תוכן העניינים

1 הגדרות **1**

1.1 סדרות 1
1.2 טורים חיוביים וטורים כלליים 3
1.3 טור חזקות 5
1.4 אלגברה וקטורית 5
1.5 מישורים במרחב 8
1.6 ישרים במרחב 10
1.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה 13
1.8 גבולות ונגזרות חלקיות 16
1.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח 19
1.10 אינטגרלים כפולים 21
1.11 משוואות דיפרנציאליות 22

2 משפטים **23**

2.1 סדרות של מספרים 23
2.2 טורים חיוביים וטורים כלליים 32
2.3 טרוי פונקציות וטורי חזקות 37
2.4 אלגברה וקטורית 38
2.5 מישורים במרחב תלת ממדי 44
2.6 ישרים במרחב תלת ממדי 47
2.7 גבולות ונגזרות חלקיות 51
2.8 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח 51
2.9 אינטגרלים כפולים 56
2.10 אינגרלים קוויים 59
2.11 משוואות דיפרנציאליות 62

1 הגדרות

1.1 סדרות

הגדרה 1: סדרות של מספרים

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

נסמן

$$a_n := a(n) \ .$$

הגדרה 2: גבול של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים כי מספר L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$:

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

נסמן את הגבול של סדרה כך:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

הגדרה 3: התכנסות של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם הגבול של (a_n) קיים (לפי הגדרה 2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

הגדרה 4: סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

   M תקרא **חסם עליון של הסדרה**.

2. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq m$.

   m תקרא **חסם תחתון של הסדרה**.

3. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה . במילים אחרות, אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,

   $$|a_n| \leq K \ .$$

   כל מספר K כזה נקרא **חסם מוחלט** של הסדרה.

הגדרה 5: סדרות מונוטוניות

1. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} \geq a_n \ .$$
2. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} > a_n \ .$$
3. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} \leq a_n \ .$$
4. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} < a_n \ .$$
5. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או יורדת.
6. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית ממש** אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

הגדרה 6:

תהיה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- אומרים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (שואפת לאינסוף) אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים
  $$a_n > M \ .$$
- אומרים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים
  $$a_n > m \ .$$

1.2 טורים חיוביים וטורים כלליים

הגדרה 7: סדרה חשבונית

(א) סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע. את הפרש הסדרה מסמנים באות d.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה חשבונית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

שהפרשה d, אזי מתקיים

$$a_2-a_1=d\,,\ a_3-a_2=d\,,\ a_4-a_3=d\,,$$

וכו'.

(ג) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא

$$a_n=a_1+(n-1)d\ .$$

הגדרה 8: סדרה הנדסית

(א) סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות q.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה הנדסית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

ומנה הסדרה היא q, אזי מתקיים

$$\frac{a_2}{a_1}=q\,,\ \frac{a_3}{a_2}=q\,,\ \frac{a_4}{a_3}=q\,,$$

וכו'.

(ג) בסדרה הנדסית $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots$ שהמנה שלה q מתקיים

$$a_1\neq 0\,,\qquad q\neq 0\ .$$

(ד) כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל ע"י כפל של האיבר הקודם לו במנה q, כלומר מתקיים

$$a_1=qa_2\,,\quad a_3=qa_2\,,\quad a_4=qa_3\,,$$

וכו'.

(ה) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא

$$a_n=q^{n-1}a_1\ .$$

הגדרה 9: טור

ביטוי מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\ldots$$

נקרא **סכום אינסופי** או **טור** .

הגדרה 10: סכום החלקי

הסכום החלקי S_n של הטור יסומן ב- S_n ויוגדר כסכום של n האיברים הראשונים בטור:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1+a_2+\ldots+a_n\ .$$

הגדרה 11: טור חיובי

הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ נקרא **טור חיובי** אם לכל k מתקיים

$$a_k>0\ .$$

הגדרה 12: התכנסות

אם קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, אומרים שהטור **מתכנס** וגבול זה נקרא סכום הטור ומסומן ב- S. כלומר

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(a_1+a_2+\ldots+a_n\right)\ .$$

במקרה כאשר גבול של S_n אינו קיים (או הוא אינסופי) אומרים שהטור **מתבדר**.

הגדרה 13: שארית הטור

הטור

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}a_n$$

נקרא **שארית-** n (או "אנב") של הטור $\sum\limits_{k=1}^{n}a_n$.

אם טור השארית מתכנס אז נסמן את סכומו ב- R_n.

אם טור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אזי

$$R_n=S-S_n$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0\ .$$

הגדרה 14: טור כללי

טור כללי הוא טור מצורה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ אשר כל איברו a_n לא בהכרח חיובי, אלא ישנם אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. לדוגמא הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

הוא סוג של טור כללי הנקרא **טור מחליף סימן** .

הגדרה 15: טור מחליף סימן

טור מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$$

שבו איברים מחליפים סימן לסירוגין נקרא **טור מחליף סימן**.

1.3 טור חזקות

הגדרה 16: טור חזקות
טור חזקות הנם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

כלומר הסכום החלקי הוא פולינום:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N \ .$$

הגדרה 17: טור פונקציות
תהיה $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ סדרת פונקציות. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

נקרא **טור פונקציות** או **טור פונקציונלי**.
אוסף הערכים של x שעבורם הטור מתכנס נקרא **תחום התכנסות של הטור**.
הפונקציה

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} (f_1(x) + \dots + f_N(x))$$

נקרא **סכום הטור** והיא מוגדרת רק עבור ערכי x מתחום ההתכנסות של הטור.

הגדרה 18: טור טיילור
בהינתן פונקציה $f(x)$, גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x = a$, נגדיר **טור טיילור** שלה סביב $x = a$

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

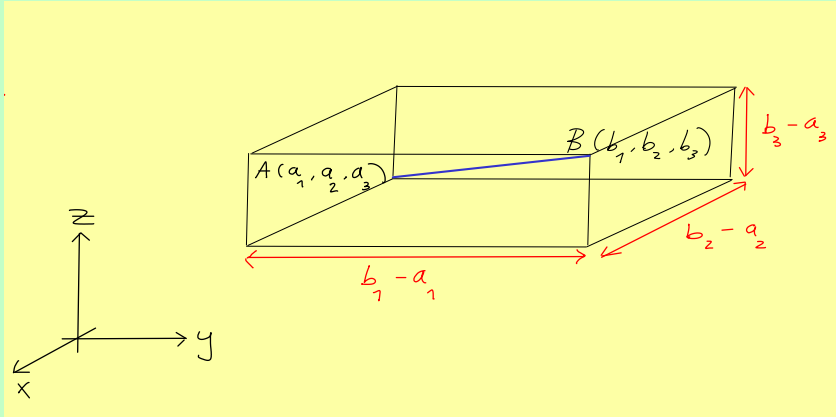
זהו טור חזקות לפי חזקות של $(x-a)$.
טור טיילור הוא טור שסכומים החלקיים הם פולינומי טיילור.

הגדרה 19: טור מקלורן
במקרה $a = 0$ נקבל את **טור מקלורן** של $f(x)$:

$$T_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(a) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

1.4 אלגברה וקטורית

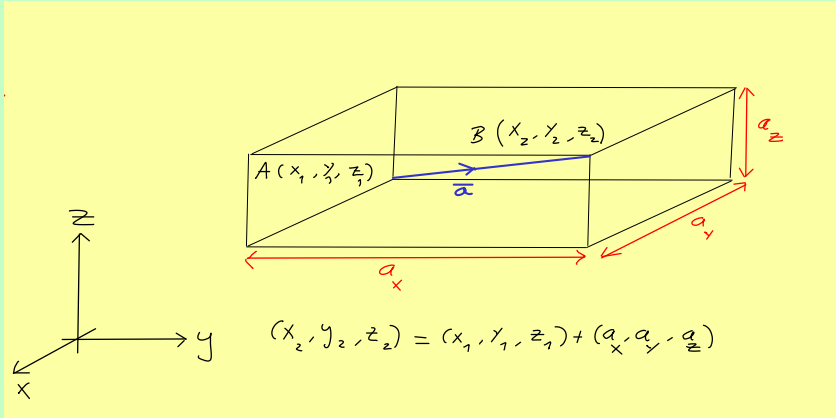
הגדרה 20: וקטור בין שתי נקודות
באופן כללי, בהינתן שתי נקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overline{AB}$ בין A ל- B הינו
$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.



הגודל של הוקטור, לפי פיתגרוסת הינו
$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

הגדרה 21: וקטור כיוון
נתון וקטור $\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ ונתון הנקודה $A = (x_1, y_1, z_1)$ כלשהי. אז כאשר הוקטור $\bar{a}$ מתחיל בנקודה A, הוא עובר לנקודה B בת קואורדינטות (x_2, y_2, z_2) כאשר

$$x_2 = x_1 + a_x \ , \qquad y_2 = y_1 + a_y \ , \qquad z_2 = z_1 + a_z \ .$$



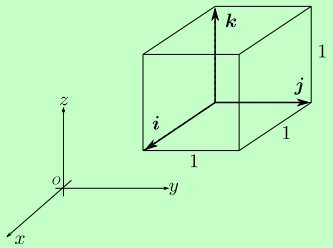
הגדרה 22: הבסיס הסטנדרטי
נגדיר שלושה וקטורים הבאים:

- הוקטור i מקביל לכיוון x וגודלו 1
- הוקטור j מקביל לכיוון y וגודלו 1

- הוקטור k מקביל לכיוון z וגודלו 1

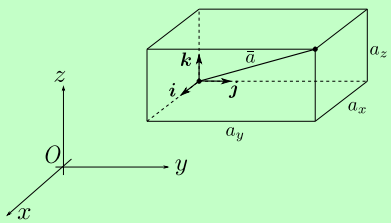
הקבוצה של הוקטורים i, j, k נקרא הבסיס הסטנדרטי. הקואורדינטות של הוקטורים אלו הן:

$$i(1,0,0)\ ,\qquad j(0,1,0)\ ,\qquad k(0,0,1)\ .$$



בהינתן וקטור $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ניתן לבטא אותו במונחים של הבסיס מצורה

$$\bar{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\ .$$



הגדרה 23: וקטור יחידה

בהינתן וקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ בעל אורך $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ נגדיר וקטור יחידה המסומן $\hat{a}$, אשר כיוונו שווה לכיוון של $\bar{a}$ ואורכו שווה 1.
$\hat{a}$ ניתן ע"י הנוסחה

$$\hat{a} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \left(\frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|}\right)$$

הגדרה 24: מכפלת סקלרית

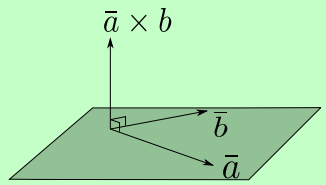
נתונים שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, המכפלת סקלרית שלהם הוא (#1)

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\ .$$

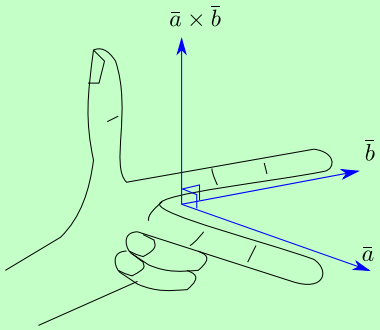
הגדרה 25: מכפלת וקטורית

נתון שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ המכפלת וקטורית מוגדרת להיות

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



המכפלת וקטורית היא וקטור שניצב למישור בו נמצאים הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$.



1.5 מישורים במרחב

הגדרה 26: משוואת המישור

המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz
הינה

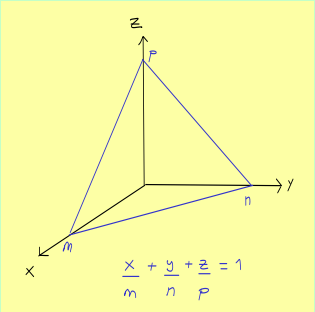
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

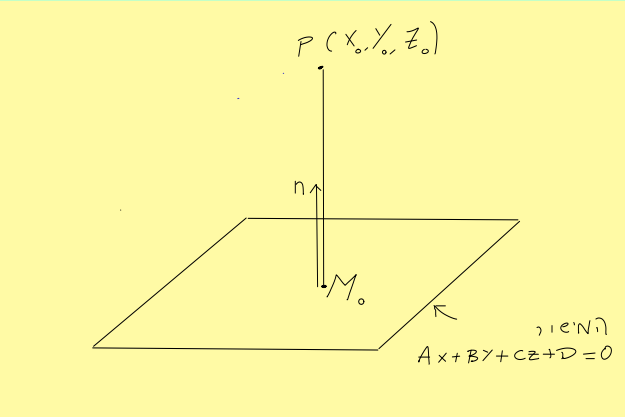
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1\ .$$

בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



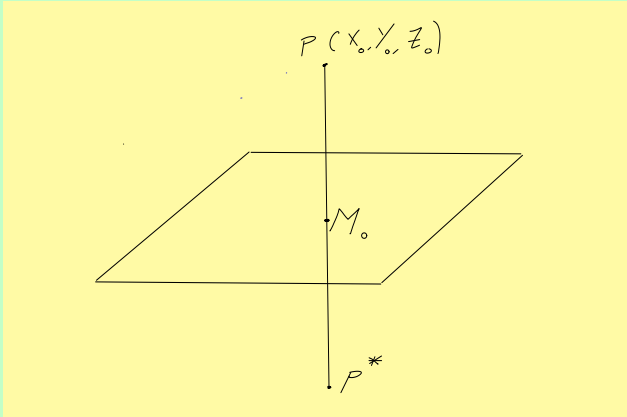
הגדרה 27: היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ על מישור $Ax + By + Cz + D = 0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P. כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.



