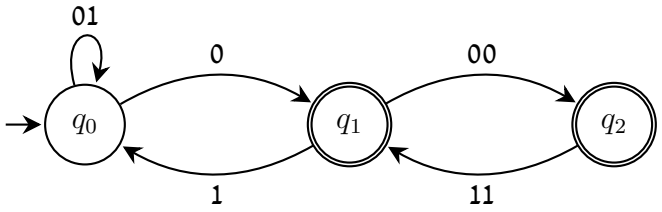
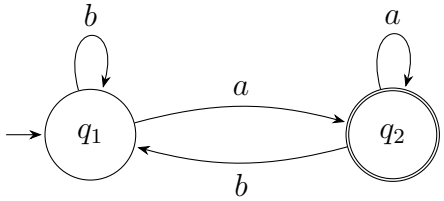
תרגילים 4: שפות רגולריות

שאלה 1 מצאו ביטוי רגולרי עבור השפה המתקבלת על ידי האוטומט המוכלל בשרטוט.



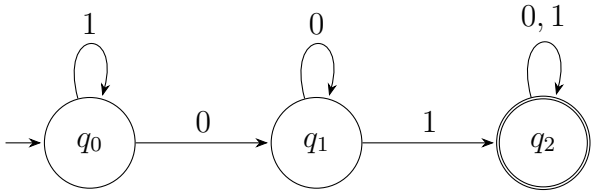
שאלה 2 עבור האוטומט הדטרמיניסטי (DFA) הבא:



א) שרטטו את האוטומט המוכלל (GNFA) השקול ההתחלתי.

ב) מצאו את שפת האוטומט (ביטוי רגולרי) באמצעות אלגוריתם דילול מצבים, עד להגעה ל-GNFA בעל שני מצבים בלבד. הציגו את השרטוטים לאחר כל שלב דילול.

שאלה 3 עבור האוטומט הדטרמיניסטי (DFA) הבא:

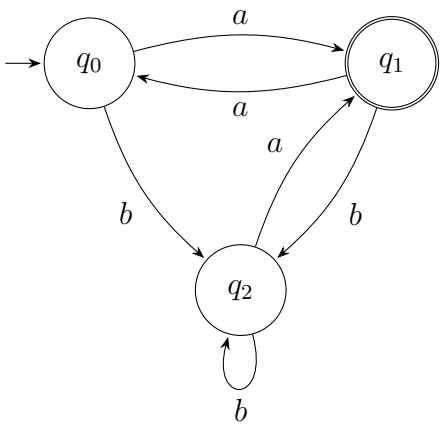


א) שרטטו את האוטומט המוכלל (GNFA) השקול ההתחלתי.

ב) מצאו את שפת האוטומט (ביטוי רגולרי) באמצעות אלגוריתם דילול מצבים, עד להגעה ל-GNFA בעל שני מצבים בלבד. הציגו את השרטוטים לאחר כל שלב דילול.

שאלה 4

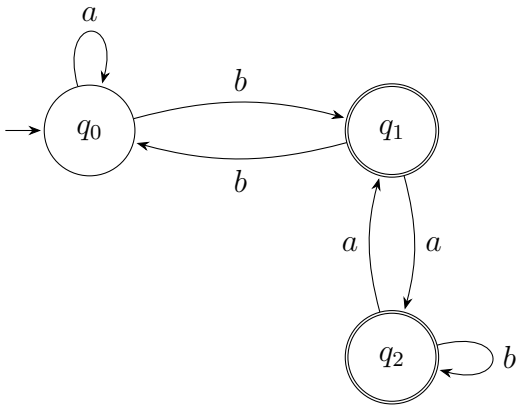
א) עבור האוטומט הדטרמיניסטי (DFA) הבא (אוטומט מורכב בעל 3 מצבים ומעברים צולבים):



ב) שרטטו את האוטומט המוכלל (GNFA) השקול ההתחלתי.

ג) מצאו את שפת האוטומט (ביטוי רגולרי) באמצעות אלגוריתם דילול מצבים, עד להגעה ל-GNFA בעל שני מצבים בלבד. הציגו את השרטוטים לאחר כל שלב דילול.

שאלה 5 עבור האוטומט הדטרמיניסטי (DFA) הבא (אוטומט מורכב הכולל שני מצבים מקבלים ותלות מעגלית):



א) שרטטו את האוטומט המוכלל (GNFA) השקול ההתחלתי.

ב) מצאו את שפת האוטומט (ביטוי רגולרי) באמצעות אלגוריתם דילול מצבים, עד להגעה ל-GNFA בעל שני מצבים בלבד. הציגו את השרטוטים לאחר כל שלב דילול.

