אוטומטים ושפות פורמליות

מועד א'

ד"ר יוחאי טוויוטו, ד"ר דביר רוס .

סמסטר א, תשפ"ד'

מספר העמוד הנוכחי ומספר העמודים הכולל בשאלון מופיעים בתחתית כל עמוד. בהצלחה!

הנחיות למדור בחינות

שאלוני בחינה

☑ לשאלון הבחינה יש לצרף מחברת.

☐ לשאלון הבחינה יש לצרף כריכה בלבד.

☐ יש להחזיר את השאלון ביחד עם המחברת/כריכה.

שימוש במחשבונים

☐ ניתן להשתמש במחשבון.

☑ לא ניתן להשתמש במחשבון.

חומר עזר

☑ לא ניתן להשתמש בחומר עזר כלל.

☐ ניתן להשתמש בחומר עזר/דף נוסחאות, כמפורט:

☐ הבחינה עם חומר פתוח ⍰ מותר להשתמש בכל חומר עזר מודפס או כתוב.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

הנחיות

נא קראו בעיון את ההנחיות הבאות בטרם תתחילו לפתור את הבחינה. מומלץ לקרוא בקצרה את כלל השאלות לפני שמתחילים לפתור את הבחינה. ניתן לענות על השאלות בכל סדר שתרצו.

1. המבחן כולל 5 שאלות. יש לענות על כולן.
2. שאלות הבחינה שוות משקל - כל שאלה 20 נקודות.
3. כתבו הוכחות מלאות ומפורטות. אל תדלגו על שלבים.
4. המבחן כולל נספחים, לשימושכם. הסתייעו בהם במידת הצורך.
5. הקפידו על כתב יד ברור וקריא.
6. הקפידו לרשום בגדול ובבירור את מספר השאלה / סעיף בראש העמוד.
7. כתבו את פתרונותיכם במחברות שקיבלתם. רק הן נבדקות !
8. ניתן לקחת את השאלון כאשר הבחינה מסתיימת.

בהצלחה!

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | **קמפוס אשדוד** ז'בוטינסקי 84, 77245 | **www.sce.ac.il** | **חייג:** *מטמנטם

הבחינה

שאלה 1: אוטומט סופי דטרמיניסטי (20 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$. תהי $L \subseteq \Sigma^*$ השפה הבאה:

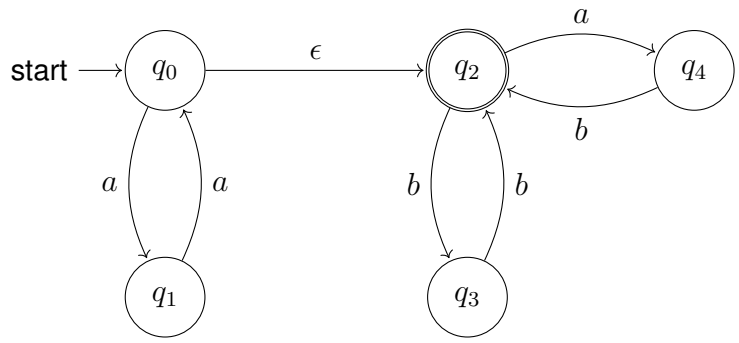
$$L = \{bb\} \cup \{aba\}^+$$

בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את השפה L.
בתשובתכם, יש לתאר את האוטומט בשתי דרכים:

1. תיאור גרפי - כלומר, ציור של האוטומט.
2. תיאור פורמלי - כלומר, הגדרה פורמלית של חמשת רכיבי האוטומט. את פונקציית המעברים יש להציג בעזרת טבלה.

שאלה 2: אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (20 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$. יהי A האוטומט הלא דטרמיניסטי עם מעברי אפסילון הבא:



סעיף א' (10 נקודות)

מהי שפת האוטומט? כיתבו את שפת האוטומט בצורה פורמלית.

סעיף ב' (10 נקודות)

- הסירו את מעבר האפסילון מהאוטומט. כלומר, בנו אוטומט לא דטרמיניסטי ללא מעברי אפסילון השקול לאוטומט שבאיור. בתשובתכם, יש לתאר את האוטומט בצורה גרפית (לצייר את האוטומט).

