תוכן העניינים

1 הגדרות 1

1.1 סדרות 1
1.2 טורים חיוביים וטורים כלליים 3
1.3 טור חזקות 5
1.4 אלגברה וקטורית 5
1.5 מישורים במרחב 8
1.6 ישרים במרחב 10
1.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה 13
1.8 גבולות ונגזרות חלקיות 16
1.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח 19
1.10 אינטגרלים כפולים 21
1.11 משוואות דיפרנציאליות 22
1.12 הגדרת משוואה דיפרציאלית 22

2 משפטים 23

2.1 סדרות של מספרים 23
2.2 טורים חיוביים וטורים כלליים 23
2.3 טרוי פונקציות וטורי חזקות 23
2.4 אלגברה וקטורית 23
2.5 מישורים במרחב תלת ממדי 23
2.6 ישרים במרחב תלת ממדי 23
2.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה 23
2.8 גבולות ונגזרות חלקיות 23
2.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח 23
2.10 אינטגרלים כפולים 23
2.11 אינגרלים קוויים 23
2.12 משוואות דיפרנציאליות 23

1 הגדרות

1.1 סדרות

הגדרה 1: סדרות של מספרים
סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ .$$

נסמן

$$a_n := a(n) \ .$$

הגדרה 2: גבול של סדרה
תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אומרים כי מספר L הוא הגבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$:

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

נסמן את הגבול של סדרה כך:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n \ .$$

הגדרה 3: התכנסות של סדרה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם הגבול של (a_n) קיים (לפי הגדרה 2) אז אומרים כי הסדרה **מתכנסת**.

אם הגבול של (a_n) לא קיים אז אומרים כי הסדרה **מתבדרת**.

הגדרה 4: סדרות חסומות

1. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמעלה** אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \leq M$.

   M תקרא **חסם עליון של הסדרה**.

2. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה מלמטה** אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n \geq m$.

   m תקרא **חסם תחתון של הסדרה**.

3. אומרים כי סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה וגם מלמטה . במילים אחרות, אם קיים $K > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$,

   $$|a_n| \leq K \ .$$

   כל מספר K כזה נקרא **חסם מוחלט** של הסדרה.

הגדרה 5: סדרות מונוטוניות

1. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} \geq a_n \ .$$
2. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית עולה ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} > a_n \ .$$
3. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} \leq a_n \ .$$
4. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית יורדת ממש** אם קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים
   $$a_{n+1} < a_n \ .$$
5. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית** אם היא מונוטונית עולה או יורדת.
6. סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **מונוטונית ממש** אם היא מונוטונית עולה ממש או יורדת ממש.

הגדרה 6:

תהיה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- אומרים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (שואפת לאינסוף) אם לכל $M \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים
  $$a_n > M \ .$$
- אומרים כי $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (שואפת למינוס אינסוף) אם לכל $m \in \mathbb{R}$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים
  $$a_n > m \ .$$

1.2 טורים חיוביים וטורים כלליים

הגדרה 7: סדרה חשבונית

(א) סדרה חשבונית היא סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע. את הפרש הסדרה מסמנים באות d.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה חשבונית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

שהפרשה d, אזי מתקיים

$$a_2 - a_1 = d\,,\ a_3 - a_2 = d\,,\ a_4 - a_3 = d\,,$$

וכו'.

(ג) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית היא

$$a_n = a_1 + (n-1)d\ .$$

הגדרה 8: סדרה הנדסית

(א) סדרה הנדסית היא סדרה של מספרים שבה המנה של כל איבר באיבר הקודם לו היא גודל קבוע. את מנת הסדרה מסמנים באות q.

(ב) באופן כללי אם נתונה סדרה הנדסית

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots$$

ומנה הסדרה היא q, אזי מתקיים

$$\frac{a_2}{a_1} = q\,,\ \frac{a_3}{a_2} = q\,,\ \frac{a_4}{a_3} = q\,,$$

וכו'.

(ג) בסדרה הנדסית $a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ldots$ שהמנה שלה q מתקיים

$$a_1 \neq 0\,, \qquad q \neq 0\ .$$

(ד) כל איבר בסדרה הנדסית (פרט לראשון) מתקבל ע"י כפל של האיבר הקודם לו במנה q, כלומר מתקיים

$$a_1 = qa_2\,, \quad a_3 = qa_2\,, \quad a_4 = qa_3\,,$$

וכו'.

(ה) הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה הנדסית היא

$$a_n = q^{n-1}a_1\ .$$

הגדרה 9: טור

ביטוי מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots$$

נקרא **סכום אינסופי** או **טור** .

הגדרה 10: סכום החלקי

הסכום החלקי S_n של הטור יסומן ב- S_n ויוגדר כסכום של n האיברים הראשונים בטור:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

הגדרה 11: טור חיובי

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ נקרא **טור חיובי** אם לכל k מתקיים

$$a_k > 0 \ .$$

הגדרה 12: התכנסות

אם קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} S_n$, אומרים שהטור **מתכנס** וגבול זה נקרא סכום הטור ומסומן ב- S. כלומר

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \ .$$

במקרה כאשר גבול של S_n אינו קיים (או הוא אינסופי) אומרים שהטור **מתבדר**.

הגדרה 13: שארית הטור

הטור

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n$$

נקרא **שארית-** n (או "זנב") של הטור $\sum_{k=1}^{n} a_n$.

אם טור השארית מתכנס אז נסמן את סכומו ב- R_n.

אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אזי

$$R_n = S - S_n$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \ .$$

הגדרה 14: טור כללי

טור כללי הוא טור מצורה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ אשר כל איברו a_n לא בהכרח חיובי, אלא ישנם אינסוף איברים חיוביים ואינסוף איברים שליליים. לדוגמא הטור

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

הוא סוג של טור כללי הנקרא **טור מחליף סימן** .

הגדרה 15: טור מחליף סימן

טור מצורה

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

שבו איברים מחליפים סימן לסירוגין נקרא **טור מחליף סימן**.

1.3 טור חזקות

הגדרה 16: טור חזקות
טור חזקות הנם טורים מהצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

כלומר הסכום החלקי הוא פולינום:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_N x^N \ .$$

הגדרה 17: טור פונקציות
תהיה $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ סדרת פונקציות. הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

נקרא **טור פונקציות** או **טור פונקציונלי**.
אוסף הערכים של x שעבורם הטור מתכנס נקרא **תחום התכנסות של הטור**.
הפונקציה

$$S(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} (f_1(x) + \dots + f_N(x))$$

נקרא **סכום הטור** והיא מוגדרת רק עבור ערכי x מתחום ההתכנסות של הטור.