שאלה 6 עבור כל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא רגולרית או לא. במידה וכן כתבו ביטוי רגולרי השקול לה. במידה ולא הוכיחו כך ע"י למת הניפוח.

א) $L = \left\{a^n b^m \;\middle|\; n \leq 3, m \geq n^2\right\}$.

ב) $L = \left\{a^{(n+1)^2} \;\middle|\; n \geq 0\right\}$.

ג) $L = \left\{w = w_1 a w_1^R \;\middle|\; w_1 \in \{a,b\}^*\right\}$.

ד) $L = \left\{w = w_1 w_2 w_1^R \;\middle|\; w_1, w_2 \in \{a,b\}^*\right\}$.

ה) $L = \left\{ a^{S_n} \mid S_n = \sum_{i=1}^{n} (5 + 2(i-1)) \right\}$.

שאלה 7 הוכיחו שוויון בין הביטויים הרגולריים הבאים:

$$(1 + 00^*1) + (1 + 00^*1)\,(0 + 10^*1)^*\,(0 + 10^*1) = 0^*1\,(0 + 10^*1)^* \ .$$

שאלה 8 עבור כל אחד מהביטויים הרגולריים הבאים מעל $\{a, b, c\}$:

- $r = (a^*b)^* + (bc^*)^* + (ac)^*$
- $r = (a^*b + b^*a)\,(bc)^*$
- $r = (ab + ac + bc)^*$

א) בנו אוטומט אי-דטרמיניסטי (NFA) שמקבל את הפשה של הביטוי רגולרי, בעזרת אלגוריתם של Thompson.

ב) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי שקול.

שאלה 9 עבור כל אחת של השפות הבאות הוכיחו או הפריכו כי השפה רגולרית.

א) $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid$ האות הראשונה זהה לאות האחרונה $\}$

ב) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#a_w = \#b_w\}$

ג) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ לא כוללת aba וגם לא כוללת $bab\}$

ד) $L = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

ה) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|$ זוגי $\}$

ו) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#a_w \equiv 2 \pmod 3\}$

ז) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ פלינדרום $\}$

שאלה 10 למטה רשימה של תיאורים מילוליים של שפות. עבור כל אתת כתבו ביטוי רגולרי של השפה ותנו תיאור מילולי (פסאודוקוד) של DFA המקבל את השפה.

א) כל המילים שמסתיימות ב- $ababab$.

ב) כל המילים שבהן אין את התבנית $bbbbbbbbb$.

ג) כל המילים שמכילות $abaabaaba$ לפחות פעם אחת.

ד) כל המילים שאורכן מתחלק ב- 3.

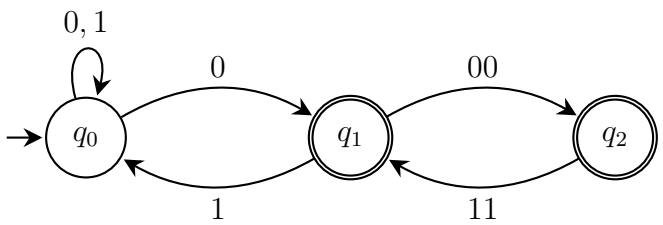
שאלה 11 תהיינה L_1, L_2 שפות. הראו שהשפות המורכבות הבאות גם רגולריות, ותנו ביטוי רגולרי של השפה של כל אחת במונחי.

א) $L_1 \setminus L_2$

ב) $(L_1 \cup L_2)^*$

ג) $(L_1 \cap L_2) \cup \overline{L_1}$

שאלה 12 מצאו ביטוי רגולרי עבור השפה המתקבלת על ידי האוטומט המוכלל בשרטוט.



שאלה 13 הוכח כי השפות הבאות אינן רגולריות.

א) $L = \left\{a^m b^n c^{m+n} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

ב) $L = \left\{0^m 1^n 0^n \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

ג) $L = \left\{0^m 1^n 0^{m^2+n^2} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

ד) $L = \left\{ww \;\middle|\; w \in \{0,1\}^*\right\}$.

ה) $L = \left\{0^m 1^{n+i} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \;\wedge\; 1 \le i \le 2\right\}$.

ו) $L = \left\{w_1 0 w_2 \;\middle|\; w_1, w_2 \in \{0,1\}^* \;\wedge\; w_1 \ne w_2\right\}$

שאלה 14 המירו את הביטוי רגולרי $(ab \cup a)^*$ ל- NFA.