הגדרה 28: השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות
$P^* = P - 2\overline{M_0P}$,
כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.

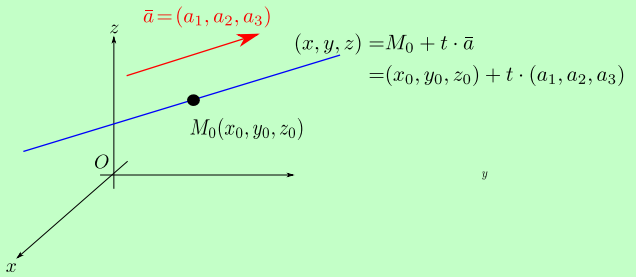


<u>שיטה אחרת ויותר קלה:</u>

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה
$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$
כשאר $\bar{n}$ הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י
$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0\bar{n}$.

1.6 ישרים במרחב

הגדרה 29: משוואת הישר בצורה פרמטרית



$$(x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}$$
$$=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$$

משוואת הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, הוא

$$(x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)\ ,$$

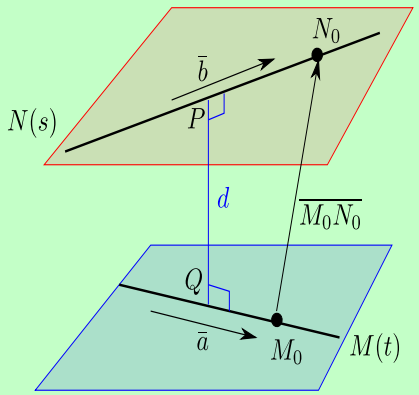
או באופן שקול

$$x=x_0+a_1t\ ,\qquad y=y_0+a_2t\ ,\qquad z=z_0+a_3t\ .$$

הווקטור $\bar{a}$ נקרא וקטור הכיוון, הקואורדינטות (a_1,a_2,a_3) נקראות קואורדינטות הכיוון של הישר.

הגדרה 30: מרחק בין ישרים מצטלבים

יהיו $M(t):\quad (x,y,z)=M_0+t\bar{a}$, $N(t):\quad (x,y,z)=N_0+t\bar{b}$ ישרים מצטלבים. המרחק ביניהם מוגדר להיות המרחק בין השתי נקודות P ו- Q, הקרובות ביותר על הישרים.



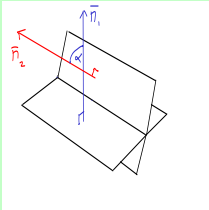
ניתן לחשב את המרחק d ע"י לבחור כל שתי נקודות M_0 ו- N_0 על השני ישרים לפי הנוסחה:

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\ .$$

הגדרה 31: זווית בין מישורים וישרים

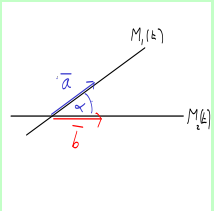
(א) הזווית בין שני מישורים מוגדרת להיות הזוית בין הווקטורים הנורמלים שלהם.

$$\cos\alpha=\frac{|\bar{n}_1\cdot\bar{n}_2|}{|\bar{n}_1|\cdot|\bar{n}_2|}$$



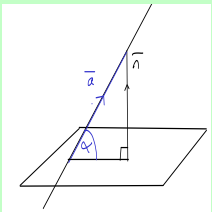
(ב) הזוית בין שני ישרים גם מצטלבים מוגדרת להיות הזוית ביו וקטורים הכיוון שלהם.

$$\cos\alpha=\frac{|\bar{a}\cdot\bar{b}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$$



(ג) הזוית בין מישור לישר מוגדרת להיות הזוית המשלימה לזוית בין הנורמל של המישור ווקטור הכיוון של הישר.

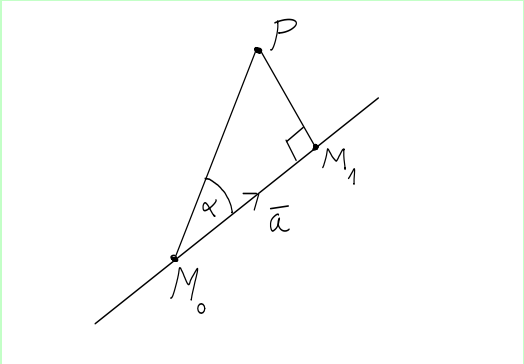
$$\sin\alpha=\frac{|\bar{a}\cdot\bar{n}|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{n}|}$$



הגדרה 32: מרחק בין נקודה לישר

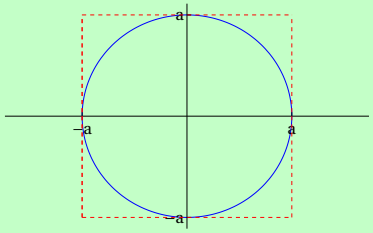
הנקודה הקרובה ביותר M_1 על הישר ל- P תהיה נקודה שבה $\overline{M_1P}$ ניצב ל- $\bar{a}$. ואז

$$d=|\overline{M_1P}|=|\overline{M_0P}|\sin\alpha=\frac{|\overline{M_0P}\times\bar{a}|}{|\bar{a}|}$$



1.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה

הגדרה 33: מעגל

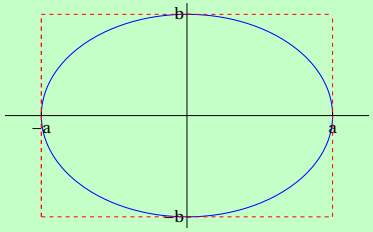


תחום הגדרה:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ .$$

$$-\infty \le x \le \infty \qquad -\infty \le y \le \infty$$

הגדרה 34: אליפסה

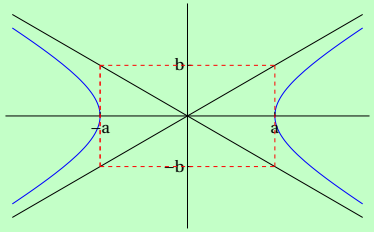


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

תחום הגדרה:

$$-\infty \le x \le \infty \qquad -\infty \le y \le \infty$$

הגדרה 35: היפרבולה 1

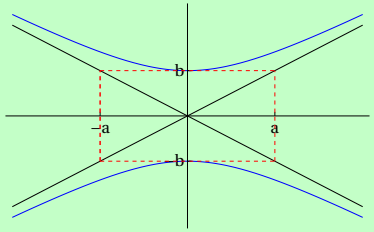


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

תחום הגדרה:

$$x \ge a \ , \quad x \le -a \ , \qquad -\infty \le y \le \infty$$

הגדרה 36: היפרבולה 2



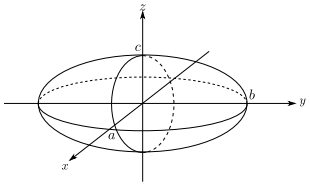
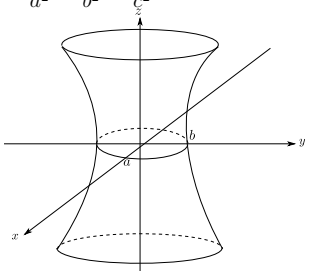
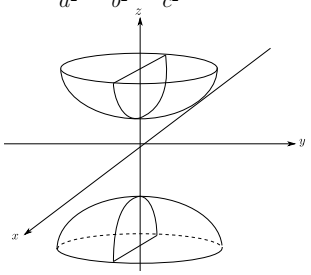
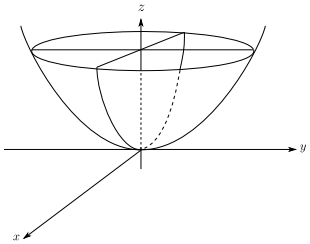
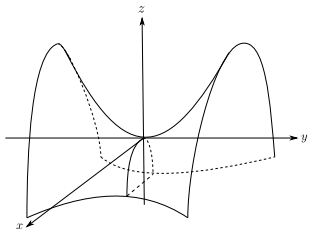
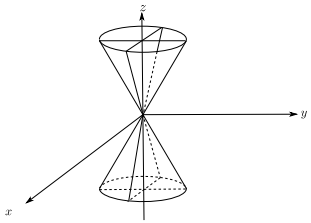
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

תחום הגדרה:

$$-\infty \le x \le \infty \qquad y \ge b \ , \quad y \le -b \ .$$

הגדרה 37: קווי גובה

קו גובה הינו קו החתך של המשטח ע"י המישור האופקי $z = c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ מספר קבוע. מבחינה אנליטית:
קו גובה $L_{f,c}$ של $f(x,y)$ הינו עקום המוגדר במישור xy ע"י המשוואה
$$f(x,y) = c \ .$$

אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		ספירה ($a=b=c=r$) $x^2+y^2+z^2=r^2$
היפרבולויד:	חד יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 	דו יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 
פרבולויד:	אליפטי: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 	היפרבולי: $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 
חרוט אליפטי: $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		

1.8 גבולות ונגזרות חלקיות

הגדרה 38: פונקציה בשני משתנים ופונקציה בשלושה משתנים

פונקציה בשני משתנים זו פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$ תחום ב- $\mathbb{R}^2$.

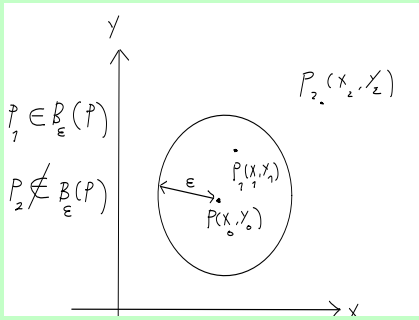
פונקציה בשלושה משתנים זו פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^3$ תחום ב- $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 39: כדור פתוח סביב נקודה

נתונה נקודה $P=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ונתון $\varepsilon>0$, **כדור פתוח סביב הנקודה** P או **סביבה של נקודה** P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P'=(x',y')\in\mathbb{R}^2$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P)=\left\{P'\middle|d(P,P')<\varepsilon\right\}\ ,\qquad \varepsilon>0$$

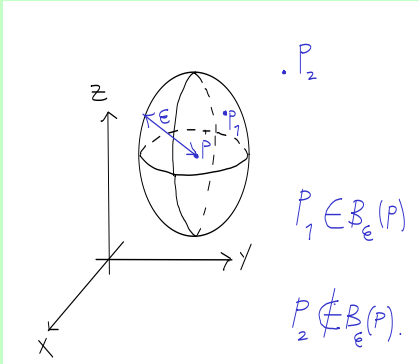
כאשר $d(P,P')$ פונקציה המרחק: $d(P,P')=\left|(x-x')^2+(y-y')^2\right|^{1/2}$.



מאותה מידה, נתונה נקודה $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ ונתון $\varepsilon>0$, כדור פתוח סביב הנקודה P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P)=\left\{P'\middle|d(P,P')<\varepsilon\right\}\ ,\qquad \varepsilon>0$$

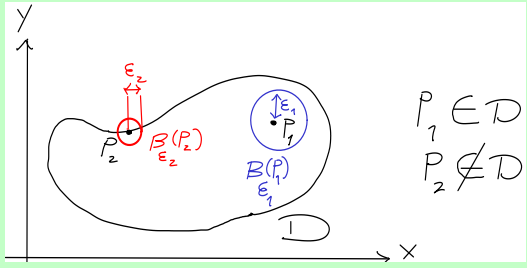
כאשר $d(P,P')$ פונקציה המרחק: $d(P,P')=\left|(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right|^{1/2}$.



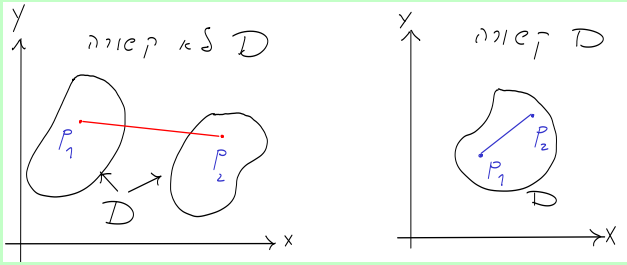
הגדרה 40: תחום פתוח
קבוצה פתוחה D הוא קבוצה, כך שלכל נקודה ב- D, יש סביבה כך שכל הנקודות של סביבה זו מוכלות ב- D.

בפרט, לכל נקודה P_1 בפנים של D קיימת סביבה של P_1 (כלומר כדור סביב הנקודה P_1) כך שכל נקודה בסביבה של P_1 מוכלת ב- D. לעומת זאת, נקודה P_2 כלשהי על הפשה של D לא בקבוצה פתוחה D עצמה, בגלל שלא קיימת אף סביבה של P_2 כך שכל נקודה בסביבתה היא ב- D.