שאלה 3: שפות רגולריות (20 נקודות)

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנמם

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$. תהי $L \subseteq \Sigma^*$ שפת כל המילים הכפולות:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = uu \wedge u \in \Sigma^*\}$$

האם השפה L היא שפה רגולרית? אם כן, ספקו ביטוי רגולרי המתאר את השפה L. אחרת, הוכיחו בעזרת למת הניפוח שהשפה אינה רגולרית.

דוגמאות למילים שאינן בשפה	דוגמאות למילים שאינן בשפה	דוגמאות למילים בשפה	מילים בשפה
$abba$	a	$aabaab$	ε
$abbb$	b	$abaaba$	aa
$baaa$	ab	$abbabb$	bb
$baab$	ba	$baabaa$	$aaaa$
$babb$	$aaab$	$babbab$	$abab$
$bbaa$	$aaba$	$bbabba$	$baba$
$bbab$	$aabb$	$bbbbbb$	$bbbb$
$bbba$	$abaa$	$aaaaaaaa$	$aaaaaa$

שאלה 4: שפות חסרות הקשר (20 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b, c\}$. נתונות שלושת השפות הבאות המוגדרות מעל Σ:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \neq w^r\}$$
$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w = a^i b^j c^k \wedge i, j, k \in \mathbb{N} \wedge i + k = j\}$$
$$L = L_1 \cdot L_2$$

בסעיפים הבאים הינכם מתבקשים לבנות דקדוק עבור השפות הנ"ל. בכל סעיף, בתשובתכם, יש לתאר את הדקדוק באופן פורמלי. כלומר, על ידי הגדרה פורמלית של ארבעת רכיבי הדקדוק.

סעיף א'(7 נקודות) - בנו דקדוק חסר הקשר עבור השפה L_1.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנמם

סעיף ב' (7 **נקודות**) - בנו דקדוק חסר הקשר עבור השפה L_2.

סעיף ג' (6 **נקודות**) - בנו דקדוק חסר הקשר עבור השפה L.

שאלה 5: אוטומט מחסנית (20 נקודות)

נתון האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$. תהי $L \subseteq \Sigma^*$ השפה הבאה:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid w = a^n b^m a^m b^n \wedge n, m \in \mathbb{N}\}$$

בנו אוטומט מחסנית המקבל את L. בתשובתכם, יש לתאר את האוטומט בצורה גרפית. כלומר, עליכם לצייר את האוטומט.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

תוכן העניינים

1 סימונים - תווים ומילים 7

2 סימונים - שפות 7

3 פעולות על שפות 8

4 שוויון שפות 8

5 אוטומט סופי דטרמיניסטי 8

6 אוטומט מכפלה 9

7 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי 9

8 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי עם מעברי ε 11

9 שפות רגולריות 11

10 אוטומט סופי מוכלל 12

11 למת הניפוח לשפות רגולריות 13

12 שפות חסרות הקשר 13

13 אוטומט מחסנית 14

1 סימונים - תווים ומילים

סימון	משמעות
Σ	קבוצת אותיות (אלפבית)
ε	המילה/מחרוזת הריקה
$\lvert w \rvert$	אורך מילה - מספר תווים/אותיות במילה
Σ^*	קבוצת כל המחרוזות שניתן ליצור מאותיות Σ
Σ^+	קבוצת כל המחרוזות שאינן ריקות, שניתן ליצור מאותיות Σ
uw	שרשור w מימין ל-u
w^n	n שרשורים של w מימין ל-ε
w^r	פעולת היפוך (רוורס):
	$w = \varepsilon \Rightarrow w^r = \varepsilon$
	$w = \sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_n \Rightarrow w^r = \sigma_n \ldots \sigma_2\sigma_1$
$\#_\sigma(w)$	כמות המופעים של σ במילה w

2 סימונים - שפות

סימון	משמעות
$L \subseteq \Sigma^*$	השפה L מוגדרת על Σ
$\varnothing$	השפה הריקה, שאין בה מילים
$L^c = \overline{L} = \Sigma^* \backslash L$	שפה משלימה