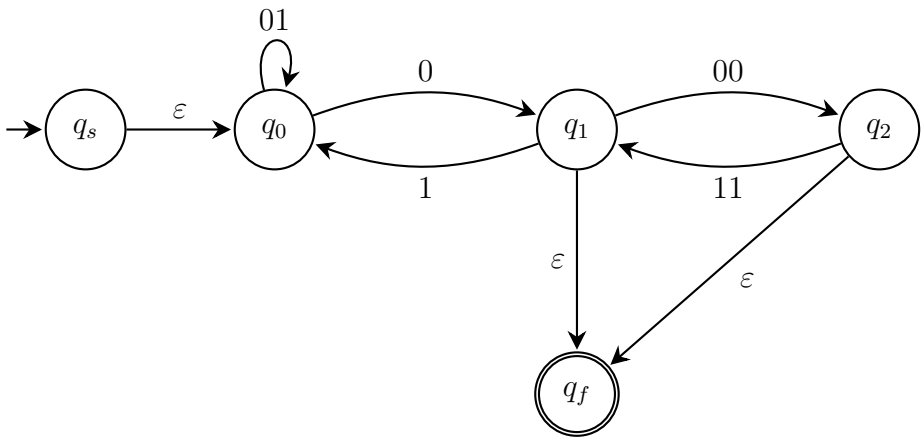
שאלה 15 המירו את הביטוי רגולרי $(a \cup b)^* aba$ ל- NFA.

פתרונות

שאלה 1 כדי למצוא את הביטוי הרגולרי המתאר את השפה שהאוטומט מקבל, נשתמש באלגוריתם דילול מצבים שלמדנו (הפיכה ל-GNFA ודילול מצבים שלב אחר שלב).

שלב 1: הוספת מצב התחלתי ומצב מקבל חדשים

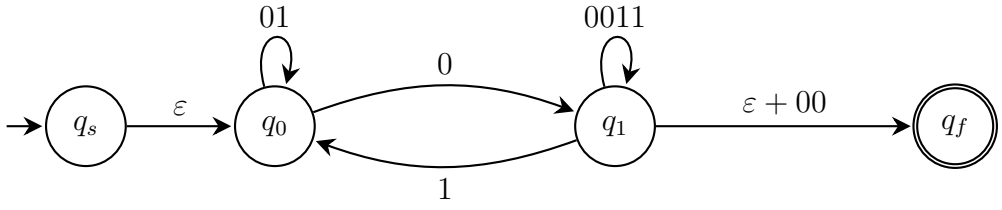
נוסיף מצב התחלתי חדש q_s עם מעבר ε למצב ההתחלתי המקורי q_0. בנוסף, נוסיף מצב מקבל חדש q_f ונייצר אליו מעברי ε מכל המצבים המקבלים המקוריים (q_1 ו-q_2). המצבים q_1 ו-q_2 הופכים להיות מצבים רגילים.



שלב 2: דילול המצב q_2

נסיר את המצב q_2 ונעדכן את המעברים העוברים דרכו:

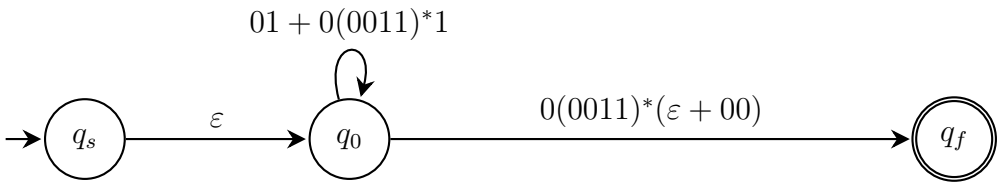
- מסלול מ-q_1 ל-q_1 דרך q_2: המעבר הוא השרשור $00 \cdot 11 = 0011$. תיווצר לולאה חדשה על q_1.
- מסלול מ-q_1 ל-q_f דרך q_2: המעבר הוא השרשור $00 \cdot \varepsilon = 00$. נחבר אותו יחד עם מעבר ה-ε הקיים מ-q_1 ל-q_f, ולכן התווית החדשה תהיה $\varepsilon + 00$.



שלב 3: דילול המצב q_1

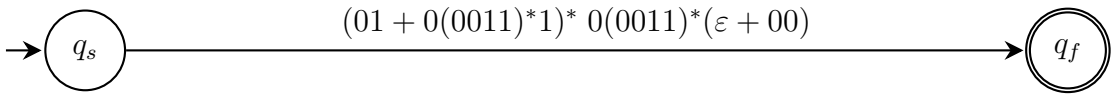
כעת נסיר את המצב q_1 ונעדכן את המעברים העוברים דרכו:

- מסלול מ-q_0 ל-q_0 דרך q_1: מעבר דרך הלולאה של q_1 (מספר פעמים כלשהו) ייתן $0(0011)^*1$. נחבר ביטוי זה ללולאה הקיימת 01 ונקבל את הלולאה החדשה $01 + 0(0011)^*1$.
- מסלול מ-q_0 ל-q_f דרך q_1: המעבר הוא השרשור $0(0011)^*(\varepsilon + 00)$.