הגדרה 18: טור טיילור
בהינתן פונקציה $f(x)$, גזירה אינסוף פעמים בסביבה של $x = a$, נגדיר **טור טיילור** שלה סביב $x = a$

$$T_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

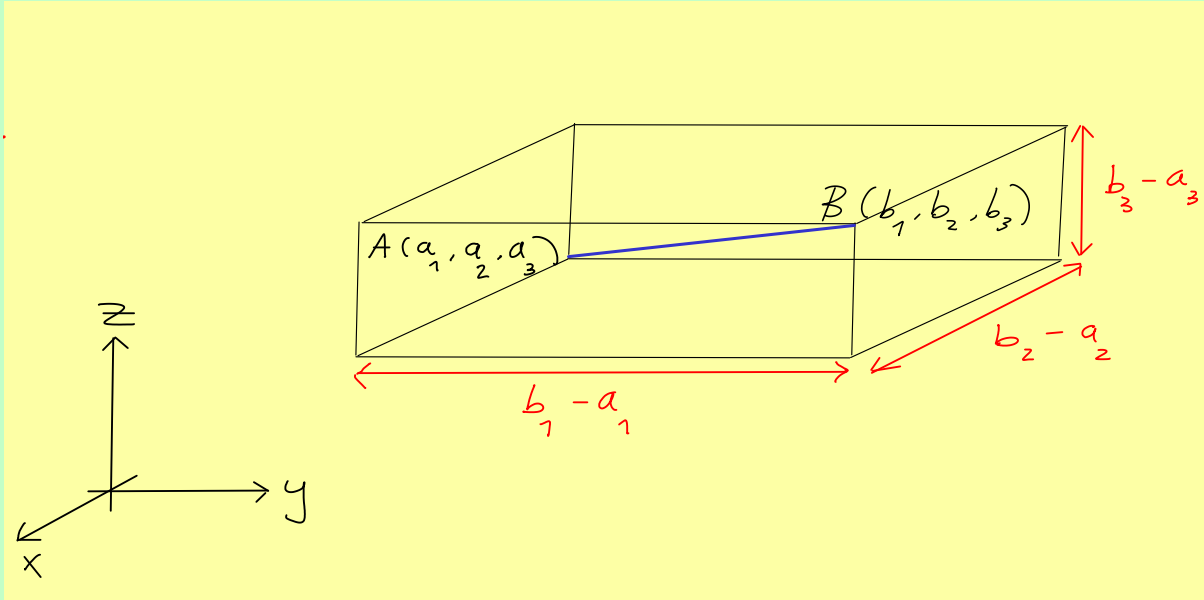
זהו טור חזקות לפי חזקות של $(x-a)$.
טור טיילור הוא טור שסכומים החלקיים הם פולינומי טיילור.

הגדרה 19: טור מקלורן
במקרה $a = 0$ נקבל את **טור מקלורן** של $f(x)$:

$$T_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(a) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

1.4 אלגברה וקטורית

הגדרה 20: וקטור בין שתי נקודות
באופן כללי, בהינתן שתי נקודות $A(a_1, a_2, a_3)$ ו- $B(b_1, b_2, b_3)$, הוקטור $\overline{AB}$ בין A ל- B הינו
$\overline{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$.



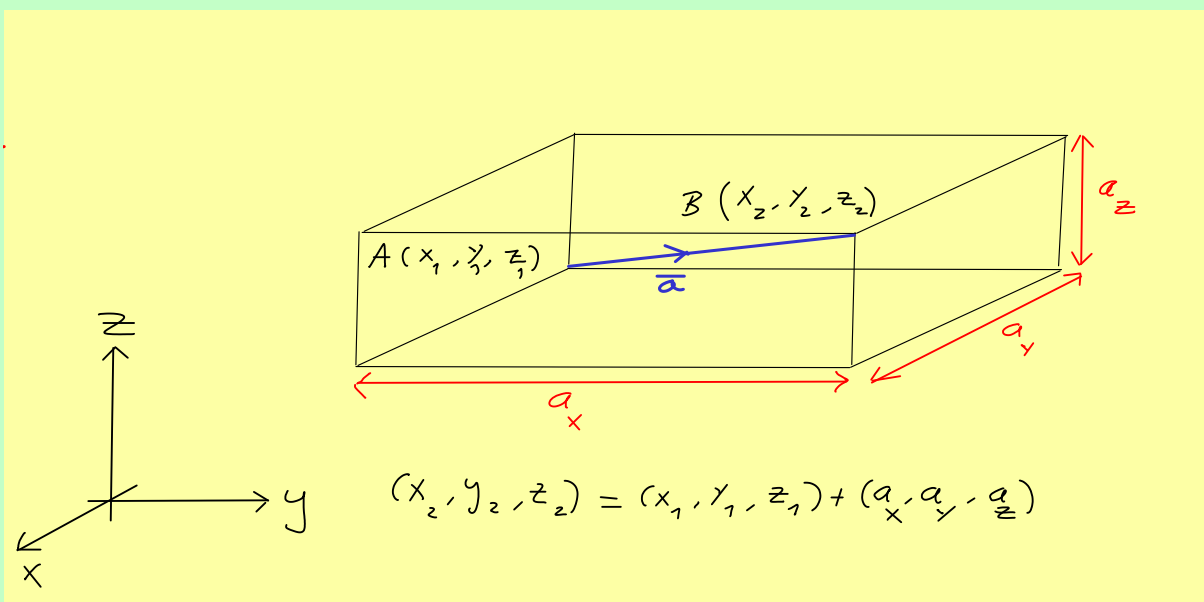
הגודת של הוקטור, לפי פיתגרוסת הינו

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\ .$$

הגדרה 21: וקטור כיוון

נתון וקטור $\bar{a}\,(a_x, a_y, a_z)$ ונתון הנקודה $A=(x_1,y_1,z_1)$ כלשהי. אז כאשר הוקטור $\bar{a}$ מתחיל בנקודה A, הוא עובר לנקודה B בת קואורדינטות (x_2,y_2,z_2) כאשר

$$x_2 = x_1 + a_x\ , \qquad y_2 = y_1 + a_y\ , \qquad z_2 = z_1 + a_z\ .$$



הגדרה 22: הבסיס הסטנדרטי

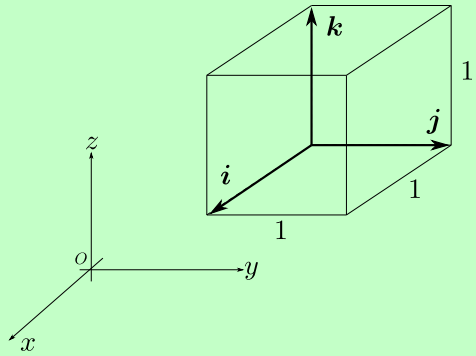
נגדיר שלושה וקטורים הבאים:

- הוקטור i מקביל לכיוון x וגודלו 1
- הוקטור j מקביל לכיוון y וגודלו 1

- הוקטור k מקביל לכיוון z וגודלו 1

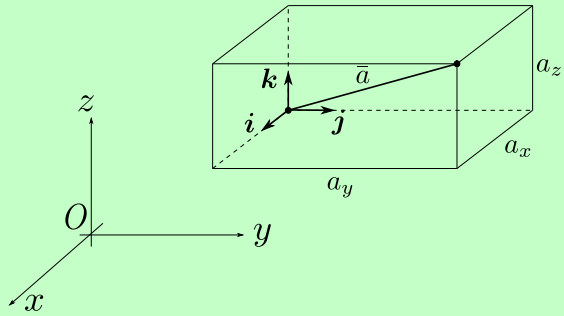
הקבוצה של הוקטורים i, j, k נקרא הבסיס הסטנדרטי. הקואורדינטות של הוקטורים אלו הן:

$$i(1,0,0)\ , \qquad j(0,1,0)\ , \qquad k(0,0,1)\ .$$



בהינתן וקטור $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ניתן לבטא אותו במונחים של הבסיס מצורה

$$\bar{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\ .$$



הגדרה 23: וקטור יחידה

בהינתן וקטור $\bar{a}(a_x, a_y, a_z)$ בעל אורך $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ נגדיר וקטור יחידה המסומן $\hat{a}$, אשר כיוונו שווה לכיוון של $\bar{a}$ ואורכו שווה 1.
$\hat{a}$ ניתן ע"י הנוסחה

$$\hat{a} = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = \left(\frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|}\right)$$

הגדרה 24: מכפלת סקלרית

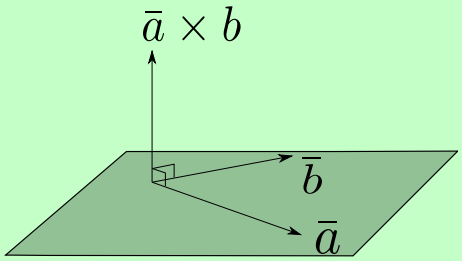
נתונים שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, המכפלת סקלרית שלהם הוא

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3c_3\ . \qquad \text{(\#1)}$$

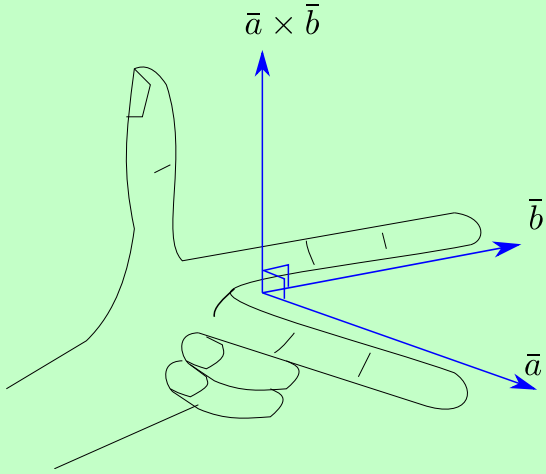
הגדרה 25: מכפלת וקטורית

נתון שני וקטורים $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ו- $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ המכפלת וקטורית מוגדרת להיות

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



המכפלת וקטורית היא וקטור שניצב למישור בו נמצאים הוקטורים $\bar{a}$ ו- $\bar{b}$.



1.5 מישורים במרחב

הגדרה 26: משוואת המישור
המשוואה המתארת מישור בכללי במרחב xyz
הינה

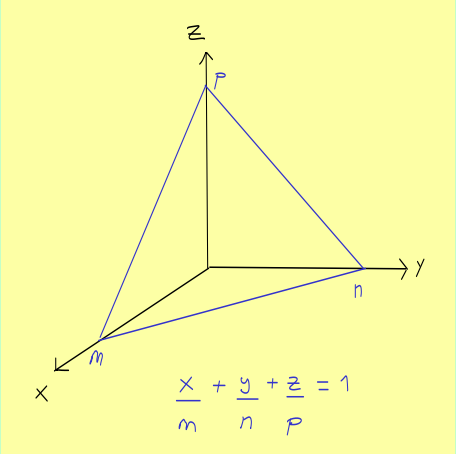
$$Ax + By + Cz + D = 0$$

כאשר לפחות אחד המקדמים A, B, C אינו אפס.

ניתן לרשום משוואת המישור בצורה

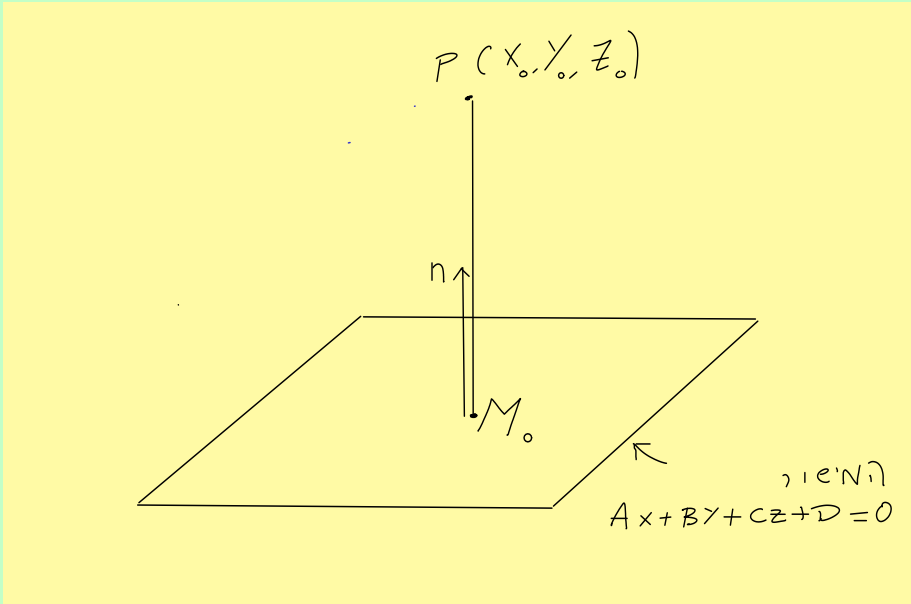
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1 \ .$$

בצורה הזאת המספרים m, n, p הם הנקודות חיתוך של המישור עם הצירי x, y, z בהתאמה כמתואר בשרטוט.



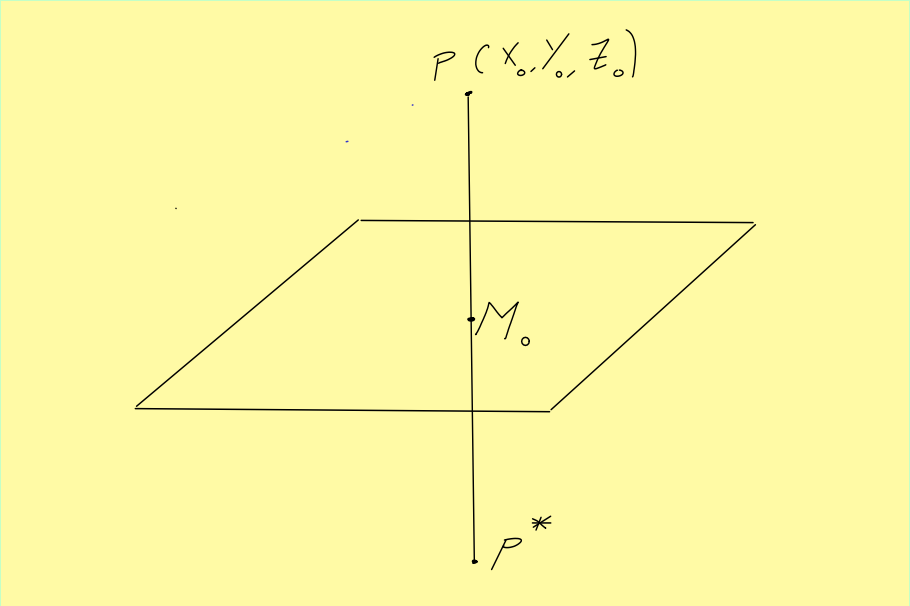
הגדרה 27: היטל של נקודה על מישור

ההיטל של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ על מישור $Ax + By + Cz + D = 0$ היא הנקודה על המישור הקרובה ביותר ל- P. כלומר, נקודה M_0 כך ש- $\overline{M_0P}$ מקביל לנורמל n למישור.



