חוברת תרגילים

אוטומטים ושפות פורמליות

תוכן העניינים

1	שפות	3
2	אוטומט סופי	5
3	אוטומט סופי לא דטרמיניסטי	7
4	שפות רגולריות	10
5	שפות חסרות הקשר	12
6	אוטומט מחסנית	15
7	ביטוי רגולרי לאוטומט סופי מזערי	16
8	פתרונות	17

דברי פתיחה

חוברת זו מרכזת תרגילים בנושאים הנלמדים בקורס. מבנה הפרקים בחוברת נבנה בהתאמה לסילבוס הקורס ולסדר ההוראה במהלך הסמסטר. עבודות הבית במהלך הסמסטר ייבחרו מתוך חוברת זו. **שימו לב:**

- לא כל התרגילים יוגשו כחלק מעבודת הבית.
- יתר התרגילים נועדו לתרגול עצמי ולהעמקת ההבנה.
- מומלץ לפתור תרגילים נוספים מעבר לנדרש.

בהצלחה,
צוות הקורס

פרק - 1 שפות

שאלה 1 נתונות השפות הבאות מעל הא"ב $\{0,1\}$:

$$L_1 = \{\varepsilon\} \ , \quad L_2 = \{110, 01\} \ , \quad L_3 = \emptyset \ , \quad L_4 = \{\varepsilon, 100\} \ , L_5 = \{00, 11\} \ .$$

כתבו את הגדרת השפה לשפות הבאות:

א) $L_1 L_2$

ב) $L_2 L_3$

ג) $L_4 - L_1$

ד) L_2^2

ה) L_5^R

ו) L_4^*

ז) $L_1 \cup L_2^R$

ח) $(L_2 \cup L_5)^2$

שאלה 2 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות לכל $n \in \mathbb{N}$:

1) $L_1^n L_2^n = (L_1 L_2)^n$

2) $L_1 L_1^* L_1 = L_1^* L_1^2 \cap L_1^2 \Sigma^*$

3) $(L_1^* L_2^*)^* = ((L_1 L_2) \cup (L_1 L_1) \cup L_2)^* \cup L_1^*$

4) $L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = \Sigma^* - (\overline{L_1} \cup (\overline{L_2} \cap \overline{L_3}))$

5) $L_1(L_2 \cup L_3) = (L_1 L_2) \cup (L_1 L_3)$

שאלה 3 מעל הא"ב $\{x, y, z\}$ השלימו את התיאור הפורמלי לכל אחת מהשפות הבאות:

- L_1: כמות ההופעות של x מתחלקת ב-2. כמות ההופעות של y מתחלקת ב-3. כמות ההופעות של z מתחלקת ב-5.
- L_2: כמות ההופעות של x הינה מספר ההופעות של y בחזקת 3. כמות ההופעות של z הינה לפחות ככמות ההופעות של x.
- L_3: הצירוף xyz מופיע בכל מילה לפחות פעמיים.
- L_4: כל מילה הינה פלינדרום.
- L_5: כל מילה מתחילה באות z. אורך כל מילה הינו אי זוגי.

שאלה 4 תנו דוגמאות לשפה L כך שמתקיים:

א) $L^* = L^+$:

ב) $L^* \neq L^+$

ג) $L = L^*$

ד) $L \neq L^*$

ה) L^* סופית.

שאלה 5 תנו דוגמא לשפות אינסופיות L_1, L_2 שמקיימות:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \quad \wedge \quad L_1 L_2 = L_2 L_1 \ .$$

נמקו את תשובתכם.

שאלה 6 תנו דוגמא לשפות אינסופיות L_1, L_2 שמקיימות:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \quad \wedge \quad L_1 L_2 = L_2 L_1 \ .$$

נמקו את תשובתכם.

שאלה 7 תנו דוגמה לקבוצה אינסופית A של שפות מעל הא"ב $\{0,1\}$ כך שמתקיים התנאים הבאים:

1) כל חיתוך של מספר סופי של שפות אינו ריק.

2) קיימת תת-קבוצה (אינסופית) של A כך שחיתוך השפות בה הוא ריק.

* חובה להוכיח שהדוגמה שנתתם מקיימת את 2 התנאים.

פרק - 2 אוטומט סופי

שאלה 8

א) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את שפת כל המילים מעל ה- א"ב $\{a, b\}$ שמתחילות ומסתיימות באותיות שונות.

ב) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את שפת כל המילים מעל ה- א"ב שיש בהם את הרצף aba ואין בהם את הרצף bab.

שאלה 9 עבור ה- DFAs הבאים

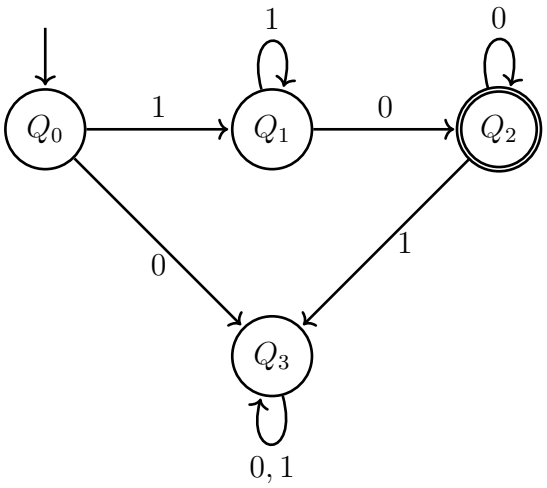
1) הגדירו את השפה המתקבלת באוטומט בצורה פורמלית $L = L(A)$

2) הגדירו את האוטומט A בצורה פורמלית (חמשת התכונות).

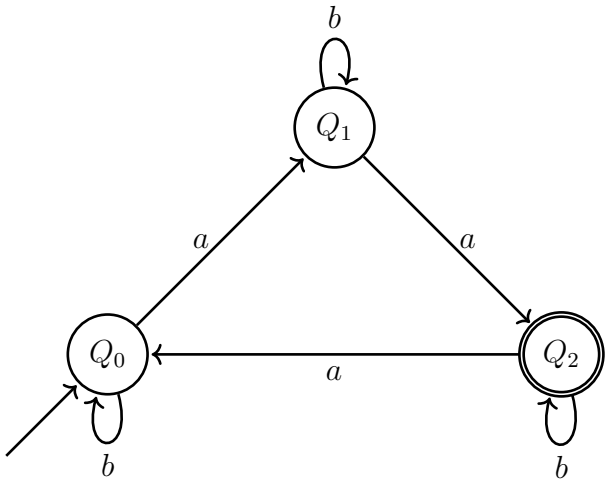
3) נמקו כיצד ניתן להפוך את האוטומטים ל- NFA.

4) כתבו ביטוי רגולרי r השקול לשפת האוטומט $L(A) = L(r)$.

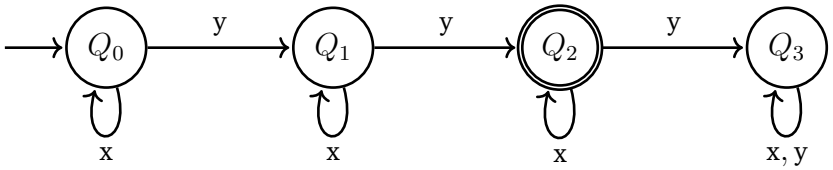
א)



ב)



ג)



שאלה 10 בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי מעל $\{a, b\}$ שמקבל את כל המילים שבהן:

א) מספר ה־ a גדול ממספר ה- b ב- 1 בדיוק.

ב) מופיע הרצף aba לפחות פעם אחת, ואחרי ההופעה הראשונה שלו אין יותר b.

ג) כל prefix של המילה מכיל לכל היותר שתי אותיות b.

ד) מספר האותיות הכולל מתחלק ב־ 4.

שאלה 11 עבור כל אחת מהשפות הבאות:

1) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שמקבל אותה.

2) צמצמו את האוטומט למספר מצבים מינימלי.

3) כתבו תיאור מילולי (פסאודוקוד) של המצבים (מה כל מצב "זוכר")

א) כל המילים שמספר ה־ a בהן מתחלק ב- 2 או מספר ה- b בהן מתחלק ב- 2.

ב) כל המילים שמספר ה־ a זוגי וגם מסתיימות ב- b.

ג) כל המילים שמתחילות ומסתיימות באותה אות.

ד) כל המילים שמתחילות ומסתיימות באותיות שונות.

פרק - 3 אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

שאלה 12 עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$, בנו אוטומט אי-דטרמיניסטי (NFA) המקבל את השפה.

