מבחן דלמבר: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. וקיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
אם $q < 1$ הטור מתסנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

מבחן קושי: נתון הטור $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. וקיים הגבול $q = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{1/n}$.
אם $q < 1$ הטור מתסנס. אם $q > 1$ הטור מתבדר. אם $q = 1$ המבחן לא נותן תשובה.

רדיוס התכנסות: לכל טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ קיים $R \geq 0$ עבורו הטור מתכנס לכל $-R < x < R$ ומתבדר לכל $x > R$ ו- $x < -R$.

נוסחת דלמבר לרדיוס התכנסות: $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

נוסחת קושי לרדיוס התכנסות: $R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} \right)^{1/n}$.

טור טיילור עבור הפונקציה $f(x)$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

טורי מקלורן לפונקציות בסיסיות:

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$	$(-1 < x < 1)$
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$	$(-\infty < x < \infty)$

הנדסה אנליטית:

נפח של פירמידה משולשת $ABCD$: $V = \frac{1}{6}\left(\overline{DA} \times \overline{DB}\right) \cdot \overline{DC}$

מרחק מהנקודה (x_0, y_0, z_0) למישור $Ax + By + Cz + D = 0$: $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

מרחק מהנקודה M לישר העובר דרך ה נקודה N במקביל לווקטור a: $d = \frac{\overline{MN} \times a}{|a|}$

מרחק בין שני ישרים מצטלבים שעוברים דרך נקודות M ו- N במקביל לווקטורים a ו- b: $d = \frac{\left|\overline{MN} \cdot (a \times b)\right|}{|a \times b|}$

משוואת המישור העובר דרך הנקודה $M\,(x_0, y_0, z_0)$ במאונך ל ווקטור נורמל $n(A, B, C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \ .$$

הצגה פרמטרית של הישר העובר דרך הנקודה (x_0, y_0, z_0): במקביל לווקטור $a(l, m, n)$

$$x = x_0 + lt \ , \quad y = y_0 + mt \ , \quad z = z_0 + nt \ , \qquad -\infty < t < \infty \ .$$

משוואת מישור המשיק למשטח $f(x, y, z) = 0$ בנקודה $M\,(x_0, y_0, z_0)$:

$$f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(M_0)(y - y_0) + f'_z(M_0)(z - z_0)$$

נגזרת מכוונת של $z(x,y)$ בנקודה M_0 ובכיוון של וקטור a: $\dfrac{dz(M_0)}{da} = \dfrac{\nabla z(M_0)\cdot a}{|a|}$

קריטריון לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של $f(x)$: $\Delta(M) = f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M) - \left(f''_{xy}(M)\right)^2$.

פונקצית לגרנז' למציאת אקסטרמום של $f(x,y)$ בתנאי $\phi(x,y)$: $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\phi(x,y)$

אינטגרלים כפולים:

מעבר לקואורדינטות קוטביות: $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$.

חישוב המסה m ומרכז המסה (x_c,y_c) של "גוף מישורי" D בעל צפיפות $\rho(x,y)$:

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dx\,dy\ , \qquad x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ , \qquad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dx\,dy\ .$$

חישוב של **אינטגרל קווי** מסוג ראשון:

אם המסלול L מוגדר באופן $y = y(x)$: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$

אם המסלול L מוגדר באופן פרמטרי: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}dt$

נוסחת גרין: $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(Q'_x - P'_y\right)$

נגזרות:

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x\cdot\ln a$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$
5. $(\sin x)' = \cos x$
6. $(\cos x)' = -\sin x$
7. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\cot x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$
9. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\mathrm{arccot} x)' = \dfrac{-1}{a+x^2}$

$$(u\mathrm{v})' = u'\mathrm{v} + u\mathrm{v}'\ , \qquad \left(\frac{u}{\mathrm{v}}\right)' = \frac{u'\mathrm{v} - u\mathrm{v}'}{\mathrm{v}^2}\ , \qquad \left(f(g(x))\right)' = f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)\ .$$

אינטגרלים:

$$\int dx = x \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} \ (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|ax+b|$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax) \qquad \int \sin(ax) dx = \frac{-1}{a} \cdot \cos(ax) \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+p}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+p}\right| \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} \qquad \int \frac{x\,dx}{x^2+a} = \frac{\ln|x^2+a|}{2} \qquad \int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \ln|f(x)|$$

$$\int \cot x\, dx = \ln|\sin x| \qquad \int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| \qquad \int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

אינטגרציה בחלקים: $\int u \cdot \mathrm{v}'\, dx = u \cdot \mathrm{v} - \int u' \mathrm{v}\, dx$.

