המחלקה למדעי המחשב

19/08/2026 ה' באלול תשפ"ז
09 : 10 – 10 : 40

חדו"א 2 למדמ"ח

בוחן אמצע סמסטר

מרצים: ד"ר ירמיהו מילר, .

תשפ"ו סמסטר קיץ

השאלון מכיל 9 עמודים (כולל עמוד זה).

בהצלחה!

==========

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

- לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.
- ניתן להשתמש במחשבון מדעי לא גרפי עם צג קטן.

חומר עזר

- דפי נוסחאות של הקורס (7 עמודים בפורמט $A4$) מצורפים לשאלון.

הנחיות לסטודנטים

- הבוחן מכיל 3 שאלות. יש לענות על כולן.
- כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
- המבחן כולל דפי נוסחאות, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
- הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
- הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
- כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות!
- ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.
- יש לנמק היטב כל שלב של פתרון. תשובה ללא הסבר וללא נימוק, אפילו נכונה, לא תתקבל.

==========

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *טטטטט

שאלה 1 **(34 נקודות)**

א) **(24 נק')** נתונה הסדרה הבאה:

$$\begin{cases} a_{n+1} = & \sqrt{6+a_n} \\ a_1 = & 1 \end{cases}$$

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו גבולה.

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

ב) **(5 נק')** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת תמיד.

ג) **(5 נק')** אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אז $(a_nb_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת תמיד.

שאלה 2 **(33 נקודות)** בדקו את התכנסות הטורים הבאים וקבעו את הסוג ההתכנסות:

א) **(13 נק')** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!}$.

ב) **(14 נק')** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+\ln n}{n^3\ \ln n}$.

ג) **(6 נק')** הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^{p^2-2p}$ מתבדר לכל $p\in\mathbb{R}$.

שאלה 3 **(33 נקודות)**

א) **(21 נק')** מצאו את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+2\ln n}$.

ב) **(6 נק')** הוכיחו את הטענה הבאה: אם הטור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בנקודה $b\neq 0$ אז לכל x ממשי המקיים $|x|<|b|$ הטור מתכנס בהחלט.

ג) **(6 נק')** הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n$ מתכנס לכל x ממשי.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *שמנמם

מבחן דלמבר: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ עבורו קיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
אם $q < 1$ הטור מתכנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

מבחן קושי: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ עבורו קיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$.
אם $q < 1$ הטור מתכנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

רדיוס התכנסות: לכל טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ קיים $R \geq 0$ עבורו הטור מתכנס לכל $-R < x < R$ ומתבדר לכל $x > R$ ו- $x < -R$.

נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

נוסחת קושי לרדיוס התכנסות: $R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} \right)^{1/n}$.

טור טיילור עבור הפונקציה $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

טורי מקלורן לפונקציות בסיסיות:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$	$(-1 < x < 1)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$

הנדסה אנליטית:

נפח של פירמידה משולשת $ABCD$: $V = \frac{1}{6}\left(\overline{DA} \times \overline{DB}\right) \cdot \overline{DC}$

מרחק מהנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax + By + Cz + D = 0$: $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

מרחק מהנקודה M לישר העובר דרך ה נקודה N במקביל לווקטור a: $d = \frac{\overline{MN} \times a}{|a|}$

מרחק בין שני ישרים מצטלבים שעוברים דרך נקודות M ו- N במקביל לווקטורים a ו- b: $d = \frac{\left|\overline{MN} \cdot (a \times b)\right|}{|a \times b|}$

משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M\,(x_0, y_0, z_0)$ במאונך ל ווקטור נורמל $n(A, B, C)$:
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \ .$$

הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0): במקביל לווקטור $a(l, m, n)$
$$x = x_0 + lt \ , \quad y = y_0 + mt \ , \quad z = z_0 + nt \ , \qquad -\infty < t < \infty \ .$$