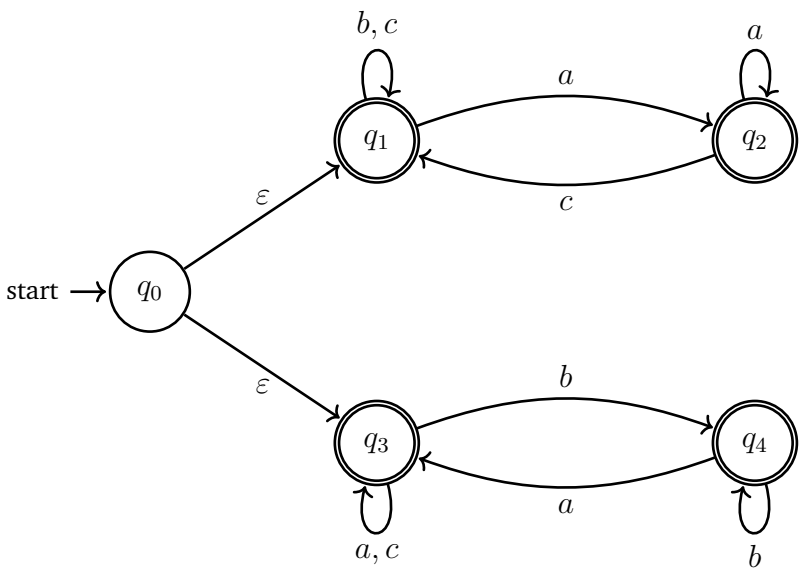
א)

$$L = \left\{a^n b^m c^k \;\middle|\; [(n+m) \bmod 3 = 2 \;\wedge\; k \bmod 3 = 1] \;\vee\; [(n+m) \bmod 3 = 1 \;\wedge\; k \bmod 3 = 2]\right\}$$

ב)

$$L = \left\{w \in \{a,b,c\}^* \;\middle|\; \#aba_w = 0 \;\wedge\; \#bac_w = 0\right\} \;.$$

שאלה 13 בהינתן האוטומט הסופי האי דטרמיניסטי הבא מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:



א) מצאו את השפה $L(A)$ של האוטמט.

ב) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי השקול.

שאלה 14

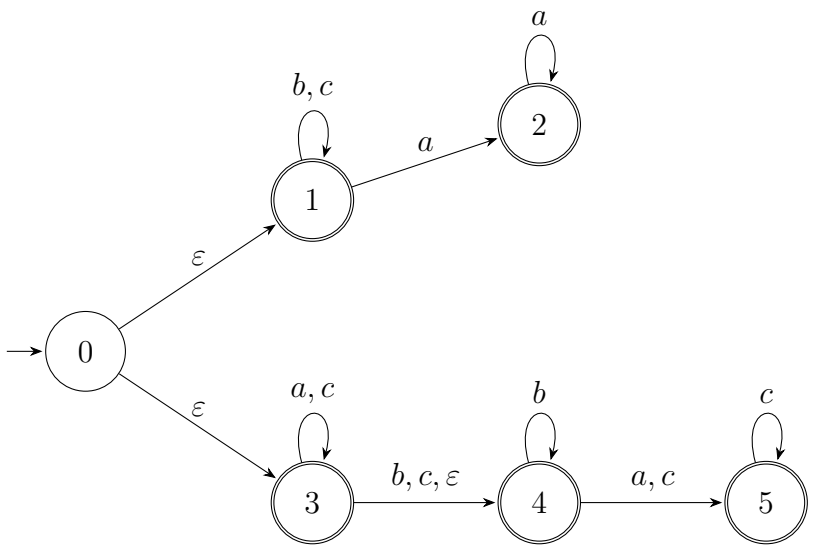
א) בנו NFA שמקבל את כל המילים שמכילות את התבנית $abaabaaba$ פעם אחת לפחות.

ב) בנו NFA שמקבל את כל המילים שמסתיימות באחת מהסיומות $\{ab, ba, bbb\}$.

שאלה 15 בנו אוטומט אי-דטרמיניסטי (NFA) המקבל את השפה הבאה:

$$L = \left\{a^n b^m c^k \;\middle|\; [(n+m) \bmod 3 = 2 \;\wedge\; k \bmod 3 = 1] \;\vee\; [(n+m) \bmod 3 = 1 \;\wedge\; k \bmod 2 = 2]\right\}$$

שאלה 16 נתונה האוטומט לא דטרמיניסטי המתואר בתרשים למטה:



א) הגדירו את השפה $L(A)$ בצורה פורמלית (כלומר: תארו איזה מילים מתקבלות).

ב) בנו אוטומט ללא מעברי- ε השקול ל- A.

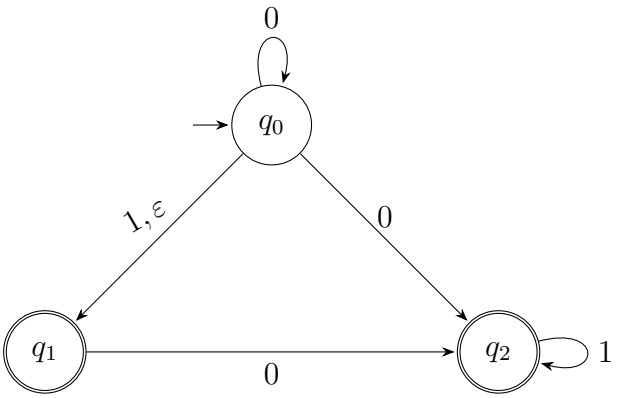
ג) תנו 3 דוגמאות למילים שמתקבלות ו־3 שנדחות, עם הסבר קצר למה.

שאלה 17 עבור כל אחד של האוטומטים הבאים:

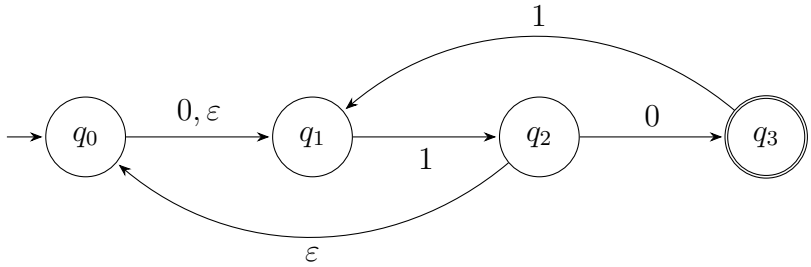
א) מצאו את השפה של האוטומט.

ב) בנו אוטומט דטרמיניסטי שקול.

1)



2)


1
0, ε
0
1
ε
q_0
q_1
q_2
q_3

פרק - 4 שפות רגולריות

שאלה 18 עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא רגולרית או לא. במידה וכן כתבו ביטוי רגולרי השקול לה. במידה ולא הוכיחו כך ע"י למת הניפוח.

א) $L = \left\{a^n b^m \;\middle|\; n \leq 3, m \geq n^2\right\}$.

ב) $L = \left\{a^{(n+1)^2} \;\middle|\; n \geq 0\right\}$.

ג) $L = \left\{w = w_1 a w_1^R \;\middle|\; w_1 \in \{a,b\}^*\right\}$.

ד) $L = \left\{w = w_1 w_2 w_1^R \;\middle|\; w_1, w_2 \in \{a,b\}^*\right\}$.

ה) $L = \left\{a^{S_n} \;\middle|\; S_n = \sum_{i=1}^{n} (5 + 2(i-1))\right\}$.

שאלה 19 הוכיחו שוויון בין הביטויים הרגולריים הבאים:

$$(1 + 00^*1) + (1 + 00^*1)\,(0 + 10^*1)^*\,(0 + 10^*1) = 0^*1\,(0 + 10^*1)^* \quad .$$

שאלה 20 עבור כל אחד מהביטויים הרגולריים הבאים מעל $\{a,b,c\}$:

- $r = (a^*b)^* + (bc^*)^* + (ac)^*$
- $r = (a^*b + b^*a)\,(bc)^*$
- $r = (ab + ac + bc)^*$

א) בנו אוטומט אי-דטרמיניסטי (NFA) שמקבל את הפשה של הביטוי רגולרי, בעזרת אלגוריתם של Thompson.

ב) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול.

שאלה 21 עבור כל אחת של השפות הבאות הוכיחו או הפריכו כי השפה רגולרית.

א) $L = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; \text{האות הראשונה זהה לאות האחרונה}\right\}$

ב) $L = \left\{w \in \{a,b\}^* \;\middle|\; \#a_w = \#b_w\right\}$

ג) $L = \left\{w \in \{a,b\}^* \;\middle|\; w \text{ לא כוללת } aba \text{ וגם לא כוללת } bab\right\}$

ד) $L = \left\{ww \;\middle|\; w \in \{a,b\}^*\right\}$

ה) $L = \left\{w \in \{a,b\}^* \;\middle|\; |w| \text{ זוגי}\right\}$

ו) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#a_w \equiv 2 \pmod 3\}$

ז) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ פלינדרום $\}$

שאלה 22 למטה רשימה של תיאורים מילוליים של שפות. עבור כל אתת כתבו ביטוי רגולרי של השפה ותנו תיאור מילולי (פסאודוקוד) של DFA המקבל את השפה.

א) כל המילים שמסתיימות ב- $ababab$.

ב) כל המילים שבהן אין את התבנית $bbbbbbbbb$.

ג) כל המילים שמכילות $abaabaaba$ לפחות פעם אחת.

ד) כל המילים שאורכן מתחלק ב- 3.

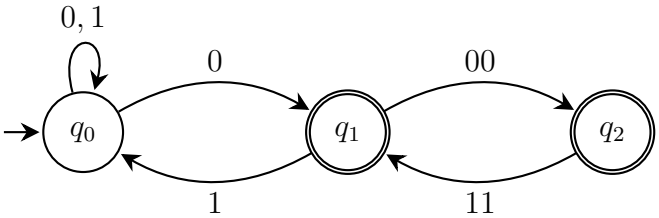
שאלה 23 תהיינה L_1, L_2 שפות. הראו שהשפות המורכבות הבאות גם רגולריות, ותנו ביטוי רגולרי של השפה של כל אחת במונחי.