הצבה אוניברסלית

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) dx \Rightarrow x = a\sin t, \quad \int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right) dx \Rightarrow x = a\tan t, \quad \int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right) dx \Rightarrow x = \frac{a}{\sin t},$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t, \quad x = 2\arctan(t), \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \qquad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \qquad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \qquad \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \qquad \cos x \cdot \cos y = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$$

סדרה חשבוניח: $\{a_1\ ,\ a_1+d\ ,\ a_1+2d\ ,\ a_1+3d\ ,\ \ldots\}$.

איבר ה -n של סדרה חשבונית: $a_n = a_1 + (n-1)d$
כאשר a_1 איבר הראשון ו- d הפרש הסדרה.

סכום של סדרה חשבונית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{1}{2}\left(a_1 + a_N\right) = \frac{1}{2}\left(2a_1 + (N-1)d\right).$

סדרה הנדסית: $\{a_1\ ,\ a\cdot a_1\ ,\ q^2\cdot a_1\ ,\ q^3\cdot a_1\ ,\ \ldots\}.$

אביר ה- n של סדרה הנדסית: $a_n = a_1 q^{n-1}$
כאשר a_1 איבר הראשון ו- q מנת הסדרה.

סכום של סדרה חנדסית: $\sum_{n=1}^{N} a_n = \frac{a_1\left(1-q^N\right)}{1-q}.$

הסכום אינסופי של סדרה הנדסית: $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{N\to\infty} \frac{a_1(1-q^N)}{1-q} = \begin{cases} \text{מתבדר} & |q|>1 \\ \frac{a_1}{1-q} & |q|<1 \end{cases}.$

מבחן האינטגרל להתכנסות של טורים חיוביים:
אם $f(x)$ חיובית ומונוטונית יורדת לכל $x \geq 1$.
אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתכנס אז $S = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתכנס ומתקיים $\int_1^{\infty} dx\, f(x) \leq S \leq \int_1^{\infty} dx\, f(x) + f(1)$.
אם $\int_1^{\infty} dx\, f(x)$ מתבדר אז $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ מתבדר.

התכנסות של טור ההרמוניה הכללי:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^k} \begin{cases} k>1 & \text{מתכנס} \\ k\leq 1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

מבחן השוואה:
יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $a_n \leq b_n$ לכל $n \geq k$.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה הגבולי:
יהיו a_n, b_n סדרות חיוביות כך ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ עבור L סופי.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר אם ורק אם $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

התכנסות של טורים כלליים:

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתכנס אז $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, ואומרים שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ **מתכנס בהחלט** (absolutely convergent).

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$ יש להמשיך לחקור את הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ ע"י מבחן לייבניץ (Leibinz).

אם $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתבדר אבל הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **מתכנס בתנאי** (conditionally convergent).

מבחן לייבניץ (Leibniz): נתון טור מחליף סימן $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$. אם הסדרה מקיימת את התנאים הבאים:
(1) $a_n>0$, (2) $\{a_n\}$ מונוטונית יורדת, (3) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אז הטור מתכנס.

הנדסה אנליטית:

קואורדינטות של ווקטור $\overline{M_1M_2}$: $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

גודל (אורך ,מודול) של ווקטור $a=(a_1,a_2,a_3)$: $|a|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

הצגה של ווקטור $a=(a_1,a_2,a_3)$ על-ידי הבסיס i,j,k: $a=a_1i+a_2j+a_3k$

ווקטור יחידה של ווקטור a וקוסינוסי הכיוון: $e_a=\dfrac{a}{|a|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

תנאי קולינאריות של שני ווקטורים a,b: $b\parallel a\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R}\big|b=ta$

מכפלה סקלרית: $(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

זווית בין שני ווקטורים: $\cos\theta=\dfrac{a\cdot b}{|a||b|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$

תנאי מאונכות של שני ווקטורים: $a\perp b\Leftrightarrow a\cdot b=0$

מכפלה ווקטורית: $(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=\begin{vmatrix}i&j&k\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$

שטח של משולש ABC: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$

מכפלה מעורבת: $(a\times b)\cdot c=a\cdot(b\times c)=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$

תנאי קופלנריות של 3 ווקטורים a,b,c: $(a\times b)\cdot c=0$

גרדיאנט של הפונקציה $z=f(x,y)$ בנקודה $M_0(x_0,y_0)$: $\nabla z(M_0)=\big(f'_x(x_0,y_0),\ f'_y(x_0,y_0)\big)$

קריטריון לבדיקת קיום אקסטרמום לוקלי של $f(x)$: $\Delta(M)=f''_{xx}(M)\cdot f''_{yy}(M)-\big(f''_{xy}(M)\big)^2$
בנקודה קריטית שבה $f'_x=0,f'_y=0$:
אם $\Delta(M)>0$ אזי יש אקסטרמום לוקלי בנקודה M.