לכן קבוצה פתוחה D כוללת את כל הנקודות בפנים של D אבל לא כוללת את הנקודות על השפה של D.



קבוצה קשירה היא קבוצה כך שכל שתי נקודות ב- D ניתן לחבר ע"י קו שמוכל ב- D.



תחום פתוח הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

תחום סגור הוא האיחוד של תחום פתוח והנקודות על השפה.

הגדרה 41: גבול של פונקציה בכמה משתנים
יהיו $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ו- D תחום פתוח. תהי $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. נסמן ב- $P(x, y)$ נקודה כללית ב- D. אומרים כי הגבול של $f(P)$ ב- P_0 הוא L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|P - P_0| > \delta$ מתקיים $|f(P) - L| < \varepsilon$.

הגדרה 42: כלל הסנדוויץ'
אם

$$h(p) \le f(p) \le g(p)$$

לכל p בסביבת p_0 ו-

$$\lim_{p \to p_0} g(p) = \lim_{p \to p_0} h(p) = L$$

אז

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L$$

הגדרה 43: רציפות
אומרים ש- $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה ב- $p_0 \in D$ אם $\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$.

אומרים ש- f רציפה ב- D אם היא רציפה ב- p_0 לכל $p_0 \in D$.

הגדרה 44: הנגזרת החלקית
נתונה פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר D תחום פתוח ו- $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$. הנגזרת החלקית של f בנקודה p_0 לפי המשתנה x מוגדרת להיות הגבול

$$f'_x(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} .$$

המשמעות היא ש"מקפיאים" את כל המשתנים פרט ל- x, וגוזרים לפי x כאשר חושבים על $y, z, \ldots$ כקבועים (פרמטרים).

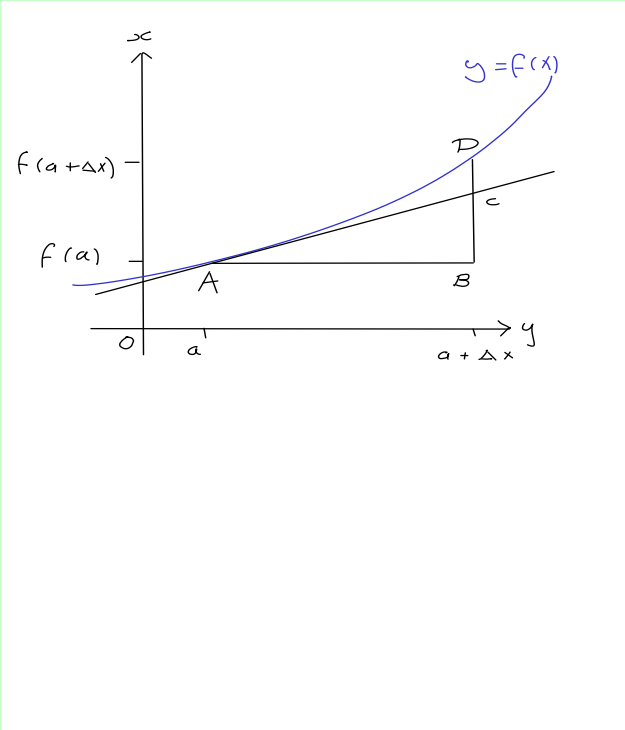
כדומה מגדירים $f'_y(p_0)$, $f'_z(p_0)$.

1.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח

הגדרה 45: הגרדיאנט
תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בשלושה משתנים. הגרדיאנט של f בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ מוגדר להיות הוקטור
$$\nabla f(P) = \left(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\right) .$$

הגדרה 46: הנגזרת המכוונת
הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ בכיוון של הוקטור $\bar{a}\in\mathbb{R}^3$ מוגדרת להיות
$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{1}{|a|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t} .$$
זוהי הנגזרת של f בנקודה P_0 בכיוון של $\bar{a}$.

הגדרה 47: הדיפרנציאל של פונקציה של משתנה אחד
תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע I. נניח ש- $a\in I$ וגם $a+\Delta x\in I$.
נגדיר את הנקודות
$$A=(a,f(a)), \qquad B=(a+\Delta x, f(a)), \qquad D(a+\Delta x, f(a+\Delta x)) .$$
(ראו תרשים).
תהי C הנקודה שבה BD נחתך ע"י המשיק ל- $f(x)$ בנקודה a.



יהי
$$\Delta f = BD = f(a+\Delta x) - f(a)$$
השינוי בערך של f. AC הוא המשיק ל- f ב- a, אז
$$\frac{BC}{AB} = f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad BC = AB\cdot f'(a) = f'(a)\Delta x .$$
נסמן $CD=\epsilon$. בגבול כאשר $\Delta x\to 0$, D יתלכד עם C, ו- $\epsilon\to 0$. כיוון ש- $BD=BC+CD$ אז
$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \epsilon .$$
ע"י לקחת את הגבול כאשר $\Delta x\to 0$, אז הגבול $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f$ נקבל את הגבול בנקודה a. הדיפרנציאל של f בנקודה a מוגדר להיות הגבול הזה, כלומר
$$df := \lim_{\Delta x\to 0}\Delta f = \lim_{\Delta x\to 0} f'(a)\Delta x .$$

הגדרה 48: הדיפרנציאל של פונקציה של שלושה משתנים

נתונה פונקציה $f = f(x,y,z)$. הדיפרנציאל מסדר ראשון שני, שלישי, וכלל מסדר n יוגדרו

$$df = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,y,z)$$

$$d^2 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)$$

$$d^3 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f(x,y,z)$$

$$\vdots$$

$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z)$$

הגדרה 49: נקודת קריטית

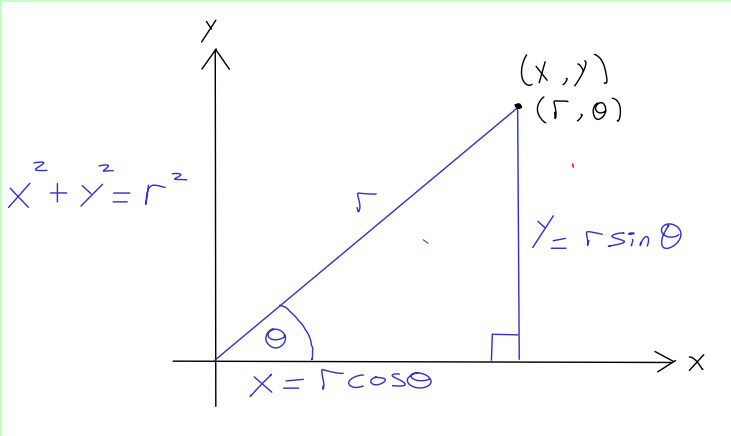
נקודה P שבה

$$f'_x(P) = 0 \ , \qquad \text{ו} \qquad f'_y(P) = 0$$

או $f'_x(P)$, $f'_y(P)$ לא קיים, נקראת נקודת קריטית.

1.10 אינטגרלים כפולים

הגדרה 50: קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\sin\theta \ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \ .$$

1.11 משוואות דיפרנציאליות

הגדרה 51: משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)$$

שקושרת בין משתנה בלתי תלוי x לבין פונקציה $y = y(x)$ ונגזרות של $y(x)$ לפי x, תיקרא משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר או מישדיף).

הגדרה 52: פתרון משוואה דיפרנציאלית רגילה

פתרון של מד"ר

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right) = 0$$

בקטע (a,b) זו פונקציה גזירה n פעמים ב- (a,b) המקיימת את המשוואה. כלומר, לאחר הצבה שלה, המשוואה הופכת לזהות לכל x בקטע.

הגדרה 53: משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

אם ניתן להציג את המשוואה בצורה

$$y' = f(x,y)$$

אז המשוואה נקראת משוואה הפתוחה לגבי הנגזרת. משוואה כזו ניתן גם להציג בצורה

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ .$$

הגדרה 54: פתרון כללי למשוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

פתרון כללי למד"ר מסדר ראשון הוא פונקציה גזירה $y = \phi(x,C)$ כאשר C הוא פרמטר כך שלכל פתרון של המשוואה (פרט אולי למקרים "מיוחדים") מתקבל ב- $\phi(x,C)$ ע"י הצבה של ערך כלשהו ב- C.

הגדרה 55: פתרון כללי

פתרון המתקבל מהפתרון הכללי ע"י הצבה של ערך בפרמטר C נקרא פתרון פרטי.

הגדרה 56: פתרון פרטי

מד"ר מסדר ראשון יחד עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} F(x,y,y') &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

נקראת בעית קושי.

הגדרה 57: פתרון מיוחד
פתרון של מד"ר שאינו מתקבל מהפתרון הכללי כפתרון פרטי עבור ערך כלשהו של הפרמטר C נקרא פתרון מיוחד.

הגדרה 58: משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים
מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה
$$y' = f(x)g(y)$$
או באופן שקול
$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

2 משפטים

2.1 סדרות של מספרים

משפט 1:
הוכיחו כי
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \ .$$

הוכחה:
מספיק להראות שקיים טבעי N כך שלכל $\epsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$ כאשר $a_n = \frac{1}{n}$ ו- $L = 0$.
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \iff \frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon} \ ,$$
כאשר $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$ בגלל ש- $n = 1, 2, 3, \ldots$ לכן $\frac{1}{n}$ תמיד חיובי. לפיכך לכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי $N > \frac{1}{\epsilon}$ כך שלכל $n > N > \frac{1}{\epsilon}$ מתקיים $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. לכן הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ■

משפט 2:
הוכיחו כי
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \ .$$

הוכחה:
מספיק להראות שקיים טבעי N כך שלכל $\epsilon > 0$ ולכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$ כאשר $a_n = \frac{n}{n+1}$ ו- $L = 1$.
$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon \iff \left|\frac{-1}{n+1}\right| < \epsilon \iff \frac{1}{n+1} < \epsilon \iff n+1 > \frac{1}{\epsilon} \iff n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \ ,$$
כאשר $\left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$ בגלל ש- $n = 1, 2, 3, \ldots$ לכן $\frac{-1}{n+1}$ תמיד שלילי, שממנו נובע כי $\left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}$.
לפיכך לכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי $N > \frac{1}{\epsilon} - 1$ כך שלכל $n > N > \frac{1}{\epsilon} - 1$ מתקיים $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \epsilon$.

לכן הוכחנו כי $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. ■

משפט 3:
הסדרה $a_n = (-1)^n$ לא מתכנסת.

הוכחה:
נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = \frac{1}{2}$. מההנחה קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \frac{1}{2}$.

בפרט, $|a_{2N} - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|a_{2N+1} - L| < \frac{1}{2}$.

ז"א $|1 - L| < \frac{1}{2}$ וגם $|-1 - L| < \frac{1}{2}$. לפיכך
$$|1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < 1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < -L < -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < L < \frac{3}{2}$$
ו
$$|-1 - L| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < -1 - L < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < -L < \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < L < -\frac{1}{2} \ .$$
סתירה. ■

משפט 4:
הסדרה $a_n = (-1)^n \cdot n$ לא מתכנסת.

הוכחה: נוכיח דרך השלילה. נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ עבור L סופי.

ז"א **לכל** $\epsilon > 0$, קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon$.

נקבע $\epsilon = 1$. מההנחה קיים $N \in \mathbb{N} > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < 1$.

בפרט, $|a_{2N} - L| < 1$ וגם $|a_{2N+1} - L| < 1$.

ז"א $|2N - L| < 1$ וגם $|-2N - 1 - L| < 1$. לפיכך
$$|2N - L| < 1 \Rightarrow -1 < 2N - L < 1 \Rightarrow -2N - 1 < -L < -2N + 1 \Rightarrow 2N - 1 < L < 2N + 1$$
ו
$$|-2N - 1 - L| < 1 \Rightarrow -1 < -2N - 1 - L < 1 \Rightarrow 2N < -L < 2N + 2 \Rightarrow -2N - 2 < L < -2N \ .$$
סתירה. ■

משפט 5: יחידות של גבול
אם לסדרה קיים גבול אז הוא יחיד.

הוכחה: נוכיח המשפט דרך השלילה.
נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$ עבור $L_1 \neq L_2$.

נבחר $\epsilon = \frac{|L_2 - L_1|}{2}$.

(a_n) מתכנסת ל- L_1. לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_1$, מתקיים $|a_n - L_1| < \epsilon$.

(a_n) מתכנסת ל- L_2. לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_2$, מתקיים $|a_n - L_2| < \epsilon$.

$|L_1 - L_2| = |(L_1 - a_n) + (a_n - L_2)| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = |L_2 - L_1|$.

ז"א קיבלנו ש $|L_1 - L_2| < |L_2 - L_1|$. סתירה. ■

משפט 6: אריתמטיקה חשבון של גבולות

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ ו $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

יהיה $c \in \mathbb{R}$ קבוע. התכונות הבאות מתקיימות:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) = c \cdot A$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \pm B$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right) = A \cdot B$
4. אם $B \neq 0$ (ולכן $b_n \neq 0$ עבור n מספיק גדול) אז $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$.

הוכחה:

1. יהי $\epsilon > 0$ ו- $c \neq 0$.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (נתון), אז קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{|c|}$.

לכן

$$|ca_n - cA| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon .$$

■.

2. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

יהי N הגדול מבין N_A ו N_B. אז לכל $n > N$,

$|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2}$ ו $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2}$.

לכן לכל $n > N$,

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) - (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon .$$

■.

3. יהי $\epsilon > 0$.

a_n מתכנסת ל A אז קיים $N_A \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_A$ מתקיים $|a_n - A| < \frac{\epsilon}{2|B|}$.

b_n מתכנסת ל B אז קיים $N_B \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_B$ מתקיים $|b_n - B| < \frac{\epsilon}{2A'}$ כאשר $|a_n| < A'$ לכל n (a_n מתכנסת ולכן חסומה לפי משפט 18 למטה).

$$\begin{aligned} |a_nb_n - AB| &= |a_nb_n - a_nB + a_nB - AB| \\ &= |a_n(b_n - B) + B(a_n - A)| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - B| + |B| \cdot |a_n - A| \\ &< A' \cdot \frac{\epsilon}{2A'} + |B| \cdot \frac{\epsilon}{2|B|} = \epsilon \end{aligned}$$

■.

4. בעזרת 3, מספיק להראות כי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

יהי $\epsilon > 0$.

b_n מתכנסת אז הסדרה חסומה (ראו משפט 18 למטה).

ז"א קיים $m \in \mathbb{R}$ כך ש $|b_n| > m$.

b_n מתכנסת, אז קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים
$|b_n - B| < m \cdot |B|\epsilon$

ואז

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n \cdot B}\right| < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{|b_n| \cdot |B|} < \frac{m \cdot |B| \cdot \epsilon}{m \cdot |B|} = \epsilon .$$

■

משפט 7:

אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

הוכחה:

- נניח בשלילה כי $(a_n + b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
- קיים L סופי כך ש: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L$.

- a_n מתכנסת אז קיים A סופי כך ש: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.
- לכן:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = L \quad \Rightarrow \quad A + \lim_{n\to\infty} b_n = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} b_n = L - A$$

- לכן $\lim_{n\to\infty} b_n$ מתכנס למספר סופי $L - A$.
- זאת בסתירה לכך ש- b_n מתבדרת.

■

משפט 8:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתבדרת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = n$ מתבדרת ו- $b_n = 2-n$ מתבדרת אבל הסדרה: $a_n + b_n = 2$ מתכנסת.
- $a_n = n^2$ מתבדרת ו- $b_n = \frac{1}{n} - n^2$ מתבדרת אבל הסדרה: $a_n + b_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת.

■

משפט 9:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז $(a_n+b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתכנסת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = n$ מתבדרת ו- $b_n = n$ מתבדרת אבל הסדרה $a_n + b_n = 2n$ מתבדרת.
- $a_n = n$ מתבדרת ו- $b_n = n^2$ מתבדרת אבל הסדרה $a_n + b_n = n + n^2$ מתבדרת.

■

משפט 10:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתבדרת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = (-1)^n$ מתבדרת ו- $b_n = (-1)^n$ מתבדרת אבל הסדרה $a_nb_n = (-1)^{2n} = 1$ מתכנסת.
-

■

משפט 11:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת. אז הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתכנסת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = n$ מתבדרת ו- $b_n = n$ מתבדרת לכן הסדרה $a_n\cdot b_n = n^2$ מתבדרת.
- $a_n = (-1)^n$ מתבדרת ו- $b_n = n$ מתבדרת לכן $a_n\cdot b_n = (-1)^n\cdot n$ סדרה מתבדרת.

■

משפט 12:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתבדרת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = \frac{1}{n}$, ו $b_n = n$.

  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ מתכנסת ו- (b_n) מתבדרת.

  מצד שני: $a_n\cdot b_n = 1$ לפיכך $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 1$ ולכן a_nb_n מתכנסת.
- $a_n = \frac{1}{n^3}$, ו $b_n = n^2$.

  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ מתכנסת ו- (b_n) מתבדרת.

  מצד שני: $a_n\cdot b_n = \frac{1}{n}$ לפיכך $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ולכן a_nb_n מתכנסת.

■

משפט 13:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתבדרת אז הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ לא תמיד מתכנסת.

הוכחה:
<u>דוגמאות נגדיות</u>

- $a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת ו- $b_n = n^2$ מתבדרת.

  $a_nb_n = n$ לכן $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$ לכן הסדרה a_nb_n מתבדרת.
- $a_n = \frac{1}{n}$ מתכנסת ו- $b_n = n^3$ מתבדרת.

  $a_nb_n = n^2$ לכן $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ לכן הסדרה a_nb_n מתבדרת.

■

משפט 14:
אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ו- $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אז הסדרה $(a_n\cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ תמיד מתכנסת.

הוכחה:

- נניח בשלילה כי a_nb_n מתבדרת.

- a_n מתכנסת אז קיים A סופי: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ וגם b_n מתכנסת אז קיים B סופי: $\lim_{n\to\infty} a_n = B$.
- מכאן $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = AB = L$ כאשר L מספר ממשי סופי.
- זאת סתירה לכך ש: $a_n b_n$ מתבדרת.

■

משפט 15: משפט הסנדוויץ'

תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות כך ש

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$$

ונניח כי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$a_n \le b_n \le c_n \ .$$

אז

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L \ .$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$.
מההנחה קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$|a_n - L| < \epsilon \ , \qquad |c_n - L| < \epsilon \ .$$

ז"א

$$-\epsilon < a_n - L < \epsilon \ , \qquad -\epsilon < c_n - L < \epsilon \ .$$

לכן

$$-\epsilon < a_n - L \le b_n - L \le c_n - L < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |b_n - L| < \epsilon \ .$$

■

משפט 16: גבול של סדרה שווה לגבול של הפונקציה

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה.

אם $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אז $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$

כאשר $n \in \mathbb{N}$, ו $a_n = f(n)$ סדרה.

הוכחה: נתון כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. לכן לפי ההגדרה של גבול של פונקציה ב ∞, לכל $\epsilon > 0$ קיים $m > 0$ כך שלכל $x > m$,

$$|f(x) - L| < \epsilon \ .$$

ז"א, עבור $N \in \mathbb{N}$, לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > m > 0$ כך שלכל $n > N > m$,

$$|f(n) - L| < \epsilon \ .$$

לכן, לפי הגדרה 2, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

■

משפט 17: מונוטוניות של סדרה והפוקנציה

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה.

אם $f(x)$ מונוטונית (עולה או יורדת) אז גם $a_n = f(n)$ מונוטונית (עולה או יורדת בהתאמה).

הוכחה: אם $f(x)$ עולה מונוטונית, אז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 > x_1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_2) \ge f(x_1) \ .$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = n$, $x_2 = n+1$. $x_2 > x_1$ לכן

$$f(n+1) > f(n) \ .$$

■

אם $f(x)$ יורדת מונוטונית, אז לכל $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$x_2 < x_1 \qquad \Rightarrow \qquad f(x_2) \le f(x_1) \ .$$

עבור $n \in \mathbb{N}$ נציב $x_1 = n$, $x_2 = n+1$. $x_2 > x_1$ לכן

$$f(n+1) \le f(n) \ .$$

■

משפט 18:

כל סדרה מתכנסת היא חסומה.

הוכחה: מסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$.
נניח כי $\epsilon = 1$. קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \epsilon = 1$.
ז"א

$$-1 < a_n - L < 1 \quad \Rightarrow \quad L - 1 < a_n < L + 1 \ .$$

נסמן

$$M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, L+1\} \ , \qquad m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, L-1\} \ ,$$

ואז לכל $n \le N$:

$$m \le a_n \le M \ .$$

לכן (a_n) חסומה. ■

משפט 19: סדרה חסומה ומונוטונית מתכנסת

סדרה חסומה ומונוטונית היא מתכנסת.

הוכחה: נניח כי (a_n) עולה וחסומה.

ז"א $a_{n+1} > a_n$ לכל n, וקיים M כך ש $|a_n| < M$. לכל n.

נסמן ב L את החסם מלמעלה הקטן ביותר של הסדרה. נוכיח כי

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \ . \tag{*1}$$

יהי $\epsilon > 0$. כיוון ש L חסם עליון הקטן ביותר של (a_n), אז קיים a_N כך ש $L - \epsilon < a_N \le L$.

כיוון ש (a_n) עולה מונוטונית, אז לכל $n > N$, מתקיים

$$L - \epsilon < a_N \le a_n \le L \ .$$

$L < L + \epsilon$, לכן נקבל

$$L - \epsilon < a_N \le a_n \le L < L + \epsilon \ . \tag{*2}$$

לכן לכל $n > N$:

$$L - \epsilon < a_n < L + \epsilon \ . \tag{*3}$$

ז"א נתון $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,
$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$
ז"א $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$.

■

משפט 20:
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. מתקיים
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \ .$$

הוכחה: $\Rightarrow$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,
$$|a_n - 0| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad ||a_n| - 0| < \epsilon \ .$$

$\Leftarrow$

נתון $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$,
$$||a_n| - 0| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n| < \epsilon \qquad \Rightarrow \qquad |a_n - 0| < \epsilon \ .$$

■

משפט 21:
יהי $q \in \mathbb{R}$ כך ש $|q| < 1$. אז
$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \ .$$

הוכחה:

1. אם $q = 0$ אז $q^n = 0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.
2. אם $0 < q < 1$ אז לכל $n \in \mathbb{N}$,
$$0 < q^{n+1} < q^n$$
ולכן (q^n) יורדת וחסומה. לכן לפי 19, הסדרה מתכנסת.

נסמן $L = \lim\limits_{n\to\infty} q^n$.
$$L = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \cdot \lim_{n\to\infty} q^n = q \cdot L$$
ז"א
$$(1-q)L = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L = 0 \ .$$
3. אם $-1 < q < 0$ אז $0 < |q| < 1$. לכן לפי **2.**, $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$, ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$.

אז לפי למה 20, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

■

2.2 טורים חיוביים וטורים כלליים

משפט 22: הסכום של סדרה חשבונית
נסמן את סכום n האיברים הראשונים בסדרה ב- S_n, כלומר
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \ .$$
הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית שהפרשה d ואיבר הרשאונה שלה a_1 ניתן ע"י הנוסחה
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
או שקול
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \ .$$

משפט 23: תנאי הכרחי להתכנסות טור
אם הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה: שים לב שלכל n טבעי, $a_n = S_n - S_{n-1}$ ולפיו אם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ כך ש- S סופי, אז
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0 \ .$$

■

משפט 24: תנאי מספיק להתבדרות טור
אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ אז הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר.

משפט 25:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$
ולכן בבדיקה המתאימה אינם חשובים סימני איבריו של הטור.

משפט 26:

1. הורדת מספר סופי של איברים מהטור אינה משפיעה על התכנסותו או התבדרותו.
2. אם $c \in \mathbb{R}$ מספר ממשי שונה מאפס, אז אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתכנס.

   אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ מתבדר. מתקיים
$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ .$$
3. אם הטורים $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז גם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ מתכנס ומתקיים
$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ .$$

4. אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (ואומרים כי הטור מתכנס בהחלט).

משפט 27: מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים

אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 1$.

(1) אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתכנס אז $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס, כך ש-

$$\int_1^{\infty} dx\, f(x) \leq S \leq \int_1^{\infty} dx\, f(x) + f(1)\ .$$

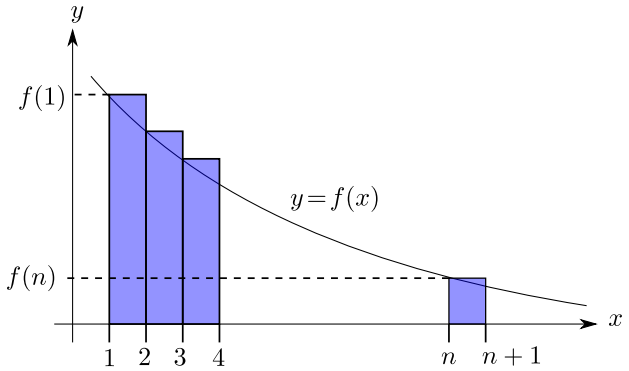
(2) אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתבדר אז $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתבדר.

במקרה זה התכנסות הטור $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ שקולה להתכנסות האינטגרל הלא אמיתי $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$.

הוכחה: אם פונקציה חיובית $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום $x \geq 1$ אזי

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$$

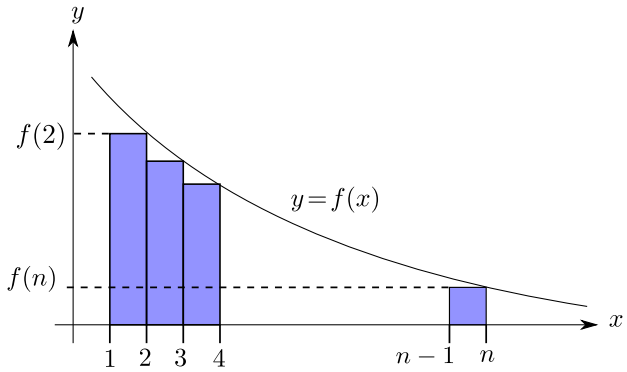
בגלל ש- $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מעל הקו כמתואר בהתרשים.