א) $L_1 \setminus L_2$

ב) $(L_1 \cup L_2)^*$

ג) $(L_1 \cap L_2) \cup \overline{L_1}$

שאלה 24 מצאו ביטוי רגולרי עבור השפה המתקבלת על ידי האוטומט המוכלל בשרטוט.



שאלה 25 הוכח כי השפות הבאות אינן רגולריות.

א) $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

ב) $L = \{0^m 1^n 0^n \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

ג) $L = \left\{0^m 1^n 0^{m^2+n^2} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

ד) $L = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$.

ה) $L = \{0^m 1^{n+i} \mid n \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \le i \le 2\}$.

ו) $L = \{w_1 0 w_2 \mid w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \ \wedge \ w_1 \ne w_2\}$

פרק - 5 שפות חסרות הקשר

שאלה 26 עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\{0,1\}$:

1) $L = \{w \mid w \text{ is an odd binary number}\}$

2) $L = \{0^{2n}1^{2m} \mid n, m \geq 0\}$

3) $L = \{w \mid |w|\%3 = 0\}$ חלופי: (ניסוח $L = \{w \mid |w| \bmod 3 = 0\}$)

א) בנו דיקדוק לינארי $L(G)$ שקול.

ב) בחרו מילה לא הקצרה ביותר מהשפה והראו עץ גזירה לפי הדקדוק שבניתם.

ג) בנו אוטומט סופי השקול לדקדוק הלינארי מסעיף א'.

שאלה 27 עבור כל אחד מדקדוקי חסרי ההקשר הבאים $G = (V, \Sigma, R, S)$: הבאים מעל הא"ב $\{0,1\}$:

1)
- $V = \{S, A\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$
- R:

$$S \to 01S \mid 10S \mid A$$
$$A \to A1 \mid A00 \mid 0$$

- $S =$ המשתנה ההתחלתי

2)
- $V = \{S\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$
- R:

$$S \to 00S \mid 000S \mid 1S \mid S1 \mid 01$$

- $S =$ המשתנה ההתחלתי

3)
- $V = \{S, A, B, C\}$
- $\Sigma = \{0,1\}$
- R:

$$S \to S1 \mid A$$
$$A \to 0A \mid B$$
$$B \to B1 \mid C$$
$$C \to 0C \mid \varepsilon$$

- $S =$ המשתנה ההתחלתי

א) המירו את הדקדוק, G לדקדוק לינארי ימני או שמאלי שקול.

ב) בחרו במילה (שאינה המילה הריקה) משפת הדקדוק ובנו עבורה עץ גזירה.

ג) הגדירו פורמלית את שפת הדקדוק.

ד) בנו אוטומט סופי השקול לדקדוק.

תזכורת:
דקדוק לינארי ימני G מוגדר על ידי $G = (V, \Sigma, R, S)$, עם כללי גזירה מהצורה הבאה בלבד:

- $A \to a$
- $A \to aB$
- $A \to \varepsilon$

באופן דומה ניתן להגדיר דקדוק לינארי שמאלי, על ידי החלפת כלל הגזירה השני ל $A \to Ba$.

שאלה 28

עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1) $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m + k, n, m, k \geq 0\}$

2) $L = \{w a^{2n} b^{3n} w^R \mid w \in \{a, b, c\}^*, n \geq 1\}$

3) $L = \{a^n b^m c^k a^t \mid n + m > k + t\}$

א) בנו דקדוק חסר הקשר G השקול לשפה L.

ב) בחרו במילה (שאינה המילה הריקה) משפת הדקדוק ובנו עבורה עץ גזירה.

שאלה 29

עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij\}$

2) $L = \{a^i b^j \mid j \geq i^2\}$

3) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#a_w = \#b_w = \#c_w\}$

הוכיחו כי השפה אינה שפה חסרת הקשר.

שאלה 30 עבור כל אחת של השפות הבאות הוכיחו או הפריכו כי היא שפה חסרת הקשר:

א)

$$L = \left\{0^i 1^j 0^i 1^j \middle| \ i, j \in \mathbb{N}\right\} \ .$$

ב)

$$L = \left\{0^i 1^j 0^k 1^l \middle| \ i, j, k, l \in \mathbb{N} \ , \ i + j \leq k + l\right\} \ .$$

ג)

$$L = \left\{ a^i b^j c^j \middle| \ i,j \in \mathbb{N} \ , \ i \leq j \right\} \ .$$

ד)

$$L = \left\{ x0y \middle| \ x,y \in \{0,1\}^* \ , \ x \neq y \right\} \ .$$

ה)

$$L = \left\{ x0y \middle| \ x,y \in \{0,1\}^* \ , \ x = 1y1 \right\} \ .$$

ו)

$$L = \left\{ x0y \middle| \ y = \alpha x \beta \ \wedge \ \ x,y,\alpha,\beta \in \{0,1\}^* \ , \right\} \ ,$$

פרק - 6 אוטומט מחסנית

שאלה 31 עבור כל אחד מהדקדוקים הבאים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

1) $S \to aSa \mid aSb \mid bSb \mid bSc \mid \varepsilon$

2) $S \to ABC, \quad A \to aaAb \mid \varepsilon, \quad B \to aBbb \mid \varepsilon, \quad C \to cC \mid c \mid S$

3) $S \to AB, \quad A \to aAb \mid aAbb \mid aAbbb \mid a, \quad B \to bBc \mid bBcc \mid bBccc \mid b$

1. בנו אוטומט מחסנית המקבל את שפת הדקדוק.
2. הגדירו פורמלית את אוטומט המחסנית שבניתם בסעיף 1.

שאלה 32 עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

1) $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m + k,\ n,m,k \geq 0\}$

2) $L = \{wa^{2n}b^{3n}w^R \mid w \in \{a,b,c\}^*,\ n \geq 1\}$

3) $L = \{a^n b^m c^k a^t \mid n + m > k + t\}$

בנו אוטומט מחסנית המקבל את השפה הנתונה.

שאלה 33 בנו PDA שמקבל את:

$$L = \{b^n a^{2n} \mid n \geq 0\}$$

ואז:

1. תנו גם CFG לשפה.
2. הסבירו למה השפה חופשית־הקשר.

פרק - 7 ביטוי רגולרי לאוטומט סופי מזערי

שאלה 34 עבור כל אחת מהשפות הבאות מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

1) $L = \{a^n b^m c^k \mid [(n+m)\%3 = 2 \wedge k\%3 = 1] \vee [(n+m)\%3 = 1 \wedge k\%3 = 2]\}$

2) $L = \{w = w_1 w_2 \mid w_1 \in \{a,b\}^*,\ w_2 \in \{b,c\}^*,\ w = aw' \to w' \neq w''b,\ w = bw' \to w' \neq w''c\}$

3) $L = \{w \mid \#_{aba}(w) = 0 \wedge \#_{bac}(w) = 0\}$

1. בנו אוטומט סופי אי דטרמיניסטי NFA.
2. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול ע"י אלגוריתם subset-construction (עם סילוק מסעי ε במידת הצורך).
3. צמצמו את האוטומט שהתקבל בסעיף הקודם במידה וניתן.

שאלה 35 עבור כל אחד מהביטויים הרגולריים הבאים מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:

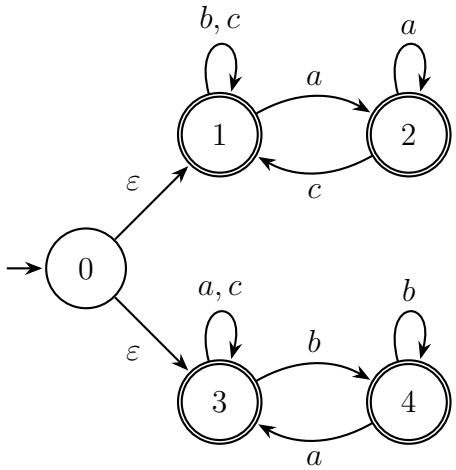
1) $r = (a^*b)^* + (bc^*)^* + (ac)^*$

2) $r = (a^*b + b^*a)(bc)^*$

3) $r = (ab + ac + bc)^*$

1. בנו אוטומט סופי אי דטרמיניסטי NFA בעזרת אלגוריתם Thompson.
2. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול ע"י אלגוריתם subset-construction עם סילוק מסעי ε.
3. צמצמו את האוטומט שהתקבל בסעיף הקודם במידה וניתן.

שאלה 36 בהינתן האוטומט הסופי האי דטרמיניסטי הבא מעל הא"ב $\{a,b,c\}$:



1. כתבו מהו הביטוי הרגולרי r כך ש-$L(r) = L$.
2. בנו אוטומט סופי אי דטרמיניסטי NFA בעזרת אלגוריתם Thompson.
3. בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול ע"י אלגוריתם subset-construction עם סילוק מסעי ε.
4. צמצמו את האוטומט שהתקבל בסעיף הקודם במידה וניתן.

