# פרק 5: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

## 5.1 ביטחון: מושג המקסמין

מושג השיווי המשקל, על כל יתרונותיו, אינו מתאר תמיד את ההתנהגות הצפויה של שחקנים רציונליים, אפילו במקרים ששיווי המשקל קיים והוא יחיד. נתבונן למשל במשחק המתואר למטה. אליס (שחקן $I$) ובוב (שחקן $II$) משחקים את המשחק הבא:

| אליס $I$ \ בוב $II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2,1$ | $2,-20$ |
| $M$ | $3,0$ | $-10,1$ |
| $B$ | $-100,2$ | $3,3$ |

נסמן את כל התשובות הטובות ביותר של השחקנים:

| אליס $I$ \ בוב $II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2,\underline{1}$ | $2,-20$ |
| $M$ | $\underline{3},0$ | $-10,\underline{1}$ |
| $B$ | $-100,2$ | $\underline{3},\underline{3}$ |

- מכאן השיווי משקל היחיד במשחק זה הוא $s^* = (B,R)$ עם תשלום $(3,3)$.

  אך בחירות השחקנים של אסטרטגיות אלו מסוכנות!

- אליס עשויה להסס מאוד לבחור $B$, מחשש שמא בוב (שחקן $II$) יבחר $L$ (אם משום שאינו רציונלי, אם בטעות, או מכל סיבה אחרת).

- כיוון שהתשלום של $(B,L)$ קטסטרופלי בשביל אליס, ייתכן שהיא תשחק לפי אסטרטגיה $T$ המבטיחה לה תשלום $2$ (במקום $3$ בשיווי משקל ) אבל כך אין סיכון להפסיד $100$.

- אם בוב (שחקן $II$) ער להיסוס זה וחושב שיש סיכוי שאליס תבחר $T$ הוא יחשוש מלבחור את אסטרטגיה שיווי המשקל $R$ ולהסתכן להפסיד $20$.

- לאור זה ייתכן מאוד שבוב ישחק לפי אסטרטגיה $L$.

- למעשה, אסטרטגיה $T$ של אליס מבטיחה לה התשלום הטובה ביותר שניתן לקבל מבלי "לסמוך" על הרציונליות של שחקן $II$, ובהנחות הפסימיות ביותר על ההתנהגותו של בוב (שחקן $II$.)

באופן כללי, נתון משחק שני שחקנים $G = (N = \{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_I, u_{II}\})$.
נניח כי שחקן $I$ משחק אסטרטגיה $s_1 \in S_I$. התשלום הנמוך ביותר שהוא עלול לקבל הוא

$$\min_{t_2 \in S_{II}} u_1(s_1, t_2) \ .$$

שחקן $1$ יכול לבחור באסטרטגיה $s_1$ הממקסמת ערך זה. כלומר, בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא יכול להבטיח לעצמו

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{t_2 \in S_{II}} u_1(s_1, t_2) \ .$$

הגודל $\underline{\mathrm{v}}_1$ נקרא **ערך המקסמין** של שחקן $1$ או **רמת הביטחון** של שחקן $1$.
אסטרטגיה $s_1$ המבטיחה ערך זה נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.

באותה מידה, התשלום המקסימלי של שחקן 2 יכול להבטיח לעצמו בלי לסמוך על הרציונליות של שאר השחקנים הוא הערך המקסמין של שחקן 2, מוגדר:

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{t_1 \in S_I} u_2(t_1, s_2) \ .$$

**הגדרה 5.1 ערך המקסמין במשחק שני שחקנים**

יהי $G = (N = \{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_I, u_{II}\})$ משחק שני שחקנים.

- הערך המקסמין של שחקן $I$ מסומן $\underline{v}_1$ ומוגדר:

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{t_2 \in S_{II}} u_1(s_1, t_2) \ .$$

- הערך המקסמין של שחקן $II$ מסומן $\underline{v}_2$ ומוגדר:

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{t_1 \in S_I} u_2(t_1, s_2) \ .$$

**הגדרה 5.2 ערך המקסמין במשחק $n$ שחקנים**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. הערך המקסמין של שחקן $i$ מסומן $\underline{v}_i$ ומוגדר:

$$\underline{v}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \ .$$

**דוגמה 5.1 (ערך המקסמין)**

מצאו את הערך המקסמין של כל השחקנים במשחק הבא:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2, 1$ | $2, -20$ |
| $M$ | $3, 0$ | $-10, 1$ |
| $B$ | $-100, 2$ | $3, 3$ |

**פתרון:**

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $2, 1$ | $2, -20$ | $2$ |
| $M$ | $3, 0$ | $-10, 1$ | $-10$ |
| $B$ | $-100, 2$ | $3, 3$ | $-100$ |

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2) = 2 \ .$$

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $2,1$ | $2,-20$ |
| $M$ | $3,0$ | $-10,1$ |
| $B$ | $-100,2$ | $3,3$ |
| $\min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1,s_2)$ | $0$ | $-20$ |

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1,s_2) = 0 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן-$I$ הוא $2$, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא $T$.