3 פעולות על שפות

- $L_1 \cdot L_2 = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2\}$ - שפת המילים שהן שרשור מילה מ-L_2 אחרי מילה מ-L_1.
- L^n - שפת המילים שהן שרשורים של n מילים מ-L אחרי ε.
- $L^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} L^n$ - שפת כל המילים שהן שרשור של כמות כלשהי של מילים מ-L אחרי ε.
- $L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n$ - שפת כל המילים שהן שרשור של לפחות מילה אחת מ-L אחרי ε.
- $L^r = \{w^r \mid w \in L\}$ - שפת המילים שהן היפוכי מילים מ-L.
- $Prefix(L) = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \in \Sigma^* \wedge xy \in L\}$ - שפת הרישות (תחיליות) של L: שפת כל המילים שהן תחילת מילים ב-L.
- $Suffix(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x \in \Sigma^* \wedge xy \in L\}$ - שפת הסיפות (סופיות) של L: שפת כל המילים שהן סופי מילים ב-L.
- $Sub(L) = \{y \in \Sigma^* \mid \exists x, z \in \Sigma^* \wedge xyz \in L\}$ - שפת תתי המילים של L: שפת כל המילים שהן רצף אותיות של מילים ב-L.

4 שוויון שפות

1) כדי להוכיח ששפות שוות, יש להראות הכלה דו כיוונית, תוך שימוש בהגדרת פעולות על השפות.
2) כדי להפריך ששפות שוות, יש להראות דוגמה של שפות מסוימות שלא מקיימות את השוויון, כלומר קיימת מילה אחת לפחות ששייכת לשפה אחת ואינה שייכת לשפה השנייה.

5 אוטומט סופי דטרמיניסטי

הגדרה פורמלית של אוטומט סופי דטרמיניסטי

אוטומט סופי דטרמיניסטי מוגדר כחמישייה סדורה:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

כאשר:

1) Q - קבוצה סופית של מצבים.
2) Σ - קבוצת אותיות האלפבית.
3) $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ - פונקציית מעברים בין מצבים על ידי שרשור תו: $\delta(q, \sigma) = p$.
4) $q_0 \in Q$ - מצב התחלתי.
5) $F \subseteq Q$ - קבוצת מצבים שמקבלים מילים.

פונקציית מעברים של אוטומט סופי דטרמיניסטי על ידי שרשור רצף תווים

$$\delta^*(q, w\sigma) = \begin{cases} \delta(q, \sigma), & w = \varepsilon \\ \delta(\delta^*(q, w), \sigma), & w \neq \varepsilon \end{cases}$$

שפת אוטומט סופי דטרמיניסטי

שפת המילים שמתקבלות על ידי אוטומט סופי דטרמיניסטי A מסומנת:

$$L(A) = \{w \mid \delta^*(q_0, w) \in F\}$$

אוטומט סופי דטרמיניסטי לשפה משלימה

עבור אוטומט סופי דטרמיניסטי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ מתקיים: עבור אוטומט סופי דטרמיניסטי $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \backslash F)$ אז $L(B) = \overline{L(A)}$.

6 אוטומט מכפלה

אוטומט המכפלה C מוגדר כך:

$$C = (Q^A \times Q^B, \Sigma^A \cup \Sigma^B, \delta^C, (q_0^A, q_0^B), F^C)$$

כאשר

$$A = (Q^A, \Sigma^A, \delta^A, q_0^A, F^A)$$
$$B = (Q^B, \Sigma^B, \delta^B, q_0^B, F^B)$$

וגם

$$\delta^C((q_a, q_b), \sigma) = (\delta^A(q_a, \sigma), \delta^B(q_b, \sigma))$$
$$F^C \subseteq F^A \times F^B$$

אוטומט מכפלה לפעולות בין שפות אוטומטים

שפת אוטומט המכפלה - $L(C)$	קבוצת מצבים מקבלים - F^C
$L(A) \cap L(B)$	$F^A \times F^B$
$L(A) \cup L(B)$	$(F^A \times Q^B) \cup (Q^A \times F^B)$
$L(A) \backslash L(B)$	$F^A \times (Q^B \backslash F^B)$
$L(A) \Delta L(B)$	$(F^A \times (Q^B \backslash F^B)) \cup ((Q^A \backslash F^A) \times F^B)$

7 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

הגדרה פורמלית של אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

אוטומט סופי לא דטרמיניסטי מוגדר כחמישייה סדורה:

$$N = (Q, \Sigma, \Delta, Q_0, F)$$

כאשר:

1. Q - קבוצה סופית של מצבים.
2. Σ - קבוצת אותיות האלפבית.
3. $\Delta : Q \times \Sigma \to P(Q)$ - פונקציית מעברים בין מצב לקבוצת מצבים על ידי שרשור תו, כאשר $\forall q \in Q \to \Delta(q, \sigma) \subseteq Q$.
4. $Q_0 \subseteq Q$ - קבוצת מצבים התחלתיים.
5. $F \subseteq Q$ - קבוצת מצבים שמקבלים מילים.