שלב 4: דילול המצב q_0 (קבלת הפתרון הסופי)

לאחר שנסיר את q_0, נישאר רק עם המצב ההתחלתי והמצב המקבל. המסלול היחיד מורכב ממעבר ה-ε אל q_0, כוכב (Star) על הלולאה של q_0, ולבסוף המעבר אל q_f.



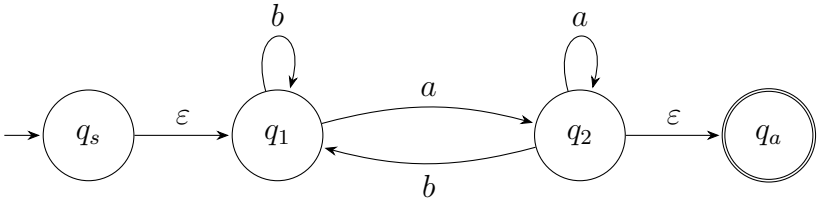
תשובה סופית: הביטוי הרגולרי המתאר את השפה הוא:

$$r = (01 + 0(0011)^*1)^*\ 0(0011)^*(\varepsilon + 00)$$

שאלה 2

א) בניית ה-GNFA ההתחלתי

נוסיף מצב התחלתי חדש q_s ומצב מקבל חדש q_a. נחבר את q_s למצב ההתחלתי הישן עם מסע ε, ואת המצב המקבל הישן נחבר ל-q_a עם מסע ε. נסיר את תכונת הקבלה מ-q_2.

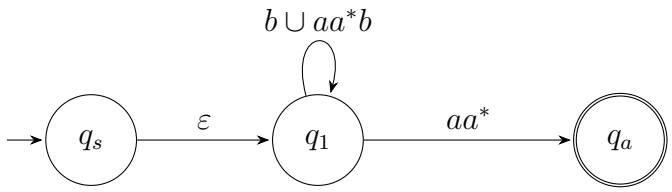


ב) דילול מצבים

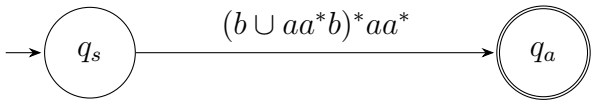
נבחר לדלל תחילה את המצב q_2. המסלולים העוברים דרך q_2 הם:

- מ-q_1 חזרה ל-q_1: קריאת a, לולאה של a^*, וקריאת b. נקבל ביטוי: aa^*b. נוסיף זאת למסע הקיים מ-q_1 לעצמו (b) ונקבל: $b \cup aa^*b$.
- מ-q_1 אל q_a: קריאת a, לולאה של a^*, ואז ε. נקבל ביטוי: aa^*.

האוטומט לאחר דילול q_2:



כעת נדלל את המצב q_1. ישנו מסלול אחד מ-q_s ל-q_a דרך q_1: מסע ε, ואז לולאה של $(b \cup aa^*b)^*$, ולבסוף מעבר עם aa^*.
האוטומט הסופי בעל שני המצבים:

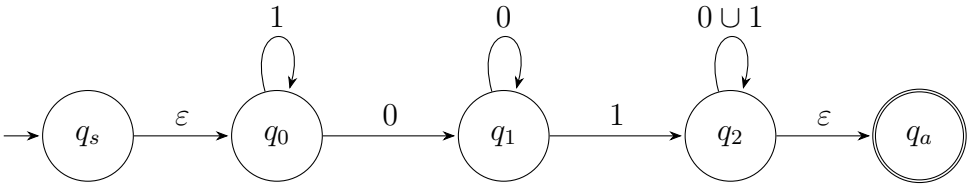


מסקנה: הביטוי הרגולרי עבור שפת האוטומט הוא $(b \cup aa^*b)^*aa^*$ (אשר שקול אגב לביטוי הפשוט יותר $(a \cup b)^*a$).

שאלה 3

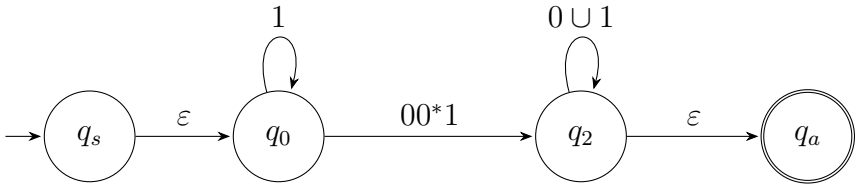
א) בניית ה-GNFA ההתחלתי

בדומה לשאלה הקודמת, נוסיף q_s ו-q_a.