משוואת מישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=0$ בנקודה $M\,(x_0,y_0,z_0)$:

$$f'_x(M_0)(x-x_0)+f'_y(M_0)(y-y_0)+f'_z(M_0)(z-z_0)$$

נגזרת מכוונת של $z(x,y)$ בנקודה M_0 ובכיוון של ווקטור a:

$$\frac{dz(M_0)}{da}=\frac{\nabla z(M_0)\cdot a}{|a|}$$

קריטריון לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של $f(x)$:

$$\Delta(M)=f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M)-\left(f''_{xy}(M)\right)^2 \ .$$

פונקצית לגרנז' למציאת אקסטרמום של $f(x,y)$ בתנאי $\phi(x,y)$:

$$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

אינטגרלים כפולים:

מעבר לקואורדינטות קוטביות:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \ .$$

חישוב המסה m ומרכז המסה (x_c,y_c) של "גוף מישורי" D בעל צפיפות $\rho(x,y)$:

$$m=\iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy\ ,\qquad x_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ ,\qquad y_c=\frac{1}{m}\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ .$$

חישוב של **אינטגרל קווי** מסוג ראשון:

אם המסלול L מוגדר באופן $y=y(x)$:

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int_a^b f(x,y)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$$

אם המסלול L מוגדר באופן פרמטרי:

$$\int\limits_L f(x,y)dl=\int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$$

נוסחת גרין:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(Q'_x-P'_y\right)$$

נגזרות:

1. $(c)'=0$
2. $(x^n)'=nx^{n-1}$
3. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$
4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
5. $(\sin x)'=\cos x$
6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$
9. $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\mathrm{arccot}\,x)'=\dfrac{-1}{a+x^2}$

$$(u\mathrm{v})'=u'\mathrm{v}+u\mathrm{v}'\ ,\qquad \left(\frac{u}{\mathrm{v}}\right)'=\frac{u'\mathrm{v}-u\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}\ ,\qquad \left(f(g(x))\right)'=f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)\ .$$

אינטגרלים:

$$\int dx = x \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) \qquad \int \sin(ax)dx = \frac{-1}{a} \cdot \cos(ax) \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2+a} = \frac{\ln|x^2+a|}{2} \qquad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| \qquad \int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| \qquad \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

אינטגרציה בחלקים: $\int u \cdot \mathrm{v}'\,dx = u \cdot \mathrm{v} - \int u'\mathrm{v}\,dx$.

הצבה אוניברסלית

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx \Rightarrow x = a\sin t, \quad \int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx \Rightarrow x = a\tan t, \quad \int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx \Rightarrow x = \frac{a}{\sin t},$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad x = 2\arctan(t), \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

סדרה חשבונית: $\{a_1\ ,\ a_1+d\ ,\ a_1+2d\ ,\ a_1+3d\ ,\ \ldots\}$.

איבר ה -n של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$
כאשר a_1 איבר הראשון ו- d הפרש הסדרה.

סכום של סדרה חשבונית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_N\right) = \frac{1}{2}\left(2a_1 + (N-1)d\right).$

סדרה הנדסית: $\{a_1\ ,\ a\cdot a_1\ ,\ q^2\cdot a_1\ ,\ q^3\cdot a_1\ ,\ \ldots\}.$

אביר ה- n של סדרה הנדסית: $a_n = a_1 q^{n-1}$
כאשר a_1 איבר הראשון ו- q מנת הסדרה.

סכום של סדרה חנדסית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1\left(1-q^N\right)}{1-q}.$

הסכום אינסופי של סדרה הנדסית: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_1(1-q^N)}{1-q} = \begin{cases} \text{מתבדר} & |q|>1 \\ \frac{a_1}{1-q} & |q|<1 \end{cases}.$

סדרות שימושיים:

סדרה	עולה	יורדת	מונוטונית	חסומה	מתכנסת למספר סופי L
$a_n = 1$	✓	✓	✓	✓	✓
$a_n = n$	✓	×	✓	×	×
$a_n = \frac{1}{n}$	×	✓	✓	✓	✓
$a_n = (-1)^n$	×	×	×	✓	×
$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	×	×	×	✓	×
$a_n = 1 - \frac{1}{n}$	✓	×	✓	✓	✓

מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים:
אם $f(x)$ חיובית ומונוטונית יורדת לכל $x \geq 1$.
אם $\int_1^\infty dx\, f(x)$ מתכנס אז $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס ומתקיים $\int_1^\infty dx\, f(x) \leq S \leq \int_1^\infty dx\, f(x) + f(1)$.
אם $\int_1^\infty dx\, f(x)$ מתבדר אז $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתבדר.