פונקציית מעברים של אוטומט סופי לא דטרמיניסטי על ידי שרשור רצף תווים

$$\Delta^*(q, w\sigma) = \begin{cases} \Delta(q, \sigma), & w = \varepsilon \\ \{p \mid \exists r \in \Delta^*(q, w) \wedge p \in \Delta(r, \sigma)\}, & w \neq \varepsilon \end{cases}$$

שפת אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

שפת המילים שמתקבלות על ידי אוטומט סופי לא דטרמיניסטי N מסומנת:

$$\begin{aligned} L(N) &= \{w \mid \exists q_0 \in Q_0 \wedge \exists f \in \Delta^*(q_0, w) \wedge f \in F\} \\ &= \{w \mid (\cup_{q_0 \in Q_0} \Delta^*(q_0, w)) \cap F \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

והיא קבוצת כל המילים שקיים עבורן מסלול ממצב התחלתי אל מצב מקבל.

מעבר מאוטומט לא דטרמיניסטי לאוטומט דטרמיניסטי

עבור אוטומט סופי לא דטרמיניסטי $N = (Q^N, \Sigma, \Delta, Q_0, F^N)$, ניתן להתאים אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול $D = (Q^D, \Sigma, \delta, q_0, F^D)$, כאשר:

1) $Q^D = P(Q^N)$
2) $\delta(P, \sigma) = \cup_{q \in P} \Delta(q, \sigma)$
3) $q_0 = Q_0$
4) $F^D = \{P \subseteq Q^N \mid P \cap F^N \neq \emptyset\}$

8 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי עם מעברי ε

בדומה לאוטומט סופי לא דטרמיניסטי, אוטומט סופי לא דטרמיניסטי עם מעברי אפסילון מוגדר כחמישייה סדורה:

$$N^\varepsilon = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

כאשר פונקציית המעברים מוגדרת $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q)$ כך שמתקיים $\forall q \in Q \to \Delta(q, \varepsilon) \subseteq Q$.

פונקציית סגור על מצבים באוטומט סופי לא דטרמיניסטי

פונקציית הסגור $CL : Q \to P(Q)$ מחזירה את המצבים שניתן לעבור אליהם ממצב מסוים בעזרת מעבר או מעברי אפסילון.

$$CL(q) = \{p \mid p \in \Delta^*(q, \varepsilon)\}$$

מעבר מאוטומט סופי לא דטרמיניסטי עם מעברי אפסילון לאוטומט סופי לא דטרמיניסטי

עבור אוטומט סופי לא דטרמיניסטי עם מעברי אפסילון $N^\varepsilon = (Q, \Sigma, \Delta^\varepsilon, Q_0^\varepsilon, F)$, ניתן להתאים אוטומט סופי לא דטרמיניסטי ללא מעברי אפסילון $N = (Q, \Sigma, \Delta^N, Q_0^N, F)$, כאשר:

1) $\Delta^N(q, \sigma) = \bigcup_{p \in \Delta^\varepsilon(q, \sigma)} CL(p)$
2) $Q_0^N = \bigcup_{p \in Q_0^\varepsilon} CL(p)$

9 שפות רגולריות

ביטויים רגולריים

הביטוי r הוא ביטוי רגולרי אם הוא שייך למבנה האינדוקטיבי $R = I(B, P)$ כאשר

- קבוצת הבסיס - $B = \Sigma \cup \{\varepsilon, \emptyset\}$.
- קבוצת פעולות היצירה - $P = \{r_1 r_2, r_1 | r_2, r^*, (r)\}$.

כלומר $r \in B$ או שהוא מורכב מפעולת יצירה על ביטוי רגולרי או שהוא מורכב מפעולת יצירה על שני ביטויים רגולריים.

שפת ביטוי רגולרי

השפה של ביטוי רגולרי r מסומנת $L(r)$ והיא מוגדרת על ידי פונקציה אינדוקטיבית/רקורסיבית:

$$L(r) = \begin{cases} L(r_1) \cdot L(r_2), & r = r_1 r_2 \\ L(r_1) \cup L(r_2), & r = r_1 | r_2 \\ (L(r_1))^*, & r = (r_1)^* \\ L(r), & r = (r) \end{cases}$$

הגדרות של שפות רגולריות

1) שפה L היא רגולרית אם ורק אם קיים אוטומט A שמקיים $L = L(A)$.
2) שפה L היא רגולרית אם ורק אם קיים ביטוי רגולרי r שמקיים $L = L(r)$.