מאותה מידה,

$$f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq \int_1^{n} f(x)\, dx$$

בגלל ש- $f(2) + f(2) + \ldots + f(n)$ שווה לסכום של השטחים של המלבנים מתחת הקו כמתואר בהתרשים.



הפונקציה חיובית לכן

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\, dx\ .$$

בסה"כ נקבל את אי-השוויון

$$\int_1^{n+1} f(x)\, dx \leq f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(n) \leq f(1) + \int_1^{n} f(x)\, dx\ .$$

נקח את הגבול $n \to \infty$ ונקבל

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\, dx\ .$$

■

משפט 28: מבחן השוואה

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n \leq b_n$ לכל n החל ממספר מסוים k. אזי

1. אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

משפט 29: מבחן השוואה הגבולי

יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ אז הטורים

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים או מתבדרים ביחד.

משפט 30: מבחן דלמבר (d'Alembert)

נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. אם קיים הגבול

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

אז

1. אם $q<1$ הטור מתסנס.
2. אם $q>1$ הטור מתבדר.
3. אם $q=1$ המבחן דלמבר אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

משפט 31: מבחן קושי (Cauchy)

נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. אם קיים הגבול

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\equiv\lim_{n\to\infty}{a_n}^{1/n}$$

(כאשר הסימונים $\sqrt[n]{a_n}\equiv{a_n}^{1/n}$ שקולים ואומרים השורש ה-n של a_n)
אז

1. אם $q<1$ הטור מתסנס.
2. אם $q>1$ הטור מתבדר.
3. אם $q=1$ המבחן קושי אינו נותן תשובה על התכנסות הטור.

משפט 32: התכנסות של טור כללי

1. אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתכנס אז גם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).
2. אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibinz).
3. אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

משפט 33: מבחן לייבניץ (Leibniz)

מבחן לייבניץ קשור לטור מחליף סימן.

נתון טור מחליף סימן מצורה

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n\ ,\qquad a_n>0\ .$$

אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:

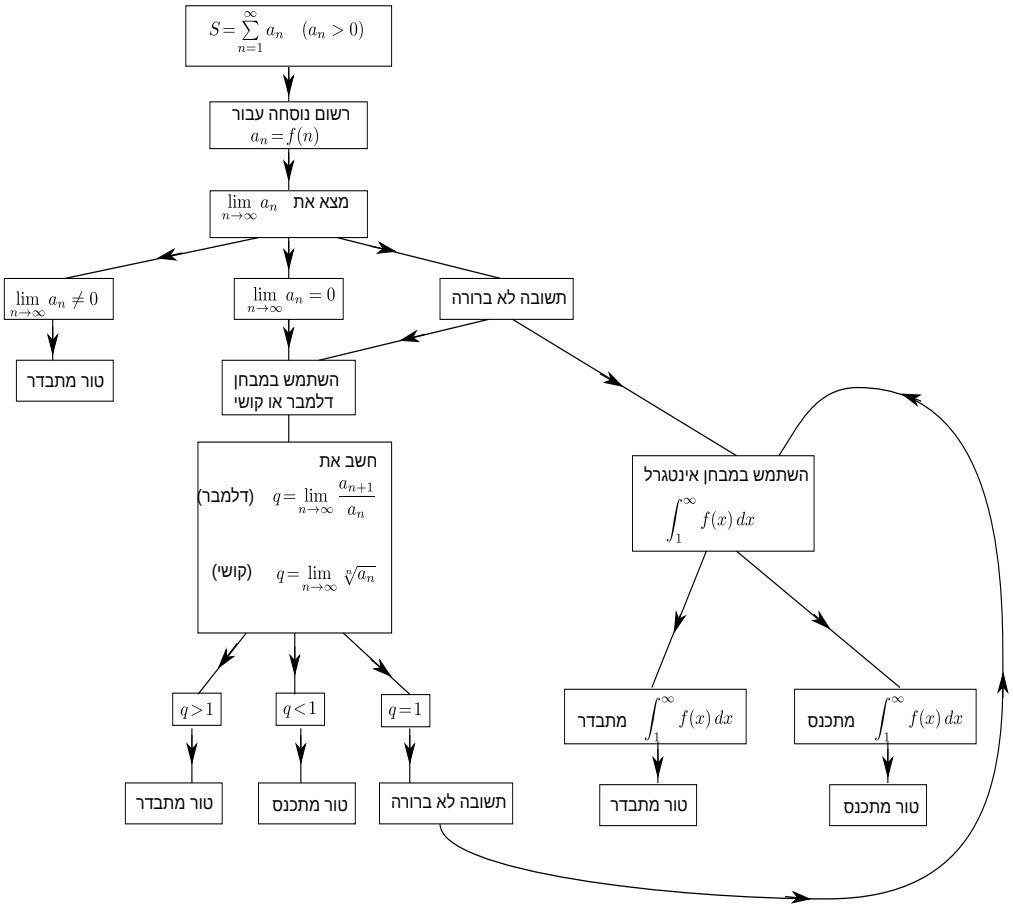
1. $a_n>0$ לכל n.
2. $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת ($a_{n+1}\le a_n$ לכל n)
3. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

אז הטור מתכנס ומתקיים

$$0<S<a_1\ ,$$

ו-

$$|S-S_N|<a_{N+1}-1\ .$$



כיצד בודקים התכנסות טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$?

1. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.
2. אם $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ בודקים את התכנסות של הטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ע"י השיטה המתואר בתרשים לעיל.
3. אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט.
4. אם $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתבדר אז נשארת האפשרות שהטור הנתון $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בתנאי .
5. כדי לבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ במקרה האחרון ניתן להשתמש בשיטה ליבנייץ אשר טוען

אם סימנים איברי הטור מתחלפים והסדרה $\{|a_n|\}$ מונוטונית יורדת ושואפת לאפס אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

2.3 טרוי פונקציות וטורי חזקות

משפט 34: רדיוס התכנסות

לכל טור חזקות קיים מספר חיובי R, כלומר $0 \le R \le \infty$ כך שהטור מתכנס לכל x בתחום $|x| < R$ ומתבדר לכל x בתחום $|x| > R$.

בפרט:

אם $R = 0$ אז הטור מתכנס רק ב- $x = 0$.

אם $R = \infty$ אז הטור מתבדר לכל x.

המספר הזה R נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור.

משפט 35: נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

אם הגבול קיים.

משפט 36: נוסחת קושי לרדיוס התכנסות

רדיוס התכנסות של טור חזקות ניתן ע"י הנוסחה

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n}\right)^{1/n}$$

אם הגבול קיים.

משפט 37: אינטגרציה וגזירה איבר איבר

יהיה $0 < R \le \infty$ רדיוס התכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אזי לכל $|x| < R$ מתקיים"

1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \end{aligned}$$

2)

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n + C$$

הטור המתקבל לאחר גזירה או אינטגרציה הם בעלי אותו רדיוס התכנסות R.

משפט 38: התכנסות של טור טיילור

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בסביבת הנקודה a. אם קיים $M > 0$ כך שלכל $n \ge 0$ ולכל $x \in (a-\delta, a+\delta)$ מתקיים

$$|f^{(n)}(a)| \le M$$

אז בקטע $(a-\delta, a+\delta)$ הטור טיילור של $f(x)$ מתכנס ומתקיים

משפט 39: קיום טור טיילור של פונקציה

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ , \qquad |x-a| < \delta\ .$$

2.4 אלגברה וקטורית

משפט 40: אורך של וקטור

האורך (או גודל) של הוקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ יסומן ב $|\bar{a}|$ או לעיתים a (בלי הגג מעל) וניתן ע"י הנוסחה של פיתגורס:

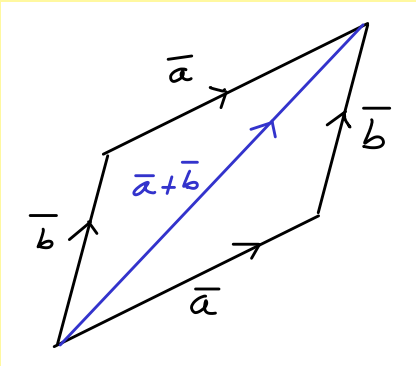
$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

משפט 41: חיבור וקטורים

מבחינת קואורדינטות, הסכום של $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ נתון ע"י $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

גיאומטרית, החיבור מתבצע ע"י כלל המקבילית:

מניחים את שני הוקטורים כך שיתחילו באותה הנקודה ומניחים עותק של כל אחד מהם בקצה של השני כך שנוצרת מקבילית. האלכסון של המקבילית הוא הסכום.



משפט 42: כפל וקטור בסקלר

הכפלה של וקטור $\bar{a}$ בסקלר k תשנה אורכו.

אם $k > 0$ כיוונו לא ישתנה,

אם $k < 0$ כיוונו יהופך,

אם $k = 0$ נקבל וקטור האפס.

אלגברית: אם $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ אז
$k\bar{a} = (ka_1, ka_2, ka_3)$.

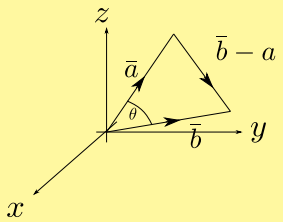
משפט 43: תנאי קוליניאריות

אם שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ קוליניאריות אז קיים $t \in \mathbb{R}$ כך ש- $\bar{b} = t \cdot \bar{a}$.

פורמאלית:

$$\bar{b} \| \bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \exists t : \bar{b} = t \cdot \bar{a} \ .$$

משפט 44:



נתונים שני וקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$, הזווית θ ביניהם, הינה

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\ |\bar{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \ .$$

הוכחה: לפי חוק הקוסינוס:

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \qquad (*1)$$

לפי ההגדרת מכפלת סקלרית:

$$|\bar{a} - \bar{b}|^2 = (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} \qquad (*2)$$

נציב (*2) באגף השמאל של (*1):

$$\begin{aligned} |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \\ -2\bar{a} \cdot \bar{b} &= -2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \\ \bar{a} \cdot \bar{b} &= |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \end{aligned}$$

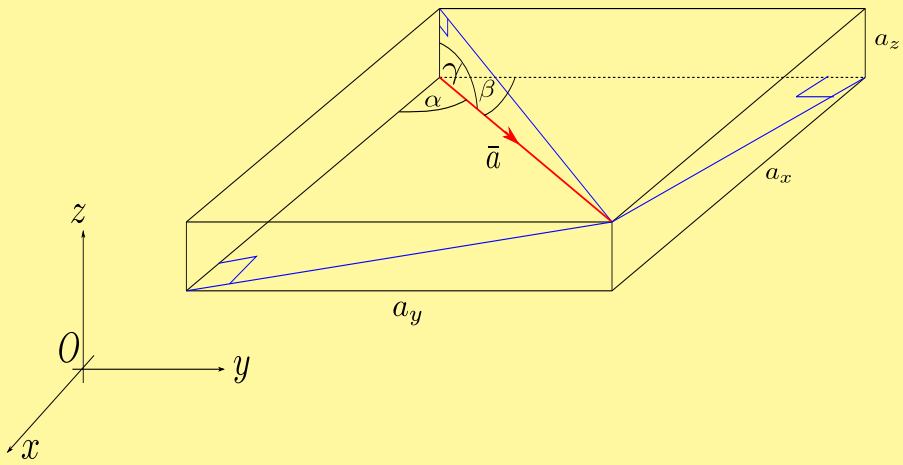
כנדרש. ■

משפט 45:

1. אם $\bar{b} = 0$ או $\bar{a} = 0$ אז $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.
2. אם $\bar{a}$ מאונך ל- $\bar{b}$ ($\theta = 90^\circ = \pi/2$) אז $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$.
3. אם θ זווית קהה אז $\cos\theta < 0$ ולכן גם $\bar{a} \cdot \bar{b} < 0$.
4. $$\bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$$
5. $$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$$

לכל $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}^3$.

משפט 46: זוויות של וקטור



נתון וקטור $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$. נניח ש-

α הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- x,

β הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- y,

γ הזווית בין $\bar{a}$ וכיוון ה- z,

(תראו תרשים לעיל). אז

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} \ , \qquad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} \ .$$

שים לב לפי משפט 23, נתון וקטור $\bar{a}$ עם זוויות α, β, γ ביחס לצירים, הוקטור היחידה של $\bar{a}$ ניתן ע"י
$\hat{a} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

משפט 47: מכפלת וקטורית וזווית בין וקטורים

אם θ הזיית בין הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$ אז מתקיים
$|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
|\bar{a}\times\bar{b}|^2 &= (y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2\\
&= \left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2\\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2\\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\theta\\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right)\\
&= |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\theta\ .
\end{aligned}$$

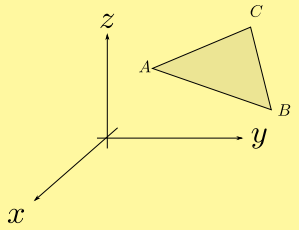
$$\Rightarrow \qquad |\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta\ .$$

■

משפט 48: תנאי קופלנריות

שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ נמצאים במישור אחת א"אם
$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$.