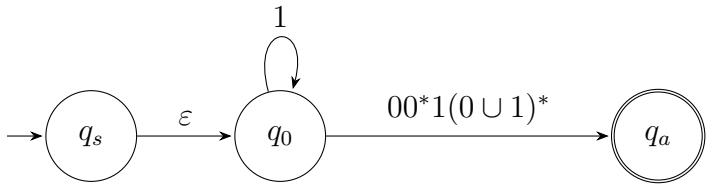


ב) דילול מצבים

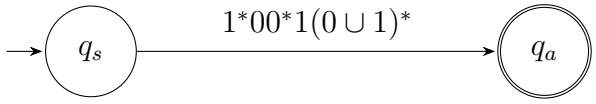
נבחר לדלל תחילה את q_1. המסלול היחיד העובר דרכו הוא מ-q_0 ל-q_2: קוראים 0, מבצעים לולאה של 0^*, ולאחר מכן מעבר עם 1. הביטוי החדש הוא: 00^*1.
האוטומט לאחר דילול q_1:



כעת נדלל את המצב q_2. המסלול מ-q_0 אל q_a דרך q_2 הוא הרכבה של הביטוי 00^*1, ואז הלולאה $(0 \cup 1)^*$, ולסיום המעבר הריק ε. האוטומט לאחר דילול q_2:



לסיום, נדלל את המצב q_0. המסלול ההתחלתי מ-q_s מתחיל ב-ε, מבצע לולאה של 1^*, ואז מתקדם ל-q_a. האוטומט הסופי:

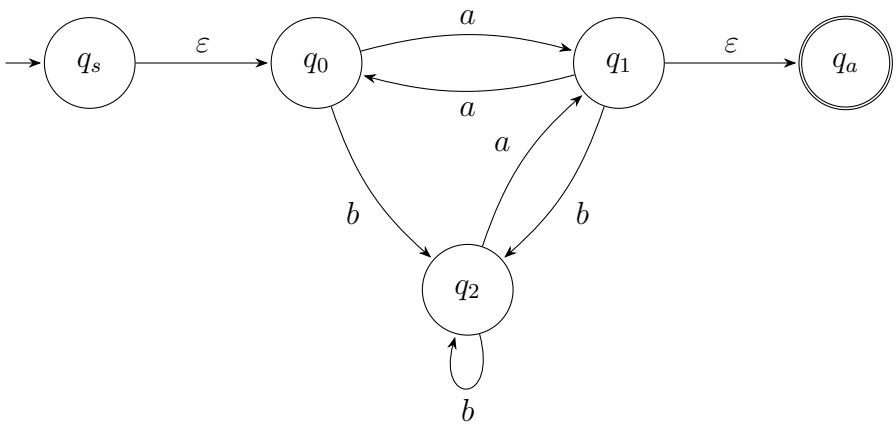


מסקנה: הביטוי הרגולרי עבור שפת האוטומט הוא $1^*00^*1(0 \cup 1)^*$. (השפה מקבלת כל מחרוזת המכילה את הרצף "01").

שאלה 4

א) בניית ה-GNFA ההתחלתי

נוסיף מצב התחלתי חדש q_s ומצב מקבל חדש q_a. נחבר את q_s ל-q_0 עם מסע ε, ואת q_1 המקבל נחבר ל-q_a עם מסע ε. נסיר את תכונת הקבלה מ-q_1.

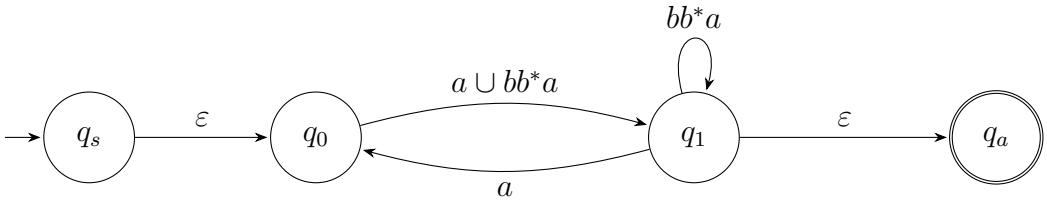


ב) דילול מצבים

נבחר לדלל תחילה את המצב q_2. המסלולים העוברים דרך q_2 הם:

- מ-q_0 אל q_1: קריאת b, לולאה של b^*, וקריאת a. הביטוי שמתקבל הוא bb^*a. זה יתווסף למעבר הקיים (שהוא a) ולכן המעבר המעודכן יהיה $a \cup bb^*a$.
- מ-q_1 אל עצמו (q_1): קריאת b, לולאה של b^*, וקריאת a. הביטוי שמתקבל הוא bb^*a. מעבר זה יוצר לולאה חדשה על q_1.