סגירות של שפות רגולריות תחת פעולות

השפות הרגולריות סגורות תחת הפעולות הבאות:

1) משלים
2) איחוד
3) חיתוך
4) שרשור
5) סגור קלין

השפות הרגולריות סגורות תחת מספר סופי של הרכבת פעולות אלו.

10 אוטומט סופי מוכלל

אוטומט סופי מוכלל מוגדר כחמישייה סדורה:

$$GA = (Q, R, \Delta, Q_0, F)$$

כאשר:

1) R - אוסף הביטויים הרגולריים.
2) $Q_0 = \{s\}$ - קבוצה עם מצב התחלתי בודד.
3) $F = \{f\}$ - קבוצה עם מצב מקבל בודד.
4) $\Delta : Q \times R \to P(Q)$ - פונקציית מעברים בין מצב לקבוצת מצבים על ידי שרשור ביטוי רגולרי, $\forall q \in Q \to \Delta(q, r) \subseteq Q$.

מעבר מאוטומט סופי לא דטרמיניסטי לביטוי רגולרי בעזרת אוטומט מוכלל ודילול מצבים

שלבי המעבר:

1. יצירת מצב התחלתי עם מעברי אפסילון ממנו אל המצבים ההתחלתיים המקוריים.
2. יצירת מצב מקבל עם מעברי אפסילון מהמצבים המקוריים המקבלים אליו.
3. בצורה סדרתית, בוחרים מצב q ומדללים אותו, עד לקבלת אוטומט עם 2 מצבים בלבד:

א) בוחנים מי המצבים p שיש מהם מעבר מהם אל q ומהו הביטוי הרגולרי שמוביל למעבר.
ב) בוחנים מי המצבים s שיש מעבר מ-q אליהם ומהו הביטוי הרגולרי שמוביל למעבר.
ג) מתאימים את המעבר הישיר ממצבים p למצבים s על ידי שרשור הביטויים הרגולריים התואמים.
ד) מוחקים את המצב q ואת המעברים אליו וממנו.

4. בסיום הדילול, הביטוי הרגולרי שנמצא על המעבר בין s ל-f הוא הביטוי הרגולרי של שתואם את שפת האוטומט המקורי.

11 למת הניפוח לשפות רגולריות

עבור שפה רגולרית L קיים $N \in \mathbb{N}^+$ שעבורו לכל מילה $w \in L$ שמקיימת $|w| \geqslant N$ קיים פירוק $w = xyz$ שמקיים את 3 התנאים:

1. $|y| > 0$
2. $|xy| \leqslant N$
3. $\forall i \in \mathbb{N} \to xy^iz \in L$

עקרונות שימוש בלמת הניפוח להפרכת רגולריות

1. מניחים בשלילה ש-L רגולרית.
2. קיים N שמקיים את התנאים של למת הניפוח עבור L.
3. בוחרים מילה w שתלויה ב-N.
4. כותבים בצורה כללית את כל הפירוקים האפשריים $w = xyz$ שמקיימים $|xy| \leqslant N$ ו- $|y| > 0$.
5. מראים שעבור מספר טבעי i כלשהו, $xy^iz \notin L$ עבור כל הפירוקים האפשריים דלעיל.
6. מציינים שנסתרה ההנחה ש-L רגולרית, ולכן אינה רגולרית.

12 שפות חסרות הקשר

דקדוק חסר הקשר

דקדוק חסר הקשר מוגדר כרביעייה סדורה

$$G = (V, \Sigma, R, S)$$

כאשר:

1. V - קבוצת משתנים סופית, בה יש את שמות כללי השכתוב.
2. Σ - קבוצת תווים (טרמינלים) סופית, זרה ל-V.
3. R - קבוצה סופית של כללי שכתוב/יצירה מהצורה $A \to r$ כאשר $A \in V$ ו-r ביטוי רגולרי שנוצר על $V \cup \Sigma$.
4. $S \in V$ - משתנה התחלתי.