פרק - 8 פתרונות

שאלה 1

א) L_1L_2:

שרשור של L_1 (שפת המילה הריקה) עם L_2. כיוון ששרשור של כל מילה w עם ε נותן את w, השפה לא משתנה:

$$L_1L_2 = \{110, 01\} \ .$$

ב) L_2L_3:

שרשור של שפה עם השפה הריקה ($\emptyset$). כיוון שאין אף מילה ב- L_3 שאפשר לשרשר למילות L_2, התוצאה היא קבוצה ריקה:

$$L_2L_3 = \emptyset \ .$$

ג) $L_4 - L_1$:

הפרש קבוצות. אנחנו לוקחים את כל המילים ב- L_4 ומסירים מהן את המילים שנמצאות ב- L_1 (כלומר, מסירים את המילה הריקה ε, אם היא קיימת שם):

$$L_4 - L_1 = L_4 \backslash \{\varepsilon\} = \{100\} \ .$$

ד) L_2^2:

שרשור של L_2 עם עצמה (L_2L_2). לוקחים כל מילה מ- L_2 ומשרשרים לה כל מילה מ- L_2:

- $110 + 110 = 110110$.
- $110 + 01 = 11001$
- $01 + 110 = 01110$
- $01 + 01 = 0101$

$$L_2^2 = \{110110, 11001, 01110, 0101\} \ .$$

ה) L_5^R:

היפוך (Reverse) של השפה L_5. הופכים את סדר האותיות בכל מילה:

- 00 נשאר 00.
- 11 נשאר 11.

$$L_5^R = \{00, 11\}$$

במקרה זה $L_5^R = L_5$.

ו) L_4^*:

סגור קליני .(Kleene Star) זוהי קבוצת כל השרשורים האפשריים (באורך כלשהו) של מילים מתוך L_4. מכיוון ש- L_4 מכילה את המילה הריקה ואת "100", כל שרשור ביניהן יניב רצפים של "100" או את המילה הריקה עצמה.

$$L_4^* = \{\varepsilon, 100, 100100, 100100100, \dots\} = \{(100)^n \mid n \geq 0\} \ .$$

ז) $L_1 \cup L_2^R$:

איחוד של L_1 עם היפוך השפה L_2:

- $L_1 = \{\varepsilon\}$.
- $L_2^R = \{011, 10\}$.
- $L_1 \cup L_2^R = \{\varepsilon, 011, 10\}$.

ח) $(L_2 \cup L_5)^2$

קודם נאחד את השפות ואז נשרשר את התוצאה עם עצמה: $L_2 \cup L_5 = \{110, 01, 00, 11\}$ כעת נשרשר את הקבוצה הזו עם עצמה (סך הכל 16 צירופים אפשריים):

$$\begin{aligned}(L_2 \cup L_5)^2 = \{&110110, 11001, 11000, 11011,\\ &01110, 0101, 0100, 0111,\\ &00110, 0001, 0000, 0011,\\ &11110, 1101, 1100, 1111\}\end{aligned}$$

שאלה 2

א) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית ($n = 2$):
$L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$.

$$L_1^2 = \{aa\}, \quad L_2^2 = \{bb\}, \quad L_1^2 L_2^2 = \{aabb\} \ .$$

$$L_1 L_2 = \{ab\}, \quad (L_1 L_2)^2 = \{abab\} \neq L_1^2 L_2^2 \ .$$

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_1 = \{a\}$.

$$L_1 L_1^* L_1 = \{a\} \circ \{\varepsilon, a, aa, \dots\} \circ \{a\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1 L_1^* L_1 = \{a\} \circ \{\varepsilon, a, aa, \dots\} \circ \{a\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1^*L_1^2 = \{\varepsilon, a, aa, \ldots\} \circ \{aa\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1^2\Sigma^* = \{aa, aaa, \ldots\} \circ \{a, b, \ldots\} = \{aaa, aab, \ldots\} \ .$$

$aab \in L_1^*L_1^2 \cap L_2^2\Sigma^*$ אבל $aab \notin L_1L_1^*L_1$.

ג) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$.

$$(L_1^*L_2^*)^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\} = \{\varepsilon, a, b\}^* \ .$$

$$L_1L_2 = \{ab\} \ , \ L_1L_1 = \{aa\} \ \Rightarrow \ L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2 = \{aa, ab, b\} \ \Rightarrow \ (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* = \{aa, ab, b\}^* \ .$$

בנוסף $L_1^* = \{a\}^*$ לפיכך:

$$(L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^*\{aa, ab, b\}^* \cup \{a\}^* = \{a, aa, ab, b\}^* \ .$$

לכן: $\varepsilon \in (L_1^*L_2^*)^*$ אבל $\varepsilon \notin (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^*$ לכן

$$(L_1^*L_2^*)^* \neq (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^* \ .$$

ד) הטענה נכונה. הוכחה:
לפי חוקי דה-מורגן:

$$\Sigma^* - (A \cup B) = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \ .$$

לכן:

$$\begin{aligned}\Sigma^* - \left(\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2} \cap \overline{L_3}\right)\right) &= \Sigma^* - \left(\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2 \cup L_3}\right)\right) \\ &= \left(\overline{\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2 \cup L_3}\right)}\right) \\ &= (L_1 \cap (L_2 \cup L_3))\end{aligned}$$

ה) הטענה נכונה. הוכחה:

יש להוכיח שלכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

$$w \in L_1\left(L_2^* \cup L_3\right) \iff w \in (L_1L_2^*) \cup (L_1L_3)$$

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $w \in L_1\left(L_2^* \cup L_3\right)$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $x \in L_1$ וגם $y \in L_2^* \cup L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $x \in L_1$ וגם $y \in L_2^* \vee y \in L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $xy \in L_1L_2^* \vee xy \in L_1L_3$

$\Leftarrow$ $w \in L_1L_2^* \vee w \in L_1L_3$

$\Leftarrow$ $w \in (L_1 L_2^* \cup L_1 L_3)$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $w \in (L_1 L_2^* \cup L_1 L_3)$

$\Leftarrow$ $w \in L_1 L_2^* \vee w \in L_1 L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ כאשר $x \in L_1$ ו- $y \in L_2^* \vee y \in L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ כאשר $x \in L_1$ ו- $y \in (L_2^* \cup L_3)$

$\Leftarrow$ $w \in L_1 (L_2^* \cup L_3)$.

שאלה 3

א)

$$L_1 = \left\{ \{x,y,z\}^* \;\middle|\; \#x_w \equiv 0 \pmod 2,\ \#y_w \equiv 0 \pmod 3,\ \#z_w \equiv 0 \pmod 5 \right\} .$$

ב)

$$L_2 = \left\{ w \in \{x,y,z\}^* \;\middle|\; \#x_w = (\#y_w)^3 \ ,\ \#z_w \geq \#x_w \right\}$$

ג)

$$L_3 = \Sigma^* \circ (xyz) \circ \Sigma^* \circ (xyz) \circ \Sigma^*$$

או, במפורשות:

$$L_3 = \{x,y,z\}^* \circ (xyz) \circ \{x,y,z\}^* \circ (xyz) \circ \{x,y,z\}^*$$

ד)

$$L_4 = \left\{ ww^r \;\middle|\; w \in \{x,y,z\}^* \right\} .$$

ה)

$$L_5 = \left\{ w \in \{z\} \circ \{x,y,z\}^* \;\middle|\; |w| \equiv 0 \pmod 2 \right\} .$$

שאלה 4

א) $L^* = L^+$ אם ורק אם $\varepsilon \in L$, כלומר מילה הריקה ב- L. דוגמאות:

- $L = \{\varepsilon, a\}$,
- $L = \{0, 1, \varepsilon\}$.

ב) אם מילה הריקה לא ב- L אז $L^* \neq L^+$. דוגמאות:

- $L = \{a\}$,
- $L = \{01, 11\}$.

ג) אם L סגור תחת הפעולת כוכב קליין אז $L = L^*$, שגורר לתנאים: (1) $\varepsilon \in L$ (2) אם $x, y \in L$ אז $xy \in L$. דוגמאות של שפות שמקיימות התנאי הזה הן:

- $L = \{\varepsilon\}$
- $L = \{a\}^*$
- בהינתן אלפבית Σ כלשהי, $L = \Sigma^*$.

ד) כל שפה סופית L עבורה $L \neq \emptyset$ וגם $L \neq \{\varepsilon\}$ מקיימת $L \neq L^*$.
לדוגמה, אם $L = \{a\}$ אז $L^* = \{\varepsilon, a, aa, \ldots\} \neq L$.

ה) אם שפה L מכילה מילה w עבורה $|w| > 0$ אז L^* לא סופית. לפיכך האפשרויות לשפות שעבורן הכוכב קליין הוא שפה סופית הן כדלקמן:

- אם $L = \emptyset$ אז $L^* = \emptyset$ ולכן L^* סופית.
- אם $L = \{\varepsilon\}$ אז $L^* = \{\varepsilon\}$ ולכן L^* סופית.

שאלה 5

שאלה 6 $L_1 = \left\{a^n \;\middle|\; n \text{ אי-זוגי}\right\}$ ו- $L_2 = \left\{a^n \;\middle|\; n > 0 \;\wedge\; n \text{ זוגי}\right\}$

שאלה 7 נגדיר

$$A = \{L_1, L_2, \ldots, \}$$

כאשר $L_i = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; |w| \geq i\right\}$.

1) כל חיתוך של מספר סופי של שפות מקיים את התנאי הבא:

$$L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \cdots \cap L_{i_n} = L_{i_m} \;, \quad m = \max\left(i_1, i_2, \ldots, i_m\right) \;.$$

בפרט, $L_{i_m} \neq \emptyset$.

