# תוכן העניינים


| | | |
|---|---|---|
| 1 | פרק 1: משחקים בצורה רחבה | 1 |
| 2 | פרק 2: משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש | 7 |
| 3 | פרק 3: אסטרטגיות רציפות ודואפול | 12 |
| 4 | פרק 4: משחקי לוח | 12 |
| 5 | פרק 5: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס | 27 |
| 6 | פרק 6: אסטרטגיות מעורבות | 33 |


## 1 פרק 1: משחקים בצורה רחבה

**הגדרה 1: גרף מכוון**

גרף מכוון סופי הוא זוג $G=(V,E)$ שבו:

- $V$ הוא קבוצה סופית של הקודקודים של הגרף.
  בדרך כלל קודקודים יסומנו $x_0, x_1, x_2, \ldots$.
- $E \supseteq V \times V$ הוא קבוצה סופית של הצלעות של הגרף.

אם $V$ הוא הקבוצת הקודקודים של $G$, ואם קיימת צלע מקודקוד $x_i \in V$ לקודקוד $x_j \in V$, הצלע הזו תסומן

$$x_i x_j \in E \ .$$

**הגדרה 2: קודקוד אב וקודקוד בן**

יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון. אם קיימת צלע $x_1x_2 \in E$, כלומר אם קיימת צלע היוצאת מקודקוד $x_1$ ונכנסת לקודקוד $x_2$, אומרים כי:

- $x_2$ הוא **בן** של הקודקוד $x_1$,
- $x_1$ הוא **אב** של הקודקוד $x_2$.

אם $x \in V$ קודקוד של $G$. הקבוצת כל הבנים של $x$ תסומן $c(x)$, וקבוצת כל האבות של $x$ תסומן $p(x)$:

$$c(x) \triangleq \text{"קבוצת הבנים של } x\text{"} \ ,$$

$$p(x) \triangleq \text{"קבוצת האבות של } x\text{"} \ .$$





**הגדרה 3: עץ מכוון**

עץ מכוון הוא שלשה $(V,E,x_0)$ כאשר $(V,E)$ גרף מכוון ו- $x_0 \in V$ הוא קודקוד של $G$, שנקרא **השורש** של העץ, כך שהתנאים הבאים מתקיימים.

**1)** לא קיימות צלעות שנכנסות לשורש $x_0$.

**2)** לכל קודקוד פרט לשורש, $x \in V$ $(x \neq x_0)$, קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליה.

**3)** $G$ לא מכיל מחזורים.

**משפט 1: קיום אב יחיד לכל בן בעץ מכוון**

אם $(V,E,x_0)$ הוא עץ מכוון אז לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים $x = x_0$ או ל- $x$ קיים אב אחד בדיוק.

**הוכחה:** יהי $T=(V,E,x_0)$ עץ. יהי $x \in V$ קודקוד ונניח ש- $x \neq x_0$. נראה כי ל- $x$ קיים אב ואז נראה כי האב של $x$ הוא יחודי.

$\Leftarrow$ נניח של- $x$ לא קיים אב.

$\Leftarrow$ לא קיימת צלע שנכנסת אליו.

$\Leftarrow$ הגענו לסתירה לכך שבעץ, לכל קודקוד (חוץ מהשורש) קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליו.

לכן לכל קודקוד $x \neq x_0$ קיים אב.

הוכחנו קיום אב לכל קודקוד פרט לשורש.

כעת נוכיח כי האב של $x$ הוא יחיודי.

נניח שקיים קודקוד $x$ בעץ ולו יש שתי אבות: $x'$ ו- $x''$.

$\Leftarrow$ קיימות שתי צלעות שנכנסות אליו: $xx' \in E$ ו- $xx'' \in E$.

$\Leftarrow$ הגענו לסתירה לכך שבעץ לכל קודקוד (חוץ מהשורש) קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליו.

■

**משפט 2: בעץ מכוון קיים מסלול יחיד מהשורש לכל קודקוד**

אם $(V,E,x_0)$ הוא עץ מכוון אז קיימת מסלול יחיד מהשורש $x_0$ לכל קודקוד $x \in V$.

**הוכחה:** נוכיח קיום מסלול מ- $x_0$ לכל קודקוד $x$ באינדוקציה. נסמן ב- $d$ את האורך של המסלול, כאשר אורך של מסלול מוגדר להיות מספר הקודקודים שהמסלול עובר.

<u>שלב הבסיס: $d=1$</u>

אם $d = 1$ אז המסלול הוא מ- $x_0$ לעצמו ולכן הטענה נכונה באופן טריוויאלי.

<u>שלב המעבר</u>

נניח כי הטעה נכונה עבור $d = k$. זאת היא ההנחת האינדוקציה שלנו. נוכיח את הטענה למקרה $d = k + 1$ באופן הבא.

- אם $x$ קודקוד בעץ במרחק $d = k + 1$ מ- $x_0$
- $\Leftarrow$ ל- $x$ קיים אב $p(x) = x'$.
- $\Leftarrow$ $x'$ במרחק $k$ מ- $x_0$.
- $\Leftarrow$ לפי ההנחת האינדוקציה קיים מסלול מ- $x_0$ ל- $x'$,
  ומכיוון ש- $x'$ הוא האב של $x$ אז קיים מסלול מ- $x'$ ל- $x$.
- $\Leftarrow$ קיים מסלול מ- $x_0$ ל- $x$.

הוכחנו קיום מסלול מ- $x_0$ לכל קודקוד $x$. כעת נוכיח כי המסלול יחודי באופן הבא.

- נניח בשלילה כי קיים קודקוד $x$ עבורו קיימים שני מסלולים מ- $x_0$ ל- $x$.
- $\Leftarrow$ קיים קודקוד ראשון $y$ שבו המסלולים מסתעפים וקודקוד האחרון $y'$ שלפניו המסלולים היו שונים.
- $\Leftarrow$ לקודקוד $y'$ נכנסות שתי צלעות שונות.
- $\Leftarrow$ סתירה לכך שבעץ לכל קודקוד יש בדיוק צלע אחת שנכנסת אליו.

■

**משפט 3: כל מסלול בעץ מכוון הוא יחודי**

אם $(V, E, x_0)$ הוא עץ ואם קיים מסלול מקודקוד $x \in V$ לקודקוד $x' \in V$ אז הוא יחודי.

**הוכחה:** יהיו $x, x' \in V$ שני קודקודים שונים של העץ. נוכיח את הטענה דרך השלילה.

- אם קיימים קודקודים $x, x' \in V$ שביניהם קיימים שני מסלולים שונים.
- $\Leftarrow$ קיים קודקוד ראשון $y$ שבו המסלולים מסתעפים וקודקוד האחרון $y'$ שלפניו המסלולים היו שונים.
- $\Leftarrow$ לקודקוד $y'$ נכנסות שתי צלעות שונות.
- $\Leftarrow$ סתירה לכך שבעץ לכל קודקוד יש בדיוק צלע אחת שנכנסת אליו.

■





**הגדרה 4: חלוקה**

תהי $B$ קבוצה לא ריקה. **חלוקה** היא סדרה

$$(B_i)_{i=1}^{k} = (B_1,\ B_2,\ \dots\ , B_k)$$

המקיימת את התנאים הבאים:

1) לכל $1 \le i \le k$, $B_i$ היא תת-קבוצה של $B$:

$$B_i \subseteq B\ , \qquad 1 \le i \le k$$

2) התתי-קבוצות זרות. כלומר כל חיתוך של כל מספר סופי של תת-קבוצות הוא ריק. כלומר לכל תת-קבוצה $X \subseteq \{1, \dots, k\}$:

$$\bigcap_{x \in X} B_x = \emptyset\ .$$

3) האיחוד של כל תתי-קבוצות הוא הקבוצה $B$:

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B\ .$$

**הגדרה 5: משחק בצורה רחבה**

משחק בצורה רחבה הוא שביעייה סדורה:

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i \in N}, O, (u_i)_{i \in N}\right)\ .$$

המרכיבים של המשחק, $\Gamma$ הם מוגדרים באופן הבא.