התכנסות של טור ההרמוניה הכללי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} \begin{cases} \text{מתכנס} & k>1 \\ \text{מתבדר} & k\leq 1 \end{cases}$$

מבחן השוואה:

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n \le b_n$ לכל $n \ge k$.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה הגבולי:
יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \ne 0$ עבור L סופי.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

אי-שוויון עצרת-חזקה: לכל $n \ge 4$: $2^n < n! < n^n$.

התכנסות של טורים כלליים:
אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתכנס אז $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).
אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר אבל $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibinz).
אם $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

מבחן לייבניץ (Leibniz): נתון טור מחליף סימן $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:
(1) $a_n > 0$, (2) $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת, (3) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אז הטור מתכנס.

הנדסה אנליטית:

קואורדינטות של וקטור $\overline{M_1M_2}$: $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

גודל (אורך ,מודול) של וקטור $a = (a_1, a_2, a_3)$: $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

הצגה של וקטור $a = (a_1, a_2, a_3)$ על-ידי הבסיס i, j, k: $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$

וקטור יחידה של וקטור a וקוסינוסי הכיוון: $e_a = \frac{a}{|a|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

תנאי קולינאריות של שני וקטורים a, b: $b \parallel a \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \big| b = ta$

מכפלה סקלרית: $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

זווית בין שני וקטורים: $\cos\theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

תנאי מאונכות של שני וקטורים: $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$

מכפלה ווקטורית: $(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

שטח של משולש ABC: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

מכפלה מעורבת: $(a\times b)\cdot c=a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

תנאי קופלנריות של 3 ווקטורים a,b,c: $(a\times b)\cdot c=0$

גרדיאנט של הפונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0)$: $\nabla z(M_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)\right)$

קריטריון לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של $f(x)$: $\Delta(M)=f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M)-\left(f''_{xy}(M)\right)^2$
בנקודה קריטית שבה $f'_x=0, f'_y=0$:
אם $\Delta(M)>0$ אזי יש אקסטרמום לוקלי בנקודה M.

- אם $\Delta(M)>0$ ו- $f''_{xx}(M)>0$ יש מינימום בנקודה M
- אם $\Delta(M)>0$ ו- $f''_{xx}(M)<0$ יש מקסימום בנקודה M.
- אם $\Delta(M)<0$ אז אין אקסטרמום בנקודה M.
- אם $\Delta(M)=0$ הקריטריון לא נותן תשובה ויש לחקור את המצב בדרכים נוספות.

נפח V **של גוף** החסום מלמטה על ידי משטח $z=f_1(x,y)$ מלמעלה ידי משטח $z=f_2(x,y)$ ומצדדים על ידי המשטח הגלילי שמדריכו הוא שפת התחום D וקו יוצר מקביל לציר ה- z:

$$V=\iint\limits_D \left(f_2(x,y)-f_1(x,y)\right)dxdy\ .$$

טור טיילור של $f(x)$ סביב הנקודה $x=a$:

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots\ .$$

נוסחאות אלגבריות

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2\ ,\qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)\ ,$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\ ,\quad (a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\ .$$
$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$

תכונות בסיסיות של חזקות בהנחה ש $a>0, b>0$:

$$a^n\cdot a^m=a^{m+n}\ ,\qquad \frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\ ,\qquad (a^n)^m=a^{n\cdot m}=(a^m)^n\ ,\qquad a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\ ,\qquad \frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\ ,$$
$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\ ,\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ ,\qquad a\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\ ,\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}\ ,\qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}\ ,$$
$$a^1=a\ ,\qquad a^0=1\ .$$