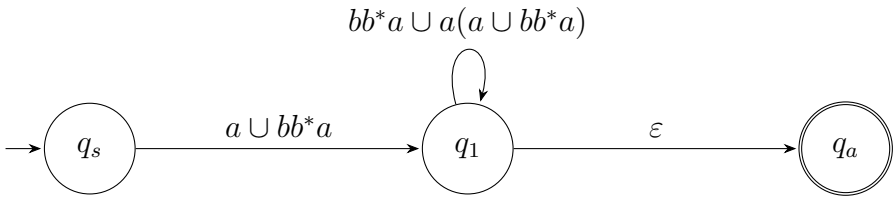
האוטומט לאחר דילול q_2:



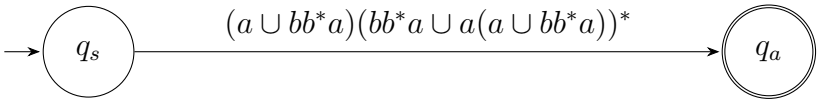
כעת נדלל את המצב q_0. המסלולים העוברים דרך q_0 הם:

- מ-q_s אל q_1: מסע ε, ולאחריו המעבר $a \cup bb^*a$. התוצאה היא הביטוי $a \cup bb^*a$.
- מ-q_1 אל עצמו (q_1): מעבר חזרה ל-q_0 עם a, ואז קדימה עם $a \cup bb^*a$. התוצאה היא הביטוי $a(a \cup bb^*a)$. נוסיף זאת ללולאה שכבר קיימת ונקבל: $bb^*a \cup a(a \cup bb^*a)$.

האוטומט לאחר דילול q_0:



לסיום, נדלל את המצב q_1. ישנו כעת מסלול יחיד מ-q_s אל q_a.
האוטומט הסופי בעל שני המצבים:

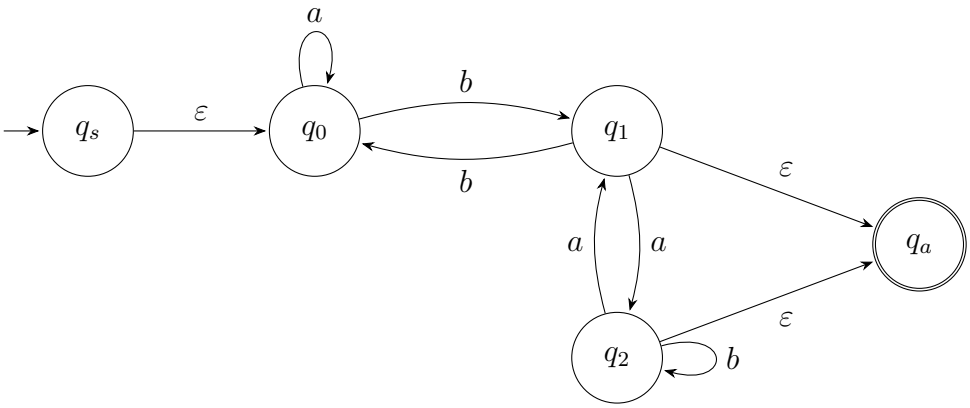


מסקנה: הביטוי הרגולרי עבור שפת האוטומט הוא $(a \cup bb^*a)(bb^*a \cup a(a \cup bb^*a))^*$.

שאלה 5

א) בניית ה-GNFA ההתחלתי

נוסיף מצב התחלתי q_s ומצב מקבל q_a. נחבר את q_s ל-q_0 עם מסע ε. מכיוון שישנם שני מצבים מקבלים (q_1 ו-q_2), נחבר כל אחד מהם ל-q_a עם מסע ε ונסיר מהם את תכונת הקבלה המקורית.

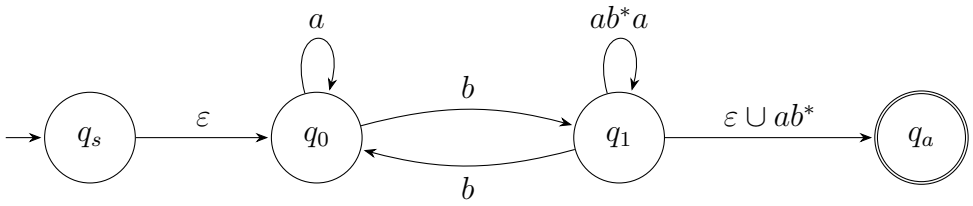


ב) דילול מצבים

נבחר לדלל תחילה את המצב q_2. המסלולים העוברים דרך q_2 הם:

- מ-q_1 אל עצמו (q_1): קריאת a, לולאה של b^*, וקריאת a. הביטוי הוא ab^*a. נוסיף מעבר זה, שייצור לולאה חדשה על המצב q_1.
- מ-q_1 אל q_a: קריאת a, לולאה של b^*, ומעבר אחרון עם ε. הביטוי הוא ab^*. מכיוון שכבר קיים מעבר של ε מ-q_1 ל-q_a, נאחד ביניהם ונקבל: $\varepsilon \cup ab^*$.