ערך המקסמין של שחקן-$II$ הוא $0$, ואסטרטגית המקסמין המבטיחה תשלום זה היא $L$.

נהוג לרשום את התשלומים המינימלים בטבלה אחת:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1,s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $2,1$ | $2,-20$ | $2$ |
| $M$ | $3,0$ | $-10,1$ | $-10$ |
| $B$ | $-100,2$ | $3,3$ | $-100$ |
| $\min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1,s_2)$ | $0$ | $-20$ | $\underline{v}_1 = 2$ / $\underline{v}_2 = 0$ |

בתרשים זה, מימין בכל שורה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן $I$ אם היא בוחרת באסטרטגיה המתאימה לשורה זה. ומתחת לכל עמודה מופיע התשלום הנמוך ביותר לשחקן $II$, אם הוא בוחר באסטרטגיה המתאימה לעמודה זו. בפינה הימינית תחתונה של התרשים, באדום מופיעים המקסמין של השחקנים.

שימו לב: אם שני השחקנים בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם, אז הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא $(T,L)$ והתשלומים הם $(2,1)$.
שחקן $2$ מקבל תשלום $1$, אשר גבוהה יותר מהמקסמין שלו ($\underline{v}_2 = 1$).

■

## דוגמה 5.2 (ערך המקסמין)

נתון משחק עם שני שחקנים בצורה אסטרטגית כמתואר בטבלה.

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $3,1$ | $0,4$ |
| $B$ | $2,3$ | $1,1$ |

**א)** מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן $I$ והרמת הביטחון שלו.

**ב)** מצאו אסטרטגיה מקסמין של שחקן $II$ והרמת הביטחון שלו.

**ג)** מהם התשלומים לשני השחקנים אם שניהם בוחרים באסטרטגיות המקסמין שלהם.

**פתרון:**

**א)**

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3,1$ | $0,4$ | $0$ |
| $B$ | $2,3$ | $1,1$ | $1$ |

$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן $1$ הוא $1$ ואסטרטגית המקסמין שלו היא $B$.

**ב)**

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $3,1$ | $0,4$ |
| $B$ | $2,3$ | $1,1$ |
| $\min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1, s_2)$ | $1$ | $1$ |

$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} u_1(s_1, s_2) = 1 \ .$$

ערך המקסמין של שחקן $2$ הוא $1$. גם $L$ וגם $R$ הן אסטרטגיות מקסמין.

**ג)**

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3,1$ | $0,4$ | $0$ |
| $B$ | $2,3$ | $1,1$ | $1$ |
| $\min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1, s_2)$ | $1$ | $1$ | $\underline{v}_1 = 1$ / $\underline{v}_2 = 1$ |

לכן כאשר שחקן $1$ בוחר באסטרטגיה המקסמין שלו, $B$, וכאשר שחקן $2$ בוחר באסטרטגיה המסמין שלו ($L$ או $R$) התשלום עשוי להיות $u(B, L) = (2, 3)$ או $u(B, R) = (1, 1)$. או $(1, 1)$ עבור $(B, R)$, בהתאם לאסטרטגית המקסמין שיבחר שחקן $II$.

■

# 5.2 משפטים: היחס בין שיווי משקל ואסטרטגית מקסמין

**משפט 5.1**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. אם $s_i^*$ אסטרטגיה של שחקן $i$ שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות $t_i \in S_i$ אז $s_i^*$ היא אסטרטגיית מקסמין של שחקן $i$.