1) $N =$ קבוצה סופית של **שחקנים**.

$(x_0, V, E)$ הוא עץ מכוון שנקרא **עץ המשחק**.

2) $x_0 =$ **השורש של העץ**, שהוא קודקוד שבו השחקן הראשון בתור מקבל ההחלטה הראשונה בין הפעולות המייוצגות ע"י הצלעות שיוצאות ממנה.

3) $V =$ קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.
בכל קדקוד שחקן מקבל החלטה בין פעולות.

4) $E =$ קבוצת **הצלעות** של עץ המשחק.
כל צלע מייצגת פעולה של אותו שחקן שקיבל החלטה בקודקוד שמננו הצלע יצאה.

5) $(V_i)_{i \in N} = (V_1, V_2, V_3, \dots)$ היא **חלוקה** של הקבוצת הקודקודים שאינם עלים כך ש:

- $V_1 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן $1$ מקבל החלטה,
- $V_2 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן $2$ מקבל החלטה.

במקרה הכללי:

- $V_j =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן $j$ מקבל החלטה.

6) $O =$ **קבוצת העלים** של העץ.
כלומר $O \subset V$ היא תת-קבוצת קודקודים של העץ שמכילה כל הנקודות סיום של העץ.

7) $(u_i)_{i\in N} = (u_1, u_2, \ldots)$ כאשר $u_i$ היא **פונקצית התשלום** של שחקן $i$, שמתאימה לכל עלה בעץ המשחק תשלום לשחקן $i$.

**הגדרה 6: פונקצית הפעולות**

**הפונקצית הפעולות**, $A(x)$ מתאימה לקודקוד $x$, כל הפעולות האפשריות ששחקן יכול לבחור בקודקוד $x$.

**הגדרה 7: אסטרטגיה**

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה, ויהי $V_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ קבוצת הקודקודים של שחקן $i \in N$.

- **אסטרטגיה** של שחקן $i \in N$ היא פונקציה $s_i(x)$ המתאימה לכל קודקוד $x \in V_i$ פעולה ב- $A(x)$.
  אסטרגטיה יחידה, $s_i$ של שחקן $i$ תסומן כסדרת פעולות בכל קודקוד:
  $$s_i = (s_i(x_1),\ s_i(x_2),\ \ldots\ , s_i(x_n)) = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n)\ ,\qquad a_j \in A\left(x_j\right)\ .$$
- **הקבוצת האסטרטגיות** של שחקן $i \in N$ תסומן $S_i$ ותוגדר:
  $$S_i = \left\{\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n)\ \middle|\ a_1 \in A(x_1)\ ,\quad \ldots\quad ,\ a_n \in A(x_n)\ \right\}\ .$$
  כלומר, הקבוצת אסטרטגיות $S_i$ היא אוסף כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן $i$ במשחק $\Gamma$.
- נניח ששחקן $I$ בוחר באסטרטגיה $s_I \in S_I$, שחקן $II$ בוחר באסטרטגיה $s_{II} \in S_{II}$, ובאופן כללי נניח כי שחקן $i \in N$ בוחר באסטרטגיה $s_i \in S_i$.
  **וקטור אסטרטגיה** של המשחק הוא וקטור של הפונקציות אסטרטגיות של כל השחקנים:
  $$s = (s_i)_{i\in N} = (s_I,\ s_{II},\ \ldots\ )\ .$$

**הגדרה 8: קבוצת ידיעה**

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה. **הקבוצת ידיעה** של שחקן $i \in N$ תסומן $U_i$ ותוגדר הקבוצת זוגות הבאה:
$$\bigcup_{x\in V_i} (\ x\ ,\ A(x)\ )\ ,$$
ז"א $U_i$ מכילה כל הזוגות, כאשר כל זוג מכיל קודוד $x$ והקבוצות הפעולות האפשריות $A(x)$.

**הגדרה 9: פונקצית תשלום**

נתון משחק $n$-שחקנים.

- **הפונקצית התשלום של שחקן** $i$, מסומנת $u_i$, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n)$ של המשחק תשלום לשחקן $i$:
  $$u_i\left(s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n\right)\ =\ \text{"תשלום לשחקן } i\text{"}\ .$$
- **הפונקצית התשלום של המשחק**, מסומנת $u$, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n)$ וקטור $(u_1,\ \ldots\ u_n)$ כאשר $u_i$ הוא התשלום לשחקן $i$:
  $$u\left(s_1,\ s_2,\ \ldots\ s_n\right)\ =\ (u_1,\ \ldots\ u_n)\ .$$





**הגדרה 10: משחק עם ידיעה שלמה**

- בכל שלב במשחק, כל שחקן מודע לכלל ההחלטות שהתקבלו על ידי השחקנים האחרים בשלבים המוקדמים יותר.
- לפיכך, השחקן יודע בדיוק אילו פעולות ננקטו, ובעת קבלת ההחלטה, הוא יודע בוודאות באיזה צומת הוא נמצא בעץ המשחק.

**הגדרה 11: משחק עם ידיעה לא שלמה**

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק שבו:

- קיים שחקן $i$ כך שאם $V_i$ הקבוצת קודקודים שלו, קיימת תת-קבוצת קודקודים $V_i' \subseteq V_i$ שבה שחקן $i$ לא יודע אילו פעולה ביצע השחקן בקודקוד אב של הקודקודים ב- $V_i'$.
- לכן, כאשר מגיע תורו של אותו שחקן, הוא אינו יודע באיזה צומת הוא נמצא בתוך עץ המשחק.
- התת-קבוצה $V_i'$ תקרא **קבוצת ידיעה לא שלמה**.

**משפט 4: פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה לא שלמה**

אם $x, x'$ הם קודקודים של אותה קבוצת ידעיה לא שלמה, אז הקבוצת הפעולות של $x$ ו- $x'$ זהות:
$$A(x) = A(x')\ .$$

**הגדרה 12: משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל**

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל הוא שמינייה סדורה:
$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, (p_x)_{x\in V_0}, O, u\right)\ ,$$
שבה:

- $N$ הוא קבוצה סופית של שחקנים.
- $(V, E, x_0)$ הוא עץ המשחק.
- $(V_i)_{i\in N\cup\{0\}}$ היא חלוקה של קבוצת הקודקודים שאינן עלים.
- לכל קדקוד $x \in V_0$, $p_x$ היא פונקצית ההסתברות של הפעולות (הצלעות) היוצאות מ- $x$.
- $O$ היא הקבוצת העלים, המייצגים הקבוצת התוצאות האפשריות.
- $u$ הוא פונקצית התשלומים של המשחק.

הסימונים הם כמקודם בהגדרה 5 עם ההבדלים הבאים.

- החלוקה של קבוצת הקודקודים היא עתה $(V_i)_{i\in N\cup\{0\}}$. כלומר, נוספה עתה הקבוצה $V_0$ שהיא קבוצת הקודקודים שבהם מתבצע מהלדכי גורל.
- לכל קודקוד $x_0 \in V_0$ הוקטור $p_x$ הוא ההסתברויות של הצלעות היוצאות מ- $x$.

