עבודת הגשה 3:
אינטגרלים כפולים וערך גדול וקטן ביותר בתחום של פונקציה בשני משתנים

שאלה 1 נתונה הפונקציה $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 6$.

א) מצאו קסטרמומים לוקליים של הפונקציהה נתונה וברר את סוגם.

ב) בתחום החסום על ידי הקדקודים $A(0,0)$, $B(0,4)$, $C(2,4)$, $D(2,0)$ מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה הנתונה.

שאלה 2 חשבו את האינטגרל

$$\iint\limits_D \sqrt{2 + x^2 + y^2}$$

כאשר התחום D הוא רבע העיגול $x^2 + y^2 \leq 16$ הנמצא ברביע הראשון.

פתרונות

שאלה 1

א)

$$z'_x = 4x + 2y - 4 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow y = 2 - 2x \ , z'_y = 2x + 2y \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow y = -x \ .$$

לפיכך נקבל את הנקודה $x = 2, y = -2 \Leftarrow -x = 2 - 2x$.

$z''_{xx} = 4$, $z''_{yy} = 2$, $z''_{xy} = 2$. לכן

$$\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - {z''_{xy}}^2 = 6 > 0$$

$z''_{xx} > 0$ ו- $\Delta > 0$ לכן הנקודה $2, -2$ מינימום מקומי.

ב) $\max\limits_D z(x,y) = 38$ בנקודה $(2,4)$.

$\min\limits_D z(x,y) = 4$ בנקודה $(1,0)$.

שאלה 2

$$\iint\limits_D \sqrt{2 + x^2 + y^2} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 dr\, r\sqrt{2 + r^2} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^4 dr\, \frac{r'}{2}\sqrt{t} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_{t=2}^{t=18} dt\, \sqrt{t}$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{2}{3} \left[t^{3/2}\right]_2^{18} = \frac{2}{3}\left(18^{3/2} - 2^{3/2}\right) \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{3}\left(18^{3/2} - 2^{3/2}\right) \ .$$