תכונות בסיסיות של לוגריתמים $(x>0, y>0)$:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y\ , \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y\ , \qquad \log_a(x^n)=n\cdot\log_a x\ ,$$

$$\log_a(a^n)=n\ , \qquad \log_{a^m} x=\frac{1}{m}\log_a x\ , \qquad \log_a x=\log_{a^m} x^m\ , \qquad \log_a x=\frac{\log_c x}{\log_c a}\ .$$

מקובל להשתמש בסימון log עבור לוגריתמים עשרוניים: $\log(x)=\log_{10}(x)$

מקובל להשתמש בסימון ln עבור לוגריתמים טבעיים: $\ln(x)=\log_e(x)$

כאשראת המספר e מגדירים כגבול $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad e\approx 2.718$

משוואת המעגל במישור xy עם מרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

משוואת הספירה במערכת מרחבית xyz: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

משוואת האליפסה שצירי סימטריה: הם צירי המערכת xy: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

משוואתה היפרבולה שצירי סימטריה הם צירי המערכת xy: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

תהי $z=f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות $f'_x,\ f'_y$ רציפות ויהיו $x(t),y(t)$ פונקציות גזירות של משתנה x. אזי קיימת הנגזרת z'_t ומתקיים:

$$z'_t=f'_x x'_t+f'_y y'_t\ .$$

במקרה $x=x(u,\mathrm{v}), y=y(u,\mathrm{v})$ הפונקציה $z=f(x,y)$ הופכת לפונקציה של המשתנים u ו- v ומתקיים:

$$z'_u=f'_x x'_u+f'_y y'_u\ , \qquad z'_{\mathrm{v}}=f'_x x'_{\mathrm{v}}+f'_y y'_{\mathrm{v}}\ .$$

גזירה של פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה $f(x,y)=0$: $y'_x=\frac{-f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

פונקציה רציפה $f(M)$ מעל תחום סגור D מקבלת את הערך המקסימלי והערך המינימלי שלה בתחום זה ואת הערכים היא עשויה להשיג בנקודות הקריטיות הנמצאות בתוך התחום D או בשפת התחום.
לכן כדי לחשב את הערכים $\max\limits_{M\in D} f(M)$ ואת $\min\limits_{M\in D} f(M)$ יש:

א) למצוא את כל הנקודות הקריטיות של $f(M)$ הנמצאות בתוך התחום D

ב) לחקור יחסית הערכים הקיצוניים את הפונקציה $f(M)$ בשפת התחום.

ג) להשוות את הערכי הפונקציה בנקודות שהתקבלו בסעיפים א' ו- ב'.

פתרונות

שאלה 1

א) נוכיח שהסדרה מונוטונית. $a_2 = \sqrt{7} > a_1$. נוכיח באינדקציה כי הסדרה עולה.
בסיס: $a_2 > a_1$.
מעבר: נניח שקיים $k > 1$: $a_{k+1} > a_k$ (ההנחת האינדוקציה).
אזי

$$a_{k+2} = \sqrt{6 + a_{k+1}} > \sqrt{6 + a_k} = a_{k+1}$$

כלומר $a_{k+2} > a_{k+1}$. לכן על פי אינדוקציה הסדרה עולה מונוטונית.

חסימות

$a_1 = 1$ והסדרה עולה לכן $a_n \geq 1$ לכל $n = 1, 2, \ldots$.
נוכיח כי $a_n < 3$ באינדוקציה.
בסיס: $a_1 = 1 < 3$.
מעבר: נניח קיים $k > 1$: $a_k < 3$ (ההנחת האינדקציה).
אזי

$$a_{k+1} = \sqrt{6 + a_k} < \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3$$

כלומר $a_{k+1} < 3$.

הכחנו: $1 \leq a_n < 3$ לכן הסדרה חסומה.

התכנסות:

הסדרה מונוטונית וחסומה לכן מתכנסת.