**הגדרה 13: פונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים ואי-זוגיים**

הפונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = \begin{cases} 1: & \text{זוגי } n \\ 0: & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = 1 - n \bmod 2 \ .$$

הפונקצית האינדיקטור של מספרים אי-זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = \begin{cases} 0: & \text{זוגי } n \\ 1: & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = n \bmod 2 \ .$$

## 2 פרק 2: משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

**הגדרה 14: משחק בצורה אסטרטגית**

**משחק בצורה אסטרטגית** הוא שלושה סדורה

$$G = \left(N \ , \ (S_i)_{i\in N} \ , (u_i)_{i\in N}\right)$$

שבה

**1)** $N = \{I, II, \ldots\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

**2)** לכל שחקן, $S_i, i \in N$ היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן $i$.

**3)** לכל שחקן $i \in N$:

$$u_i : S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}$$
$$u_i : S \to \mathbb{R}$$

היא פונקציה המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $s = (s_i)_{i\in N}$ תשלום לשחקן $i$.

**הגדרה 15:**

תהי $N = \{1, \ldots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי $X_i$ קבוצה כלשהי.
נסמן

$$X = \bigtimes_{i\in N} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות $X_i$.
לכל $i \in N$ נגדיר

$$X_{-i} = \bigtimes_{\substack{j\in N \\ j\neq i}} X_j = X_1 \times X_2 \times X_{i-1} \times X_{i+1} \cdots \times X_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות $X_j$ למעט הקבוצה $X_i$.





במילים אחרות,

$$X_{-i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid x_j \in X_j \ , \ \forall j \neq i\}$$

איבר ב- $X_{-i}$ מסומן ב-

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ .$$

זהו הווקטור ה- $(n-1)$ ממדי הנוצר מ- $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ על ידי השמטת הקואורדינטה $i$.

**הגדרה 16: אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק $n$ שחקנים**

נתון משחק $n$- שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$.
אם קיימות אסטרטגיות $s_i, t_i \in S_i$ של שחקן $i$ כך שלכל אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ של שאר השחקנים מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) \ ,$$

אז אומרים כי $s_i$ **נשלטת חזק** על ידי $t_i$ (או $t_i$ **שולטת חזק** על $s_i$).

במילים אחרות, אם קיימות $s_i, t_i \in S_i$ כך שלכל וקטור אסטרטגיות $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

אז אומרים כי $t_i$ נשלטת חזק ע"י $s_i$.

סימון:

$$s_i \prec t_i \ .$$

**משפט 5: אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים**

נתון משחק 2- שחקנים $G = (N, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$ כאשר $N = \{1, 2\}$ הקבוצת שחקנים.

- אם קיימות אסטרטגיות $s_1, t_1 \in S_1$ של שחקן 1 כך שלכל אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן 2 מתקיים:
$$u_1(s_1, s_2) < u(t_1, s_2)$$
אז אומרים כי $s_1$ **נשלטת חזק** ע"י $t_1$. סימון: $s_1 \prec t_1$.
- אם קיימות אסטרטגיות $s_2, t_2 \in S_2$ של שחקן 2 כך שלכל אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 מתקיים:
$$u_2(s_1, s_2) < u(s_1, t_2)$$
אז אומרים כי $s_2$ **נשלטת חזק** ע"י $t_2$. סימון: $s_2 \prec t_2$.

**משפט 6: הנחות של רציונליות בתורת המשחקים**

**1)** שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

**2)** כל השחקנים במשחק הם רציונליים.

**3)** העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

**הגדרה 17: תשובה טובה ביותר במשחק $n$ שחקנים**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$.
אם קיימת אסטרטגיה $s_i\in S_i$ של שחקן $i$ וקיימת וקטור אסטרטגיות $s_{-i}\in S_{-i}$ של שאר השחקנים כך ש:

$$u_i\left(s_i,s_{-i}\right)=\max_{t_i\in S_i}u_i\left(t_i,s_{-i}\right)$$

אז אומרים כי $s_i$ היא **התשובה הטובה ביותר** של שקחן $i$ בתגובה לוקטור אסטרטגיות $s_{-i}$ של שאר השחקנים.

במילים אחרות, האסטרטגיה $s_i$ של שחקן $i$ היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1,s_2,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגיה $s_i$ נותנת לשחקן $i$ התשלום המקסימלי מתוך כל האסטרטגיות האחרות $t_i\in S_i$ של שחקן $i$:

$$u_i\left(s_1,s_2,\dots s_{i-1},s_i,s_{i+1},\dots,s_n\right)=\max_{t_i\in S_i}u_i\left(s_1,s_2,\dots s_{i-1},t_i,s_{i+1},\dots,s_n\right)\ .$$

**משפט 7: תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים**

נתון משחק 2 שחקנים: $G=\left(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\right)$.

- אם קיימת אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן 1 וקיימת אסטרטגיה $s_2\in S_2$ של שחקן 2 כך שמתקיים
$$\forall t_1\in S_1:\qquad u_1\left(s_1,s_2\right)\geq u_1\left(t_1,s_2\right)$$
אז אומרים כי $s_1$ היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 1 בתגובה לאסטרטגיה $s_2$ של שחקן 2.
- אם קיימת אסטרטגיה $s_2\in S_2$ של שחקן 2 וקיימת אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן 1 כך שמתקיים
$$\forall t_2\in S_2:\qquad u_2\left(s_1,s_2\right)\geq u_2\left(s_1,t_2\right)$$
אז אומרים כי $s_2$ היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 2 בתגובה לאסטרטגיה $s_1$ של שחקן 1.

**הגדרה 18: שיווי משקל נאש**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$. אם קיים וקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ כך שלכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i\in S_i$ של שחקן $i$ מקתיים:

$$u_i\left(s^*\right)\geq u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)$$

אז אומרים כי $s^*$ הוא **שיווי משקל נאש** של המשחק.

**משפט 8: שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים**

נתון משחק 2 שחקנים: $G=\left(\{1,2\},(S_1,S_2),(u_1,u_2)\right)$. אם קיים וקטור אסטרטגיות, $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ של המשחק כך שלכל אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן 1 ולכל אסטרטגיה $s_2\in S_2$ התנאים הבאים מתקיימים:

$$\forall s_1\in S_1:\qquad u_1\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u_1\left(s_1,s_2^*\right)\ ,$$
$$\forall s_2\in S_2:\qquad u_2\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u_1\left(s_1^*,s_2\right)\ ,$$

אז אומרים כי $s^*=(s_1^*,s_2^*)$ הוא **שיווי משקל של המשחק**.

**משפט 9:**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז $s^*$ הוא פתרון למשחק $G$ באסטרטגיות השולטות חזק.





**הוכחה:**
נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח בשלילה כי $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש של המשחק $G$ אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה ראשונה $s_i^*$ מבין האסטרטגיות $s_1^*,\dots,s_n^*$ של $s^*$ שמסולקת בתהליך סילוק חוזר.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i\in S_i$ ששולטת על $s_i^*\in S_i$.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i\in S_i$ כך שלכל אסטרטגיות $s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n\in S_{-i}$ אשר עדיין נשארות בתהליך:

$$u_i\left(s_1,\dots,s_i^*,\dots,s_n\right)<u_i\left(s_1,\dots,t_i,\dots,s_n\right)\quad . \tag{\#1}$$

$\Leftarrow$ בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*,\dots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\dots,s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי סילוק של האסטרטגיה $s_i^*$, אז לפי (#1) מתקיים

$$u_i\left(s_1^*,\dots,s_i^*,\dots,s_n^*\right)<u_i\left(s_1^*,\dots,t_i,\dots,s_n^*\right)\quad . \tag{\#2}$$

$\Leftarrow$ סתירה לכך ש $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש של המשחק $G$.

