תוכן העניינים

1 פרק 1: משחקים בצורה רחבה 1

2 פרק 2: משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש 6

3 פרק 3: אסטרטגיות רציפות ודואפול 9

4 פרק 4: משחקי לוח 10

5 פרק 5: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס 17

6 פרק 6: אסטרטגיות מעורבות 20

1 פרק 1: משחקים בצורה רחבה

הגדרה 1: גרף מכוון

גרף מכוון סופי הוא זוג $G = (V, E)$ שבו:

- V הוא קבוצה סופית של הקודקודים של הגרף.

  בדרך כלל קודקודים יסומנו $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

- $E \supseteq V \times V$ הוא קבוצה סופית של הצלעות של הגרף.

  אם V הוא הקבוצת הקודקודים של G, ואם קיימת צלע מקודקוד $x_i \in V$ לקודקוד $x_j \in V$, הצלע הזו תסומן

$$x_i x_j \in E \ .$$

הגדרה 2: קודקוד אב וקודקוד בן

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון קשיר. אם קיימת צלע $x_1 x_2 \in E$, כלומר אם קיימת צלע היוצאת מקודקוד x_1 ונכנסת לקודקוד x_2, אומרים כי:

- x_2 הוא **בן** של הקודקוד x_1,
- x_1 הוא **אב** של הקודקוד x_2.

אם $x \in V$ קודקוד של G. הקבוצת כל הבנים של x תסומן $c(x)$, וקבוצת כל האבות של x תסומן $p(x)$:

$$c(x) \triangleq \text{"קבוצת הבנים של } x\text{"} \ ,$$

$$p(x) \triangleq \text{"קבוצת האבות של } x\text{"} \ .$$

הגדרה 3: עץ מכוון

עץ מכוון הוא שלשה (V,E,x_0) כאשר (V,E) גרף מכוון ו- $x_0 \in V$ הוא קודקוד של G, שנקרא **השורש** של העץ, כך שהתנאים הבאים מתקיימים.

1) לא קיימות צלעות שנכנסות לשורש x_0.

2) לכל קודקוד פרט לשורש, $x \in V$ ($x \neq x_0$), קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליה.

3) G לא מכיל מחזורים.

משפט 1: קיום אב יחיד לכל בן בעץ

אם (V,E,x_0) הוא עץ אז לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים $x = x_0$ או ל- x קיים אב אחד בדיוק.

משפט 2: בעץ קיים מסלול יחיד מהשורש לכל קודקוד

אם (V,E,x_0) הוא עץ אז קיימת מסלול יחיד מהשורש x_0 לכל קודקוד $x \in V$.

משפט 3: כל מסלול בעץ הוא יחודי

אם (V,E,x_0) הוא עץ ואם קיים מסלול מקודקוד $x \in V$ לקודקוד $x' \in V$ אז הוא יחודי.

הגדרה 4: חלוקה

תהי B קבוצה לא ריקה. **חלוקה** היא סדרה

$$(B_i)_{i=1}^{k} = (B_1,\ B_2,\ \ldots\ B_k)$$

המקיימת התנאים הבאים:

1) לכל $1 \leq i \leq k$, B_i היא תת-קבוצה של B:

$$B_i \subseteq B\ , \qquad 1 \leq i \leq k$$

2) התתי-קבוצות זרות. כלומר כל חיתוך של כל מספר סופי של תת-קבוצות הוא ריק. כלומר לכל תת-קבוצה $X \subseteq \{1,\ldots,k\}$:

$$\bigcap_{x \in X} B_x = \emptyset\ .$$

3) האיחוד של כל תתי-קבוצות הו הקבוצה B:

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B\ .$$

הגדרה 5: משחק בצורה רחבה

משחק בצורה רחבה הוא שביעייה סדורה:

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i \in N}, O, (u_i)_{i \in N}\right)\ .$$

המרכיבים של המשחק, Γ הם מוגדרים באופן הבא.

1) $N =$ קבוצה סופית של **שחקנים**.

(x_0, V, E) הוא עץ שנקרא **עץ המשחק**.

2) $x_0 =$ **השורש של העץ**, שהוא קודקוד שבו השחקן הראשון בתור מקבל ההחלטה הראשונה בין הפעולות המייוצגות ע"י הצלעות שיוצאות ממנה.

3) $V =$ קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.

בכל קדקוד שחקן מקבל החלטה בין פעולות.

4) $E =$ קבוצת **הצלעות** של עץ המשחק.

כל צלע מייצגת פעולה של אותו שחקן שקיבל החלטה בקודקוד שממנו הצלע יצאה.

5) $(V_i)_{i\in N} = (V_1, V_2, V_3, \ldots)$ היא **חלוקה** של הקבוצת הקודקודים שאינם עלים כך ש:

- $V_1 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה,
- $V_2 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן 2 מקבל החלטה.

במקרה הכללי:

- $V_j =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן j מקבל החלטה.

6) $O =$ **קבוצת העלים** של העץ.

כלומר $O \subset V$ היא תת-קבוצת קודקודים של העץ שמכילה כל הנקודות סיום של העץ.

7) $(u_i)_{i\in N} = (u_1, u_2, \ldots)$ כאשר u_i היא **פונקצית התשלום** של שחקן i, שמתאימה לכל עלה בעץ המשחק תשלום לשחקן i. (למטה בהגדרה 9 נתן הגדרה שקולה של פונקצית התשפלום במונחי אסטרטגיות.)

הגדרה 6: פונקצית הפעולות

הפונקצית הפעולות, $A(x)$ מתאימה לקודקוד x, כל הפעולות האפשריות ששחקן יכול לבחור בקודקוד x.

הגדרה 7: אסטרטגיה

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה, ויהי $V_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ קבוצת הקודקודים של שחקן $i \in N$.

- **אסטרטגיה** של שחקן $i \in N$ היא פונקציה $s_i(x)$ המתאימה לכל קודקוד $x \in V_i$ פעולה ב- $A(x)$.