2) נגדיר תת-קבוצה אינסופית $B \subseteq A$ להיות הקבוצה A עצמה:

$$B = A \;.$$

החיתוך של כל השפות של B הוא:

$$\bigcap_{L \in B} L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i \;.$$

נוכיח כי הקבוצה זו היא קבוצת הריקה:

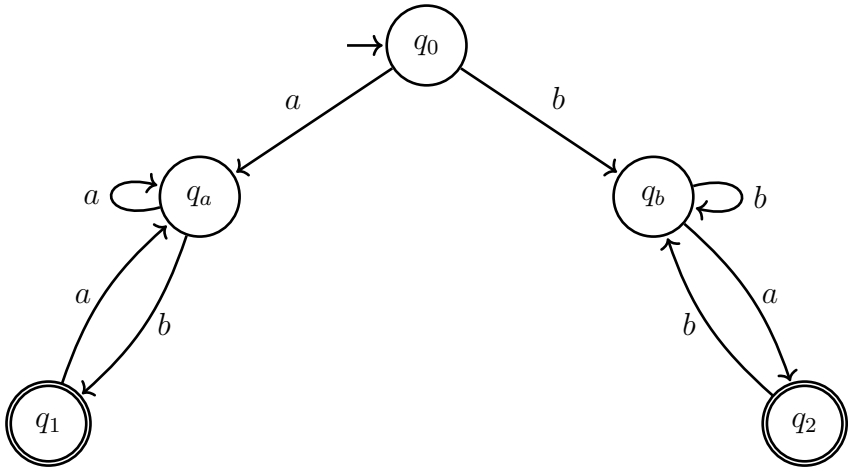
$$\bigcap_{L \in B} L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \emptyset \;.$$

נוכיח את הטענה הזו דרך השלילה באופן הבא. נניח בשלילה כי קיימת לפחות מילה אחת $w \in B$.

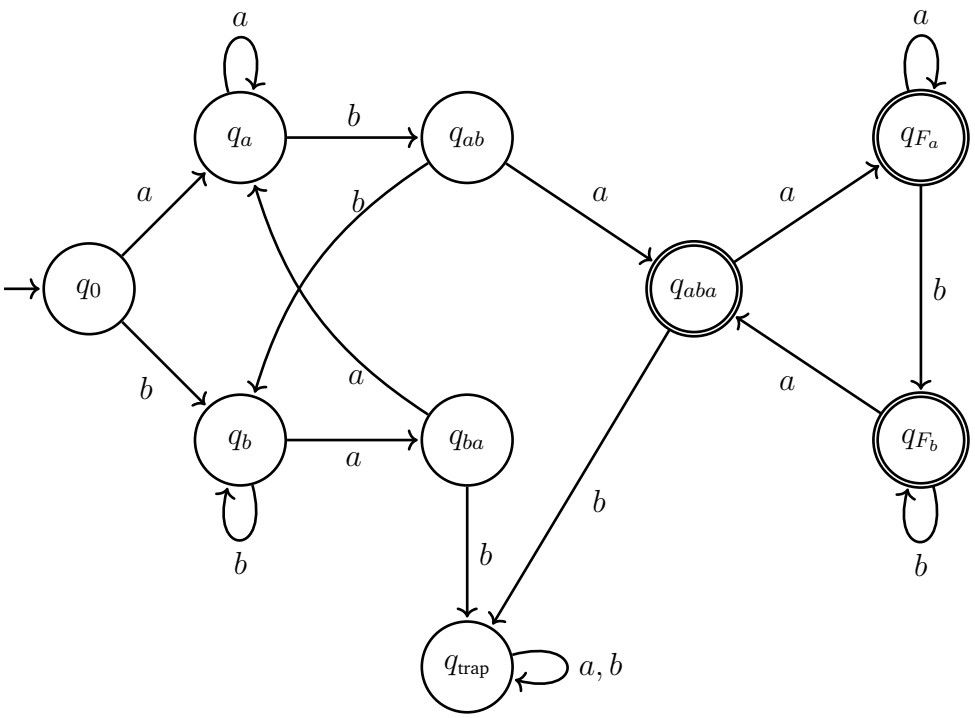
אם	$\exists w \in B$	(ההנחת המוצא בשלילה)
$\Rightarrow$	$\exists w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$	(הגדרת התת-קבוצה B)
$\Rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}^+ :\ \lvert w\rvert = k$	(w מילה סופית)
$\Rightarrow$	$w \in L_{k+1}$	(w שייכת לחיתוך השפות $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$)
$\Rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}^+ :\ \lvert w\rvert \geq k+1$	(הגדרת השפה L_{k+1})
$\Rightarrow$	$k \geq k+1$	($\lvert w\rvert = k$)
$\Rightarrow$	סתירה	($k \ngeq k+1$)

שאלה 8

א)



ב)



שאלה 9

א)

1) נבדוק הרצות של מילים שונות:

- $w = 0$:

$$Q_0 \xrightarrow{0} Q_3 \notin F \ .$$

- $w = 1$:

$$Q_0 \xrightarrow{1} Q_1 \notin F \ .$$

- $w = 00$:

$$Q_0 \xrightarrow{0} Q_3 \xrightarrow{0} Q_3 \notin F \ .$$

- $w = 01$:

$$Q_0 \xrightarrow{0} Q_3 \xrightarrow{1} Q_3 \notin F \ .$$

- $w = 11$:

$$Q_0 \xrightarrow{1} Q_1 \xrightarrow{1} Q_1 \notin F \ .$$

- $w = 10$:

$$Q_0 \xrightarrow{1} Q_1 \xrightarrow{0} Q_2 \in F \ .$$

- $w = \{1\}^+\{0\}^+$:

$$Q_0 \xrightarrow{1} Q_1 \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} Q_1 \xrightarrow{0} Q_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} Q_2 \in F \ .$$

לכן $L(A) = \{1\}^+\{0\}^+$, כלומר:

$$L(A) = \left\{1^n 0^m \;\middle|\; n \geq 1, m \geq 1\right\} \ .$$

2) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כאשר:

- $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- $$\begin{aligned}
\delta(Q_0, 0) &= Q_3 \ , \\
\delta(Q_0, 1) &= Q_1 \ , \\
\delta(Q_1, 0) &= Q_2 \ , \\
\delta(Q_1, 1) &= Q_1 \ , \\
\delta(Q_2, 0) &= Q_2 \ , \\
\delta(Q_2, 1) &= Q_3 \ , \\
\delta(Q_3, \sigma) &= Q_3 \ , \qquad (\sigma = 0, 1) \ .
\end{aligned}$$
- המצב ההתחלתי הוא Q_0.
- הקבוצת מצבי הקבלה היא: $F = \{Q_2\}$.

3) כל DFA הוא מקרה פרטי של NFA. כדי "להפוך" אותו מהותית, ניתן להסיר את מצב המלקודת Q_3 וכל הצלעות המובילות אליו. ב- NFA חוסר במעבר מוגדר פשוט גורם לחישוב להיתקע ולהידחות.

4) ביטוי רגולרי: $r = 11^*00^*$ או $r = 1^+0^+$.

ב) **1)**

$$L(A) = \left\{ w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; \#a_w = 3n + 2 \ , n \in \mathbb{N} \right\}$$

או באופן שקול

$$L(A) = \left\{ w \in \{a, b\}^* \;\middle|\; \#a_w \equiv 2 \pmod 3 \right\} \ .$$

2) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כאשר:

- $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$.
- $\Sigma = \{a, b\}$.
- $$\delta(Q_i, a) = Q_{(i+1) \bmod 3} \ , \qquad \delta(Q_i, b) = Q_i \ .$$
- המצב ההתחלתי הוא Q_0.
- הקבוצת מצבי הקבלה היא: $F = \{Q_2\}$.

3) כדי

4) ביטוי רגולרי:

$$r = b^*ab^*ab^* \left(b^*ab^*ab^*\right)^* \ .$$

ג)

1) $L(A) = \left\{ w \in \{\mathrm{x}, \mathrm{y}^* \;\middle|\; \#\mathrm{y}_w = 2 \right\}\}$.

2) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ כאשר:

- $Q = \{Q_0, Q_1, Q_2, Q_3\}$.
- $\Sigma = \{\mathrm{x}, \mathrm{y}\}$.
- $$\delta(Q_i, \mathrm{x}) = Q_i \ , \qquad \delta(Q_i, \mathrm{y}) = Q_{\min(i+1,3)} \ .$$
- המצב ההתחלתי הוא Q_0.

- הקבוצת מצבי הקבלה היא: $F = \{Q_2\}$.