**הוכחה:**

- תהי $s_i^*$ אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן $i$.
- נגדיר קבוצת אסטרטגיות ספציפית של שאר השחקנים, $t_{-i} \in S_{-i}$, להיות הקבוצת האסטרטגיות של שאר השחקנים כך שהתשלום לשחקן $i$ כאשר הוא משחק לפי $s_i^*$ היא מינימלית:

$$u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \quad . \tag{*1}$$

- מכיוון ש- $s_i^*$ שולטת על כל האסטרטגיות של שחקן $i$ אז לכל $s_i \in S_i$:

$$u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \quad , \tag{*2}$$

- לפיכך, ממשוואות (*1) ו- (*2), לכל $s_i \in S_i$ מקתיים:

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \quad .$$

- האי-שויון הזה ניתן לרשום בצורה השקולה הבאה:

$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \underline{\mathrm{v}}_i \quad .$$

- מכאן אפשר להסיק כי $s_i^*$ היא אסטרטגיה מקסמין של שחקן $i$.

■

**משפט 5.2**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. אם $s^*$ היא שיווי משקל אז לכל שחקן $i \in N$ מתקיים:

$$u_i\left(s^*\right) \geq \underline{\mathrm{v}}_i \quad .$$

**הוכחה:**

- לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ מתקיים:

$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \quad .$$

- מצד שני על פי ההגדרה של שיווי משקל: $u_i\left(s^*\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$.
- לכן:

$$u_i\left(s^*\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \underline{\mathrm{v}}_i \quad .$$

■

## 5.3 משחק שני שחקנים סכום אפס

**הגדרה 5.3 משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים. אומרים כי $G$ **משחק סכום אפס** אם לכל ווקטור אסטרטגיות $(s_1, s_2)$ מתקיים:

$$\forall s_1 \in S_I : \quad \forall s_2 \in S_{II} : \qquad u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

במילים אחרות, משחק שני שחקנים סכום אפס הוא מערכת סגורה מבחינת התשלומים: כל ששחקן אחד מרוויח השחקן השני מפסיד.
ברור אם כן שבמשחק כזה האינטרטסטים של שני השחקנים מנוגדים לחלוטים.

**דוגמה 5.3 (משחק שני שחקנים סכום אפס)**

נתון משחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

| $I \backslash II$ | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3, -3$ | $-5, 5$ | $-2, 2$ |
| $M$ | $1, -1$ | $4, -4$ | $1, -1$ |
| $B$ | $6, -6$ | $-3, 3$ | $-5, 5$ |

מצאו את האסטרטגיה מקסמין של כל שחקן.

**פתרון:**

| $1 \backslash 2$ | $L$ | $C$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | $3, -3$ | $-5, 5$ | $-2, 2$ | $-5$ |
| $M$ | $1, -1$ | $4, -4$ | $1, -1$ | $1$ |
| $B$ | $6, -6$ | $-3, 3$ | $-5, 5$ | $-5$ |
| $\min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1, s_2)$ | $-6$ | $-4$ | $-1$ | $\underline{v}_1 = 1$ / $\underline{v}_2 = -1$ |

אסטרטגיות המקסמין: $s^* = (M, R)$. ■

**הגדרה 5.4 פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. לכל $s_1 \in S_I$ ולכל $s_2 \in S_{II}$, הפונקצית ההתשלום של המשחק מסומנת $U(s_1, s_2)$ ומוגדרת:

$$U(s_1, s_2) \triangleq u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2) \ .$$

**דוגמה 5.4 (המשך של דוגמה 5.3)**

הטבלה למטה מראה את פונקצית התשלום של המשחק סכום אפס בדוגמה הקודמת, לכל ווקטור אסורוגיות של המשחק.

| $I \backslash II$ | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3$ | $-5$ | $-2$ |
| $M$ | $1$ | $4$ | $1$ |
| $B$ | $6$ | $-3$ | $-5$ |

למשל:

$$U(M,L) = 1 \ .$$

**הגדרה 5.5 מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. יהי $U$ פונקצית התשלום של המשחק.

אם

$$S_I = \left\{s_I^1, s_I^2, \ldots, s_I^m\right\}$$

ואם

$$S_{II} = \left\{s_{II}^1, s_{II}^2, \ldots, s_{II}^n\right\}$$

אז המטריצת המשחק היא מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מוגדרת:

$$\forall i \ (1 \le i \le m): \quad \forall j \ (1 \le j \le n): \qquad A_{ij} = U\left(s_I^i, s_{II}^j\right) \ .$$

**דוגמה 5.5 (המשך של דוגמה 5.3)**

מטריצת המשחק של המשחק בדוגמה הקודמת הינה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \ .$$

**משפט 5.3 המקסמין והמינמקס של משחק**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.

- ערך המקסמין של שחקן $I$ נתון על ידי

$$\underline{\mathrm{v}}_1 = \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$

זוהי רמת הביטחון של שחקן $1$ במשחק: התשלום המקסמימלי שהוא יכול להבטיח לעצמו.