חישוב של הגבול:

$$L = \sqrt{6 + L} \quad \Longrightarrow \quad L^2 = 6 + L \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (L-3)(L+2) = 0 \ .$$

מכאן $L = 3 \ \vee \ L = -2$. $a_n > 1$ לכן $L \neq 2$ לכן $L = 3$.

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $a_n = n$ מתבדרת ו- $b_n = -n$ מתבדרת אבל הסדרה $a_n + b_n = 0$ מתכנסת.

ג) הטענה נכונה. הוכחה:
a_n מתכנסת אז קיים מספר ממשי סופי A: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
b_n מתכנסת אז קיים מספר ממשי סופי B: $\lim_{n\to\infty} b_n = B$.

לפיכך:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = AB \ .$$

ז"א קיים מספר ממשי סופי $L = AB$: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = L$.

לכן הסדרה $a_n b_n$ מתכנסת.

שאלה 2

א) נבדוק התכנסות של הטור החיובי

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left|\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\right|}{n!} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}$ מתכנס לכן ממבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!} \right|$ מתכנס ומכיוון הטור החיובי מתכנס אז הטור הכללי $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}{n!}$ מתכנס.

ב)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^3 \ \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ \ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ .$$

הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ מתכנס. נבדוק התכנסות של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ \ln n}$ ע"י מבחן האינטגרל:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x} \, dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{u} u' \, dx = \int_{\ln 2}^{\ln \infty} \frac{1}{u} \, du = [\ln u]_2^{\infty} = \infty \ .$$

האינטגרל מתבדר לכן הטור מתבדר. מכיוון ש- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + \ln n}{n^3 \ \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ \ln n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ והטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ \ln n}$ מתבדר והטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ מתכנס אז בסה"כ הטור מתבדר.

ג)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{p^2-2p} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{(p-1)^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-(p-1)^2}} \ .$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^q}$ מתבדר לכל $q \le 1$. מכיוון ש- $1 - (p-1)^2 \le 1$ לכל $p \in \mathbb{R}$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p^2-2p}$ מתבדר.

שאלה 3

א) נוסחת דלמבר:

$$\begin{aligned}R &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+2\ln(n+1)}{n^2+2\ln n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+\frac{2}{n+1}}{2n+\frac{2}{n}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]\\ &\overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{2}{(n+1)^2}}{2-\frac{2}{n^2}}1\ .\end{aligned}$$

$R=1$ לכן הטור מתכנס לכל $-1<x-4<1$.

$\underline{x-4=1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+2\ln n} \overset{x-4=1}{=} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+2\ln n} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

מתכנס. לכן הטור מתכנס ב- $x-4=1$.

$\underline{x-4=-1}$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^2+2\ln n} \overset{x-4=-1}{=} \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2\ln n}$$

הטור החיובי $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+2\ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2+2\ln n}$ מתכנס לכן הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2\ln n}$ מתכנס. לכן הטור מתכנס ב- $x-4=-1$.

לסיכום התחו התכנסות הוא: $-1\le x-4\le 1$, ז"א $3\le x\le 5$.

ב) • נניח $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס וגם הטור מתכנס בנקודה $x=b$ כאשר $b\neq 0$.

$\Leftarrow$ קיים R ממשי סופי: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס לכל $|x|<|R|$ וגם הטור מתכנס בנקודה $x=b$ ($b\neq 0$).

$\Leftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס לכל $|x|<|R|$ וגם $|b|\le|R|$.

$\Leftarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס לכל $|x|<|b|$.

ג) נבדוק התכנסות של הטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n\right|$. ראשית נשים לב כי

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x\le 2 \quad\Rightarrow\quad |\sin x+\cos x|\le\sqrt{2}\ .$$

מכאן

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\sin x+\cos x|}{2}\right)^n < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n .$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ הוא טור הנדסי $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ עם $a_1 = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. מכיוון ש- $|q| < 1$ אז הטור מתכנס ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n\right|$ מתכנס ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)^n$ מתכנס בהחלט.