3)

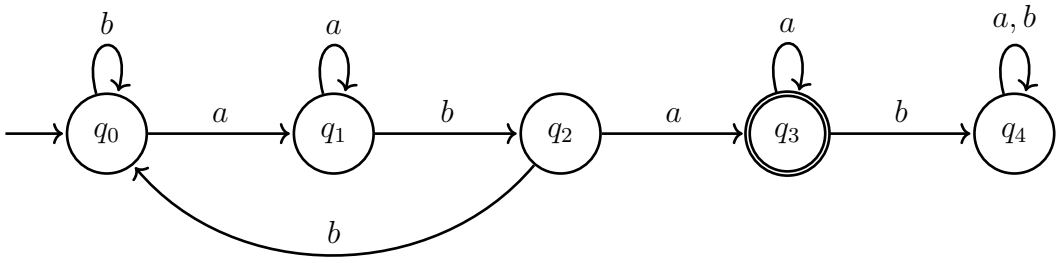
4) ביטוי רגולרי:

$$r = \mathrm{x}^* \ \mathrm{y} \ \mathrm{x}^* \ \mathrm{y} \ \mathrm{x}^* \ .$$

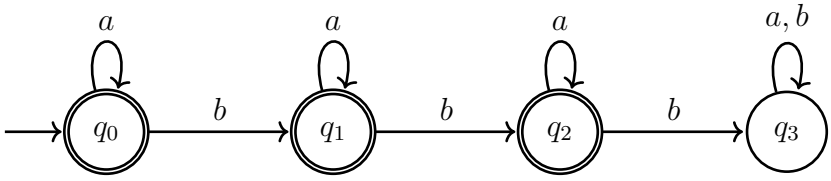
שאלה 10

א)

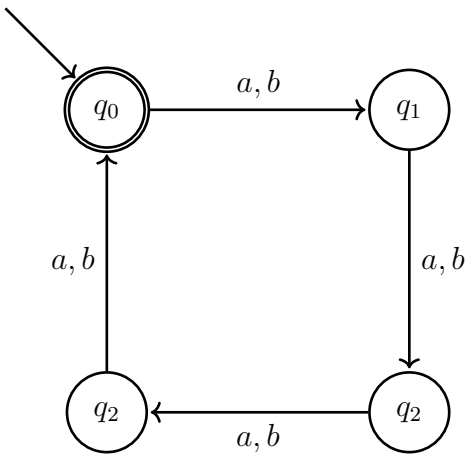
ב)



ג)



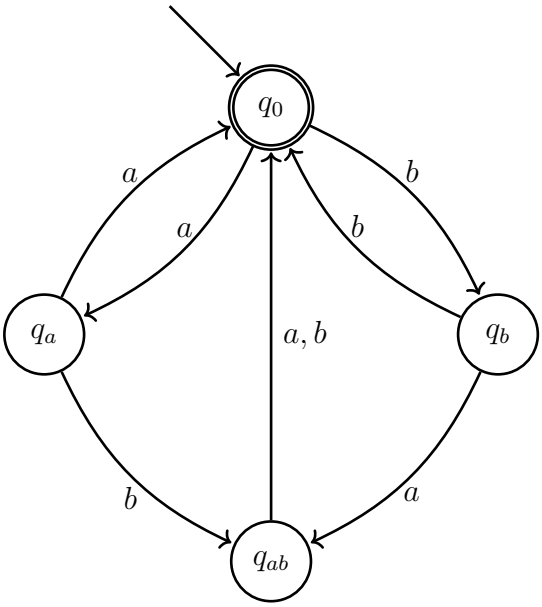
ד)



שאלה 11

א)

1)

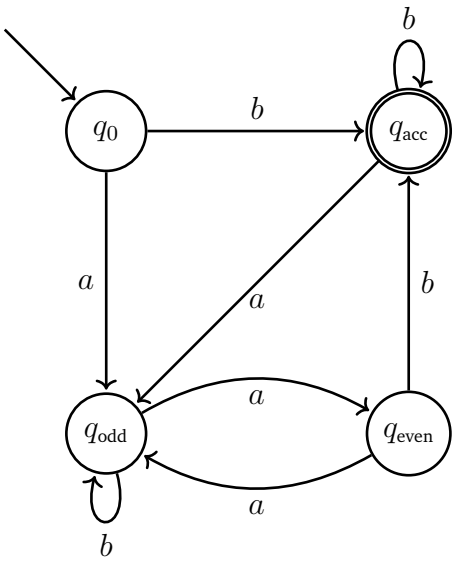


2)

3)

ב)

1)

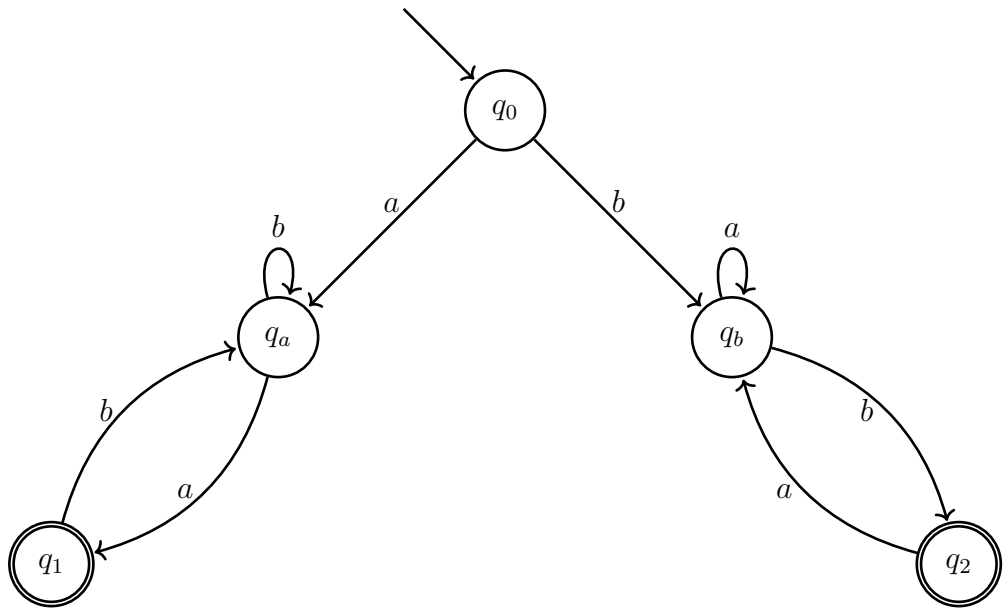


2)

3)

ג)

1)

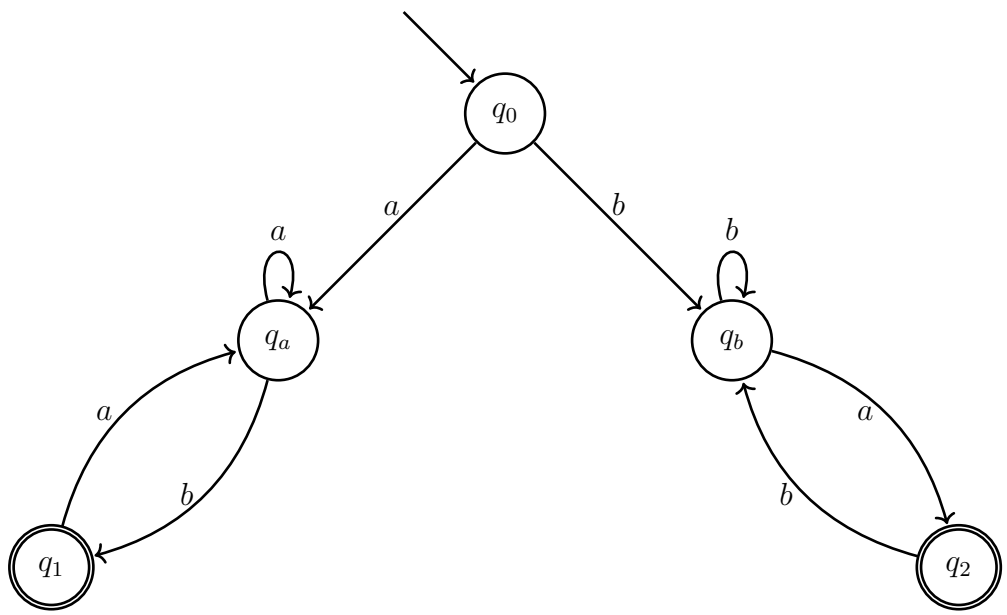


2)

3)

ד)

1)



2)

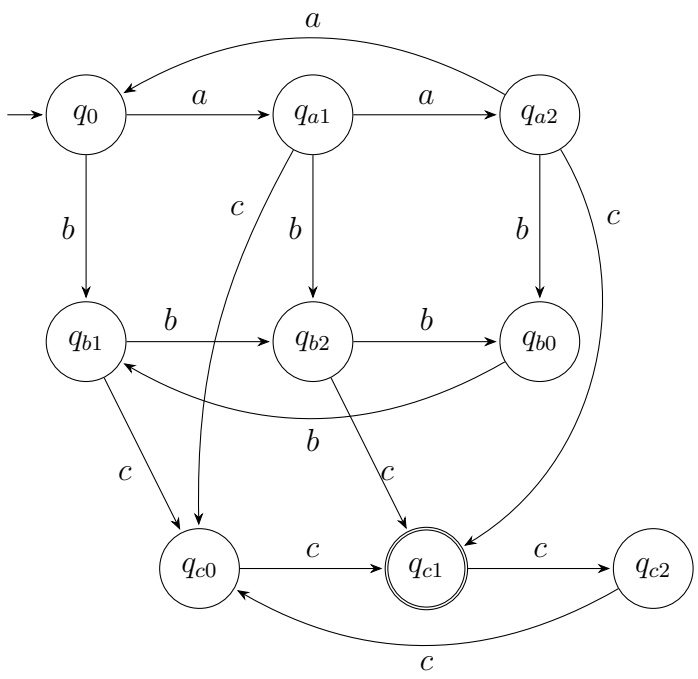
3)

שאלה 12

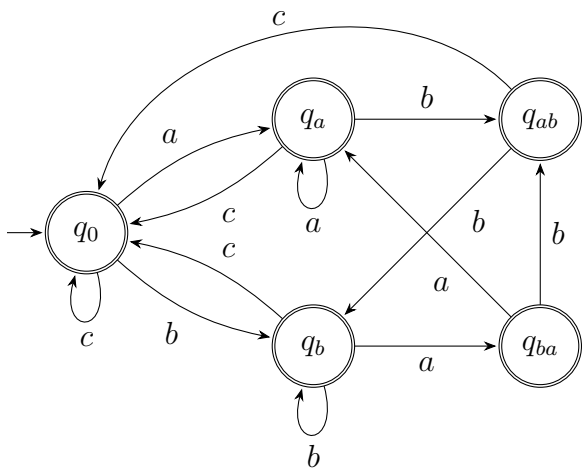
א) השפה כוללת מילים המקיימות את התבנית $a^n b^m c^k$ וגם מקיימות **אחד** משני התנאים הבאים:

1) $(n+m) \bmod 3 = 2$ וגם $k \bmod 3 = 1$.