■

**משפט 10:**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ הוא **הפתרון היחיד** למשחק $G$ באסטרטגיות שולטות חזק, אז $s^*$ הוא השיווי משקל של המשחק.

**הוכחה:**
נוכיח את הטענה בדרך השלילה באופן הבא.

אם קיים ווקטור אסטרטגיות $s^*=(s_1^*,\dots,s_n^*)$ שהוא השורד היחיד של תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק, אך **אינו** שיווי משקל נאש.

$\Leftarrow$ קיים שחקן $i$ שיש לו סטייה כדאית.

$\Leftarrow$ קיימת לשחקן $i$ אסטרטגיה טובה יותר מ- $s_i^*$ נגד $s_{-i}^*$.

$\Leftarrow$ בגלל שקבוצת האסטרטגיות $S_i$ היא סופית, קיימת לשחקן $i$ אסטרטגיה שהיא "תשובה טובה ביותר" מוחלטת נגד $s_{-i}^*$.

נסמן אסטרטגיה זו ב- $\bar{s}_i$.

$\Leftarrow$ לכל אסטרטגיה אחרת $t_i\in S_i$ מתקיים:

$$u_i(\bar{s}_i,s_{-i}^*)\geq u_i(t_i,s_{-i}^*) \tag{*}$$

מצד שני מכיוון ש- $s_i^*$ היא האסטרטגיה היחידה ששורדת סילוק חוזר, וגם $\bar{s}_i\neq s_i^*$, אזי $\bar{s}_i$ מסולקת בשלב מסויים בסילוק חוזר.

נניח שהיא מסולקת בשלב $k$.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i$ ששולטת חזק על $\bar{s}_i$, כלומר:

$$\exists t_i\in S_i:\quad \forall s_{-i}\in S_{-i}:\quad u_i\left(t_i,s_{-i}\right)>u_i\left(\bar{s}_i,s_{-i}\right)\ .$$

$\Leftarrow$ בפרט מכיוון שהוקטור אסטרטגיות $s^*_{-i}$ שורד סילוק חוזר:

$$\exists t_i \in S_i : \quad u_i(t_i, s^*_{-i}) > u_i(\bar{s}_i, s^*_{-i})$$

$\Leftarrow$ סתירה לשמוואה (*).

■

**משפט 11:**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ויהי $\hat{G} = \left(N, (\hat{S}_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק המתקבל מ- $G$ על ידי השמטת חלק מהאסורוגיות של השחקנים. ז"א $\hat{S}_i \subseteq S_i$ לכל שחקן $i$.
אם $s^*$ הוא שיווי משקל במשחק $G$, ואם $s^*_i \in \hat{S}_i$ לכל שחקן $i$, אזי $s^*$ הוא שיווי משקח במשחק $\hat{G}$.

**הוכחה:** $s^*$ שיווי משקל במשחק $G$. לכן לכל שחקן $i \in N$ מתקיים

$$\forall s_i \in S_i : \quad u_i(s_i, s^*_{-i}) \le u_i(s^*) \ .$$

מכיוון ש- $\hat{S}_i \subseteq S_i$ לכל שחקן $i \in N$, בפרט מתקיים גם:

$$\forall s_i \in \hat{S}_i : \quad u_i(s_i, s^*_{-i}) \le u_i(s^*) \ .$$

מכיוון ש- $s^*$ ווקטור אסטרטגיות במשחק $\hat{G}$, נובע מכאן כי הוא שיווי משקל במשחק זה. ■

**משפט 12:**

משחק שני שחקנים נקרא **משחק סימטרי** אם

**1)** לשני השחקנים אותה קבוצת אסטרטגיות: $S_1 = S_2$.

**2)** פונקציות התשלומים מקיימות: $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

כלומר אם $(s_1, s_2)$ היא שיווי משקל, אז גם $(s_2, s_1)$ הוא שיווי משקל.

**הוכחה:** יהי $G$ משחק סימטרי. יהי הווקטור אסטרטגיות $(s_1, s_2)$ שיווי משקל של המשחק $G$. אזי

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{s\in S_1} u_1(s, s_2) \qquad \wedge \qquad u_2(s_1, s_2) = \max_{s\in S_2} u_1(s_1, s) \ .$$

המשחק סימטרי לכן

$$u_2(s_2, s_1) = u_1(s_1, s_2) = \max_{s\in S_1} u_1(s, s_2) = \max_{s\in S_1} u_2(s_2, s) = \max_{s\in S_2} u_2(s_2, s) \ ,$$

וגם

$$u_1(s_2, s_1) = u_2(s_1, s_2) = \max_{s\in S_2} u_2(s_1, s) = \max_{s\in S_2} u_1(s, s_2) = \max_{s\in S_1} u_1(s, s_2) \ .$$

לכן הוקטור אסטרטגיות $(s_2, s_1)$ הוא שיווי משקל של המשחק $G$. ■

**משפט 13:**

משחק שני שחקנים נקרא **משחק סימטרי** אם

**1)** לשני השחקנים אותה קבוצת אסטרטגיות: $S_1 = S_2$.

**2)** פונקציות התשלומים מקיימות: $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ לכל $s_1 \in S_1$ ולכל $s_2 \in S_2$.

יהי $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$ משחק שני שחקנים סימטרי.





אם $s^*_1 \in \arg\max_{s_1\in S_1} u_1(s_1, s_1)$ אז $(s^*_1, s^*_1)$ הוא שיווי משקל נאש.

# 3 פרק 3: אסטרטגיות רציפות ודואפול

**הגדרה 19: מודל של קורנוט של דואפול**

**פונקצית המחיר** של יחדיה אחת של המוצר:

$$P = a - Q = a - q_1 - q_2$$

כאשר $a$ **פרמטר הביקוש**, $q_1$ הכמות של יצרן $1$ ו- $q_2$ הכמות של יצרן $2$.

**פונקציות התשלום במשחק דואפול:**

$$u_1 = q_1(a - q_1 - q_2) - c_1 q_1, \qquad u_2 = q_2(a - q_1 - q_2) - c_2 q_2,$$

כאשר $c_1$ פרמטר העלות לייצור יחידה אחת לשחקן $1$ ו- $c_2$ פרמטר העלות לייצור יחידה אחת לשחקן $2$.

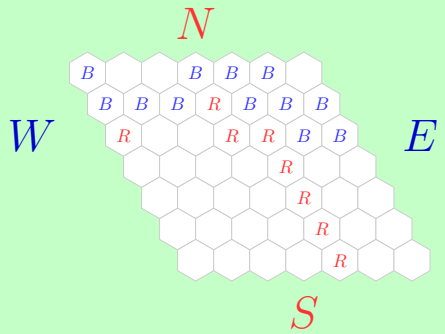
# 4 פרק 4: משחקי לוח

**הגדרה 20: המשחק הקס**

משחק הקס הוא משחק שני שחקנים: שחקן הכחול $(B)$ ושחקן האדום $(R)$. המשחק משוחק על לוח $n \times n$ עם $n^2$ משבצות משושות. הכללים של המשחק הם כדלקמן:

- כל שחקן שולט על שתי צלעות נגדיות של המעוין:
  אדום שולט על הצלעות $N, S$ וכחול שולט בצלעות $E, W$.
- כל שחקן בתורו בוחר משושה פנוי ומניח עליו אבן בצבע שלו.
- שחקן המצליח לחבר את שתי הצלעות שהוא שולט עליהן ע"י שרשרת אבנים בצבע שלו, מנצח המשחק.
- אם אף שחקן לא מצליח לקשר את הצלעות השייכות לו ע"י האבנים שלו, התוצאה נחשבת תיקו.

התרשים מראה דוגמה של שרשרת מנצחת של שחקן כחול $(B)$ ז"א שחקן כחול מנצח את המשחק.