הגדרה 28: השיקוף של נקודה ביחס מישור

השיקוף P^* של נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$ ביחס למישור מוגדר להיות
$P^* = P - 2\overline{M_0P}$,
כאשר M_0 ההיטל של P על המישור.

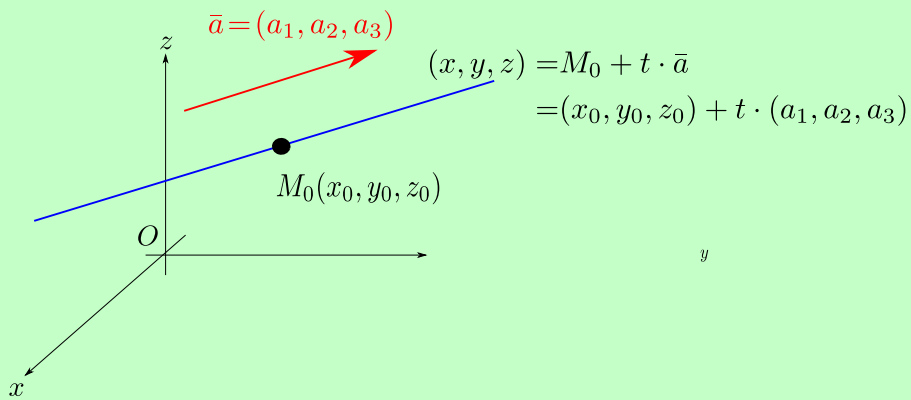


<u>שיטה אחרת ויותר קלה:</u>

אם נרשום את הישר העובר את הנקודה P וההיטל שלו במישור בצורה
$$M(t) = P + t \cdot \bar{n}$$
כשאר $\bar{n}$ הנורמל של המישור. נניח ש- t_0 הוא הערך של הפרמטר t בנקודת ההיטל, M_0 של P ביחס למישור. אז השיקוף של P ביחס למישור זו ניתן ע"י
$$P^* = M(2t_0) = P + 2t_0\bar{n} \ .$$

1.6 ישרים במרחב

הגדרה 29: משוואת הישר בצורה פרמטרית



משוואת הישר העובר דרך הנקודה $M_0(x_0,y_0,z_0)$ במקביל לוקטור $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, הוא

$$(x,y,z)=M_0+t\cdot\bar{a}=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)\ ,$$

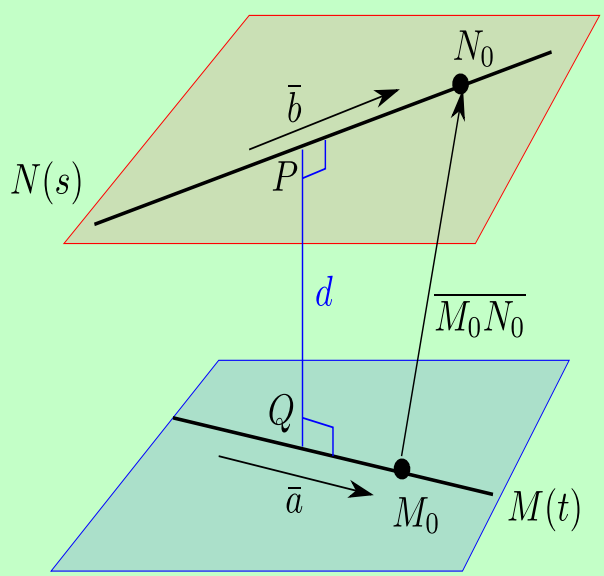
או באופן שקול

$$x=x_0+a_1t\ ,\qquad y=y_0+a_2t\ ,\qquad z=z_0+a_3t\ .$$

הווקטור $\bar{a}$ נקרא וקטור הכיוון, הקואורדינטות (a_1,a_2,a_3) נקראות קואורדינטות הכיוון של הישר.

הגדרה 30: מרחק בין ישרים מצטלבים

יהיו $M(t):\quad (x,y,z)=M_0+t\bar{a}$, $N(t):\quad (x,y,z)=N_0+t\bar{b}$ ישרים מצטלבים. המרחק ביניהם מוגדר להיות המרחק בין השתי נקודות P ו- Q, הקרובות ביותר על הישרים.



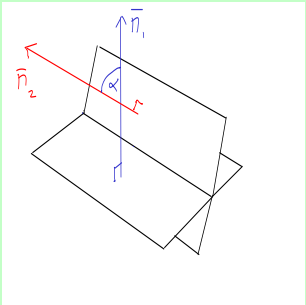
ניתן לחשב את המרחק d ע"י לבחור כל שתי נקודות M_0 ו- N_0 על השני ישרים לפי הנוסחה:

$$d=\frac{\overline{M_0N_0}\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}{|\bar{a}\times\bar{b}|}\ .$$

הגדרה 31: זווית בין מישורים וישרים

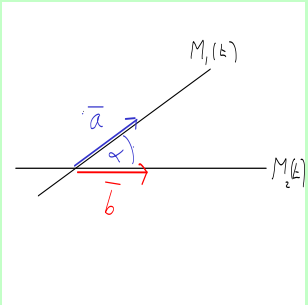
(א) הזווית בין שני מישורים מוגדרת להיות הזוית בין הווקטורים הנורמלים שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$$



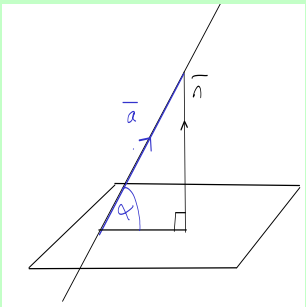
(ב) הזוית בין שני ישירים גם מצטלבים מוגדרת להיות הזוית ביו וקטורים הכיוון שלהם.

$$\cos\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$$



(ג) הזוית בין מישור לישר מוגדרת להיות הזוית המשלימה לזוית בין הנורמל של המישור ווקטור הכיוון של הישר.