2) $(n+m) \bmod 3 = 1$ וגם $k \bmod 3 = 2$.



ב)

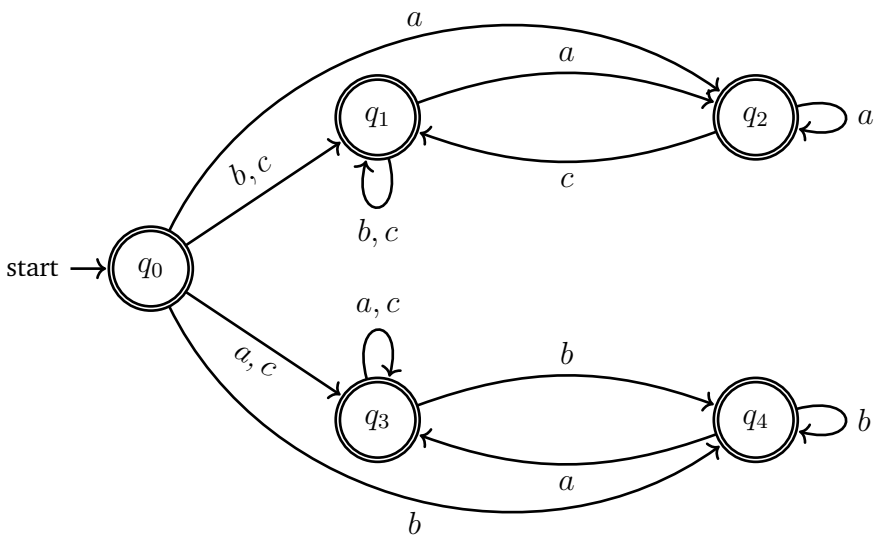


שאלה 13

א)

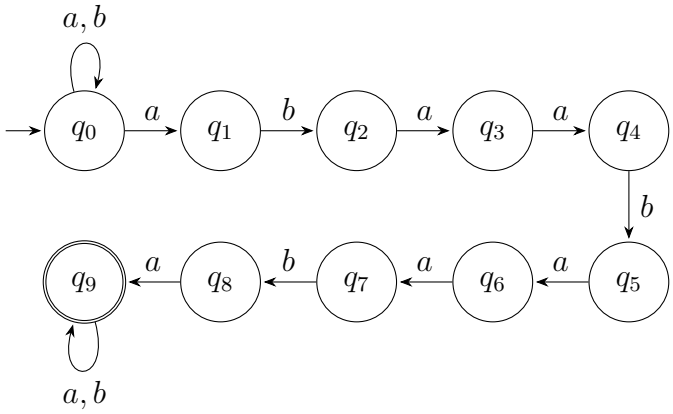
$$L(A) = \left\{ w = x_1 y_1 \cdots x_k y_k \;\middle|\; \forall 1 \le i \le k : \; \left(x_i \in \{b,c\}^* \wedge y_i \in a^+ c\right) \;\vee\; \left(x_i \in \{a,c\}^* \wedge y_i \in b^+ c\right) \right\}$$

ב)

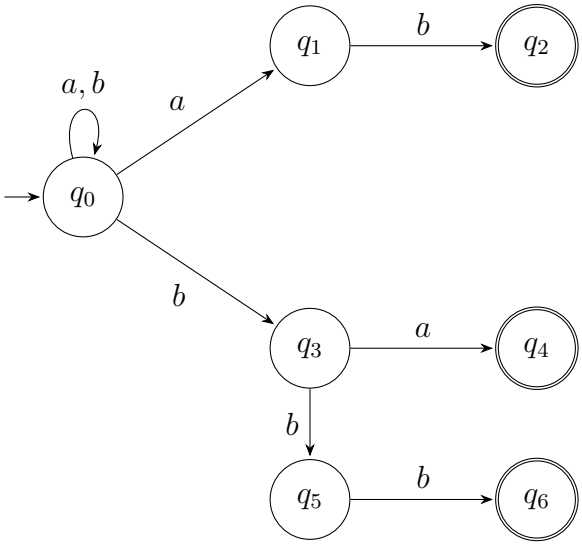


שאלה 14

א)



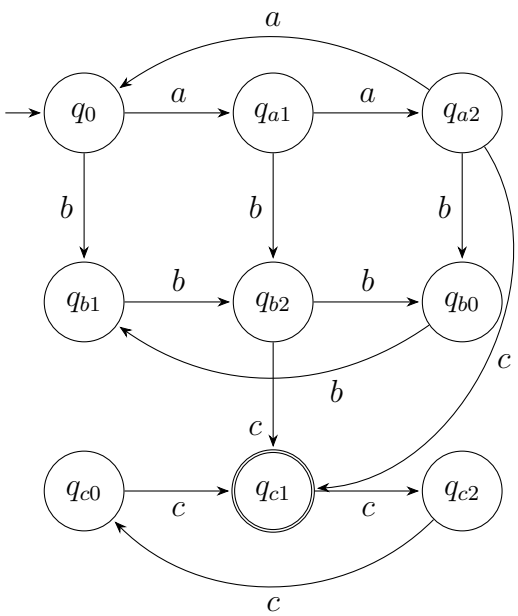
ב)



<u>שאלה 15</u> ראשית, נבחין בחלק השני של התנאי הלוגי: $k \bmod 2 = 2$. שארית החלוקה של מספר שלם ב-2 יכולה להיות רק 0 או 1. לכן, התנאי ששארית החלוקה תהיה 2 הוא **תנאי שקרי תמיד** (לא קיים k המקיים זאת). מכאן נובע שהחלק השני של פסוק ה-"או" ($\vee$) תמיד נופל.
השפה שלנו מצטמצמת בפועל לשפה הבאה:

$$L = \left\{a^n b^m c^k \;\middle|\; (n+m) \bmod 3 = 2 \;\wedge\; k \bmod 3 = 1\right\}$$

כדי לבנות אוטומט אי-דטרמיניסטי

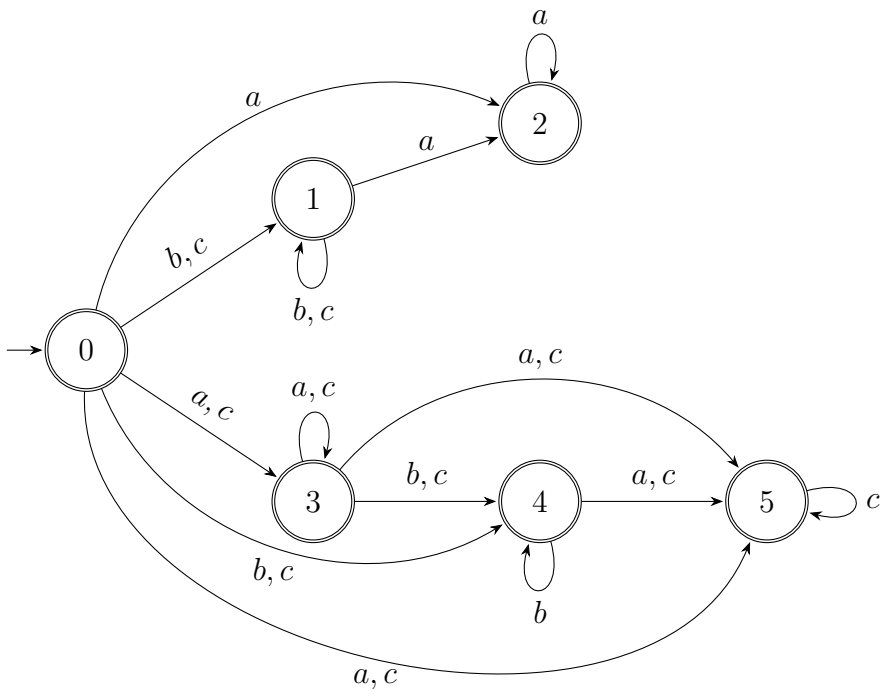


<u>שאלה 16</u>

א)

$$L(A) = \left\{w \in \{a,b,c\}^* \;\middle|\; w \in \{b,c\}^* a^+ \;\vee\; w \in \{a,c\}^*\{b,c,\varepsilon\}b^*\{a,c\}c^*\right\}$$

ב)



שאלה 17

1) שפת האוטומט:

$$L = L\Big(0^* \cup 0^+1^+ \cup 0^*101^* \cup \{1\}\Big)$$

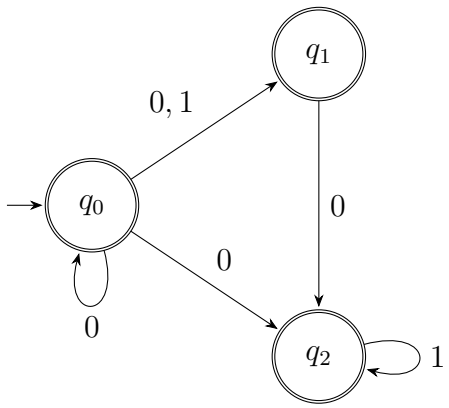
1. טבלת מעברים עבור ה-NFA עם מסעי ε:

Δ_ε	0	1	ε
q_0	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

2. טבלת מעברים עבור ה-NFA ללא מסעי ε:
(חישוב סגורי ε: $C_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1\}$, $C_\varepsilon(q_1) = \{q_1\}$, $C_\varepsilon(q_2) = \{q_2\}$.
כיוון ש-q_1 מקבל, גם q_0 הופך למקבל).