**משפט 14: למת האבן הנוספת**

יהי $G = (\{R, B\}\ ,\ \{S_R, S_B\}\ ,\ \{u_R, u_B\})$ משחק הקס.

- יהי $G_R$ אותו משחק של $G$ אלא שבתחילת המשחק אבן אדומה מונחת במשושה שרירותי על הלוח. אם קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן אדום במשחק $G$ אז קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן אדום במשחק $G_R$.
- יהי $G_B$ אותו משחק של $G$ אלא שבתחילת המשחק אבן כחולה מונחת במשושה שרירותי על הלוח. אם קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן כחול במשחק $G$ אז קיימת אסטרטגיה המבטיחה נצחון לשחקן כחול במשחק $G_B$.

**הוכחה:**

- יהי $G$ משחק הקס שבו בתחילת המשחק הלוח ריק, ויהי $G_R$ משחק הקס שבו בתחילת המשחק אבן אדומה אחת מונחת על הלוח הקס בקדקוד $x = (a, b)$ כאשר $1 \le a, b \le n$.
- תהי $s_R$ אסטרטגיה של שחקן $R$ היוצרת שרשרת אדומה $U_R$ במשחק $G$.
- * אם $x \in U_R$, כלומר אם משושה $x$ הוא אחד של המשושים בשרשרת $U_R$ אדומה, אז בתורו שבו שחקן $R$ מניח אבן על משושה $x$, הוא מניח אבן במשושה אחר כלשהו.
  * אחרת אם $x \notin U_R$ אז בתורו שבו שחקן $R$ מניח אבן על משושה $x$, הוא מניח אבן על משושה $x$ פשוט.

$\Leftarrow$ השרשרת אדומה $U_R$ לא משתנה בכלל בגלל האבן הנוספת.

$\Leftarrow$ קיימת לשחקן $R$ אסטרטגיה $s'_R$ היוצרת אותה שרשרת $U_R$ במשחק $G_R$.

$\Leftarrow$ אם $U_R$ שרשרת מנצחת במשחק $G$ אז $U_R$ שרשרת מנצחת במשחק $G_R$ גם.

$\Leftarrow$ אם קיימת אסטרטגיה $s_R$ המבטיחה נצחון לשחקן $R$ במשחק $G$ אז קיימת אסטרטגיה $s'_R$ המבטיחה נצחון לשחקן $R$ במשחק $G_R$.

$\Leftarrow$ אבן נוספת לא מזיקה את שחקן $R$.





ההוכחה לטענה השנייה של שחקן $B$ היא זהה. ■

**משפט 15: משפט הפירוק של גרפים**

כל גרף סופי $\Gamma = (V, E)$ שבו דרגת כל צומת היא לכל היותר 2, ניתן לפירוק לאוסף של תת-גרפים זרים, שכל אחד מהם הוא:

**א)** צומת מבודד,

**ב)** מעגל פשוט,

**ג)** מסלול פשוט.

**הוכחה:** ההוכחה מתבצעת באינדוקציה על מספר הצלעות בגרף. נסמן גרף בעל $m$ קשתות כ- $\Gamma_m$.

**שלב הבסיס ($m = 0$):**

לגרף $\Gamma_0$ אין קשתות, ולכן כל צמתיו מבודדים והפירוק מתקיים באופן טריוויאלי.

**שלב המעבר:**

נניח כי הטענה נכונה לכל גרף עם $k$ קשתות.
נראה כי הטענה מתקיימת בגרף $\Gamma_{k+1}$ בעל $k+1$ קשתות באופן הבא.

- יהי $\Gamma_{k+1}$ גרף בעל $k+1$ צלעות.

$\Leftarrow$ אם נסיר צלע שרירותית $(u, \mathrm{v})$ מ- $\Gamma_{k+1}$ אז הגרף המתקבל הוא $\Gamma_k$ שמקיים את הנחת האינדוקציה.

$\Leftarrow$ לאחר הסרת הצלע, דרגתם של הצמתים $u$ ו- v יורדת ל-1 לכל היותר, ולכן אינם יכולים להיות חלק ממעגל ב- $\Gamma_k$.

- כעת נחזיר את הצלע $(u, \mathrm{v})$ כדי לשחזר את $\Gamma_{k+1}$.

$\Leftarrow$ התת-הגרפים היחידים המושפעים מהשינוי הם אלו המכילים את הקדקודים $u$ או v:

**1)** אם $u$ ו- v היו במסלולים **נפרדים**, אז הוספת הצלע מחברת אותם למסלול אחד ארוך יותר או יוצרת מעגל.

**2)** אם אחד מהם (או שניהם) היה מבודד, הוספת הצלע הופכת אותם למסלול.

$\Leftarrow$ בכל המקרים, התוצאה היא שנקבל אוסף זר של צמתים מבודדים, מסלולים פשוטים ומעגלים פשוטים.

$\Leftarrow$ הטענה מתקיימת גם עבור $\Gamma_{k+1}$.

■

**משפט 16: משפט הקס**

אם כל משבצת על לוח הקס מסומנת או ב- $X$ או ב- $O$, אז קיים מסלול- $R$ (אדום) המחבר את הצדדים $N$ ו- $S$ או שקיים מסלול- $B$ (כחול) המחבר את הצדדים $E$ ו- $W$.

**הוכחה:**
כדי להוכיח את משפט הקס, מספיק להראות ששניים מתוך הקדקודים $u_1, u_2, u_3, u_4$ בהכרח מחוברים על ידי מסלול פשוט.
לכך המשושים הנמצאים על מסלול פשוט זה מהווחם שרשרת מנצחת.

- יהי $\Gamma = (V, E)$ הגרף הקס של המשחק.
- תהי $E' \subset E$ תת קבוצת צלעות כך ש- $e \in E'$ אם ורק אם $e$ נמצאת על הגבול בין תחומים שונים: $X$ ו- $O$.
- לפיכך, רק צלעות המונחות על קו התפר בין משבצות המסומנות ב-$X$ וב-$O$ נכללות, והצלעות $u_1, u_2, u_3, u_4$.
- יהי $\Gamma' = (V, E')$.
  - כל קדקוד שבצומת בין משושים של אותו סימן יהיה מדרגה $0$.
  - כל קדקוד סמוך לשני משושים של אותו סימן ואחד של הסימן ההפוך יהיה מדרגה $2$.
  - קודקודי השפה $u_1, u_2, u_3, u_4$ הם כולם בעלי דרגה $1$ ב- $G'$, **ורק הם** בעלי דרגה $1$.
  - לכן, לכל קדקודים של $G'$ יש דרגות של $0$, $1$, או $2$.
- ממשפט הפירוק של גרפים, כל גרף שבו כל הצמתים הם בעלי דרגה לכל היותר $2$ מורכב מאיחוד זר של:
  - קדוקדים מבודדים,
  - מעגלים פשוטים ו-
  - מסלולים פשוטים.
- מכיוון **שרק** קודקודי השפה $u_1, u_2, u_3, u_4$ הם בעלי דרגה אחת, הם חייבים להיות נקודות הקצה של מסלולים פשוטים כלשהם.
- מכיוון ש- $\Gamma'$ מתפרק לתת-גרפים זרים, כל מסלול שמתחיל באחד הקדקודים $u_1, u_2, u_3, u_4$ לא יכול ליצור מעגל.
- לכן, בהכרח קיימים שני מסלולים פשוטים ב- $\Gamma'$ המחברים זוגות מבין $u_1$, $u_2$, $u_3$ ו- $u_4$.

  בפרט, מסלולים אלו יוצרים את קו התפר המפריד בין תחומים של $X$ ושל $O$, והמשושים הסמוכים לקו תפר כזה מהווים שרשרת מנצחת עבור אחד השחקנים.