  אסטרגטיה יחידה, s_i של שחקן i תסומן כסדרת פעולות בכל קודקוד:

  $$s_i = (s_i(x_1),\ s_i(x_2),\ \ldots\ , s_i(x_n)) = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n)\ , \qquad a_j \in A\left(x_j\right)\ .$$

- **הקבוצת האסטרטגיות** של שחקן $i \in N$ תסומן S_i ותוגדר:

  $$S_i = \left\{\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n)\ \middle|\ a_1 \in A(x_1)\ ,\quad \ldots\quad ,\ a_n \in A(x_n)\ \right\}\ .$$

  כלומר, הקבוצת אסטרטגיות S_i היא אוסף כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק Γ.

- נניח ששחקן I בוחר באסטרטגיה $s_I \in S_I$, שחקן II בוחר באסטרטגיה $s_{II} \in S_{II}$, ובאופן כללי נניח כי שחקן $i \in N$ בוחר באסטרטגיה $s_i \in S_i$.

וקטור אסטרטגיה של המשחק הוא וקטור של הפונקציות אסטרטגיות של כל השחקנים:

$$s = (s_i)_{i\in N} = (s_I,\ s_{II},\ \dots)$$

הגדרה 8: קבוצת ידיעה

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה. **הקבוצת ידיעה** של שחקן $i \in N$ תסומן U_i ותוגדר הקבוצת זוגות הבאה:

$$\bigcup_{x\in V_i} (\ x\ ,\ A(x)\ )\ ,$$

ז"א U_i מכילה כל הזוגות, כאשר כל זוג מכיל קודוד x והקבוצות הפעולות האפשריות $A(x)$.

הגדרה 9: פונקצית תשלום

נתון משחק n-שחקנים.

- **הפונקצית התשלום של שחקן** i, מסומנת u_i, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)$ של המשחק תשלום לשחקן i:
$$u_i\left(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n\right)\ =\ \text{"תשלום לשחקן } i\text{"}\ .$$
- **הפונקצית התשלום של המשחק**, מסומנת u, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)$ וקטור $(u_1,\ \dots\ u_n)$ כאשר u_i הוא התשלום לשחקן i:
$$u\left(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n\right)\ =\ (u_1,\ \dots\ u_n)\ .$$

הגדרה 10: משחק עם ידיעה שלמה

- בכל שלב במשחק, כל שחקן מודע לכלל ההחלטות שהתקבלו על ידי השחקנים האחרים בשלבים המוקדמים יותר.
- לפיכך, השחקן יודע בדיוק אילו פעולות ננקטו, ובעת קבלת ההחלטה, הוא יודע בוודאות באיזה צומת הוא נמצא בעץ המשחק.

הגדרה 11: משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק שבו:

- קיים שחקן i כך שאם V_i הקבוצת קודקודים שלו, קיימת תת-קבוצת קודקודים $V_i' \subseteq V_i$ שבה שחקן i לא יודע אילו פעולה ביצע השחקן בקוקוד אב של הקודקודים ב- V_i'.
- לכן, כאשר מגיע תורו של אותו שחקן, הוא אינו יודע באיזה צומת הוא נמצא בתוך עץ המשחק.
- התת-קבוצה V_i' תקרא **קבוצת ידיעה לא שלמה**.

משפט 4: פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה לא שלמה

אם x, x' הם קודודים של אותה קבוצת ידעיה לא שלמה, אז הקבוצת הפעולות של x ו- x' זהות:

$$A(x) = A(x') \ .$$

הגדרה 12: משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל הוא שמינייה סדורה:

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, (p_x)_{x \in V_0}, O, u\right) \ ,$$

שבה:

- N הוא קבוצה סופית של שחקנים.
- (V, E, x_0) הוא עץ המשחק.
- $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$ היא חלוקה של קבוצת הקודקודים שאינן עלים.
- לכל קדקוד $x \in V_0$, p_x היא פונקצית ההסתברות של הפעולות (הצלעות) היוצאות מ- x.
- O היא הקבוצת העלים, המייצגים הקבוצת התוצאות האפשריות.
- u הוא פונקצית התשלומים של המשחק.

הסימונים הם כמקודם בהגדרה 5 עם ההבדלים הבאים.

- החלוקה של קבוצת הקודקודים היא עתה $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$. כלומר, נוספה עתה הקבוצה V_0 שהיא קבוצת הקודקודים שבהם מתבצע מהלדכי גורל.
- לכל קודקוד $x_0 \in V_0$ הוקטור p_x הוא ההסתברויות של הצלעות היוצאות מ- x.

הגדרה 13: פונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים ואי-זוגיים

הפונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = \begin{cases} 1: & \text{זוגי } n \\ 0: & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = 1 - n \bmod 2 \ .$$

הפונקצית האינדיקטור של מספרים אי-זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = \begin{cases} 0: & \text{זוגי } n \\ 1: & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = n \bmod 2 \ .$$

2 פרק 2: משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

הגדרה 14: משחק בצורה אסטרטגית

משחק בצורה אסטרטגית (או **משחק בצורה נורמלית**) הוא שלושה סדורה
$$G = \left(N\ ,\ (S_i)_{i\in N}\ ,(u_i)_{i\in N}\right)$$
שבה

1) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

2) לכל שחקן, $S_i, i \in N$ היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן i.

3) נסמן ב-
$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$
אצ קבוצת כל וקטורי האסטרטגיות. לכל שחקן $i \in N$:
$$u_i : S \to \mathbb{R}$$
היא פונקציה המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $s = (s_i)_{i\in N}$ תשלום לשחקן i.

הגדרה 15:

תהי $N = \{1, \ldots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי X_i קבוצה כלשהי.
נסמן
$$X = \bigtimes_{i\in N} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$
את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות X_i.
לכל $i \in N$ נגדיר
$$X_{-i} = \bigtimes_{\substack{j\in N\\ j\neq i}} X_j = X_1 \times X_2 \times X_{i-1} \times X_{i+1} \ldots \times X_n$$
את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות X_j למעט הקבוצה X_i.
במילים אחרות,
$$X_{-i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\ \mid\ x_j \in X_j\ ,\ \forall j \neq i\}$$
איבר ב- X_{-i} מסומן ב-
$$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\ .$$
זהו הווקטור ה- $(n-1)$ ממדי הנוצר מ- $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ על ידי השמטת הקואורדינטה i.