משפט 49: שטח משולש



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$$

משפט 50: מכפלה מעורבת

א) נתון שלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ המכפלה מעורבת מוגדרת להיות

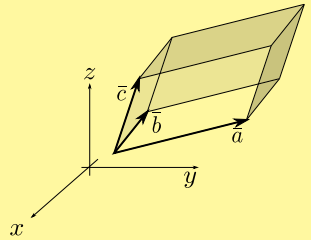
$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

ב)

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \bar{c}\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{a})\ .$$

ג) הערך מוחלט של המכפלה מעורבת שווה לנפח של המקבילון הנוצר ע"י השלושה וקטורים $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ כמתואר בתרשים. כלומר

$$V_{\text{מקבילון}} = |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|\ .$$



ד) הוקטורים $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ הם קופלנריים (שלשתם נמצאים באותו מישור) אם ורק אם
$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = 0$.

הוכחה:

א)

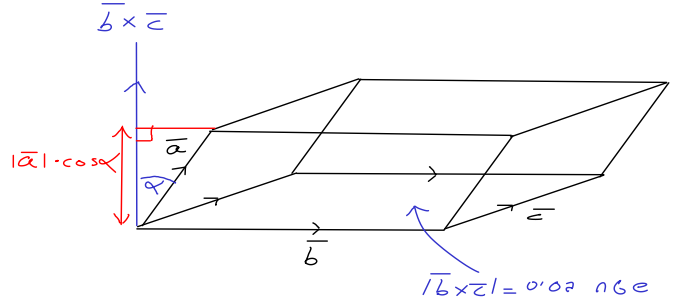
$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

ב) מספר אי-זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה משנה את הסימן של הדטרמיננטה. מספר זוגי של החלפות שורות בדטרמיננטה לא משנה את הסימן של הדטרמיננטה. לכן

$$a\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} = c\cdot(\bar{a}\times\bar{b})$$

ג)

$$|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}\times\bar{c}|\cos\alpha = \underbrace{|\bar{b}\times\bar{c}|}_{\text{שטח הקבילית בבסיס } \bar{b},\bar{c}} \cdot \underbrace{|\bar{a}|\cos\alpha}_{\text{אורך הניצב לבסיס } \bar{b},\bar{c} \text{ העובר בנקודה שקצה } \bar{a}}$$



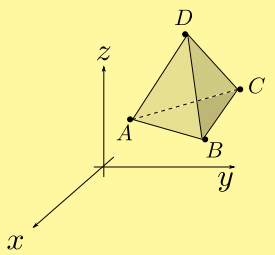
ד)

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow$$, שורות המטריצה תלויות לינאריות

כלומר $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ קופלנריים.

■

משפט 51: נפח פירמידה

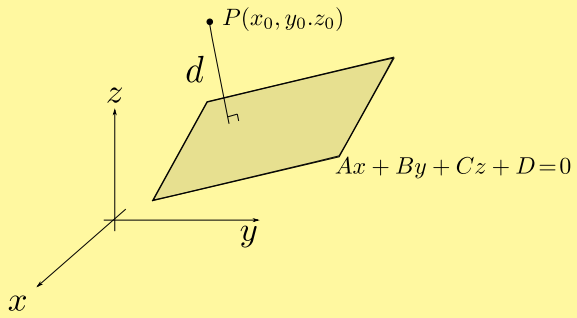


$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{AD}\cdot\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\right|$$

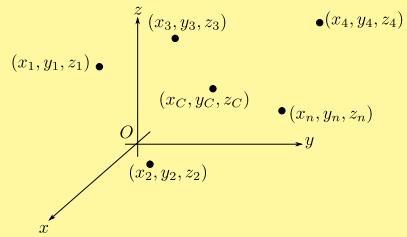
משפט 52: מרחק מנקודה למישור

בהינתן נקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ ומישור בעל משוואה $Ax+By+Cz+D=0$, המרחק d בין P לנקודה הכי קרובה אליו הנמצא במישור ניתן ע"י

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} .$$



משפט 53: מרכז המסה



מרכז המסה C של מערכת של n נקודות חומריות בעלות מסות $m_1,m_2,\dots,m_n$ כמתואר בתרשים, נמצאת במיקום x_C,y_C,z_C ביחס למערכת צירי x,y,z, כאשר

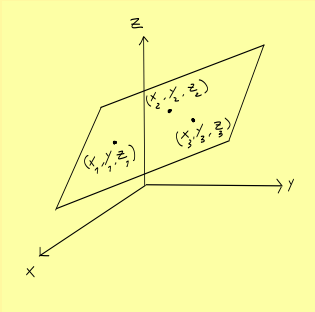
$$\begin{aligned} x_c &= \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} , \\ y_c &= \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} , \\ z_c &= \frac{m_1z_1+m_2z_2+\cdots+m_nz_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} . \end{aligned}$$

2.5 מישורים במרחב תלת ממדי

משפט 54: משוואת המישור העובר דרך שלוש נקודות

משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנתונות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) ו- (x_3,y_3,z_3) ניתן לרשום בצורה:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 .$$



משפט 55: שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 56: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 57: נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 58: משוואת המישור במרחב

משוואת המישור המאונך לוקטור $n=(A,B,C)$ העובר דרך הנקודה $M=(x_0,y_0,z_0)$ היא

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ .$$

אם נשווה למשוואה $Ax+By+Cz+D=0$ נקבל ש- $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

n נקרא הנורמל למישור.

הוכחה: עבור הנקודה $P=(x,y,z)$ במישור מתקיים כי

$$n\cdot\overline{MP}=0$$

בגלל ש n מאונך למישור ו- $\overline{MP}$ מוכל מקביל למישור.

$$\Rightarrow\qquad A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0\ .$$

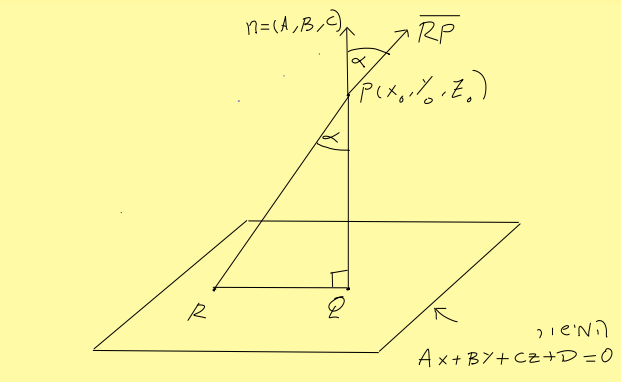
■

משפט 59: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

הנקודה הקרובה ביותר במישור ל- P היא הנקודה שדרכה עובר ניצב למישור שעובר דרך P.



הוכחה: נסמן ב- Q את הנקודה על המישור שהיא הקרובה ביותר ל- P. ממשפט פיתגרוס, $\overline{QP}$ מאונך למישור. נקח כל נקודה אחרת R במישור. PQR יוצרות משולש ישר זווית, כך ש- PR היתר ו- PQ קטע קצר מ- PR.

עבור נקודה כלשהי $R(x_1,y_1,z_1)$ על המישור, נסמן ב- α את הזווית בין $\overline{RP}$ ל- n.

$$\begin{aligned}|\overline{QP}|&=|\overline{RP}|\cos\alpha\\ &=\frac{|\overline{RP}|\cdot|n|\cdot\cos\alpha}{|n|}\\ &=\frac{\overline{RP}\cdot n}{|n|}\\ &=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\ &=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\end{aligned}$$

■

משפט 60: שטח משולש במישור xy

שטחו S של המשולש אשר קדקודיו הם בנקודות (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3) הוא

$$S=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

משפט 61: מרחק מנקודה למישור

המרחק d מהנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ למישור $Ax+By+Cz+D=0$ הוא

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

משפט 62: נפח הפירמידה המשולשת במרחב xyz

הנפח V של הפירמידה המשולשת אשר קדקודיה הם בנקודות (x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4), הוא

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{vmatrix}$$

2.6 ישרים במרחב תלת ממדי

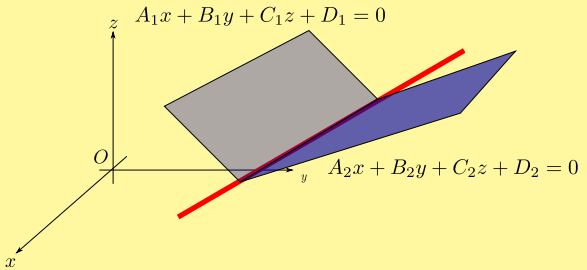
משפט 63: משוואת הישר בצורה קנונית

משוואת הישר העובר דרך נקודה נתונה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור נתון, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ בצורה קנונית היא

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}\ .$$

- אם המקדם של x שווה אפס, כלומר אם $a_1=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י $x=x_0$.
  ז"א הישר מוכל במישור של $x=x_0$.
- אם המקדם של y שווה אפס, כלומר אם $a_2=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י $y=y_0$.
  ז"א הישר מוכל במישור של $y=y_0$.
- אם המקדם של z שווה אפס, כלומר אם $a_3=0$, נחליף את החלק שלו במשוואה ע"י $z=z_0$.
  ז"א שהישר מוכל במישור של $z=z_0$.
- במקרה ששניהם מהמקדמים הם אפס, למשל $a_1=a_2=0$, הישר נתון ע"י
  $$\left.\begin{aligned} x &= x_0\\ y &= y_0\end{aligned}\right\}$$
  כלומר הישר מקביל לציר ה- z.

משפט 64: ישר כחיתוך של שני מישורים



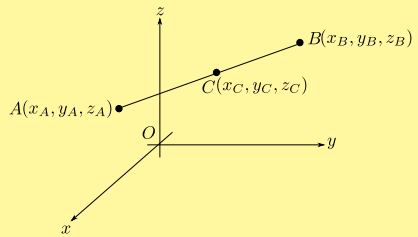
בהינתן שני מישורים

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\ ,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\ ,$$

שאינם מתלכדים או מקבילים קובעים את הישר שבו הם מפגשים. צמד המשוואות של שני המישרים נקרא **משוואה כללית של הישר** .

מכיוון שיש שתי משוואות בשלושה נעלמים, אז הפתרון יהיה בצורה קבוצה של אינסוף פתרונות באמצעות פרמטר חופשי, אשר הוא דווקא הפרמטר המופיע במשוואה פרמטרית של הישר.

משפט 65: חלוקה של וקטור ביחס נתון



$$\frac{AC}{CB}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\ .$$

$$x_c=\frac{\lambda_2x_A+\lambda_1x_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad y_c=\frac{\lambda_2y_A+\lambda_1y_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ ,\qquad z_c=\frac{\lambda_2z_A+\lambda_1z_B}{\lambda_1+\lambda_2}\ .$$

משפט 66: מצב ההדדי בין שני ישרים במרחב

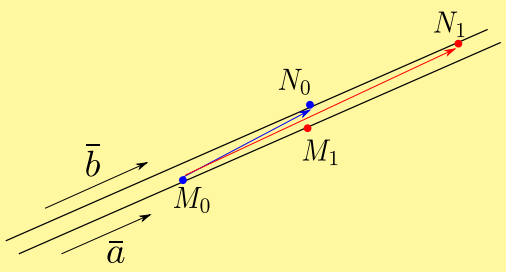
נתונים שני ישרים

$$M(t):\qquad (x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$$
$$N(s):\qquad (x,y,z)=N_0+s\cdot\bar{b}=(X_0,Y_0,Z_0)+s\cdot(b_1,b_2,b_3)$$

ונתון שתי נקודות M_1,M_2 על הישר $M(t)$ ושתי נקודות N_1,N_2 על הישר $N(t)$.
ישנן ארבע אפשרויות למצב ההדדי ביניהם:

(1) <u>**מתלכדים**</u> אם

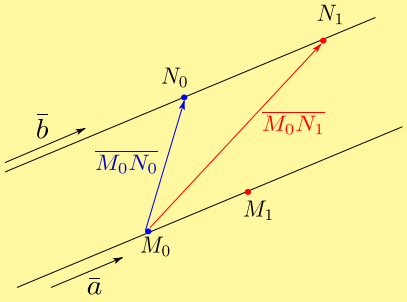
$(a_1,a_2,a_3)\parallel(b_1,b_2,b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0}\times\overline{M_0N_1}=\bar{0}$ אז הישרים מתלכדים.



(2) **מקבילים** אם

$(a_1,a_2,a_3) \parallel (b_1,b_2,b_3)$ ו- $\overline{M_0N_0} \times \overline{M_0N_1} \neq \bar{0}$ אז הישרים מקבילים.

הישרים נמצאים באותו מישור.



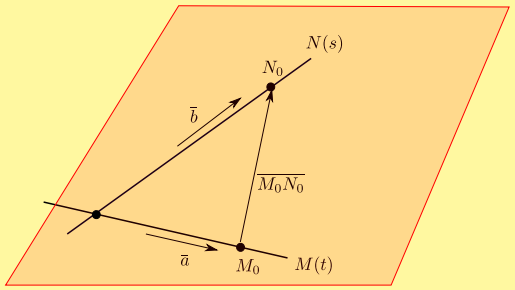
(3) **נחתכים** אם

$(a_1,a_2,a_3) \nparallel (b_1,b_2,b_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} = 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים שווה לאפס, אז הישרים נחתכים.