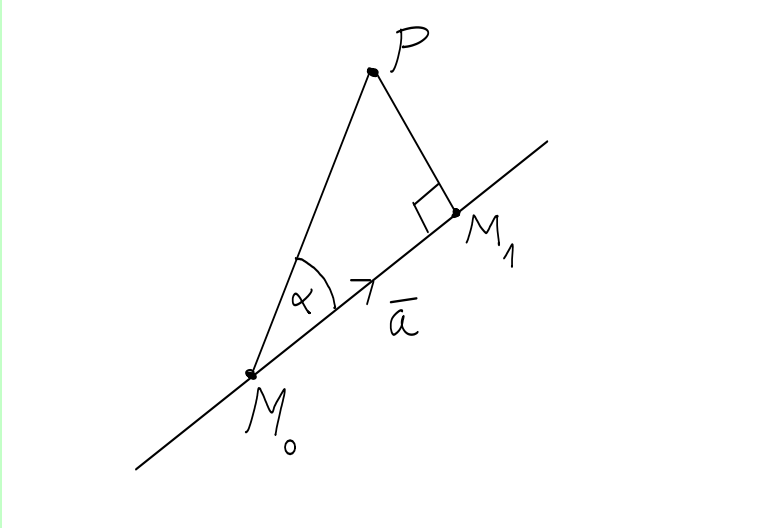
$$\sin\alpha = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{n}|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{n}|}$$



הגדרה 32: מרחק בין נקודה לישר

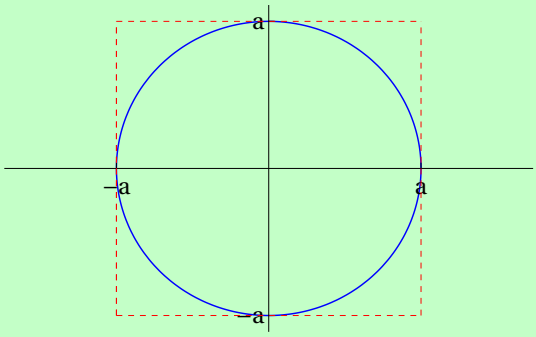
הנקודה הקרובה ביותר M_1 על הישר ל- P תהיה נקודה שבה $\overline{M_1P}$ ניצב ל- $\bar{a}$. ואז

$$d = |\overline{M_1P}| = |\overline{M_0P}| \sin\alpha = \frac{|\overline{M_0P} \times \bar{a}|}{|\bar{a}|}$$



1.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה

הגדרה 33: מעגל

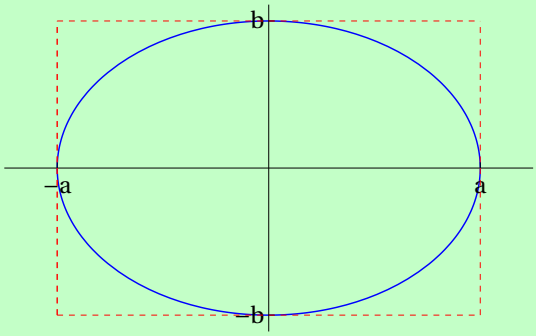


תחום הגדרה:

$$x^2 + y^2 = a^2 \ .$$

$$-\infty \leq x \leq \infty \qquad -\infty \leq y \leq \infty$$

הגדרה 34: אליפסה

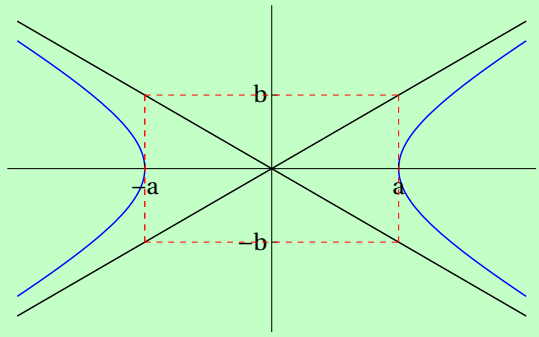


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

תחום הגדרה:

$$-\infty \leq x \leq \infty \qquad -\infty \leq y \leq \infty$$

הגדרה 35: היפרבולה 1

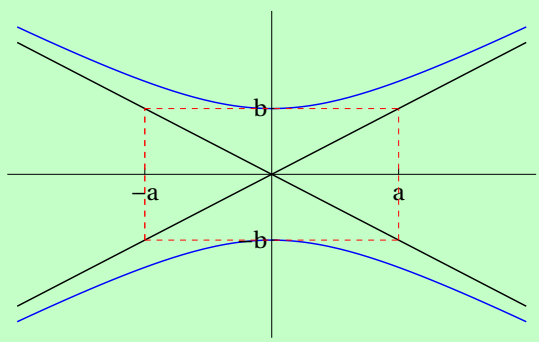


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

תחום הגדרה:

$$x \geq a \ , \quad x \leq -a \ , \qquad -\infty \leq y \leq \infty$$

הגדרה 36: היפרבולה 2



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

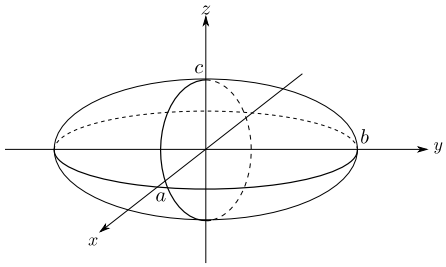
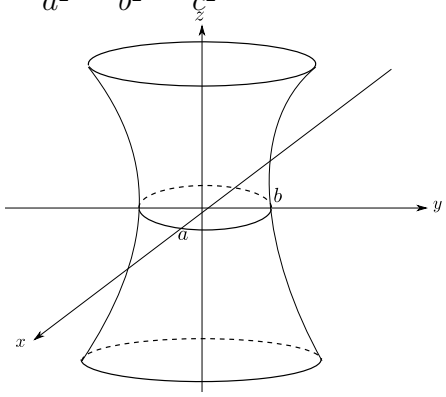
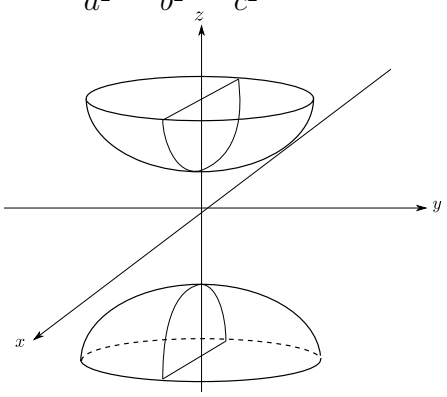
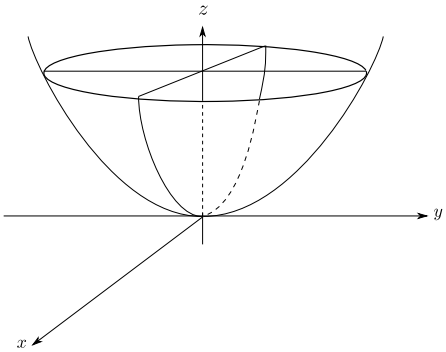
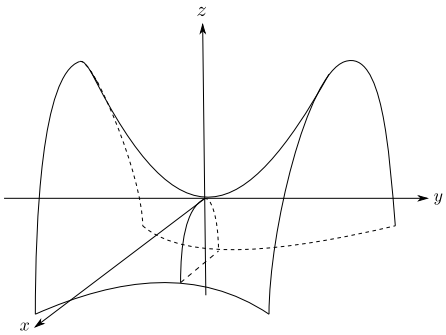
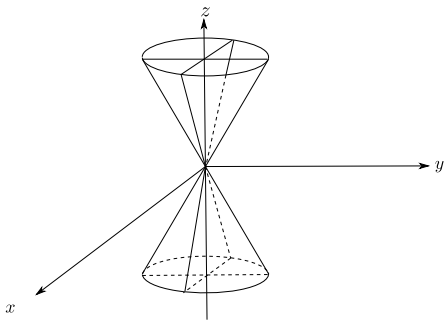
תחום הגדרה:

$$-\infty \leq x \leq \infty \qquad y \geq b \ , \quad y \leq -b \ .$$

הגדרה 37: קווי גובה

קו גובה הינו קו החתך של המשטח ע"י המישור האופקי $z = c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ מספר קבוע. מבחינה אנליטית: קו גובה $L_{f,c}$ של $f(x,y)$ הינו עקום המוגדר במישור xy ע"י המשוואה

$$f(x,y) = c \ .$$

אליפסויד: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		ספירה ($a=b=c=r$) $x^2+y^2+z^2=r^2$
היפרבולויד:	חד יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 	דו יריעתי: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 
פרבולויד:	אליפטי: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 	היפרבולי: $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 
חרוט אליפטי: $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$		

1.8 גבולות ונגזרות חלקיות

הגדרה 38: פונקציה בשני משתנים ופונקציה בשלושה משתנים

פונקציה בשני משתנים זו פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^2$ תחום ב- $\mathbb{R}^2$.

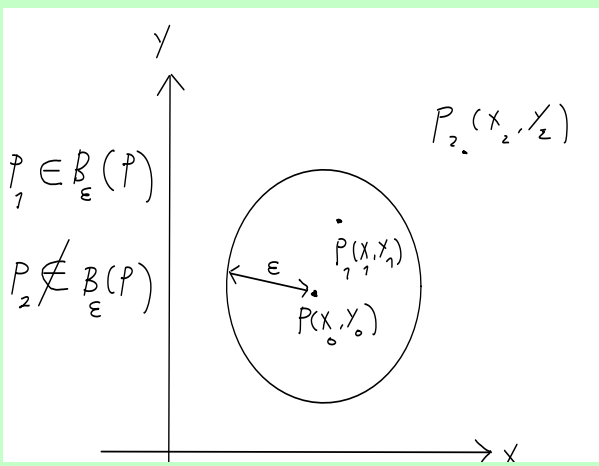
פונקציה בשלושה משתנים זו פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^3$ תחום ב- $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 39: כדור פתוח סביב נקודה

נתונה נקודה $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ונתון $\varepsilon > 0$, **כדור פתוח סביב הנקודה** P או **סביבה של נקודה** P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P) = \left\{ P' \middle| d(P, P') < \varepsilon \right\} \ , \qquad \varepsilon > 0$$

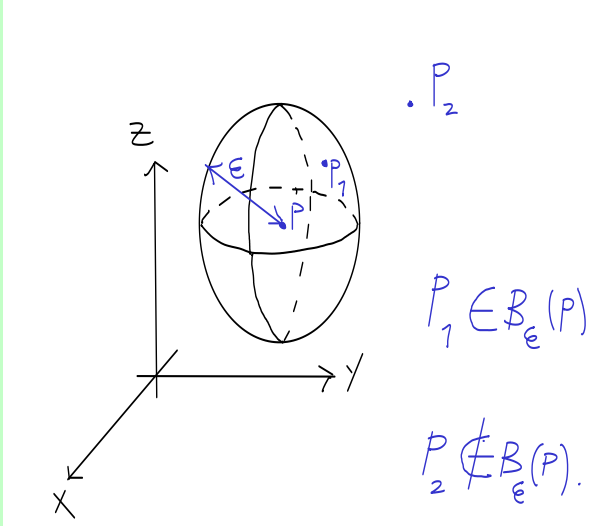
כאשר $d(P, P')$ פונקציה המרחק: $d(P, P') = |(x - x')^2 + (y - y')^2|^{1/2}$.



מאותה מידה, נתונה נקודה $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ונתון $\varepsilon > 0$, כדור פתוח סביב הנקודה P מוגדר להיות הקבוצה של כל הנקודות $P' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ כך שהמרחק בין P ו- P' קטן מ- ε:

$$B_\varepsilon(P) = \left\{ P' \middle| d(P, P') < \varepsilon \right\} \ , \qquad \varepsilon > 0$$

כאשר $d(P, P')$ פונקציה המרחק: $d(P, P') = |(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2|^{1/2}$.

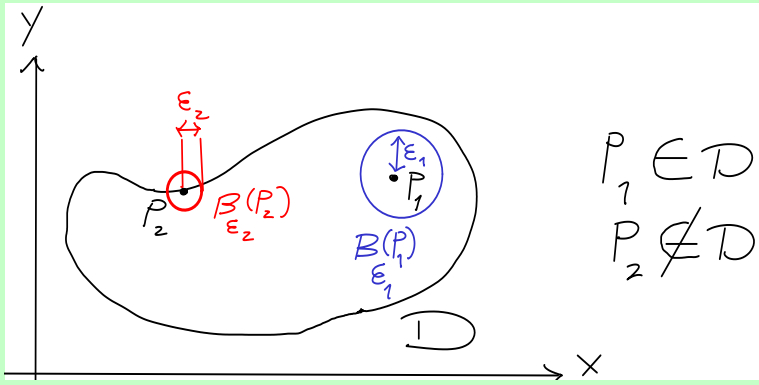


הגדרה 40: תחום פתוח

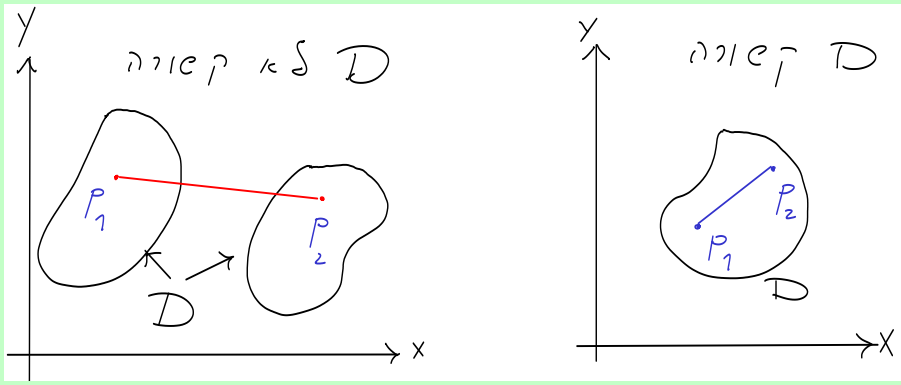
קבוצה פתוחה D הוא קבוצה, כך שלכל נקודה ב- D, יש סביבה כך שכל הנקודות של סביבה זו מוכלות ב- D.