הגדרה 16: אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק n שחקנים

נתון משחק n- שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$.
אם קיימות אסטרטגיות $s_i, t_i \in S_i$ של שחקן i כך שלכל אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ של שאר השחקנים מתקיים:
$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})\ ,$$
אז אומרים כי s_i **נשלטת חזק** t_i (או t_i **שולטת חזק** על s_i). במילים אחרות, אם קיימות $s_i, t_i \in S_i$ כך

שלכל וקטור אסטרטגיות $(s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ של שאר השחקנים מתקיים
$$u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n) < u_i(s_1,\ldots,s_{i-1},t_i,s_{i+1},\ldots,s_n)$$
אז אומרים כי t_i נשלטת חזק ע"י s_i. סימון:
$$s_i \prec t_i \ .$$

משפט 5: אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים

נתון משחק 2- שחקנים $G=(N,(S_1,S_2),(u_1,u_2))$ כאשר $N=\{1,2\}$ הקבוצת שחקנים.

- אם קיימות אסטרטגיות $s_1,t_1\in S_1$ של שחקן 1 כך שלכל אסטרטגיה $s_2\in S_2$ של שחקן 2 מתקיים:
$$u_1(s_1,s_2) < u(t_1,s_2)$$
אז אומרים כי s_1 **נשלטת חזק** ע"י t_1. סימון: $s_1 \prec t_1$.
- באותה מידה, אם קיימות אסטרטגיות $s_2,t_2\in S_2$ של שחקן 2 כך שלכל אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן 1 מתקיים:
$$u_2(s_1,s_2) < u(s_1,t_2)$$
אז אומרים כי s_2 **נשלטת חזק** ע"י t_2. סימון: $s_2 \prec t_2$.

משפט 6: הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

1) שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

2) כל השחקנים במשחק רציונליים.

3) העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

הגדרה 17: תשובה טובה ביותר במשחק n שחקנים

נתון משחק n שחקנים: $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$.
אם קיימת אסטרטגיה $s_i\in S_i$ של שחקן i וקיימת וקטור אסטרטגיות $s_{-i}\in S_{-i}$ של שאר השחקנים כך ש:
$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\max_{t_i\in S_i} u_i\left(t_i,s_{-i}\right)$$
אז אומרים כי s_i היא **התשובה הטובה ביותר** של שקחן i בתגובה לוקטור אסטרטגיות s_{-i} של שאר השחקנים.
במילים אחרות, האסטרטגיה s_i של שחקן i היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגיה s_i נותנת לשחקן i התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות $t_i\in S_i$ של שחקן i:
$$u_i\left(s_1,s_2,\ldots s_{i-1},s_i,s_{i+1},\ldots,s_n\right)=\max_{t_i\in S_i} u_i\left(s_1,s_2,\ldots s_{i-1},t_i,s_{i+1},\ldots,s_n\right) \ .$$

משפט 7: תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים

נתון משחק 2 שחקנים: $G=(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2))$.

- אם קיימת אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן 1 וקיימת אסטרטגיה $s_2\in S_2$ של שחקן 2 כך שמתקיים
$$\forall t_1\in S_1: \qquad u_1\left(s_1,s_2\right)=\max_{t_1\in S_1} u_1\left(t_1,s_2\right)$$
אז אומרים כי s_1 היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 1 בתגובה לאסטרטגיה s_2 של שחקן 2.

דרך שקולה לציין התנאי הזה היא:

$$\forall t_1 \in S_1 : \qquad u_1(s_1, s_2) \geq u_1(t_1, s_2) \ .$$

- אם קיימת אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן 2 וקיימת אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 כך שמתקיים

$$\forall t_2 \in S_2 : \qquad u_2(s_1, s_2) = \max_{t_2 \in S_2} u_2(s_1, t_2)$$

אז אומרים כי s_2 היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 2 בתגובה לאסטרטגיה s_1 של שחקן 1.

דרך שקולה לציין התנאי הזה היא:

$$\forall t_2 \in S_2 : \qquad u_2(s_1, s_2) \geq u_2(s_1, t_2) \ .$$

הגדרה 18: שיווי משקל נאש

נתון משחק n שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$. אם קיים וקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ כך שלכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i מקתיים:

$$u_i(s^*) \geq u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$$

אז אומרים כי s^* הוא **שיווי משקל נאש** של המשחק.

משפט 8: שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים

נתון משחק 2 שחקנים: $G = (\{1, 2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$. אם קיים ווקטור אסטרטגיות, $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ של המשחק כך שלכל אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 ולכל אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ התנאים הבאים מתקיימים:

$$\forall s_1 \in S_1 : \qquad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \ ,$$

$$\forall s_2 \in S_2 : \qquad u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1^*, s_2) \ ,$$

אז אומרים כי $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ הוא **שיווי משקל של המשחק**.

משפט 9: שיווי משקל הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן

נתון משחק n שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$. אם לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה $s_i^* \in S_i$ היא תשובה טובה ביותר לוקטור אסטרטגיות $s_{-i}^* = \left(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*\right)$ אז הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא **שיווי משקל** של המשחק G.

משפט 10:

נתון משחק n שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז s^* הוא פתרון למשחק G באסטרטגיות השולטות חזק.

משפט 11:

נתון משחק n שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא **הפתרון היחיד** למשחק G באסטרטגיות שולטות חזק, אז s^* הוא השיווי משקל של המשחק.

3 פרק 3: אסטרטגיות רציפות ודואפול

הגדרה 19: פונקצית התשלום בתחרות שוק (אוליגופול)

במשחק של תחרות בשוק מסחרי עם n שחקנים, הפונקצית התשלום של שחקן $i \in N$ היא:

$$u_i(s_1, \ldots, s_n) = \pi_i(s_1, \ldots, s_n) - \kappa_i(s_1, \ldots, s_n) \ .$$

כאשר:

- $s = (s_1, \ldots, s_n)$ הוקטור אסטרטגיות של המשחק.
- π_i **פונקצית הרווח ברוטו** של שחקן i.

בהינתן וקטור אסטרטגיות $s = (s_1, \ldots, s_n)$ של המשחק, $\pi_i(s_1, \ldots, s_n)$ נותנת את הרווח ברוטו לשחקן i.

- κ_i **פונקצית העלות** של שחקן i.