  לדוגמה, בתרשים **??**, הצלעות והצמתים המודגשים שייכים ל- $\Gamma'$, ומראים שני מסלולים פשוטים זרים - האחד מחבר את $u_1$ ל- $u_4$, והשני מחבר את $u_2$ ל- $u_3$.

  מסלולים אלה מגדירים שרשרת מנצחת עבור שחקן ה- $O$.
- לפיכך, ללא שום קשר לקונפיגורציה של $X$ ו- $O$ על הלוח, תמיד חייב להיות מסלול מנצח לאחד משני השחקנים.

■





**משפט 17: משפט קיום מנצח אחד בדיוק במשחק הקס**

בכל משחק הקס יש בדיוק מנצח אחד.
במילים אחרות: משחק הקס לא יכול להסתיים בתיקו.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה דרך השלילה.

- נניח בשלילה כי יתכן שמשחק הקס יסתיים בתיקו.

$\Leftarrow$ אף שחקן לא יצליח לבנות שרשרת מנצחת והמשחק ימשיך עד יש אבן על כל משושה של הלוח.

$\Leftarrow$ המשחק ימשיך עד שהלוח משושה של המשחק קס הוא שלם.

- יהי $\Gamma = (V, E)$ הגרף משושה של משחק הקס שלם. ותהי $V' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \subset V$ הקדקודים בפינות של $\Gamma$.

$\Leftarrow$ ממשפט הקס, קיימים שני מסלולים פשוטים, אחד בין הקדקודים של זוג אחד מתוך $V'$ והשני בין הקדקודים של הזוג השני.

$\Leftarrow$ קיים קו שחוסם שרשרת מנצחת של שחקן אדום, ומבטיחה שרשרת מנצחת כחולה, או קיים קו שחוסם שרשרת מנצחת של שחקן כחול ומבטיחה שרשרת מצחת אדומה.

$\Leftarrow$ ממשפט הפירוק של גרפים, השני מסלולים לא חוצים אחד את השני.

$\Leftarrow$ השני מסלולים לא חוסמים גם שרשרת מנצחת אדומה וגם שרשרת מנצחת כחולה.

$\Leftarrow$ בהכרח, בלוח הקס שלם קיים שרשרת מנצחת אדומה או שרשרת מנצחת כחולה אבל לא שניהן.

$\Leftarrow$ בדיוק שחקן אחד ינצח.

$\Leftarrow$ סתחרה לכך שהמשחק יכול להסתיים בתיקו.

■

**משפט 18: בכל משחק הקס שחקן הראשון בתור מנצח**

בכל משחק הקס, לשחקן הראשון בתור (שחקן אדום) קיים אסטרטגיה מנצחת מובטחת.

**הוכחה:** נוכיח את הטענה דרך השלילה באמצעות

**"טיעון גניבת האסטרטגיה" במשחק הקס.**

באמצעות משפט הקס, ג'ון נאש הראה שלשחקן הראשון בהקס תמיד יש אסטרטגיה מנצחת. הטיעון מתבצע בדרך השלילה ומסתמך על גישת גניבת אסטרטגיה באופן הבא.

- יהי $R$ השחקן הראשון בתור ויהי $B$ השחקן השני בתור.
- נניח שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת מובטחת, $s_B$.
- נניח שבתור הראשון שחקן הראשון מניח אבן אדומה במשושה שרירותי $x$ ויהי $G_R$ התת משחק המתקבל לאחר מכן, שבו אבן אדומה מונחת על משושה $x$.

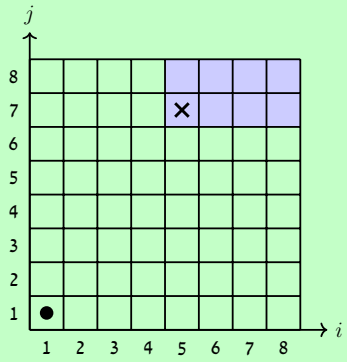
- במשחק $G_R$ שחקן $B$ הוא השקחן הראשון בתור ושחקן $R$ הוא השחקן השני.
- שחקן $R$ יכול "לגנוב" ולעקוב אחרי האסטרטגיה המנצחת המשוערת $s_B$ של שחקן השני כאילו הוא השחקן השני.
- אם האסטרטגיה $s_B$ המנצחת דורשת אי פעם מהלך במשבצת $x$ שכבר תפוסה, השחקן הראשון $R$ יכול פשוט לבחור משבצת שרירותית אחרת מכיוון שלפי למת האבן הנוספת 14 נוכחות של כלי נוסף על הלוח לעולם לא יכולה לגרום נזק.
- ממשפט 17 בדיוק שחקן אחד ינצח המשחק, וגם שחקן $R$ משחק האסטרטגיה המנצחת המובטחת $s_B$, אז בהכרח שחקן $R$ ינצח המשחק.
- זו בסתירה לכך שלשחקן $B$ יש אסטרטגיה מנצחת מובטחת $s_B$.

■

**הגדרה 21: משחק צ'ומפ**

- המשחק צ'ומפ מתנהל על לוח משבצות מלבני בגודל $n \times m$.
- המשבצות מסומנות בעזרת זוג הקואורדינטות $(i,j)$ כאשר $1 \le i \le n$ ו- $1 \le j \le m$.
  - $i$ מסמן את הקואורדינטה האופקית
  - $j$ את הקואורדינטה האנכית.

התרשים מראה לוח המשחק עבור $n = m = 8$.




כל שחקן חייב לכבוש בתורו משבצת בכפוף לתנאי הבא:

- אם בשלב מסוים נכבשה המשבצת $(i_0, j_0)$, לא ניתן יותר לכבוש שום משבצת הנמצאת צפון־מזרחית ממנה.





- ז"א מסולקות מהלוח כל המשבצות $(i,j)$ המקיימות $i \ge i_0$ ו- $j \ge j_0$.
- במשחק בתרשים למשל, נכבשה המשבצת $(4,7)$, ולכן סולקן מהלוח כל המשבצות המוצללות.
- שחקן $I$ הוא הפותח במשחק. השחקן הכובש את המשבצת $(1,1)$ הוא המפסיד.

**משפט 19: משחק צ'ומפ לא יכול להסתיים בתיקו**

משחק צ'ומפ על לוח $m \times n$ לא יכול להסתיים בתיקו.

**הוכחה:**

- נניח בשליחה כי ייתכן המשחק יסתיים בתיקו.
- ייתכן המשחק יסתיים במצב שבו והמשבצת $(1,1)$ לא נכבשת.
- נגדיר הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ כאשר $a_n = (i_n, j_n)$ אם ורק אם המשבצת $(i_n, j_n)$ נכבשת במהלך $n$.

$\Leftarrow$ לכל $a_n = (i_n, j_n)$ בסדרה:

$$\neg[(i_n \ge i_{n-1}) \wedge (j_n \ge j_{n-1})] \ .$$

$\Leftarrow$ לכל $a_n = (i_n, j_n)$ בסדרה:

$$(i_n < i_{n-1}) \vee (j_n < j_{n-1}) \ .$$

$\Leftarrow$ קיים טבעי $N$ עבורו הסדרה מסתיימת: $a_N = (1,1)$.

$\Leftarrow$ בהכרח במהלך האחרון של המשחק שחקן כובש את המשבצת $(1,1)$.

$\Leftarrow$ סתירה לכך שייתכן כי המשחק יסתיים במצב שבו המשבצת לא נכבשת.

ניתן להוכיח את הטענה שקיים טבעי $N$ עבורו הסדרה מסתיימת ב- $a_N = (1,1)$, דרך השלילה.