גזירה מדקדוק

עבור דקדוק חסר הקשר $G = (V, \Sigma, R, S)$ וכלל שכתוב/יצירה $(A \to r) \in R$ נסמן את השכתוב של משתנה על ידי גזירה מהדקדוק:

$$uAv \Rightarrow urv$$

אם ניתן לשכתב מ-u את v על ידי מספר טבעי של גזירות מהדקדוק, נסמן $u \Rightarrow^* v$.

שפה של דקדוק חסר הקשר

השפה של דקדוק חסר הקשר $G = (V, \Sigma, R, S)$ מוגדרת:

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

ונקראת שפה חסרת הקשר.

סגירות

השפות חסרות ההקשר סגורות תחת הפעולות הבאות:

1) איחוד
2) שרשור
3) סגור קלין

השפות חסרות ההקשר אינן סגורות תחת הפעולות הבאות:

1) חיתוך
2) משלים

למת הניפוח לשפות חסרות הקשר

עבור שפה חסרת הקשר L קיים $N \in \mathbb{N}^+$ שעבורו לכל מילה $w \in L$ שמקיימת $|w| \geqslant N$ קיים פירוק $w = tuxyz$ שמקיים את 3 התנאים:

1) $|uy| > 0$
2) $|uxy| \leqslant N$
3) $\forall i \in \mathbb{N} \to tu^ixy^iz \in L$

עקרונות שימוש בלמת הניפוח להפרכת חוסר הקשר

1) מניחים בשלילה ש-L חסרת הקשר.
2) קיים N שמקיים את התנאים של למת הניפוח עבור L.
3) בוחרים מילה w שתלויה ב-N.
4) כותבים בצורה כללית את כל הפירוקים האפשריים $w = tuxyz$ שמקיימים $|uy| > 0 \wedge |uxy| \leqslant N$.
5) מראים שעבור מספר טבעי i כלשהו, $tu^ixy^iz \notin L$ עבור כל הפירוקים האפשריים דלעיל.
6) מציינים שנסתרה ההנחה ש-L חסרת הקשר, ולכן היא אינה חסרת הקשר.

13 אוטומט מחסנית

הגדרה פורמלית של אוטומט מחסנית

אוטומט מחסנית (סופי לא דטרמיניסטי) P מוגדר כשישייה סדורה:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_0, F)$$

כאשר:

1) Q - קבוצה סופית של מצבים.
2) Σ - קבוצת אותיות האלפבית של הקלט.
3) Γ - קבוצת אותיות האלפבית של המחסנית.
4) $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q \times \Gamma^*)$ - פונקציית מעברים על ידי קריאת קלט של תו בין מצב באוטומט ותו בראש המחסנית לבין קבוצת מצבים ושרשורי תווים לראש המחסנית. המעברים מהצורה $\Delta(q, \sigma, \gamma) \subseteq Q \times \Gamma^*$.
5) $q_0 \in Q$ - מצב התחלתי.
6) $F \subseteq Q$ - קבוצת מצבים שמקבלים מילים.

קונפיגורציה

קונפיגורציה c של P הינה שלשה $c = (q \in Q, w \in \Sigma^*, \gamma \in \Gamma^*)$. מסמנים $c_1 \models_P c_2$ (c_1 גוררת את c_2 באוטומט) אם קיים מעבר ישיר מ-c_1 אל c_2. כלומר,

$$c_1 = (q, \sigma w, \gamma_1 u) \models_P c_2 = (p, w, \gamma_2 u) \iff (p, \gamma_2) \in \Delta(q, \sigma, \gamma_1)$$

מסמנים $c_1 \models_P^* c_2$ (c_1 גוררת כוכבית את c_2 באוטומט) אם קיים מעבר כלשהו מ-c_1 אל c_2.

שפת אוטומט מחסנית

שפת המילים שמתקבלות על ידי אוטומט מחסנית P מסומנת:

$$L(P) = \{w \mid \exists f \in F \wedge (q_0, w, \varepsilon) \models_P^* (f, \varepsilon, u)\}$$

והיא קבוצת כל המילים שקיים עבורן מסלול ממצב התחלתי אל מצב מקבל.

סוף הנספחים (דפי העזר)!

אוטומטים ושפות פורמליות

מועד א'

פתרון לדוגמא

ד"ר יוחאי טוויוטו , ד"ר דביר רוס .