בהינתן וקטור אסטרטגיות $s = (s_1, \ldots, s_n)$ של המשחק, $\pi_i(s_1, \ldots, s_n)$ נותנת את העלות לשחקן i.

משחק קורנוט (Cournot)

- משחק קורנוט הוא משחק n שחקנים המתחרים בשוק מסחרי שבו האסטרטגיה של כל שחקן $i \in N$ הוא הכמות ששחקן i מייצר:

$$s_i = q_i \in [0, \infty) \ .$$

- הפונקצית הרווח ברוטו היא:

$$\pi_i(q_1, \ldots, q_n) = q_i P(q_1, \ldots, q_n) \ ,$$

כאשר

$$P(q_1, \ldots, q_n) = a - Q = a - (q_1 + \ldots + q_n)$$

היא **הפונקצית המחיר הספציפית** של שחקן i ו- a הוא **הפרמטר הביקוש** של המוצר בשוק הנתון. הפרמטר הזה מכמת את הביקוש של המוצר בשוק.

- הפונקצית העלות היא:

$$\kappa_i(q_1, \ldots, q_n) = c_i(q_1, \ldots, q_n) q_i$$

כאשר $c_i(q_1, \ldots, q_n)$ הוא **הפונקצית העלות הספציפית** של שחקן i.

משחק ברטראנד (Bertrand)

- משחק ברטראנד הוא משחק n שחקנים המתחרים בשוק מסחרי שבו האסטרטגיה של כל שחקן $i \in N$ הוא המחיר של המוצר הנבחר ע"י ששחקן i:

$$s_i = p_i \in [0, \infty) \ .$$

- הפונקצית הרווח ברוטו היא:

$$\pi_i(p_1, \ldots, p_n) = q_i(p_1, \ldots, p_n) p_i \ ,$$

כאשר

$$q_i(p_1, \ldots, p_n)$$

היא **הפונקצית הכמות הספציפית** של שחקן i.

- הפונקצית העלות היא:
$$\kappa_i\left(p_1,\ldots,p_n\right)=c_i\left(p_1,\ldots,p_n\right)q_i\left(p_1,\ldots,p_n\right)$$
כאשר $c_i\left(p_1,\ldots,p_n\right)$ הוא **הפונקצית העלות הספציפית** של שחקן i.

4 פרק 4: משחקי לוח

הגדרה 20: גרף ריבועי של המשחק הקס

1) נתון לוח של משחק הקס $n\times n$. **גרף ריבועי של משחק הקס** הוא גרף לא מכוון צבוע
$$H=(c(V),E)$$
כאשר V קבוצת הקדקודים, E קבוצת הצלעות ו- $c(V)$ קבוצת הקדקודים הצבועים, שמוגדרים כך:

- כל קדקוד $u\in V$ הוא זוג שלמים $u=(a,b)$ כאשר $1\le a,b\le n$. הקבוצת הקדקודים הוא
$$V=\left\{(a,b)\;\middle|\;a,b\in\mathbb{N}^+\;,\;1\le a,b\le n\right\}\;.$$
- $c(V)$ מסמן את הקבוצת הקדקודים הצבועים שמוגדרת:
$$c(V)=\left\{(u,c(u))\;\middle|\;u\in V\right\}$$
כאשר c **פונקצית הצביעה** שמוגדרת:
$$c(u)=\begin{cases}0: & \text{קדקוד } u \text{ לא צבוע}\\ 1: & \text{קדקוד } u \text{ צבוע אדום}\\ 2: & \text{קדקוד } u \text{ צבוע כחול}\;.\end{cases}$$

2) שני קדקודים $u_1=(a_1,b_1)$ ו- $u_2=(a_2,b_2)$ **מסודרים** אם
$$a_1<a_2\;,\;b_1<b_2\;,\qquad \text{או}\qquad a_1>a_2\;,\;b_1>b_2\;.$$

3) שני קדקודים $u_1=(a_1,b_1)$ ו- $u_2=(a_2,b_2)$ **סמוכים** אם הם מסודרים וגם
$$\max\left\{|a_1-a_2|,|b_1-b_2|\right\}=1\;.$$

4) קיימת צלע אחת בדיוק בין כל זוג קדקדוים סמוכים.

5) נגדיר התתי-קבוצות הבאים:
$$N=\{(n,i)\in V\mid 1\le i\le n\}\;,\quad S=\{(1,i)\in V\mid 1\le i\le n\}\;,$$
$$E=\{(n,i)\in V\mid 1\le i\le n\}\;,\quad W=\{(n,i)\in V\mid 1\le i\le n\}\;.$$

6) יהי $H_i=(c_i(V),E)$ גרף ריבועי כלשהו לאחר תור i של משחק הקס.

- **אסטרטגיה של אדום** היא פונקציה המתאימה לכל H_i לכל i אי-זוגי, גרף חדש H_{i+1} כך שניתן להגיע מ- H_i ל- H_{i+1} באמצעות מהלך אחד של אדום.
- **אסטרטגיה של כחול** היא פונקציה המתאימה לכל H_i לכל i זוגי, גרף חדש H_{i+1} כך שניתן להגיע מ- H_i ל- H_{i+1} באמצעות מהלך אחד של כחול.

7) **שרשרת קדקודים** באורך m היא סדרת קדקודים צבועים
$$U=\{(u_1,c(u_1)),(u_2,c(u_2)),\ldots(u_k,c(u_k))\}\subset V \text{ כאשר } k=|U|$$

כך שלכל $1 \leq i < k$ הקדקודים u_i, u_{i+1} סמוכים וגם כל קדקוד בשרשרת הוא צבוע עם אותו צבע:

$$\forall u_i \in U : \qquad (\ c(u_i) = 1 \quad \vee \quad c(u_i) = 2 \ ) \ .$$

8) תהי $U = \{(u_1, c(u_1)), \ldots, (u_k, c(u_k))\}$ שרשרת.