הישירם נמצאים במישור באותו מישור ולכן הם נחתכים.



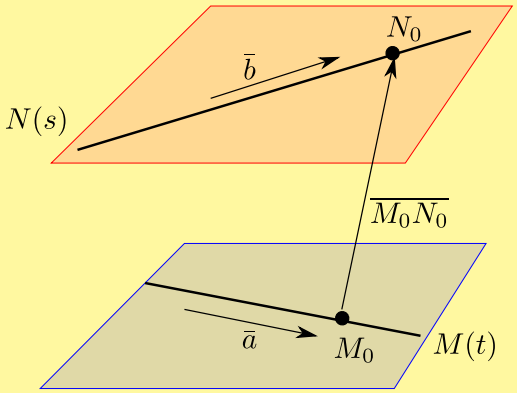
(4) **מצטלבים**

אם $(a_1,a_2,a_3) \nparallel (b_1,b_2,b_3)$ ו-

$$d = \frac{\overline{M_0N_0} \cdot (\bar{a} \times \bar{b})}{|\bar{a} \times \bar{b}|} \neq 0 \ ,$$

כלומר והמרחק בין הישרים אינו שווה לאפס, אז הישרים מצטלבים.

הישירם אינם נמצאים באותו מישור ולכן הם מצטלבים.



משפט 67: מצב הדדי בין ישר למישור

בהינתן מישור $Ax+By+Cz+D=0$ וישר $M(t):(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t\cdot(a_1,a_2,a_3)$ יש ביניהם שלושה מצבים הדדיים אפשריים:

(א) הישר מוכל במישור

$$(A,B,C) \perp (a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0 \ .$$

וכל הנקודות של הישר נמצאות גם על המישור. מספיק שיהיו שתי נקודות.

(ב) הישר מקביל למישור

$$(A,B,C) \perp (a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3)=0 \ .$$

ואין להם נקודה משותפת.

(ג) <u>הישר נחתך עם המישור</u>

$$(A,B,C) \not\perp (a_1,a_2,a_3) \qquad \Rightarrow \qquad (A,B,C)\cdot(a_1,a_2,a_3) \neq 0 \ .$$

הווקטור הכיוון של הישר לא ניצב למישור ויש להם נקודה אחת משותפת.

2.7 גבולות ונגזרות חלקיות

משפט 68: יחידות של גבול

אם הגבול $\lim\limits_{P\to P_0}$ קיים אז הוא יחיד.

ז"א אם הגבול קיים, אז לא משנה לאורך איזה מסלול נחשב את הגבול, תמיד נקבל אותו ערך של הגבול. הגבול לא תלוי על הבחירת המסלול. בפרט אם הגבול קיים, הוא יתקבל לאורך כל קו ישר.

משפט 69: כלל השרשרת 1

נסתכל על פונקציה בשני משתנים $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$. נתון הקטע $I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ושתי פונקציות $x(t):I\to\mathbb{R}$ ו- $y(t):I\to\mathbb{R}$, כך ש- $(x(t),y(t))\in D$ לכל $t\in I$. נגדיר

$$g(t)\equiv f\left(x(t),y(t)\right) \ .$$

אזי

$$g'(t)=f'_x\cdot x'_t+f'_y\cdot y'_t \ .$$

משפט 70: כלל השרשרת 2

נתונה פונקציה $f(x,y)$ כאשר $x=x(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v וגם $y=y(u,\mathrm{v})$ בפני עצמה פונקציה של השני משתנים u,v. נגדיר

$$g(u,\mathrm{v})=f\left(x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right) \ .$$

אז

$$\begin{aligned} g'_u &= f'_x\cdot x'_u+f'_y\cdot y'_u \ , \\ g'_{\mathrm{v}} &= f'_x\cdot x'_{\mathrm{v}}+f'_y\cdot y'_{\mathrm{v}} \ . \end{aligned}$$

2.8 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח

משפט 71: מישור משיק למשטח

תהי $f:D\to\mathbb{R}$ פונקציה בשלושה משתנים. נגדיר משטח $f(x,y,z)=c$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ מספר קבוע. תהי $P(x_0,y_0,z_0)$ נקודה על המשטח.

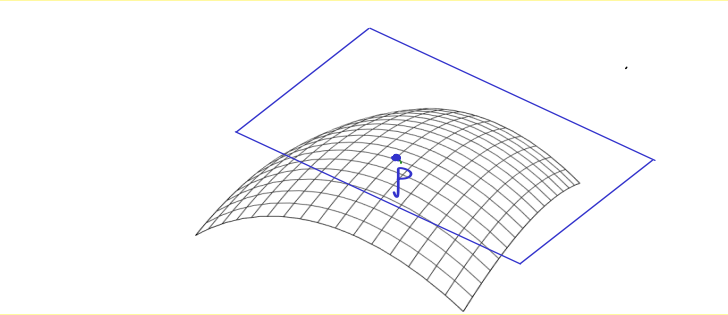
1) קיים מישור העובר דרך הנקודה P כך שהמשיק לכל קו שנמצא על משטח ועובר דרך הנודה P, נמצא במישור זו.

2) הוקטור הנורמל של המישור המשיק למשטח $f(x,y,z)=c$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ הינו

$$\boldsymbol{n}=\left(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\right) \ .$$

3) המשוואה של המישור המשיק למשטח בנקודה P הינה

$$f'_x(P)(x-x_0)+f'_y(P)(x-x_0)+f'_z(P)(x-x_0)=0 \ .$$



המישור הזה נקרא **המישור המשיק למשטח בנוקדה** P.

הוכחה: נסתכל אל קו על המשטח העובר דרך הנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$. נרשום את משוואת הקו בצורה פרמטרית:

$$x=x(t), \qquad y=y(t), \qquad z=z(t) \ .$$

משוואת המשטח הינה

$$f(x,y,z)=c \ , \qquad c\in\mathbb{R} \ .$$

בפרט, הקו נמצא על המשטח ולכן משוואת המשטח מתקיים בכל נקודה על הקו. נציב את משוואת הקו במשוואת המשטח ונקבל

$$f\Big(x(t),y(t),z(t)\Big)=c \ .$$

נקח נגזרת של משוואת המשטח לפי הפרמטר t בנקודה כו P:

$$f'_t(x_0,y_0,z_0)=0 \ .$$

לפי כלל השרשרת:

$$f'_x(P)x'_t(t_0)+f'_y(P)y'_t(t_0)+f'_z(P)z'_t(t_0)=0 \ ,$$

כאשר t_0 הערך של הפרמטר בנקודה P. נרשום את זה בצורה הבאה:

$$\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big)\cdot\Big(x'_t(t_0),y'_t(t_0),z'_t(t_0)\Big)=0 \ .$$

שימו לב, הוקטור $\Big(x'_t(t_0),y'_t(t_0),z'_t(t_0)\Big)$ הוא וקטור כיוון של הישר המשיק לקו $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$ בנקודה P. כיוון שהמכפלה סקלרית שווה אפס, אז המשיק לקו, ניצב לוקטור $\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big)$. בגלל ש המשיק לקו נמצא בהמישור, אז הוקטור הנורמל למישור הינו

$$\boldsymbol{n}=\Big(f'_x(P),f'_y(P),f'_z(P)\Big) \ .$$

■

משפט 72: נוסחה לנגזרת מכוונת

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|} \ .$$

הוכחה:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)}{ta_x}+\lim_{t\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)}{ta_y}+\lim_{t\to 0}a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+ta_z\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_z}$$

$$=\lim_{t\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+ta_x,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_x}+\lim_{t\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+ta_y,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{ta_y}$$

$$=\lim_{h\to 0}a_x\cdot\frac{f\left(x_0+h,y_0,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}+\lim_{h\to 0}a_y\cdot\frac{f\left(x_0,y_0+h,z_0\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}+\lim_{h\to 0}a_z\cdot\frac{f\left(x_0,y_0,z_0+h\right)-f\left(x_0,y_0,z_0\right)}{h}$$

$$=a_x\cdot f'_x(P)+a_y\cdot f'_y(P)+a_z\cdot f'_z(P)$$

$$=\bar{a}\cdot\nabla f(P)$$

לכן

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{1}{|\bar{a}|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t}=\frac{\bar{a}\cdot\nabla f(P)}{|\bar{a}|}\ .$$

■

משפט 73: כיוון של קצב שינוי מקסימלי של פונקציה

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה.
∇f מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מקסימלי.
$-\nabla f$ מצביע בכיוון שבו הקצב שינוי של f מינימלי.

הוכחה:

$$\frac{df}{d\bar{a}}=\frac{\nabla f\cdot\bar{a}}{|\bar{a}|}=\frac{|\nabla f|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos\theta}{|\bar{a}|}=|\nabla f|\cdot\cos\theta\ .$$

$-1\le\cos\theta\le 1$. לכן הביטוי יהיה מקסימלי כאשר $\theta=0\Leftarrow\cos\theta=1$. כלומר $\frac{df}{d\bar{a}}$ יהיה מקסימלי אם $\bar{a}$ מצביע באותו הכיוון כמו ∇f.

■

משפט 74: הדיפרנציאל dx

נניח ש- $f(x)$ הפונקציה $f(x)=x$. אז בכל נקודה $x=a$, $f'(a)=1$. לכן, לפי ההגדרה של הדיפרנציאל, הדיפרנציאל ב- a הינו

$$dx=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\ .$$

משפט 75: קשר בין הדיפרנציאל והנגזרת

לפי הגדרה 47 ולמה 74, הדיפרנציאל של פונקציה f בנקודה a ניתן ע"י

$$df=f'(a)dx\ .$$

משפט 76: תנאי הכרחי לקיום נקודת קיצון

תהי $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים. אם ל- f יש נקודת קיצון מקומי בנקודה P_0 אז $\nabla f\left(P_0\right)=0$.

משפט 77: תנאי מספיק לקיום נקודת קיצון

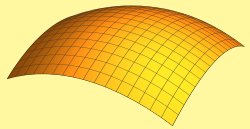
נתון פונקציה $z=f(x,y)$ של שני משתנים. נגדיר
$\Delta=f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2$
אם בנקודה $P(x_0,y_0)$ שבה $f'_x(P)=0$ וגם $f'_y(P)=0$,

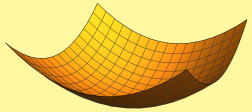
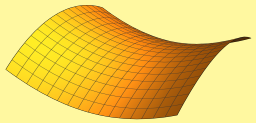
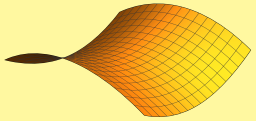
1) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)>0$ אז P מינימום מקומי.

2) $\Delta>0$ ו- $f_{xx}(P)<0$ אז P מקסימום מקומי.

3) $\Delta<0$ אז P נקודת אוכף.

4) $\Delta=0$ אז הקריטריון לא נותן תשובה והנקודה P יכול להיות מינימום, מקסימום אן אוכף, ויש לחרוק את $f(x,y)$ סביב לנקודה P בדרכים נוספות.

מקסימום		$f'_x(P)=0$ $f'_y(P)=0$ $\Delta>0$ $f''_{xx}(P)<0$

מינימום		$f'_x(P)=0 \quad f'_y(P)=0$ $\Delta>0 \quad f''_{xx}(P)>0$
אוכף		$f'_x(P)=0 \quad f'_y(P)=0$ $\Delta<0$
אוכף		$f'_x(P)=0 \quad f'_y(P)=0$ $\Delta<0$

משפט 78: שיטת כופלי לגרנז'

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y)$ כאשר x ו- y קשורים אחד בשני ע"י האילוץ
$$\phi(x,y)=0$$
הנתון במישור xy, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':
$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:
$$L'_x=f'_x+\lambda\phi'_x\ ,\qquad L'_y=f'_y+\lambda\phi'_y\ ,\qquad L'_\lambda=\phi(x,y)\ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת
$$\begin{cases} L'_x &=0\\ L'_y &=0\\ L'_\lambda &=0\ . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y)+\lambda\phi'_x(x,y) &=0\\ f'_y(x,y)+\lambda\phi'_y(x,y) &=0\\ \phi(x,y) &=0 \end{cases}$$

משפט 79:

האקסרמום של הפונקציה $f(x,y,z)$ כאשר x,y, z קשורים אחד בשני ע"י האילוץ
$$\phi(x,y,z)=0$$
הנתון במרחב xyz, ניתן ע"י השיטה הבאה:

(1) מרכיבים את פונקצית לגרנז':
$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda\phi(x,y,z)$$

(2) גוזרים את $L(x,y,z,\lambda)$ לפי שלושת המשתנים x,y,λ:
$$L'_x=f'_x+\lambda\phi'_x\ ,\qquad L'_y=f'_y+\lambda\phi'_y\ ,\qquad L'_z=f'_z+\lambda\phi'_z\ ,\qquad L'_\lambda=\phi(x,y,z)\ .$$

(3) מוצאים את הנקודות הקריטיות של $L(x,y,z,\lambda)$ ע"י לפתור את המערכת
$$\begin{cases} L'_x &=0\\ L'_y &=0\\ L'_z &=0\\ L'_\lambda &=0\ . \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_x(x,y,z)+\lambda\phi'_x(x,y,z) &=0\\ f'_y(x,y,z)+\lambda\phi'_y(x,y,z) &=0\\ f'_z(x,y,z)+\lambda\phi'_z(x,y,z) &=0\\ \phi(x,y,z) &=0 \end{cases}$$

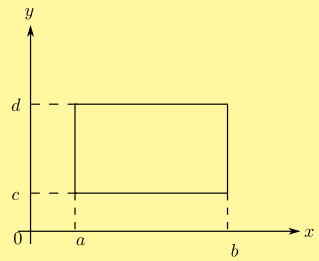
משפט 80:

פונקציה רציפה בתחום חסום וסגור מקבלת בן ערך מקסימלי וערך מינימלי.
ערכים אלה יכולים להתקבל בפנים על התחום או על השפה, אם הם מתקבלים פנימית אז זו תהיה נרודת קריטית.