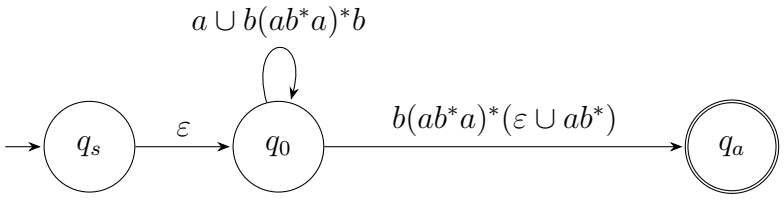
האוטומט לאחר דילול q_2:



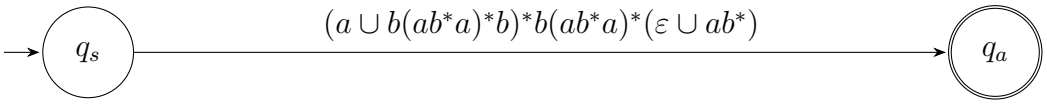
כעת נדלל את המצב q_1. המסלולים העוברים דרך q_1 הם:

- מ-q_0 אל עצמו (q_0): קריאת b, לולאה של $(ab^*a)^*$, ואז b. נתקבל הביטוי $b(ab^*a)^*b$. נאחד אותו עם הלולאה הקיימת (a) ונקבל: $a \cup b(ab^*a)^*b$.
- מ-q_0 אל q_a: קריאת b, לולאה של $(ab^*a)^*$, והתקדמות עם $\varepsilon \cup ab^*$. הביטוי שנקבל: $b(ab^*a)^*(\varepsilon \cup ab^*)$.

האוטומט לאחר דילול q_1:



לסיום, נדלל את המצב q_0. המסלול היחיד הוא מ-q_s ל-q_a, המורכב מהמסע הראשון ε, לולאה מרכזית, וסיומת.
האוטומט הסופי בעל שני המצבים:



מסקנה: הביטוי הרגולרי עבור שפת האוטומט הוא $(a \cup b(ab^*a)^*b)^*b(ab^*a)^*(\varepsilon \cup ab^*)$.

שאלה 6

שאלה 7

שאלה 8

שאלה 9

שאלה 10

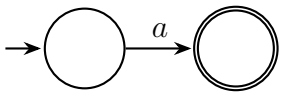
שאלה 11

שאלה 13

שאלה 14

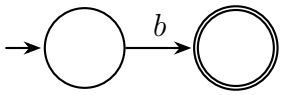
שלב 1)