א) U שרשרת מנצחת של שחקן אדום אם:

$$(\forall (u_i, c(u_i)) \in U : \quad c(u_i) = 1) \qquad \wedge \qquad (u_1 \in N \ \wedge \ u_k \in S \ ) \ .$$

ב) U שרשרת מנצחת של שחקן כחול אם:

$$(\forall (u_i, c(u_i)) \in U : \quad c(u_i) = 2) \qquad \wedge \qquad (u_1 \in E \ \wedge \ u_k \in W \ ) \ .$$

9) יצירת שרשרת ע"י אסטרטגיה:

- אסטרטגיה $s_R \in S_R$ יוצרת שרשרת U אם קיים i אי-זוגי כך ש: $s_R(H_i) = H_{i+1}$ כאשר $H_{i+1} = (c_i(V), E)$ כך ש: $U \subset c_i(V)$.
- אסטרטגיה $s_B \in S_B$ יוצרת שרשרת U אם קיים i זוגי כך ש: $s_B(H_i) = H_{i+1}$ כאשר $H_{i+1} = (c_i(V), E)$ כך ש: $U \subset c_i(V)$.

10) אסטרטגיה מנצחת:

- s_R נקראת אסטרטגיה מנצחת של אדום אם היא יוצרת שרשרת מנצחת של אדום.
- s_B נקראת אסטרטגיה מנצחת של כחול אם היא יוצרת שרשרת מנצחת של כחול.

11) לוח ריבועי של משחק הקס $H = (c(V), E)$ הוא **שלם** אם

$$\nexists \ (u, c(u)) \in c(V) : \quad c(u) = 0 \ .$$

משפט 12: למת האבן הנוספת

יהי $G = (\{R, B\} \ , \ \{S_R, S_B\} \ , \ \{u_R, u_B\})$ משחק הקס.

- יהי G_R אותו משחק של G אלא שבתחילת המשחק אבן אדומה מונחת במשושה שרירותי על הלוח. אם קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן אדום במשחק G אז קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן אדום במשחק G_R.
- יהי G_B אותו משחק של G אלא שבתחילת המשחק אבן כחולה מונחת במשושה שרירותי על הלוח. אם קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן כחול במשחק G אז קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן כחול במשחק G_B.

משפט 13: משפט הפירוק של גרפים

כל גרף סופי $\Gamma = (V, E)$ שבו דרגת כל צומת היא לכל היותר 2, ניתן לפירוק לאוסף של תת-גרפים זרים, שכל אחד מהם הוא:

א) צומת מבודד,

ב) מעגל פשוט,

ג) מסלול פשוט.

משפט 14: משפט הקס

אם כל משבצת על לוח הקס מסומנת או ב- X או ב- O, אז קיים מסלול- X המחבר את הצדדים N ו- S או שקיים מסלול- O המחבר את הצדדים E ו- W.

משפט 15: משפט קיום מנצח אחד בדיוק במשחק הקס

בגל משחק הקס יש בדיוק מנצח אחד.

במילים אחרות: משחק הקס לא יכול להסתיים בתיקו.

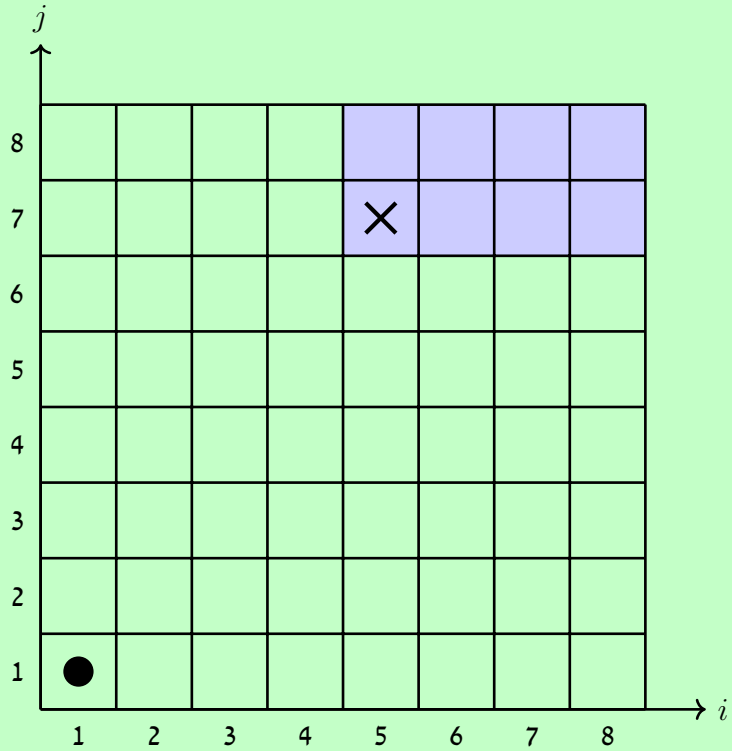
משפט 16: בכל משחק הקס שחקן הראשון בתור מנצח

בכל משחק הקס, לשחקן הראשון בתור (שחקן אדום) קיים אסטרטגיה מנצחת מובטחת.

הגדרה 21: משחק צ'ומפ

- המשחק צ'ומפ מתנהל על לוח משבצות ריבועי בגודל $n \times m$.
- המשבצות מסומנות בעזרת זוג הקואורדינטות (i, j) כאשר $1 \leq i \leq n$ ו- $1 \leq j \leq m$.
  - i מסמן את הקואורדינטה האופקית
  - j את הקואורדינטה האנכית.

בתשרים מתואר לוח המשחק עבור $n = m = 8$.



כל שחקן חייב לכבוש בתורו משבצת בכפוף לתנאי הבא:

- אם בשלב מסוים נכבשה המשבצת (i_0, j_0), לא ניתן יותר לכבוש שום משבצת הנמצאת צפון־מזרחית ממנה.
- ז"א מסולקות מהלוח כל המשבצות (i, j) המקיימות $i \geq i_0$ ו- $j \geq j_0$.
- במשחק בתשרים למשל, נכבשה המשבצת $(4, 7)$, ולכן סולקן מהלוח כל המשבצות המוצללות.
- שחקן I הוא הפותח במשחק. השחקן הכובש את המשבצת $(1, 1)$ הוא המפסיד.

משפט 17: משחק צ'ומפ לא יכול להסתיים בתיקו

משחק צ'ומפ על לוח $m \times n$ לא יכול להסתיים בתיקו.

משפט 18: אסטרטגיה מנצחת במשחק צ'ומפ

במשחק צ'ומפ על לוח ריבועי $n \times n$ האסטרטגיה הבאה הינה אסטרטגיה מנצחת לשחקן I.