- נניח בשלילה כי לא קיים טבעי $N$ כך שהסדרה $a_n$ מסתיימת כאשר $n = N$.
- תהי $b_n$ הסדרה שמוגדרת באופן הבא:

$$a_n = (i_n, j_n) \quad \Rightarrow \quad b_n = \min(i_n, j_n) \ .$$

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $i_n < i_{n-1}$ או $j_n < j_{n-1}$ אזי $b_n < b_{n-1}$.

$\Leftarrow$ מכיוון ש- $a_n$ לא מסתיימת אז $b_n$ לא מסתיימת.

$\Leftarrow$ קיים $m$ טבעי עבורו $b_m < 1$

$\Leftarrow$ קיים $m$ טבעי עבורו $a_m = (i_m, j_m)$ כך ש- $i_m < 1$ או $j_m < 1$

$\Leftarrow$ סתירה לכך ש- $1 \le i_n, j_n \le n$.

■

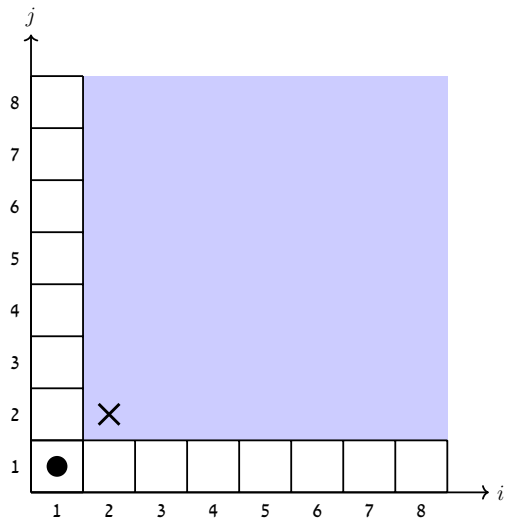
**משפט 20: אסטרטגיה מנצחת במשחק צ'ומפ**

במשחק צ'ומפ על לוח ריבועי $n \times n$ האסטרטגיה הבאה הינה אסטרטגיה מנצחת לשחקן $I$.

- בתור הראשון שחקן $I$ כובש את המשבצת $(2,2)$.
- מכאן ואילך, שחקן $I$ משחק באופן סימטרי לשחקן $II$.

ז"א אם שחקן $II$ כובש את המשבצת $(i,j)$, אז שחקן $I$, במהלך שלאחר מכן, יכבוש את המשבצת $(j,i)$.

**הוכחה:**




- נניח בשלילה כי האסטרטגיה הזו אינה אסטרטיגיה מנצחת לשחקן $I$.

$\Leftarrow$ אסטרטגיה הזו היא אסטרטגיה מנצחת לשחקן $II$.

- יהי $k$ טבעי המונה המהלך של המשחק, כך ש:
  - $k=0$ המהלך הראשון שבו שחקן $I$ כובש משבצת $(2,2)$,
  - $k=1$ המהלך הבא שבו שחקן $II$ כובש משבצת,
  - $k=2$ המהלך לאחר מכן שבו שחקן $I$ כובש משבצת, וכן הלא.
- נגדיר סדרה $a_0, a_1, a_2, \ldots$ כאשר: $a_0=(2,2)$ ולכל $m>0$:

$$a_m = \begin{cases} \{(i_m,1),(1,i_m)\} & : \text{שחקן } II \text{ כובש } (i_m,1) \text{ במהלך } 2m-1 \\ \{(1,i_m),(i_m,1)\} & : \text{שחקן } II \text{ כובש } (1,i_m) \text{ במהלך } \end{cases} .$$





ז"א לכל $m>0$, האיבר $a_m$ מסמן זוג משבצות כאשר הראשונה נכבשת ע"י שחקן $II$ במהלך $k=2m-1$ והשנייה נכבשת ע"י שחקן $I$ במהלך $k=2m$ שלאחר מכן.

- תהי $b_m$ הסדרה מוגדרת:

$$b_m = i_m \iff [a_m = (\{(i_m,1),(1,i_m)\}) \ \vee \ a_m = (\{(1,i_m),(i_m,1)\})\ ] \ .$$

- על פי האסטרטגיה, $1 \le i_m < i_{m-1} \le n \Leftarrow b_m$ סדרה יורדת מונוטונית וחסומה $\Leftarrow b_m$ מתכנסת.
- בנוסף המשחק מסתיים כאשר שחקן כובש המשבצת $(1,1)$.

$\Leftarrow$ קיים $N$ כך שהסדרה מסתיימת כאשר $a_N = \{(1,1),(1,1)\}$.

$\Leftarrow$ ז"א קיים טבעי $N$ כך שבמהלך $k=2N-1$, שחקן $II$ כובש משבצת $(1,1)$.

$\Leftarrow$ שחקן $II$ בהכרח מפסיד, בסתירה לכך שהאסטרטגיה של המשפט היא אסטרטגיה מנצחת לשחקן $II$.

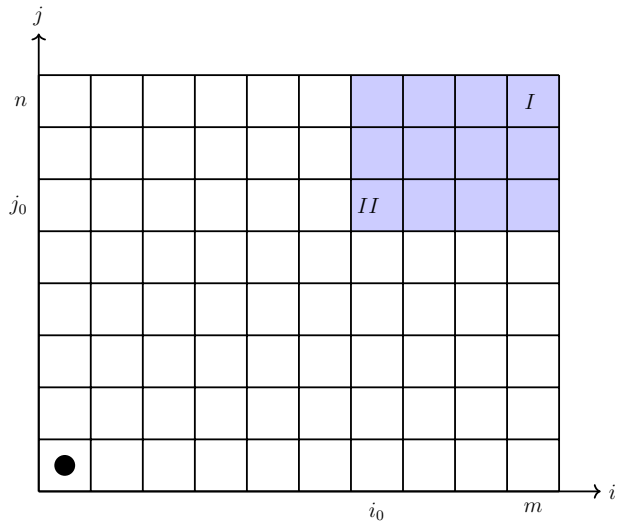
■

**משפט 21:**

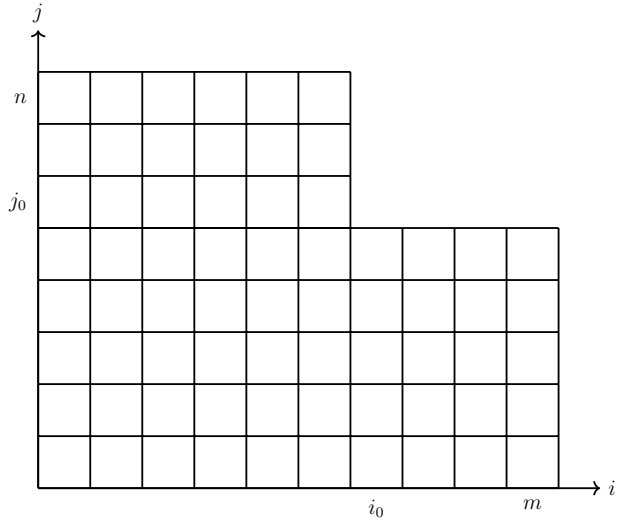
במשחק צ'ומפ על לוח $m \times n$, אם לשחקן $II$ אסטרטגיה מנצחת אז גם לשחקן $I$ יש אסטרטגיה מנצחת.

**הוכחה:**

- נניח כי לשחקן $II$ יש אסטרטגיה מנצחת $s_2$.
- אסטרטגיה זו מבטיחה ניצחון כנגד כל אסטרטגיה של שחקן $I$.
- בפרט, היא מנצחת גם אם שחקן $I$ יבחר לכבוש את המשבצת $(m,n)$ במהלך הפתיחה (המשבצת הימינית-העליון).