בפרט, לכל נקודה P_1 בפנים של D קיימת סביבה של P_1 (כלומר כדור סביב הנקודה P_1) כך שכל נקודה בסביבה של P_1 מוכלת ב- D. לעומת זאת, נקודה P_2 כלשהי על הפשה של D לא בקבוצה פתוחה D עצמה, בגלל שלא קיימת אף סביבה של P_2 כך שכל נקודה בסביבתה היא ב- D.

לכן קבוצה פתוחה D כוללת את כל הנקודות בפנים של D אבל לא כוללת את הנקודות על השפה של D.



קבוצה קשירה היא קבוצה כך שכל שתי נקודות ב- D ניתן לחבר ע"י קו שמוכל ב- D.



תחום פתוח הוא קבוצה פתוחה וקשירה.

תחום סגור הוא האיחוד של תחום פתוח והנקודות על השפה.

הגדרה 41: גבול של פונקציה בכמה משתנים

יהיו $f : D \to \mathbb{R}$ פונקציה ו- D תחום פתוח. תהי $P_0 = (x_0, y_0) \in D$. נסמן ב- $P(x, y)$ נקודה כללית ב- D. אומרים כי הגבול של $f(P)$ ב- P_0 הוא L אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|P - P_0| > \delta$ מתקיים $|f(P) - L| < \varepsilon$.

הגדרה 42: כלל הסנדוויץ'

אם

$$h(p) \leq f(p) \leq g(p)$$

לכל p בסביבת p_0 ו-

$$\lim_{p \to p_0} g(p) = \lim_{p \to p_0} h(p) = L$$

אז

$$\lim_{p \to p_0} f(p) = L$$

הגדרה 43: רציפות

אומרים ש- $f : D \to \mathbb{R}$ רציפה ב- $p_0 \in D$ אם $\lim_{p \to p_0} f(p) = f(p_0)$.

אומרים ש- f רציפה ב- D אם היא רציפה ב- p_0 לכל $p_0 \in D$.

הגדרה 44: הנגזרת החלקית

נתונה פונקציה $f : D \to \mathbb{R}$ כאשר D תחום פתוח ו- $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$. הנגזרת החלקית של f בנקודה p_0 לפי המשתנה x מוגדרת להיות הגבול

$$f'_x(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{t} .$$

המשמעות היא ש"מקפיאים" את כל המשתנים פרט ל- x, וגוזרים לפי x כאשר חושבים על $y, z, \ldots$ כקבועים (פרמטרים).

כדומה מגדירים $f'_y(p_0)$, $f'_z(p_0)$.

1.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח

הגדרה 45: הגרדיאנט

תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בשלושה משתנים. הגרדיאנט של f בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ מוגדר להיות הוקטור

$$\nabla f(P) = \Big(f'_x(P), f'_y(P), f'_z(P)\Big) .$$

הגדרה 46: הנגזרת המכוונת

הנגזרת המכוונת של $f(x,y,z)$ בנקודה $P(x_0,y_0,z_0)$ בכיוון של הוקטור $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$ מוגדרת להיות

$$\frac{df}{d\bar{a}} = \frac{1}{|a|}\lim_{t\to 0}\frac{f\left(P_0+t\bar{a}\right)-f\left(P_0\right)}{t} .$$

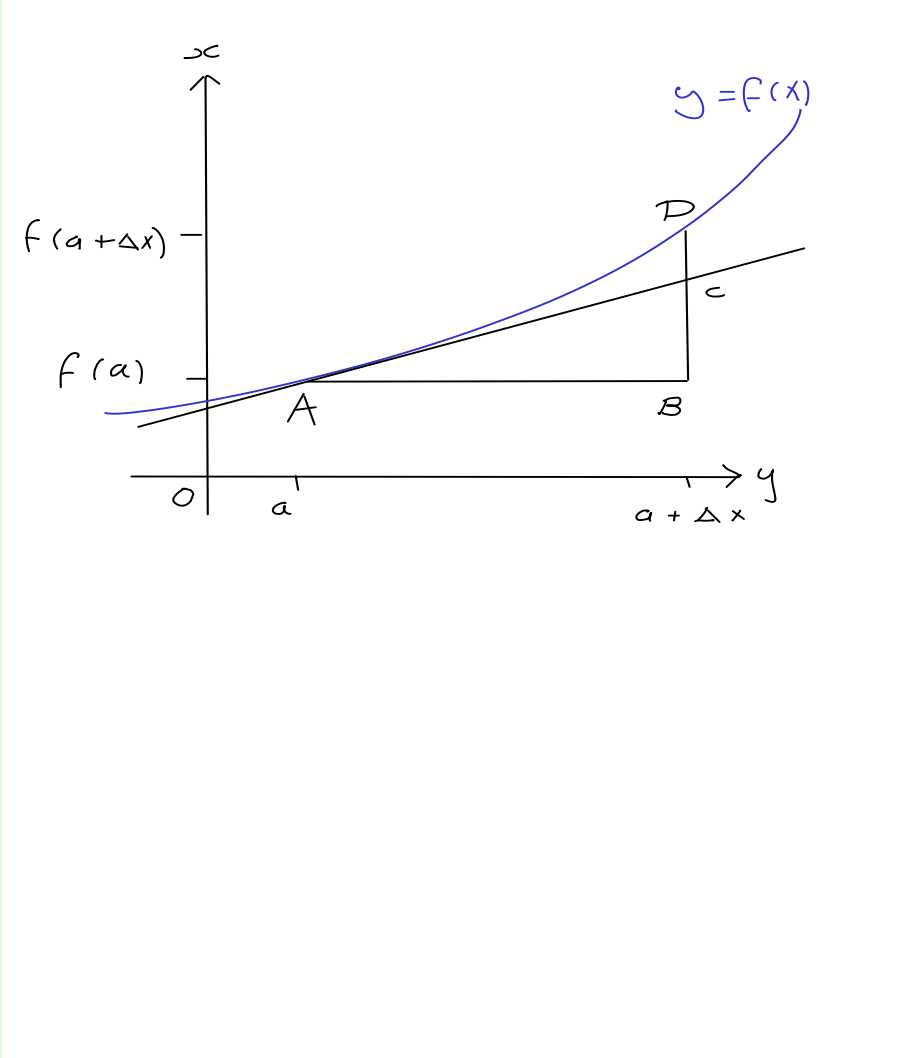
זוהי הנגזרת של f בנקודה P_0 בכיוון של $\bar{a}$.

הגדרה 47: הדיפרנציאל של פונקציה של משתנה אחד

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע I. נניח ש- $a \in I$ וגם $a+\Delta x \in I$.
נגדיר את הנקודות

$$A=(a,f(a)), \qquad B=(a+\Delta x, f(a)), \qquad D(a+\Delta x, f(a+\Delta x)) .$$

(ראו תרשים).
תהי C הנקודה שבה BD נחתך ע"י המשיק ל- $f(x)$ בנקודה a.