- בתור הראשון שחקן I כובש את המשבצת $(2, 2)$.
- מכאן ואילך, שחקן I משחק באופן סימטרי לשחקן II.

ז"א אם שחקן II כובש את המשבצת (i, j), אז שחקן I, במהלך שלאחר מכן, יכבוש את המשבצת (j, i).

משפט 19:

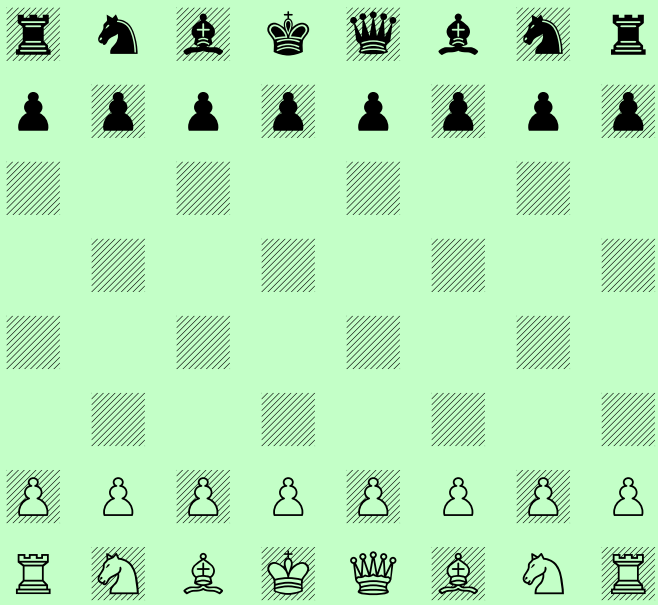
במשחק צ'ומפ על לוח $m \times n$, אם לשחקן II אסטרטגיה מנצחת אז גם לשחקן I יש אסטרטגיה מנצחת.

משפט 20:

במשחק צ'ומפ על לוח $m \times n$, יש לשחקן I הפותח המשחק אסטרטגיה מנצחת.

הגדרה 22: הכללים של שחמט

- שחמט הוא משחק שני שחקנים: שחור ולבן.
- המשחק משוחק על לוח 8×8. במצב ההתחלתי לשחקן לבן יש 16 כלים לבנים ולשחקן שחור יש 16 כלים שחורים מונחים על הלוח בקונפיגורציה המתוארת בתרשים למטה.



- **1) מלך (King):**

נע משבצת אחת לכל כיוון (קדימה, אחורה, ימינה, שמאלה או באלכסון).

2) מלכה (Queen):

נעה מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות לכל כיוון (לאורך השורות, העמודות או האלכסונים).

3) צריח (Rook):

נע מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות לאורך השורות או העמודות (קדימה, אחורה, ימינה ושמאלה).

4) רץ (Bishop):

נע מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות באלכסון בלבד.

5) פרש (Knight):

נע בצורת האות "L" (שתי משבצות לכיוון אחד, ולאחר מכן משבצת אחת הצידה בזווית ישרה). זהו הכלי היחיד שמסוגל "לדלג" מעל כלים אחרים (משלו או של היריב).

6) ♟ רגלי / חייל :(Pawn)

נע משבצת אחת קדימה. בתורו הראשון בלבד, הוא יכול לנוע שתי משבצות קדימה. הוא מכה (אוכל) כלי יריב אך ורק משבצת אחת באלכסון קדימה.

- למשחק יש שלוש תוצאות אפשריות:

1) ניצחון ללבן אם המלך השחור מאוים ואין מהלך מנטרל את האיום.

2) ניצחון לשחור אם המלך הלבן מאוים ואין מהלך מנטרל את האיום.

3) תיקו אם:

א) תורו של שחור לשחק אך אין לו אף מהלך חוקי והמלך שלו אינו מוים,

ב) תורו של לבן לשחק אך אין לו אף מהלך חוקי והמלך שלו אינו מוים,

ג) מצב הלוח אינו מאפשר ניצחון של אחד השחקנים.

הגדרה 23: מצב משחק שחמט

- נסמן ב- X את אוסף כל מבצי הלוח האפשריים בשחמט.
- מצב הלוח $x \in X$ כולל את זהות הכלים שעל הלוח ואת מיקומם.
- **מצב המשחק** במשחק השחמט הוא סדרה סופית $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ של מצבי לוח ב- X המקיימת:

1) x_0 הוא מצב הלוח ההתחלתי

2) לכל $k < n$ זוגי, ניתן להגיע מ- x_k ל- x_{k+1} באמצעות מהלך אחד של לבן.

3) לכל $k < n$ אי-זוגי, ניתן להגיע מ- x_k ל- x_{k+1} באמצעות מהלך אחד של שחור.

- נסמן ב- H את קבוצת כל מצבי המשחק.

הגדרה 24: אסטרטגיה מנצחת

- אסטרטגיה s_W היא **אסטרטגיה מנצחת** עבור לבן אם לכל אסטרטגיה s_B של שחור התחרות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות (s_W, s_B) מסתיימת בניצחון לבן.
- אסטרטגיה s_B היא **אסטרטגיה מנצחת** עבור שחור אם לכל אסטרטגיה s_W של לבן התחרות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות (s_W, s_B) מסתיימת בניצחון שחור.

הגדרה 25: אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו

- אסטרטגיה s_W של לבן **מבטיחה לפחות תיקו** אם לכל אסטרטגיה s_B של שחור התחות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות (s_W, s_B) מסתיימת בניצחון לבן או בתיקו.
- אסטרטגיה s_B של שחור **מבטיחה לפחות תיקו** אם לכל אסטרטגיה s_W של לבן התחות הנקבעת על

ידי זוג האסטרטגיות (s_W, s_B) מסתיימת בניצחון שחור או בתיקו.