- הערך המקסמין של שחקן $II$ הוא

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{v}}_2 &= \max_{s_2\in S_{II}} \min_{s_1\in S_I} u_2(s_1, s_2) \\
&= \max_{s_2\in S_{II}} \min_{s_1\in S_I} [-U(s_1, s_2)] \\
&= \max_{s_2\in S_{II}} [-\max_{s_1\in S_I} U(s_1, s_2)] \\
&= -\min_{s_2\in S_{II}} \max_{s_1\in S_I} U(s_1, s_2) \ .
\end{aligned}$$

- **הערך המקסמין של המשחק** מסומן $\underline{\mathrm{v}}$ ומוגדר:

$$\underline{\mathrm{v}} \triangleq \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$

- **הערך המינמקס של המשחק** מסומן $\bar{\mathrm{v}}$ ומוגדר:

$$\bar{\mathrm{v}} \triangleq \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} U(s_1, s_2)$$

- המשמעות:
  - שחקן $I$ יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{\mathrm{v}}$.
  - שחקן $II$ יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{\mathrm{v}}$.
- * אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
  * אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{\mathrm{v}}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

**דוגמה 5.6 (המקסמין ומינמקס של משחק שני שחקנים סכום אפס)**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס בעל הפונקצית התשלום הבאה:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $3, -3$ | $-2, 2$ |
| $B$ | $-1, 1$ | $5, -5$ |

מצאו את המקסמין, המינמקס האסטרטגיה מקסמין והאסטרטגיה מינמקס של המשחק.

**פתרון:**

הפונקצית התשלום של המשחק היא:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $3$ | $-2$ |
| $B$ | $-1$ | $5$ |

נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} U$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3$ | $-2$ | $-2$ |
| $B$ | $-1$ | $5$ | $-1$ |
| $\max_{s_1 \in S_I} U$ | $3$ | $5$ | $\underline{\mathrm{v}} = -1$ / $\bar{\mathrm{v}} = 3$ |

$$\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} U = -1 \ ,$$

$$\bar{\mathrm{v}} = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} U = 3 \ .$$

האסטרטגיה המקסמין של שחקן 1 היא $B$.
האסטרטגיה המינמקס של שחקן 2 היא $L$.

■

### דוגמה 5.7 (המקסמין ומינמקס של משחק שני שחקנים סכום אפס)

מצאו את ערך המקסמין, ערך המינמקס, אסטרטגיה מקסמין ואסטרטגיה מינמקס של המשחק סכום אפס הבא:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ |
|---|---|---|
| $T$ | $-2$ | $5$ |
| $B$ | $3$ | $0$ |

**פתרון:**

הפונקצית התשלום כבר נתון בשאלה. נחשב את המקסמין והמינמקס על פי הטבלא של הפונקצית תשלום:

| $I \backslash II$ | $L$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $-2$ | $5$ | $-2$ |
| $B$ | $3$ | $0$ | $0$ |
| $\max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2)$ | $3$ | $5$ | $\underline{\mathrm{v}} = 0$ / $\bar{\mathrm{v}} = 5$ |

ערך המקסמין של המשחק הוא . $\underline{\mathrm{v}} = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1, s_2) = 0$

ערך המינמקס של המשחק הוא . $\bar{\mathrm{v}} = \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2) = 3$

אסטרטגיה המקסמין היא: $B$.

אסטרטגיה המינמקס היא: $L$.

משמעות:

שחקן $1$ אינו יכול להבטיח יותר מ- $0$ ואסטרטגיה המקסמין היא $B$.

שחקן $2$ אינו יכול להבטיח (שישלם) פחות מ- $3$ ואסטרטגיה המינמקס היא $L$. ■

**הגדרה 5.6 ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס. אם $\underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$ אז אומרים כי הכמות

$$\mathrm{v} \triangleq \underline{\mathrm{v}} = \bar{\mathrm{v}}$$

הוא **הערך של המשחק.**

במקרה זה הווקטור אסטרטגיות שמבטיח הערך המשחק נקרא **ווקטור אסטרטגיות אופטימלי.**

### דוגמה 5.8 (משחק סכום אפס אשר יש לו ערך)

נתון המשחק שני שחקנים סכום אפס הבא.

| $I \backslash II$ | $L$ | $C$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $3$ | $-5$ | $-2$ |
| $M$ | $1$ | $4$ | $1$ |
| $B$ | $6$ | $-3$ | $-5$ |