2.9 אינטגרלים כפולים

משפט 81: אינטגרל כפול בתחום מלבני

במקרה של התחום המלבני



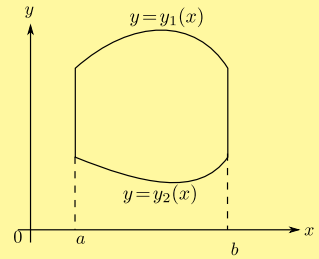
$$D=\{(x,y)|a\le x\le b\ ,c\le y\le d\}$$

הסדר של האינטגרלים מעל x ו-y לא משנה את הערך של האינטגרל הכפול, כלומר

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_c^d dy\,f(x,y)=\int_c^d dy\int_a^b dx\,f(x,y)\ . \qquad (*1)$$

משפט 82: אינטגרל כפול של פונקציה בתחום בין שני קווים

נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה
$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy\,f(x,y)$$
בתחום
$$D=\{(x,y)|a\le x\le b\ ,y_1(x)\le y\le y_2(x)\}\ ,$$
אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. במקרה זה מבצעים את האינטגרל של y בין הקווים $y_1(x)$ ו- $y_2(x)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של x.



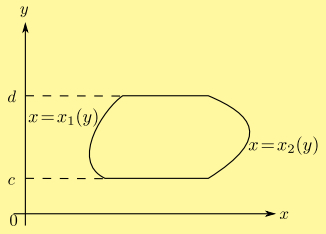
נתון אינטגרל כפול של פונקציה $f(x,y)$ מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx\,f(x,y)$$

בתחום

$$D = \{(x,y)|x_1(y) \le x \le x_2(y)\ ,c \le y \le d\ ,\}\ ,$$

אי-אפשר להחליף את סדר האינטגרלים. מבצעים את האינטגרל של x בין הקווים $x_1(y)$ ו- $x_2(y)$, ואחר כך מבצעים את האינטגרל של y.



משפט 83: תכונות האינטגרל הכפול

בהינתן אינטגרל כפולה מצורה

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)$$

בתחום D במישור xy.

(1) אם הפונקציה $f(x,y)=1$ האינטגרל שווה לשטח התחום $S(D)$:

$$\iint\limits_D dx\,dy = S(D)\ .$$

(2) נתון קבוע $c \in \mathbb{R}$, אז מתקיים

$$\iint\limits_D dx\,dy\,c\cdot f(x,y) = c\cdot \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\ .$$

(3) הפעולה של אינטגרציה כפולה שומרת סכום:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,\big(f_1(x,y)+f_2(x,y)\big) = \iint\limits_D dx\,dy\,f_1(x,y) + \iint\limits_D dx\,dy\,f_2(x,y)$$

(4) נתון שני תחומים D_1 ו- D_2. אם $D = D_1 \cup D_2$ ו- $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ אזי

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) = \int\int_{D_1} dx\,dy\,f(x,y) + \int\int_{D_2} dx\,dy\,f(x,y)$$

(5) אם $f(x,y) \ge 0$ בכל התחום D אז

$$\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \ge 0\ .$$

(6) אם $m \le f(x,y) \le M$ בתחום D אז

$$m\cdot S(D) \le \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y) \le M\cdot S(D)\ .$$

(7)

$$\left|\iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\right| \le \iint\limits_D dx\,dy\,|f(x,y)|\ .$$

משפט 84: שטח התחום

במקרה שבתוך האינטגרל הכפול בנוסחא (1*) הפונקציה $f(x,y)=1$, אז האינטגרל הכפול שווה לשטח של התחום D:

$$\iint\limits_D dx\,dy\,(1) = S(D)\ .$$

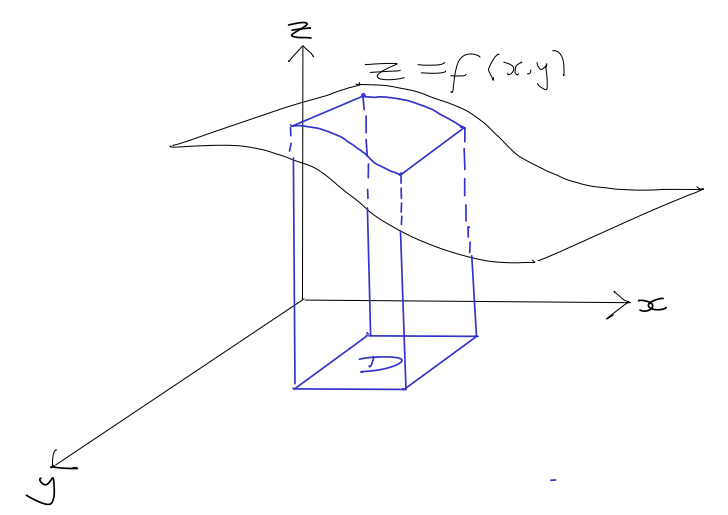
כאשר $S(D)$ מסמן את שטח התחום D.

משפט 85: נפח תחת משטח בתחום D

נתון פונקציה $f(x,y)$ האי-שלילית ותחום D במישור xy (כלומר $f(x,y) \ge 0$ בכל נקודה בתחום D). הנפח מתחת המשטח $z=f(x,y)$ בתוך התחום D ניתן ע"י האינטגרל הכפול

$$V = \iint\limits_D dx\,dy\,f(x,y)\ .$$

הנפח מדובר מוצג בתרשים להלן בכחול.



משפט 86: החלפת משתנים באינטגרל כפול והיעקוביאן

נניח שקואורדינטות u,v מוגדרות באמצעי קואורדינטות קרטיזיות x,y ע"י הביטוים

$$x = x(u,\mathrm{v})\ , \qquad x = x(u,\mathrm{v})\ .$$

נתון אינטגרל כפול $\iint_D f(x,y)dx\,dy$. ניתן לעבור לאינטגרל של הקואורדינטות u,v דרך היחס

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f\left(x(u,\mathrm{v}),y(u,\mathrm{v})\right)|J|\,du\,dv,$$

כאשר

$$J = \det\begin{pmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_\mathrm{v} & y'_\mathrm{v} \end{pmatrix}\ .$$

J נקרא היעקוביאן.

משפט 87: מרכז מסה

נתון תחום D ופונקציה $\rho(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in D$. המסה של התחום D עם צפיפות $\rho(x,y)$ מוגדרת

$$M = \iint\limits_D \rho(x,y)dx\,dy \ .$$

המרכז מסה של D היא נקודה $(x_c,y_c) \in D$ שניתנת ע"י

$$x_c = \frac{\iint_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ , \qquad y_c = \frac{\iint_D y\,\rho(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\,dx\,dy} \ .$$

2.10 אינגרלים קוויים

משפט 88: אינטגרל קווי מסוג ראשון 1

אם עקום מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a \leq x \leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl = \int_a^b f\left(x,\gamma(x)\right)\sqrt{1+\gamma'(x)^2}\,dx$$

משפט 89: אינטגרל קווי מסוג ראשון 2

אם עקום מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y)\ dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt$$

משפט 90: אינטגרל קווי מסוג ראשון 3

אם L הוא עקום במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\ |\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $f(x,y,z)$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl = \int_\alpha^\beta f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\ \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,dt$$

משפט 91: אורך הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int\limits_L dl$$

נותן את אורך הקשת L.

משפט 92: מסה של הקשת

האינטגרל הקווי

$$\int\limits_L f(x,y,z)\ dl$$

נותן את המסה של הקשת L בעלת צפיפות לינארית $f(x,y,z)$.

משפט 93: אינטגרל קווי מסוג שני 1

אם המסלול מישורי L מוגדר כגרף של הפונקציה $\{y=\gamma(x)\ ,|a \leq x \leq b\}$
אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של γ מוגדר להיות

$$\int\limits_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy] = \int_a^b dx\ P\left(x,\gamma(x)\right) + \int_a^b dx\ y'(x)\ Q\left(x,\gamma(x)\right)$$

משפט 94: אינטגרל קווי מסוג שני 2

אם המסלול מישורי L מוגדר באופן פרמטרי

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ |\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L [P(x,y)dx+Q(x,y)dy] = \int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t)\ ,\ y(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t)\ ,\ y(t)\right)$$

משפט 95: אינטגרל קווי מסוג שני 3

אם L הוא המסלול במרחב תלת-ממדי המוגדר באופן

$$\{x=x(t)\ ,\ y=y(t)\ ,\ z=z(t)\ |\ \alpha \leq t \leq \beta\}$$

אז האינטגרל הקווי של פונקציה $\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\hat{\boldsymbol{i}}+Q(x,y,z)\hat{\boldsymbol{j}}+R(x,y,z)\hat{\boldsymbol{k}}$ דרך הקו של L מוגדר להיות

$$\int\limits_L [P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz]$$

$$= \int_\alpha^\beta dt\ x'(t)\ P\left(x(t),y(t),z(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ y'(t)\ Q\left(x(t),y(t),z(t)\right) + \int_\alpha^\beta dt\ z'(t)\ R\left(x(t),y(t),z(t)\right)$$

משפט 96: תכונה חשובה של אינטגרל קווי

1) בהינתן מסילה L_{AB} מ- A ל- B נסמן ב- L_{BA} את המסילה ההולכת בכיוון ההפוך מ- B ל- A. אז

$$\int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = -\int\limits_{L_{BA}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

2) בהינתן מסילות L_{AB} מ- A ל- B ו- L_{BC} מ- B ל- C נסמן ב- L_{AC} את המסילה המשורשרת המתקבלת, אז

$$\int\limits_{L_{AC}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{L_{AB}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy + \int\limits_{L_{BC}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

3) עבור מסלול מרחבי L הנתון ע"י $\left\{\begin{array}{c} x=x(t), y=y(t), z=z(t) \\ a \leq t \leq b \end{array}\right.$ ופונקציה וקטורית

אז $\bar{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

$$\int P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_a^b P\left(x(t),y(t),z(t)\right)x'(t)dt + \int_a^b Q\left(x(t),y(t),z(t)\right)y'(t)dt + \int_a^b R\left(x(t),y(t),z(t)\right)z'(t)dt \quad .$$

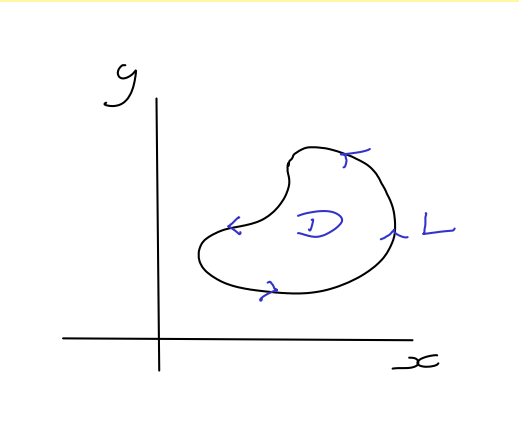
משפט 97: נוסחת גרין

אם L מסלול מישורי סגור ו- P,Q גזירות, אז

$$\oint_L [P(x,y)\ dx + Q(x,y)\ dy] = \iint_D dx\ dy\ \left(Q'_x - P'_y\right) \quad .$$

כאשר D התחום החסום על ידי L ונמצא משמאל ל-L. בפרט, שטח התחום $S(D)$ נתון ע"י

$$S(D) = \oint_L x\,dy = -\oint_L y\,dx = \frac{1}{2}\oint_L x\,dy - y\,dx \quad .$$



משפט 98: אי-תלות של אינטגרל קווי במסלול האינטגרציה

אם

$$Q'_x = P'_y$$

מתקיים, אז

(א)

$$\oint_L [P(x,y)\ dx + Q(x,y)]\ dy = 0$$

עבור כל מסלול סגור L

(ב) קיימת פונקציה $U(x,y)$ שעבורה הדיפרנציאל שלה הינה

$$dU(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \ ,$$

כך שהאינטגרל הקווי של $P(x,y)\hat{\boldsymbol{i}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{j}}$ דרך מסלול שרירותי L מנקודה A לנקודה B ניתן

ע"י

$$\int_{AB} [P\,dx + Q\,dy] = \int_{AB} dU = U(B) - U(A) \ ,$$

כלומר האינטגרל הקווי $\int_{AB} [P\,dx + Q\,dy]$ אינו תלוי במסלול האינטגרציה העובר מ-A ל-B.

2.11 משוואות דיפרנציאליות

משפט 99: כיצד לפתור משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

נתונה מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

אז

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx$$