הגדרה 26: תת משחק

- לכל קדקוד $x \in H$ ניתן להסתכל בתת-עץ המתחיל ב- x.
- זהו עץ ששורשו x והאו מתקבל מעץ המשחק על ידי סילוק כל הקדקודים שאינן צאצאים של x.
- תת-עץ זה מתאים למשחק שנסמן ב- $\Gamma(x)$ ונקרא **תת-משחק** המתחיל ב- x.
- נסמן ב- n_x את מספר הקדקודים ב- $\Gamma(x)$.
- המשחק $\Gamma(x_0)$ הוא המשחק המתחיל במצב ההתחלתי של המשחק, ולכן זהו משחק השחמט הרגיל.
- נניח ש- y בן של x, אזי $\Gamma(y)$ הוא תת-עץ של $\Gamma(x)$ שאינו מכיל את x ולכן $n_x > n_y$.
- כמו כן, $n_x = 1$ אם ורק אם x הוא מצב סיום של המשחק, ולכן השחקנים אינם מבצעים מסעים בתת-משחק זה.
- האסטרטגיה שאותה לוקח שחקן במקרה כזה, שבו הוא אינו מבצע אף מסע, נסמן ב- s_0.
- נסמן את אוסף כל המשחקים המוגדרים על ידי התתי־עצים של משחק השחמט ב־

$$F = \left\{\Gamma(x) \middle| x \in H\right\} \tag{1}$$

משפט 21: כלל השלילה של מכמתים

- אם לא נכון ש "לכל $x \in X$ מתקיים המאורע A" אזי בהכרח קיים $x \in X$ שעבורו המאורע A אינו מתקיים:

$$\neg\left(\forall x(A)\right) = \exists x\left(\neg A\right) \quad . \tag{2}$$

- אם לא נכון ש"קיים $x \in X$ שעבורו מתקיים המאורע A" אזי בהכרח לכל $x \in X$ המאורע A אינו מתקיים.

$$\neg\left(\exists x(A)\right) = \forall x\left(\neg A\right) \quad . \tag{3}$$

משפט 22: משפט פון נוימן לשחמט

במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות.

(1) ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

(2) לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

(3) לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

משפט 23: משפט פון נוימן לשחמט

במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהקביעות הבאות.

(1) ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

(2) לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

(3) לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

משפט 24: משפט פון נוימן לשחמט (ניסוח חילופי)

בכל משחק במשפחה F מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות

(1) ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

(2) לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

(3) לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

5 פרק 5: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

הגדרה 27: ערך המקסמין במשחק שני שחקנים

יהי $G = (N = \{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_I, u_{II}\})$ משחק שני שחקנים.

- הערך המקסמין של שחקן I מסומן $\underline{v}_1$ ומוגדר:
$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{t_2 \in S_{II}} u_1(s_1, t_2) \ .$$
- הערך המקסמין של שחקן II מסומן $\underline{v}_2$ ומוגדר:
$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{t_1 \in S_I} u_2(t_1, s_2) \ .$$

הגדרה 28: ערך המקסמין במשחק n שחקנים

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק n שחקנים. הערך המקסמין של שחקן i מסומן $\underline{v}_i$ ומוגדר:
$$\underline{v}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \ .$$

משפט 25:

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק n שחקנים. אם s_i^* אסטרטגיה של שחקן i שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות $t_i \in S_i$ אז s_i^* היא אסטרטגיית מקסמין של שחקן i.

משפט 26:

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק n שחקנים. אם s^* היא שיווי משקל אז לכל שחקן $i \in N$ מתקיים:
$$u_i\left(s^*\right) \geq \underline{v}_i \ .$$

הגדרה 29: משחק שני שחקנים סכום אפס

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים. אומרים כי G **משחק סכום אפס** אם לכל ווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) מתקיים:

$$\forall s_1 \in S_I : \quad \forall s_2 \in S_{II} : \qquad u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

הגדרה 30: פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. לכל $s_1 \in S_I$ ולכל $s_2 \in S_{II}$, הפונקצית ההתשלום של המשחק מסומנת $U(s_1, s_2)$ ומוגדרת:

$$U(s_1, s_2) \triangleq u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2) \ .$$

הגדרה 31: מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. יהי U פונקצית התשלום של המשחק.

אם

$$S_I = \left\{s_I^1, s_I^2, \ldots, s_I^m\right\}$$

ואם

$$S_{II} = \left\{s_{II}^1, s_{II}^2, \ldots, s_{II}^n\right\}$$

אז המטריצת המשחק היא מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ מוגדרת:

$$\forall i \ (1 \leq i \leq m) : \quad \forall j \ (1 \leq j \leq n) : \qquad A_{ij} = U\left(s_I^i, s_{II}^j\right) \ .$$

משפט 27: המקסמין והמינמקס של משחק

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.

- ערך המקסמין של שחקן I נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$

  זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום המקסמימלי שהוא יכול להבטיח לעצמו.

- הערך המקסמין של שחקן II הוא

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{v}}_2 &= \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1, s_2) \\
&= \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} \left[-U(s_1, s_2)\right] \\
&= \max_{s_2 \in S_{II}} \left[-\max_{s_1 \in S_I} U(s_1, s_2)\right] \\
&= -\min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} U(s_1, s_2) \ .
\end{aligned}$$

- **הערך המקסמין של המשחק** מסומן $\underline{\mathrm{v}}$ ומוגדר:

$$\underline{\mathrm{v}} \triangleq \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$

- **הערך המינמקס של המשחק** מסומן $\overline{\mathrm{v}}$ ומוגדר:

$$\overline{\mathrm{v}} \triangleq \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} U(s_1, s_2)$$

- המשמעות:
  - שחקן I יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
  - שחקן II יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.
- * אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
  * אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

הגדרה 32: ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. אם $\underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$ אז אומרים כי הכמות

$$\mathrm{v} \triangleq \underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$$

הוא **הערך של המשחק.**

במקרה זה הווקטור אסטרטגיות שמבטיח הערך המשחק נקרא **ווקטור אסטרטגיות אופטימלי.**

משפט 28: משפט המקסמין

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם $\underline{\mathrm{v}}$ הערך המקסמין ואם $\bar{\mathrm{v}}$ הערך המינמקס אז

$$\underline{\mathrm{v}} \leq \bar{\mathrm{v}} .$$

משפט 29:

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם קיים ערך v של המשחק G, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות, אז $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ גם שיווי משקל של G וגם $u(s^*) = (\mathrm{v}, -\mathrm{v})$.

משפט 30:

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ שיווי משקל של G אז יש למשחק יש ערך $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$, וגם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ אסטרטגיות אופטימליות.