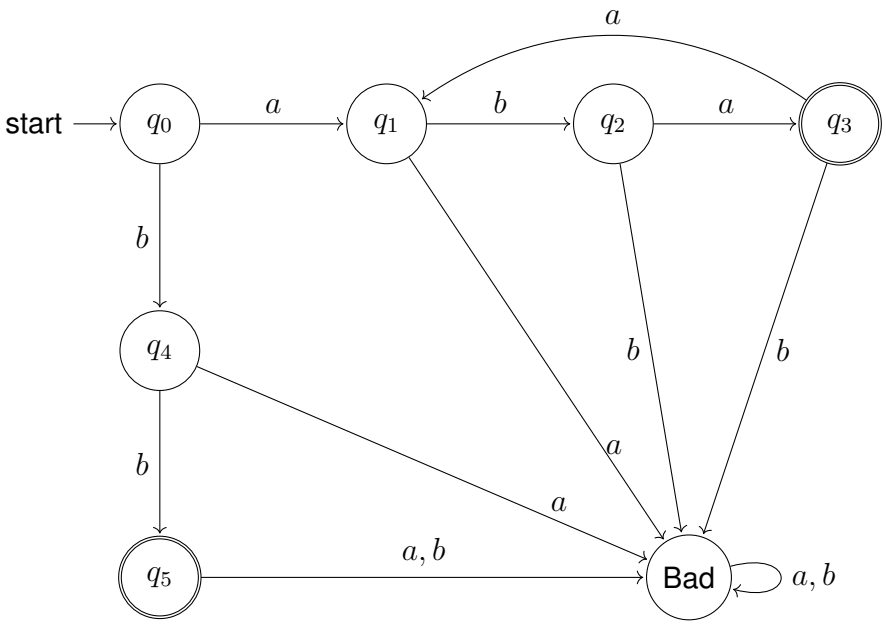
סמסטר א, תשפ"ד'

מסמך זה כולל פתרון לדוגמא של המבחן. הפתרונות לשאלות הינן פתרונות לדוגמא. ניתן לפתור חלק בדרכים נוספות/אחרות, מלבד הדרך המוצעת בפתרון לדוגמא.

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס

פתרונות

שאלה 1: אוטומט סופי דטרמיניסטי (20 נקודות)



תיאור פורמלי

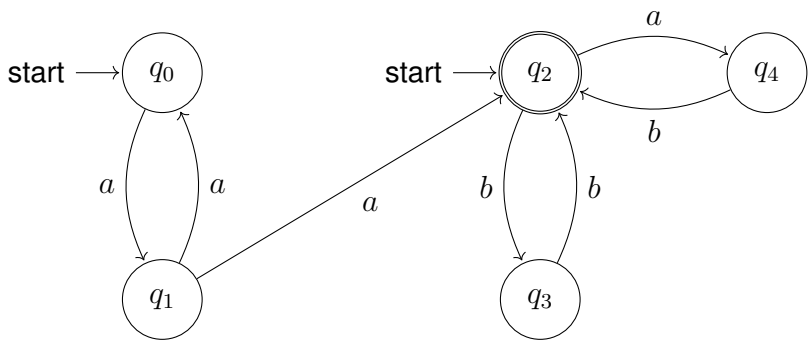
$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, Bad\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3, q_5\})$$

כאשר פונקציית המעברים δ מוגדרת בטבלה הבאה:

b	a	$q\backslash\sigma$
q_4	q_1	q_0
q_2	Bad	q_1
Bad	q_3	q_2
Bad	q_1	q_3
q_5	Bad	q_4
Bad	Bad	q_5
Bad	Bad	Bad

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

שאלה 2: אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (20 נקודות)



הסבר:

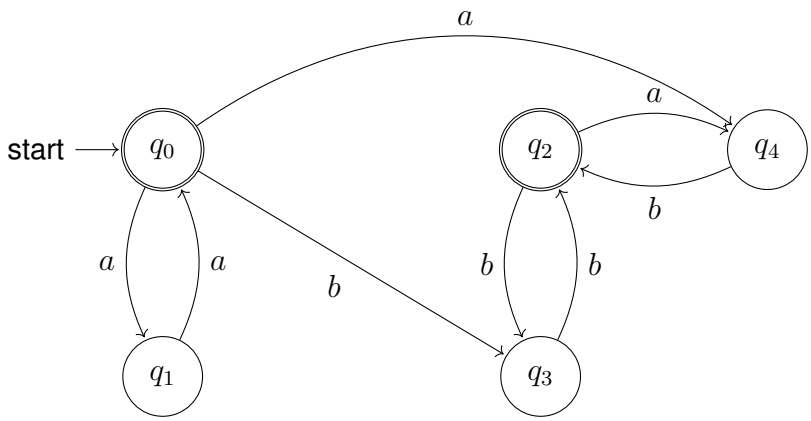
$$L = \{aa\}^* \cdot \{ab, bb\}^*$$

1. בוחנים עבור אילו מצבים באוטומט קיימים מצבים שונים מהם בסגור אפסילון שלהם.
2. ממצבים שנכנסים ישירות למצבי שלב 1, מוסיפים מעברים ישירים אל המצבים שבסגור עם האות שמכניסה אותם למצב משלב 1.
3. לכל מצב משלב 1 שהינו מצב התחלתי, הופכים את כל המצבים בסגור באפסילון שלו למצבים התחלתיים.

במקרה שלנו:

1. $CL(q_0) = \{q_0, q_2\}$.
2. מכיוון שיש מעבר מ q_1 אל q_0 על ידי a, מוסיפים מעבר ישיר מ- q_1 אל q_2 על ידי a.
3. הופכים את q_2 למצב התחלתי.

שאלה 3: שפות רגולריות (20 נקודות)



המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

הסבר:

1. בוחנים איזה מצבים נמצאים בפונקציית הסגור של מצבים אחרים.
2. ממצבים שעוברים למצבי שלב 1, מוסיפים מעברים ישירים אל המצבים שמצבי שלב 1 עוברים אליהם.
3. אם המצבים משלב 1 מצבים מקבלים, מוסיפים קבלה למצבים שמצבי שלב 1 בסגור שלהם.

במקרה שלנו:

1. $q_2 \in CL(q_0) = \{q_0, q_2\}$.
2. מכיוון שיש מעברים מ q_2 אל q_4, q_3 על ידי a, b (בהתאמה), מוסיפים מעברים ישירים תואמים מ q_0 אל q_4, q_3.
3. הופכים את q_0 למצב מקבל.

שאלה 4: שפות חסרות הקשר (20 נקודות)

השפה L אינה רגולרית.
הוכחה:

- נניח בשלילה שהשפה L רגולרית.
- יהי N סף האורך מלמת הניפוח.
- נבחר את המילה $w = a^N b^N a^N b^N$.
- מתקיים:
  - $|w| \geqslant N$
  - $w \in L$

  כלומר, המילה בשפה והיא ארוכה דיה.
- על פי למת הניפוח, קיים פירוק $w = xyz$ כך ש:
  - $|y| > 0$
  - $|xy| \leqslant N$
  - לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $xy^iz \in L$
- בכל פירוק מהצורה הנ"ל, $y = a^j$, $1 \leqslant j \leqslant N$.
- נבחר פקטור ניפוח $i = 0$ ונקבל את המילה $w_0 = a^{N-j} b^N a^N b^N$.
- מצד אחד, לפי מבנה השפה L, מתקיים $w_0 \notin L$ (כי $j > 0$).

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מטמנטם

- מצד שני, לפי למת הניפוח $w_0 \in L$.
- קיבלנו סתירה. לכן, הנחת השלילה שגויה. כלומר, השפה L אינה רגולרית. וזה מה שרצינו להוכיח.

שאלה 5: אוטומט מחסנית (20 נקודות)

$G_1 = (V_1, \Sigma, R_1, S_1)$
כאשר
$V_1 = \{S_1, F_1\}$

$$R_1 = \{S_1 \to aS_1a \mid bS_1b \mid cS_1c \mid aF_1b \mid bF_1a \mid aF_1c \mid cF_1a \mid bF_1c \mid cF_1b,$$
$$F_1 \to aF_1 \mid bF_1 \mid cF_1 \mid \varepsilon\}$$

$G_2 = (V_2, \Sigma, R_2, S_2)$
כאשר
$V_2 = \{S_2, A, C\}$

$$R_2 = \{S_2 \to AC,$$
$$A \to aAb \mid \varepsilon,$$
$$C \to bCc \mid \varepsilon\}$$

$$G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, R_1 \cup R_2 \cup \{S \to S_1S_2\}, S)$$

המכללה האקדמית להנדסה סמי שמעון
קמפוס באר שבע ביאליק פינת בזל 84100 | קמפוס אשדוד ז'בוטינסקי 84, 77245 | www.sce.ac.il | חייג: *מהנדס