Δ_N	0	1
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\{q_2\}$

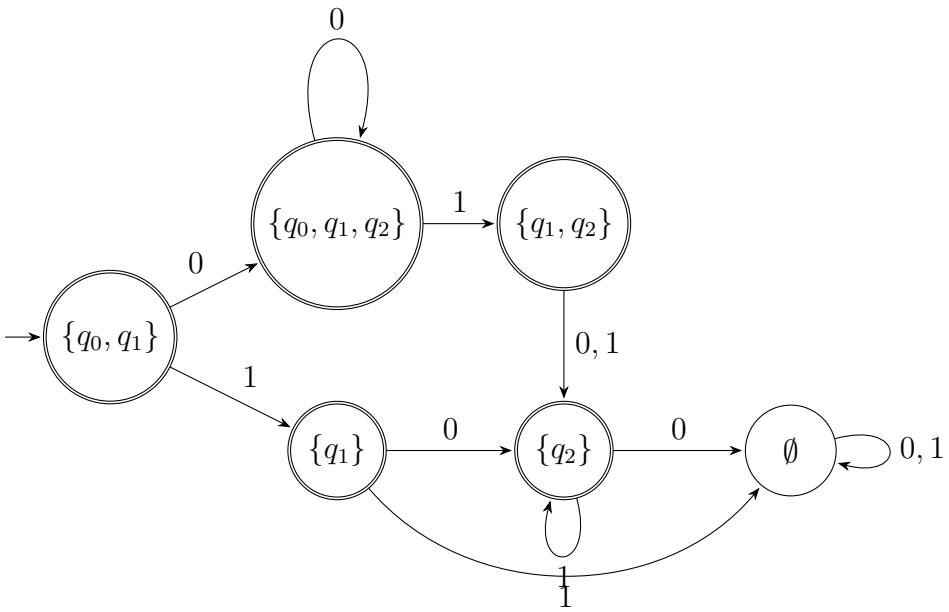
3. שרטוט ה-NFA ללא מסעי ε:



4. טבלת מעברים עבור ה-DFA השקול:
(נסמן: $S_0 = C_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1\}$)

מצב	0	1
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

5. שרטוט ה-DFA השקול:



---

2) שפת האוטומט:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \neq \varepsilon \text{ וגם המילה מסתיימת ב- } 0 \text{ או } 00\}$$

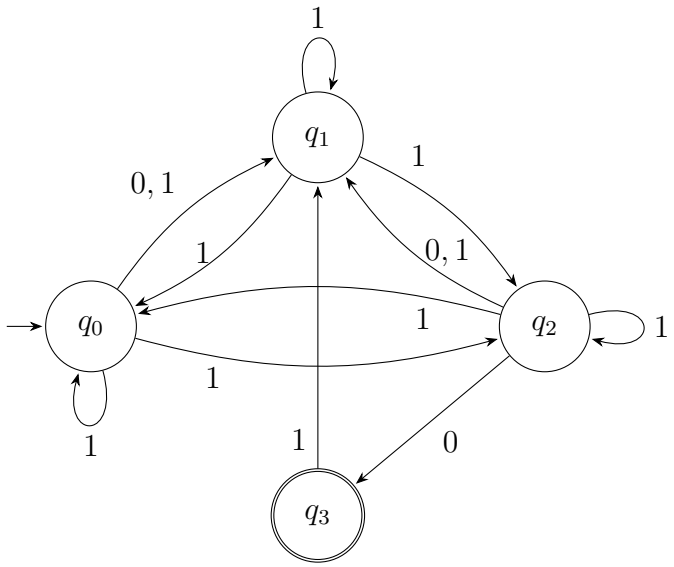
1. טבלת מעברים עבור ה-NFA עם מסעי ε:

Δ_ε	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
$*q_3$	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$

2. טבלת מעברים עבור ה-NFA ללא מסעי ε:
(חישוב סגורי ε: $C_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1\}$, $C_\varepsilon(q_1) = \{q_1\}$, $C_\varepsilon(q_2) = \{q_2, q_0, q_1\}$, $C_\varepsilon(q_3) = \{q_3\}$.
q_3 נשאר המצב המקבל היחיד).

Δ_N	0	1
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_1\}$

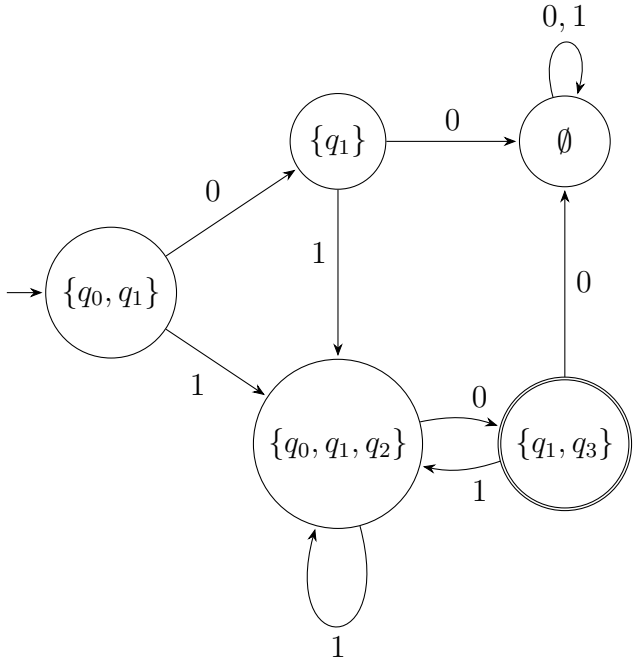
3. שרטוט ה-NFA ללא מסעי ε:



4. טבלת מעברים עבור ה-DFA השקול:
(נסמן: $P_0 = C_\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1\}$)

δ	0	1
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_0, q_1, q_2\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

5. שרטוט ה-DFA השקול:



שאלה 18

א) השפה רגולרית. $L = \left(\varepsilon \middle| ab \middle| a^2b^4 \middle| a^3b^9\right) b^*$.

ב)
- נניח בשלילה כי L רגולרית.
- מלמת הניפוח קיים טבעי p כך שלכל $w \in L$ ($|w| \geq p$): קיים פירוק $w = xyz$ כך ש מתקיים:
  1. $|y| > 0$
  2. $|xy| \leq p$
  3. לכל i, $xy^iz \in L$.
- תהי $w = a^{p^2}$.
- $p^2 \geq p$ אז $|w| \geq p$.
- לכל פירוק $w = xyz$: x, y, z הן מחרוזות של אותיות a בלבד, ו- $|y| = k > 0$ וגם $|xy| \leq p$.
- מכאן $1 \leq k \leq p$.
- מלמת הניפוח: $w' = xy^2z \in L$.
- $|w'| = p^2 + |y|$.
- $1 \leq |y| \leq p$ אז
$$p^2 < |w'| < p^2 + p < (p+1)^2$$
- לא קיים טבעי m כך ש- $|w'| = m^2$.
- לפיכך $w' \notin L$, בסתירה לכך שמלמת הניפוח $w' = xy^2z \in L$.

שאלה 19

שאלה 20

שאלה 21

שאלה 22

שאלה 23

שאלה 24

שאלה 25

שאלה 26

שאלה 27

שאלה 28

1) $L = \{a^n b^m c^k \mid n = m + k, n, m, k \geq 0\}$

2) $L = \{w a^{2n} b^{3n} w^R \mid w \in \{a, b, c\}^*, n \geq 1\}$

3) $L = \{a^n b^m c^k a^t \mid n + m > k + t\}$

הדקדוק חסר הקשר היוצר את השפה L הוא: $G = (V, \Sigma, R, S)$ כאשר:

- $V = \{A, B, C, X, Y\}$
- $\Sigma = \{a, b, c\}$
- $$R = \left\{ \begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aSa|A|B|X \ , \\ A & \rightarrow & aAc|C|X \ , \\ B & \rightarrow & bBa|C|Y \ , \\ C & \rightarrow & bCc|Y \ , \\ X & \rightarrow & aX|Y|a \ , \\ Y & \rightarrow & bY|b \ . \end{array} \right\}$$
- S: המשתנה ההתחלתי.

שאלה 29

שאלה 30

שאלה 31

שאלה 32

שאלה 33

שאלה 34

שאלה 35

שאלה 36