יהי

$$\Delta f = BD = f(a+\Delta x) - f(a)$$

השינוי בערך של f. AC הוא המשיק ל- f ב- a, אז

$$\frac{BC}{AB} = f'(a) \qquad \Rightarrow \qquad BC = AB \cdot f'(a) = f'(a)\Delta x \ .$$

נסמן $CD = \epsilon$. בגבול כאשר $\Delta x \to 0$, D יתלכד עם C, ו- $\epsilon \to 0$. כיוון ש- $BD = BC + CD$ אז

$$\Delta f = f'(a)\Delta x + \epsilon \ .$$

ע"י לקחת את הגבול כאשר $\Delta x \to 0$, אז הגבול $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f$ נקבל את הגבול בנקודה a. הדיפרנציאל של f בנקודה a מוגדר להיות הגבול הזה, כלומר

$$df := \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} f'(a)\Delta x \ .$$

הגדרה 48: הדיפרנציאל של פונקציה של שלושה משתנים

נתונה פונקציה $f = f(x,y,z)$. הדיפרנציאל מסדר ראשון שני, שלישי, וכלל מסדר n יוגדרו

$$df = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,y,z)$$

$$d^2 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)$$

$$d^3 f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 f(x,y,z)$$

$$\vdots$$

$$d^n f = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right)^n f(x,y,z)$$

הגדרה 49: נקודת קריטית

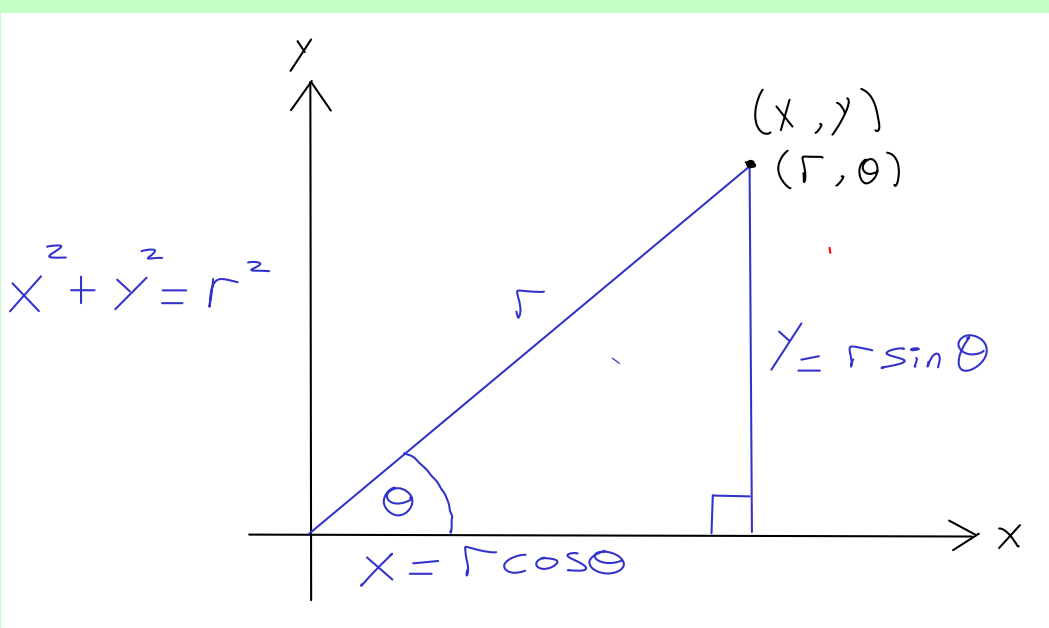
נקודה P שבה

$$f'_x(P) = 0 \ , \qquad \text{ו} \qquad f'_y(P) = 0$$

או $f'_x(P)$, $f'_y(P)$ לא קיים, נקראת נקודת קריטית.

1.10 אינטגרלים כפולים

הגדרה 50: קואורדינטות קוטביות



מקואורדינטות קרטיזיות לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r\cos\theta \ , \qquad y = r\sin\theta \ .$$

מקואורדינטות קוטביות לקואורדינטות קרטיזיות:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \ , \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \ .$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \ .$$

1.11 משוואות דיפרנציאליות

1.12 הגדרת משוואה דיפרציאלית

הגדרה 51: משוואה דיפרניאלית רגילה
משוואה

$$F\left(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}\right)$$

שקושרת בין משתנה בלתי תלוי x לבין פונקציה $y=y(x)$ ונגזרות של $y(x)$ לפי x, תיקרא משוואה דיפרניאלית רגילה (מד"ר או מישדיף).

הגדרה 52: פתרון משוא דיפרניאלית רגילה
פתרון של מד"ר

$$F\left(x,y,y',\ldots,y^{(n)}\right)=0$$

בקטע (a,b) זו פונקציה גזירה n פעמים ב- (a,b) המקיימת את המשוואה. כלומר, לאחר הצבה שלה, המשוואה הופכת לזהות לכל x בקטע.

הגדרה 53: משוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון
אם ניתן להציג את המשוואה בצורה

$$y' = f(x,y)$$

אז המשוואה נקראת משוואה הפתוחה לגבי הנגזרת. משואה כזו ניתן גם להציג בצורה

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ .$$

הגדרה 54: פתרון כללי למשוואה דיפרניאלית רגילה מסדר ראשון
פתרון כללי למד"ר מסדר ראשון הוא פונקציה גזירה $y=\phi(x,C)$ כאשר C הוא פרמטר כך שלכל פתרון של המשוואה (פרט אולי למקרים "מיוחדים") מתקבל ב- $\phi(x,C)$ ע"י הצבה של ערך כלשהו ב- C.

הגדרה 55: פתרון כללי
פתרון המתקבל מהפתרון הכללי ע"י הצבה של ערך בפרמטר C נקרא פתרון פרטי.

הגדרה 56: פתרון פרטי

מד"ר מסדר ראשון יחד עם תנאי התחלה

$$\begin{cases} F(x,y,y') &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

נקראת בעית קושי.

הגדרה 57: פתרון מיוחד

פתרון של מד"ר שאינו מתקבל מהפתרון הכללי כפתרון פרטי עבור ערך כלשהו של הפרמטר C נקרא פתרון מיוחד.

הגדרה 58: משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים

מד"ר הניתנת להפרדת משתנים הינה משוואה מצורה

$$y' = f(x)g(y)$$

או באופן שקול

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

2 משפטים

2.1 סדרות של מספרים

2.2 טורים חיוביים וטורים כלליים

2.3 טרוי פונקציות וטורי חזקות

2.4 אלגברה וקטורית

2.5 מישורים במרחב תלת ממדי

2.6 ישרים במרחב תלת ממדי

2.7 חתכי חרוט, משטחים וקווי גובה

2.8 גבולות ונגזרות חלקיות

2.9 גרדיאנט נגזרת כיוונית מישור משיק למשטח

2.10 אינטגרלים כפולים

2.11 אינגרלים קוויים

2.12 משוואות דיפרנציאליות