נחשב את המקסמין והמינמקס שלו:

| $I \backslash II$ | $L$ | $C$ | $R$ | $\min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1, s_2)$ |
|---|---|---|---|---|
| $T$ | 3 | $-5$ | $-2$ | $-5$ |
| $M$ | 1 | 4 | 1 | 1 |
| $B$ | 6 | $-3$ | $-5$ | $-5$ |
| $\max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2)$ | 6 | 4 | 1 | $\underline{v} = 1$ / $\bar{v} = 1$ |

$$\bar{v} = 1 = \underline{v}$$

לכן הערך המשחק הוא $v = 1$.

הוקטור אסטרטגיות האופטימלי הוא : $s^* = (s_1^*, s_2^*) = (M, R)$.

שחקן 1 יכול להבטיח שיקבל לפחות 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית $M$.

שחקן 2 יכול להבטיח שישלם לכל היותר 1 באמצעות האסטרטגיה האופימלית $R$.

נשים לב $s = (M, R)$ גם שיווי משקל נאש של המשחק.

# 5.4 משפט המקסמין

**משפט 5.4 משפט המקסמין**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם $\underline{v}$ הערך המקסמין ואם $\bar{v}$ הערך המינמקס אז

$$\underline{v} \leq \bar{v} .$$

**הוכחה:**

- תהי $A$ המטריצה של המשחק. אז

$$\underline{v} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \bar{v} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$

- לכל $i$, מתקיים: $\min_j A_{ij} \leq A_{ij}$,

- לכל $j$ מתקיים: $\max_i A_{ij} \geq A_{ij}$.

- לפיכך:

$$\min_j A_{ij} \leq A_{ij} \leq \max_i A_{ij} \ .$$

- לכן

$$\forall i: \quad \forall j: \qquad \min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij} \tag{*}$$

- המשוואה (*) מתקיימת לכל $i$. בפרט היא מתקיימת גם עבור הערך של $i$ הספציפי שעבורו האגף השמאל הוא מקסימלי. לכן:

$$\forall j: \qquad \max_i \min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij} \tag{\#}$$

- המשוואה (#) מתקיימת לכל $j$. בפרט היא מתקיימת גם עבור הערך של $j$ הספציפי שעבורו האגף השמאל הוא מינימלי. לכן:

$$\max_i \min_j A_{ij} \le \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל.

■

# 5.5 משפט השקילות בין שיווי משקל לבין אסטרטגיה אופטימלית

**משפט 5.5**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם קיים ערך v של המשחק $G$, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות, אז $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ גם שיווי משקל של $G$ וגם $u(s^*) = (\mathrm{v}, -\mathrm{v})$.

**הוכחה:**
אם $s_1^*$ אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $I$ אז:

$$\min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1^*, s_2) = \mathrm{v} \ ,$$

ולכן לכל $s_2 \in S_{II}$ מתקיים:

$$u(s_1^*, s_2) \ge \mathrm{v} \ .$$

באותה מידה אם $s_2^*$ אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $II$ אז:

$$\max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2^*) = \mathrm{v} \ ,$$

ולכן לכל $s_1 \in S_I$ מתקיים:

$$u(s_1, s_2^*) \le \mathrm{v} \ .$$

לסיכום, אם $s_1^*, s_2^*$ אסטרטגיות אופטימליות אז

$$\forall s_2 \in S_{II}: \qquad u(s_1^*, s_2) \ge \mathrm{v} \ , \tag{*1}$$

$$\forall s_1 \in S_I: \qquad u(s_1, s_2^*) \le \mathrm{v} \ . \tag{*2}$$

אם נציב $s_2 = s_2^*$ במשוואה (*1) נקבל: $u(s_1^*, s_2^*) \ge \mathrm{v}$.
אם נציב $s_1 = s_1^*$ במשוואה (*2) נקבל: $u(s_1^*, s_2^*) \le \mathrm{v}$.

לכן

$$[u(s_1^*, s_2^*) \geq \mathrm{v}] \quad \wedge \quad [u(s_1^*, s_2^*) \leq \mathrm{v}] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*) \ .$$

נציב $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$ במשוואות (1*) ו- (2*):

$$\begin{aligned} & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_2 \in S_{II}: \quad -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2(s_1^*, s_2^*) \leq u_2(s_1^*, s_2) \ . \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \ . \end{aligned}$$

לסיכום מצאנו כי:

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1, s_2^*) \ , \\ & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2(s_1^*, s_2^*) \geq u_1(s_1^*, s_2) \ . \end{aligned}$$

לכן $(s_1^*, s_2^*)$ הוא שיווי משקל עם התשלומים $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$. ■

**משפט 5.6**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
אם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ שיווי משקל של $G$ אז יש למשחק יש ערך $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$, וגם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ אסטרטגיות אופטימליות.