- אם $\Delta(M)>0$ ו- $f''_{xx}(M)>0$ יש מינימום בנקודה M

- אם $\Delta(M) > 0$ ו- $f''_{xx}(M) < 0$ יש מקסימום בנקודה M.
- אם $\Delta(M) < 0$ אז אין אקסטרמום בנקודה M.
- אם $\Delta(M) = 0$ הקריטריון לא נותן תשובה ויש לחקור את המצב בדרכים נוספות.

נפח V **של גוף** החסום מלמטה על ידי משטח $z = f_1(x,y)$ מלמעלה ידי משטח $z = f_2(x,y)$ ומצדדים על ידי המשטח הגלילי שמדריכו הוא שפת התחום D וקו יוצר מקביל לציר ה- z:

$$V = \iint\limits_D \left(f_2(x,y) - f_1(x,y)\right) dxdy \ .$$

טור טיילור של $f(x)$ סביב הנקודה $x = a$:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \ .$$

נוסחאות אלגבריות

$$\begin{aligned} &(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ , && a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \ , \\ &(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \ , && (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \ . \\ &a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) \end{aligned}$$

תכונות בסיסיות של חזקות בהנחה ש $a > 0, b > 0$:

$$a^n \cdot a^m = a^{m+n} \ , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \ , \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n \ , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \ , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \ ,$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \ , \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \ , \quad a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \ , \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \ , \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \ ,$$

$$a^1 = a \ , \quad a^0 = 1 \ .$$

תכונות בסיסיות של לוגריתמים $(x > 0, y > 0)$:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \ , \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \ , \quad \log_a(x^n) = n \cdot \log_a x \ ,$$

$$\log_a(a^n) = n \ , \quad \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x \ , \quad \log_a x = \log_{a^m} x^m \ , \quad \log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a} \ .$$

מקובל להשתמש בסימון log עבור לוגריתמים עשרוניים: $\log(x) = \log_{10}(x)$

מקובל להשתמש בסימון ln עבור לוגריתמים טבעיים: $\ln(x) = \log_e(x)$

כאשראת המספר e מגדירים כגבול $e = \lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad e \approx 2.718$

משוואת המעגל במישור xy עם מרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

משוואת הספירה במערכת מרחבית xyz: $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

משוואת האליפסה שצירי סימטריה: הם צירי המערכת xy: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

משוואתה היפרבולה שצירי סימטריה הם צירי המערכת xy: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

תהי $z = f(x,y)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות $f'_x,\ f'_y$ רציפות ויהיו $x(t), y(t)$ פונקציות גזירות של משתנה x.
אזי קיימת הנגזרת z'_t ומתקיים:

$$z'_t = f'_x x'_t + f'_y y'_t \ .$$

במקרה $x = x(u,\mathrm{v}), y = y(u,\mathrm{v})$ הפונקציה $z = f(x,y)$ הופכת לפונקציה של המשתנים u ו- v ומתקיים:

$$z'_u = f'_x x'_u + f'_y y'_u \ , \qquad z'_{\mathrm{v}} = f'_x x'_{\mathrm{v}} + f'_y y'_{\mathrm{v}} \ .$$

גזירה של פונקציה $y(x)$ הנתונה בצורה סתומה $f(x,y) = 0$: $y'_x = \frac{-f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}$

פונקציה רציפה $f(M)$ מעל תחום סגור D מקבלת את הערך המקסימלי והערך המינימלי שלה בתחום זה ואת הערכים היא עשויה להשיג בנקודות הקריטיות הנמצאות בתוך התחום D או בשפת התחום.
לכן כדי לחשב את הערכים $\max\limits_{M\in D} f(M)$ ואת $\min\limits_{M\in D} f(M)$ יש:

א) למצוא את כל הנקודות הקריטיות של $f(M)$ הנמצאות בתוך התחום D

ב) לחקור יחסית הערכים הקיצוניים את הפונקציה $f(M)$ בשפת התחום.

ג) להשוות את הערכי הפונקציה בנקודות שהתקבלו בסעיפים א' ו- ב'.