הגדרה 33: נקודת אוכף

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
זוג אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) נקרא **נקודת אוכף** של הפונקציה $u : S_I \times S_{II} \to \mathbb{R}$ אם

$$\left(\forall s_1 \in S_I : \ u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*)\right) \quad \wedge \quad \left(\forall s_2 \in S_{II} : \ u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2)\right) .$$

במילים אחרות, $u(s_1^*, s_2^*)$ הוא המספר הגדול ביותר בעמודה s_2^* והקטן ביותר בשורה s_1^*.

אם אנחנו רושמים את $u(s_1, s_2)$ בהצגת מטריצה:

$$A_{ij} = u\left(s_I^i, s_{II}^j\right)$$

אז הזוג אסטרטגיות (s_{i^*}, s_{j^*}) הוא נקודת אוכף אם

$$\begin{aligned} \forall i: \quad A_{i^*j^*} &\geq A_{ij^*} \ , \\ \forall j: \quad A_{i^*j^*} &\leq A_{i^*j} \ . \end{aligned}$$

משפט 31: יחס בין נקודת אכף לבין וקטור אסטרטגיות

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
$u(s_1^*, s_2^*)$ היא נקודת אוכף אם ורק אם

- s_1^* היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן I,
- s_2^* היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן II.

במקרה זה $u(s_1^*, s_2^*)$ הוא הערך של המשחק.

דרך אחרת לנסח את המשפט היא:

$$\left.\begin{aligned} \forall i: \quad A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \\ \forall j: \quad A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \end{aligned}\right\} \implies \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = \mathrm{v}$$

6 פרק 6: אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 34: אסטרטגיות מעורבות

- יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
- **אסטרטגיה מעורבת** של שחקן i היא פונקצית הסתברות $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ של קבוצת האסטרטגיות S_i שלו.
- **קבוצת אסטרטגיות מעורבות** של שחקן i תסומן Σ_i ותוגדר:

$$\Sigma_i \triangleq \left\{\sigma_i : S_i \to [0,1] \quad : \quad \sum_{s_i\in S_i} \sigma_i(s_i) = 1\right\} \ .$$

הגדרה 35: סימפלקס

- לכל קבוצה סופית A, סימפלקס על הקבוצה A יסומן $\Delta(A)$ ויוגדר כל וקטורי ההסתברות על A באופן הבא:

$$\Delta(A) \triangleq \left\{p : A \to [0,1] \ : \ \sum_{a\in A} p(a) = 1\right\} \ .$$

- הקבוצה $\Delta(A)$ נמצאת במרחב $\mathbb{R}^{|A|}$.

- הממד שך הסימפלקס $\Delta(A)$ הוא
$$\dim\Delta(A) = |A| - 1$$
בגלל האילוץ $\sum_{a\in A} p(a) = 1$.

משפט 32:

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק n שחקנים. אם הקבוצת אסטרטגיות טהורות של שחקן i היא
$$S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{m_i}\right\} \ ,$$
כאשר המספר האסטרטגות הטהורות של שחקן i הוא
$$m_i = |S_i|$$
אז הקבוצת האסטרטגיות המעורבות של שחקן i היא:
$$\Sigma_i = \Delta\left(S_i\right)$$
כאשר $\Delta\left(S_i\right)$ היא הסימפלקס של S_i, וגם $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ היא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{m_i}$ וגם
$$\dim\left(\Sigma_i\right) = |\Sigma_i| - 1 = m_i - 1 \ .$$

הגדרה 36: ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות

- יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
- נסמן ב- $S \triangleq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ את קבוצת וקטורי האסטרטגיות הטהורות.
- **ההרחבה של G לאסטרטגיות מעורבות** הוא המשחק

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right) \tag{4}$$

שבו לכל $i \in N$ קבוצת האסטרטגיות של שחקן i היא $\Sigma_i = \Delta\left(S_i\right)$.

- במשחק Γ הפונקציית התשלומים לשחקן i היא הפונקציה $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$, המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ את התשלום

$$U_i\left(\sigma\right) = E_\sigma\left[u_i\left(\sigma\right)\right] = \sum_{(s_1,\ldots,s_n)\in S} u_i(s_1, \ldots, s_n)\sigma_1(s_1)\sigma_2(s_2)\ldots\sigma_n(s_n) \tag{5}$$

הגדרה 37: שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק N שחקנים באסטרטגיות טהורות
ויהי $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i\in N}, (U_i)_{i\in N}\right)$ ההחרבה שלו לאסטרטגיות מעורבות.
$\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*)$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים
$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}^*\right) \ . \tag{6}$$

משפט 33: עקרון האדישות

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

אם $\sigma_i^*(s_i) > 0$ וכן $\sigma_i^*(\hat{s}_i) > 0$ אזי

$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \tag{7}$$

משפט 34: נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי

יהי $G = (\{1,2\}, \{S_1, S_2\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים ריבועי
שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות.

יהי $x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_n^* \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו U_1^* ו- U_2^* התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$\begin{aligned} x^{*t} &= \frac{e^t B^{-1}}{\langle e, B^{-1}e\rangle}\ , \qquad & U_1^* &= \langle x^*, Ay^*\rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle} \\ y^* &= \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e\rangle}\ , \qquad & U_2^* &= \langle x^*, By^*\rangle = \frac{1}{\langle e, B^{-1}e\rangle}\ . \end{aligned}$$

כאשר $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

משפט 35: נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש n אסטרטגיות טהורות. אם A המטריצת המשחק אז הווקטורי אסטרטגיות שיווי משקל x^* ו- y^* של שחקן 1 (שחקן השורות) ושחקן 2 (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$x^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e\rangle}\ , \qquad y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e\rangle}\ , \qquad U = \langle x^*, Ay^*\rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e\rangle}\ .$$

משפט 36:

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ו- Γ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות σ^* הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק Γ אם ורק אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \quad . \tag{8}$$

משפט 37:

יהי σ^* שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה s_i ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן i.

1. אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i(\sigma^*)$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.
2. אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.
3. אם $\sigma^*_i(s_i) > 0$ ו- $\sigma^*_i(\hat{s}_i) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$.
4. אם s_i נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.