**הוכחה:** אם $(s_1^*, s_2^*)$ שיווי משקל אז לאף שחקן אין סטייה כדאית:

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1(s_1, s_2^*) \leq u_1(s_1^*, s_2^*) \\ & \Rightarrow \quad u(s_1, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2^*) \ , \end{aligned} \tag{\#1}$$

$$\begin{aligned} & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2(s_1^*, s_2) \leq u_2(s_1^*, s_2^*) \\ & \Rightarrow \quad -u_2(s_1^*, s_2) \geq -u_2(s_1^*, s_2^*) \\ & \Rightarrow \quad u(s_1^*, s_2) \geq u(s_1^*, s_2^*) \ . \end{aligned} \tag{\#2}$$

נסמן $\mathrm{v} = u(s_1^*, s_2^*)$ ונוכיח כי $\mathrm{v}$ אמנם הוא הערך של המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$\forall s_2 \in S_{II}: \quad u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1^*, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1, s_2) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} \geq \mathrm{v} \ .$$

ממשוואה (#1) נקבל

$$\forall s_1 \in S_I: \quad u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2^*) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

מכיוון ש- $\underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}}$ מתקיים תמיד אזי

$$\mathrm{v} \leq \underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

ולפיכך בהכרח

$$\underline{\mathrm{v}} = \mathrm{v} = \overline{\mathrm{v}} \ .$$

■

## הגדרה 5.7 נקודת אוכף

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
זוג אסטרטגיות $(s_1^*, s_2^*)$ נקרא **נקודת אוכף** של הפונקציה $u : S_I \times S_{II} \to \mathbb{R}$ אם

$$\left(\forall s_1 \in S_I : \ u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*)\right) \quad \wedge \quad \left(\forall s_2 \in S_{II} : \ u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2)\right) .$$

במילים אחרות, $u(s_1^*, s_2^*)$ הוא המספר הגדול ביותר בעמודה $s_2^*$ והקטן ביותר בשורה $s_1^*$.

אם אנחנו רושמים את $u(s_1, s_2)$ בהצגת מטריצה:

$$A_{ij} = u\left(s_I^i, s_{II}^j\right)$$

אז הזוג אסטרטגיות $(s_{i^*}, s_{j^*})$ הוא נקודת אוכף אם

$$\begin{aligned} \forall i : \quad A_{i^*j^*} &\geq A_{ij^*} , \\ \forall j : \quad A_{i^*j^*} &\leq A_{i^*j} . \end{aligned}$$

## משפט 5.7 יחס בין נקודת אכף לבין וקטור אסטרטגיות

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני משחקים סכום אפס.
$u(s_1^*, s_2^*)$ היא נקודת אוכף אם ורק אם

- $s_1^*$ היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $I$,
- $s_2^*$ היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $II$.

במקרה זה $u(s_1^*, s_2^*)$ הוא הערך של המשחק.

דרך אחרת לנסח את המשפט היא:

$$\left.\begin{aligned} \forall i : \quad A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \\ \forall j : \quad A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = \mathrm{v}$$

**הוכחה:** אם $G$ משחק שני שחקנים סכום אפס ו- $(s_1^*, s_2^*)$ נקודת אוכף אז:

$$\left(\forall s_1 \in S_I : \ u(s_1^*, s_2^*) \geq u(s_1, s_2^*)\right) \quad \wedge \quad \left(\forall s_2 \in S_{II} : \ u(s_1^*, s_2^*) \leq u(s_1^*, s_2)\right) .$$

התנאי הראשון מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) = \max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2^*) \geq \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} u(s_1, s_2) = \overline{\mathrm{v}} .$$

התנאי השני מתקיים אם ורק אם

$$u(s_1^*, s_2^*) = \min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1^*, s_2) \leq \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u(s_1, s_2) = \underline{\mathrm{v}} .$$

לפי משפט המקסמין 5.4: $\underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}}$. לכן

$$u(s_1^*, s_2^*) \ \leq \ \underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}} = u(s_1^*, s_2^*) \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v} .$$

■