a



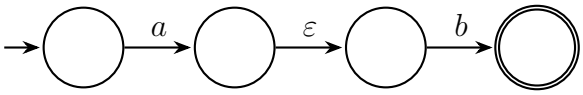
2) שלב

b



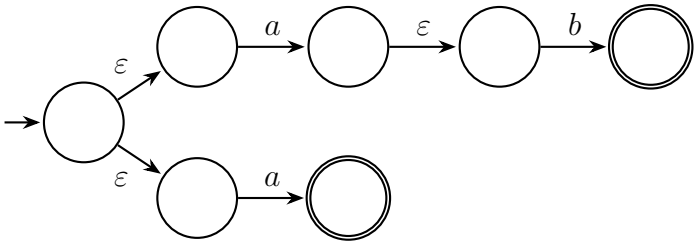
3) שלב

ab



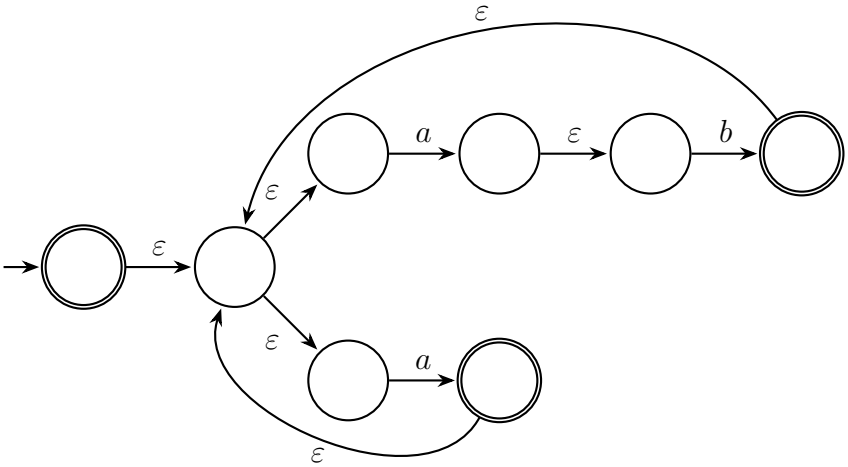
4) שלב

$ab \cup a$



5) שלב

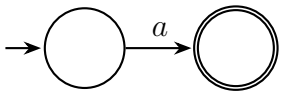
$(ab \cup a)^*$



שאלה 15

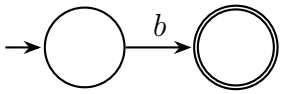
שלב 1)

a



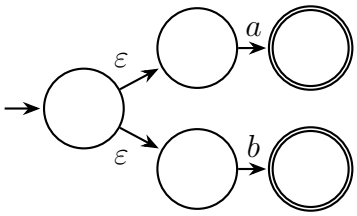
שלב 2)

b



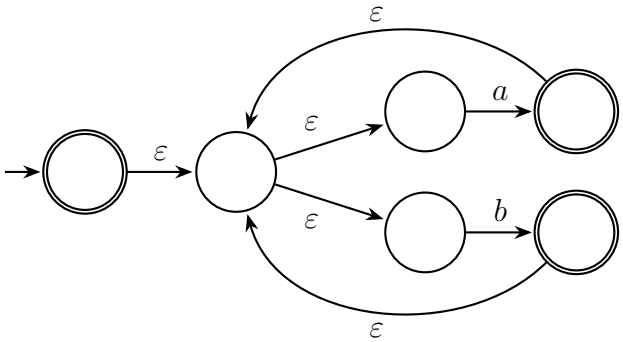
שלב 3)

$a \cup b$



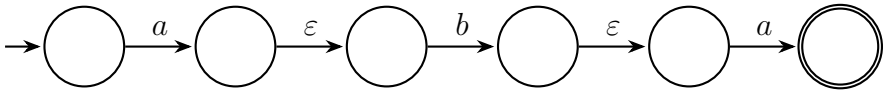
שלב 4)

$(a \cup b)^*$



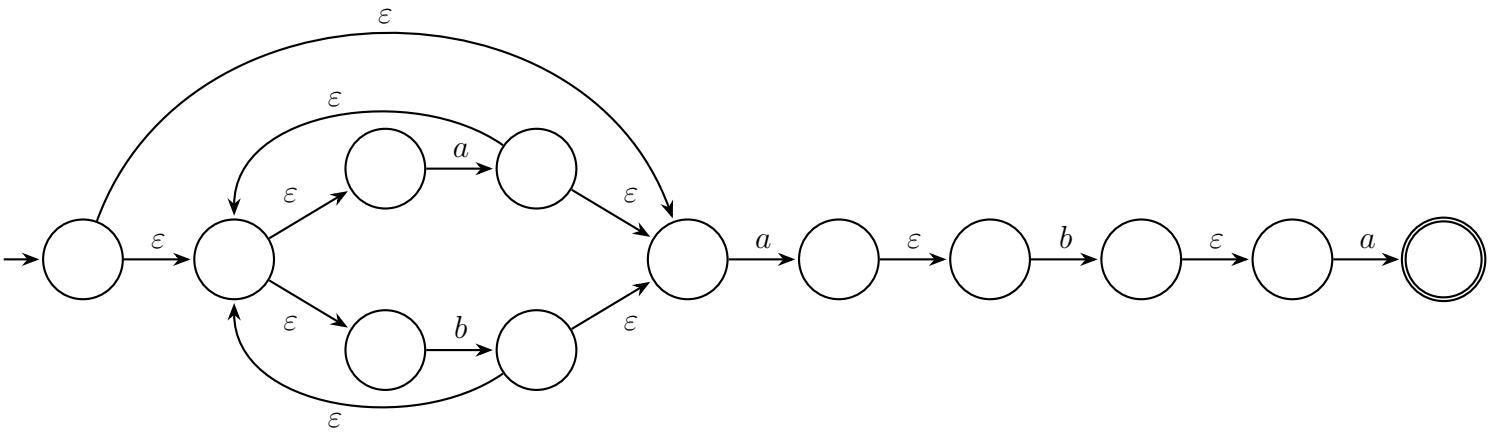
שלב 5)

aba



שלב 6)

$(a \cup b)^* aba$


ε
ε
a
ε
ε
ε
a
ε
b
ε
a
ε
b
ε
ε