence de dividende et de coût

Le prix d'un contrat à terme lorsqu'il y a existence de dividende et de coût est donné par :

$$F_T = S_0e^{(r-q)T} - \sum_{i=1}^{N} D_ie^{(r-q)(T-T_i)}$$

Remarque :

Il y a une différence entre les forwards et les futures lorsque les taux d'intérêt sont stochastiques. Cette différence disparaît lorsque les taux d'intérêt sont déterministes.
Dans les processus stochastiques, le prix d'un forward est une martingale sous la mesure forward, alors que le prix d'un futures est une martingale sous la mesure du risque-neutre. Lamesure forward et la mesure du risque-neutre sont les mêmes lorsque les taux d'intérêts sont déterministes.

5.3 Pricing des swaps

Comme nous l'avons vu précédemment, différents types de swap existent sur le marché.Nous expliciterons uniquement dans cette partie le swap de taux, ce dernier correspondant à un échange entre un taux variable et un taux fixe.

Considérons les parties A et B engagées dans un swap de taux, A et B simulent en fait 2 opérations simultanées :

- L'une où A prête à B le montant nominal du swap à un taux fixe, payable suivant un échéancier défini à la négociation
- L'autre où B prête à A le montant nominal du swap à un taux variable, indexé sur un taux de marché, avec ici aussi une périodicité définie à la négociation.

Un swap de taux est valorisé par rapport aux taux du marché (« mark-to-market »).
La valeur du swap pour chacune des deux parties est égale à la différence entre la valeur actualisée des flux à recevoir à taux variable et la valeur actualisée des flux à payer à taux fixe.

A l'initiation de l'opération, les caractéristiques sont généralement calculées pour que la valeur du contrat soit zéro pour les deux parties. Ensuite, la partie pour laquelle cette valeur est positive est « gagnante » sur le contrat.

Notons qu'il faut bien différencier le prix d'un swap, et sa valeur.Le prix d'un swap fait référence à un taux d'intérêt, ce taux permet de déterminer le taux fixe du swap.

Considérons 2 obligations où le premier a un coupon au taux fixe, et le deuxième un coupon à taux variable. Les valeurs des obligations à taux fixe B_{Fix}, et des obligations obligations à taux variable B_{Var} sont données par :

$$\mathrm{B_{Fix}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\mathrm{C}}{(1+\mathrm{R_t})} + \frac{\mathrm{F}}{(1+\mathrm{R_n})} \qquad (1)$$

$$B_{Var} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\widetilde{C_t}}{(1+R_t)} + \frac{F}{(1+R_n)} \qquad (2)$$

Avec,

F : Nominal de chaque obligation (c'est un montant notionnel, c'est-à-dire qu'il n'est pas échangé)

C : Coupon à taux d'intérêt fixe

$\widetilde{C_t}$:Coupon à taux d'intérêt variable versé à chaque période$t$

R_t: Taux zéro coupon de maturitét

La valeur du swap « flux fixe reçu, flux variable payé » pour chacune des deux parties est égale à la différence entre la valeur actualisée des flux à taux fixe à recevoir et la valeur actualisée des flux à taux variable à payer.

$$V = B_{Fix} - B_{Var} \qquad (3)$$

Parallèlement, **lavaleur du swap « flux fixe payé, flux variable reçu »** est donc :

$$V = B_{Var} - B_{Fix} \qquad (4)$$

Pour évaluer le prix d'un swap, il faut 2 conditions :

1. La valeur du swap à évaluer doit être nulle à sa création
2. La valeur d'une obligation à taux variable à chaque émission ou à toute date de révision est son montant nominal.

En utilisant les équations (3) ou (4), nous avons :

$$V = B_{Fix} - B_{Var} = 0€$$
$$B_{Fix} = B_{Var}$$

Pour un zéro-coupon de nominal 1, on a donc $B_{Fix} = 1€$

En conclusion, le «prix» d'un swap (parfois appelé le taux de swap de valeur nominale) sera le taux du coupon qui rend la valeur des obligations à taux fixe égale à celle des obligations à taux variable, et qui donne ainsi la valeur du swap initiale nulle.

VI. CONCLUSION

Pour conclure, les produits dérivés se divisent en deux classes :

- Les dérivés fermes, comprenant les contrats futures, forwards et les swaps

- Les dérivés optionnels, comprenant les options et warrants.

La principale distinction entre ces deux groupes est que les dérivés optionnels, contrairement aux dérivés fermes, sont munis d'un droit et non d'une obligation d'acheter ou de vendre un sous-jacent à une date fixée.

Les contrats futures et forwards sont donc un engagement à acheter (ou vendre) à un certain prix et à une date future, une certaine quantité d'un sous-jacent.
Ces deux contrats ont la même forme mais ne s'échangent pas sur le même type de marché. Les futures s'échangent sur un marché standardisé et les forwards sur un marché de gré à gré(OTC).
Le swap correspond quant à lui à un échange de flux entre deux entités.

Les options sont des contrats donnant le droit d'acheter (ou vendre) à un certain prix et à une date future, une certaine quantité d'un sous-jacent.
Un warrant est un contratqui présente des similarités avec le contrat d'uneoption,à quelques différences près: une émission unique par les banques, l'absence de vente à découvert et un effet de levier important.

En termes de pricing, l'évaluation des options et warrants est similaire. Les méthodes de pricingles plus couramment utilisées dans l'industrie financière pour évaluer ces deux produits sont les suivantes :

- Le modèle binomial qui s'appuie sur une représentation schématique des différentes trajectoires du sous-jacent jusqu'à l'échéance de l'option.

- Le modèle de Black &Scholes qui est définie de manière analytique

- La simulation de Monte-Carlopermettant de simuler un échantillon aléatoire d'un processus stochastique décrivant la trajectoire du sous-jacent.

L'évaluation des futures et forwards se fait par construction d'une stratégie d'arbitrage. Lorsque les taux d'intérêts sont déterministes le prix ducontrat forward est égal au prix du contrat futures, cependant lorsque les taux d'intérêt sont stochastiques ces derniers sont différents.
Enfin, le pricing des swaps de taux fait quant à lui intervenir la valeur des obligations à taux fixe et variable.

VII. BILBIOGRAPHIE

- John Hull (6ème édition 2008),*« Options, futures et autres actifs dérivés »*, PEARSON

- Rémi Bachelet (Mars 2010), « *Cours de Marchés Financiers : Les produits financiers »*, Centrale Lille

- Christophe Chorro (Janvier 2008), « *Introduction à la théorie des options financière »*, ESC REIMS

- Renaud Bourlès, « *Chapitre 17 Le modèle de Black et Sholes »*,Ecole Centrale Marseille

- Ladias Elise et Wang Shuai (Juin 2013), *« Méthode de Monte Carlo pour le calcul d'options »*

- Strategies Options, *« Modèles d'évaluation d'options »*, http://www.strategies-options.com/modele-evaluation.html

- Denis Pelletier (Septembre 2006), *« Asset Pricing. Lecture 5 : Forward and Futures Prices »*, North Carolina State University

- Banque CPR (Avril 2002),*« Introduction aux produits de taux d'interêts »*

- Gerald Gay et AnandVenkateswaran, *« The Pricing and Valuation of Swaps »,* Georgia State University andNortheastern University