- נניח כי במהלך התשובה המומלץ לשחקן $II$ לפי האסטרטגיה $s_2$ הוא כובש המשבצת $(i_0, j_0)$.
- מכאן ואילך מתפתח משחק חדש על הלוח המתואר בתרשים למטה.




- במשחק זה שחקן $I$ מבצע מהלך הפתיחה, ושחקן $II$, שמשחק לפי האסטרטגיה $s_2$, מבטיח לעצמו ניצחון במשחק החדש.
- כלומר, השחקן שמצבע את מהלך הפתיחה במשחק זה הוא השחקן המפסיד.
- אולם שחקן $I$ יכול לדאוג שמצב הלוח יהיה המצב בתרשים כאשר שחקן $II$ הוא הפותח, וזאת ע"י בחירה של המשבצת $(i_0, j_0)$ במהלך הראשון.
- לסיכום, פתיחה של $I$ ב- $(i_0, j_0)$ והמשך על פי האסורוגיה $s_2$ היא אסטרטגיה מנצחת של שחקן $I$ במשחק המקורי.

■

**משפט 22:**

במשחק צ'ומפ על לוח $m \times n$, יש לשחקן $I$ הפותח המשחק אסטרטגיה מנצחת.

**הוכחה:**

- משפט 19 $\Leftarrow$ המשחק אינו יכול להסתיים בתיקו.
- נניח בשלילה כי לשחקן $II$ יש אסטרטגיה מנצחת.





- משפט 21 $\Leftarrow$ לשחקן $I$ יש אסטרטגיה מנצחת.

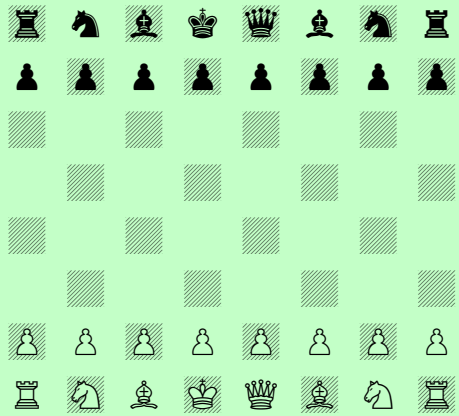
$\Leftarrow$ סתירה לכך לשחקן $II$ יש אסטרטגיה מנצחת.

$\Leftarrow$ לשחקן $I$ הפותח המשחק אסטרטגיה מנצחת.

■

**הגדרה 22: הכללים של שחמט**

- שחמט הוא משחק שני שחקנים: שחור ולבן.
- המשחק משוחק על לוח $8 \times 8$. במצב ההתחלתי לשחקן לבן יש $16$ כלים לבנים ולשחקן שחור יש $16$ כלים שחורים מונחים על הלוח בקונפיגורציה המתוארת בתרשים למטה.



- **1) מלך (King):**
  נע משבצת אחת לכל כיוון (קדימה, אחורה, ימינה, שמאלה או באלכסון).

  **2) מלכה (Queen):**
  נעה מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות לכל כיוון (לאורך השורות, העמודות או האלכסונים).

  **3) צריח (Rook):**
  נע מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות לאורך השורות או העמודות (קדימה, אחורה, ימינה ושמאלה).

  **4) רץ (Bishop):**
  נע מספר בלתי מוגבל של משבצות פנויות באלכסון בלבד.

  **5) פרש (Knight):**
  נע בצורת האות "$L$" (שתי משבצות לכיוון אחד, ולאחר מכן משבצת אחת הצידה בזווית ישרה). זהו הכלי היחיד שמסוגל "לדלג" מעל כלים אחרים (משלו או של היריב).

**6) ♟ רגלי / חייל :(Pawn)**
נע משבצת אחת קדימה. בתורו הראשון בלבד, הוא יכול לנוע שתי משבצות קדימה. הוא מכה (אוכל) כלי יריב אך ורק משבצת אחת באלכסון קדימה.

- למשחק יש שלוש תוצאות אפשריות:

**1)** **ניצחון ללבן** אם המלך השחור מאוים ואין מהלך מנטרל את האיום.

**2)** **ניצחון לשחור** אם המלך הלבן מאוים ואין מהלך מנטרל את האיום.

**3)** **תיקו אם:**

**א)** תורו של שחור לשחק אך אין לו אף מהלך חוקי והמלך שלו אינו מוים,

**ב)** תורו של לבן לשחק אך אין לו אף מהלך חוקי והמלך שלו אינו מוים,

**ג)** מצב הלוח אינו מאפשר ניצחון של אחד השחקנים.

**הגדרה 23: מצב משחק שחמט**

- נסמן ב- $X$ את אוסף כל מבצי הלוח האפשריים בשחמט.
- מצב הלוח $x \in X$ כולל את זהות הכלים שעל הלוח ואת מיקומם.
- **מצב המשחק** במשחק השחמט הוא סדרה סופית $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ של מצבי לוח ב- $X$ המקיימת:

**1)** $x_0$ הוא מצב הלוח ההתחלתי

**2)** לכל $k < n$ זוגי, ניתן להגיע מ- $x_k$ ל- $x_{k+1}$ באמצעות מהלך אחד של לבן.

**3)** לכל $k < n$ אי-זוגי, ניתן להגיע מ- $x_k$ ל- $x_{k+1}$ באמצעות מהלך אחד של שחור.

- נסמן ב- $H$ את קבוצת כל מצבי המשחק.

**הגדרה 24: אסטרטגיה מנצחת**

- אסטרטגיה $s_W$ היא **אסטרטגיה מנצחת** עבור לבן אם לכל אסטרטגיה $s_B$ של שחור התחרות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות $(s_W, s_B)$ מסתיימת בניצחון לבן.
- אסטרטגיה $s_B$ היא **אסטרטגיה מנצחת** עבור שחור אם לכל אסטרטגיה $s_W$ של לבן התחרות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות $(s_W, s_B)$ מסתיימת בניצחון שחור.

**הגדרה 25: אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו**

- אסטרטגיה $s_W$ של לבן **מבטיחה לפחות תיקו** אם לכל אסטרטגיה $s_B$ של שחור התחות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות $(s_W, s_B)$ מסתיימת בניצחון לבן או בתיקו.
- אסטרטגיה $s_B$ של שחור **מבטיחה לפחות תיקו** אם לכל אסטרטגיה $s_W$ של לבן התחות הנקבעת על ידי זוג האסטרטגיות $(s_W, s_B)$ מסתיימת בניצחון שחור או בתיקו.





**הגדרה 26: תת משחק**

- לכל קדקוד $x \in H$ ניתן להסתכל בתת-עץ המתחיל ב- $x$.
- זהו עץ ששורשו $x$ והאו מתקבל מעץ המשחק על ידי סילוק כל הקדקודים שאינן צאצאים של $x$.
- תת-עץ זה מתאים למשחק שנסמן ב- $\Gamma(x)$ ונקרא **תת-משחק** המתחיל ב- $x$.
- נסמן ב- $n_x$ את מספר הקדקודים ב- $\Gamma(x)$.
- המשחק $\Gamma(x_0)$ הוא המשחק המתחיל במצב ההתחלתי של המשחק, ולכן זהו משחק השחמט הרגיל.
- נניח ש- $y$ בן של $x$, אזי $\Gamma(y)$ הוא תת-עץ של $\Gamma(x)$ שאינו מכיל את $x$ ולכן $n_x > n_y$.
- כמו כן, $n_x = 1$ אם ורק אם $x$ הוא מצב סיום של המשחק, ולכן השחקנים אינם מבצעים מסעים בתת-משחק זה.
- האסטרטגיה שאותה לוקח שחקן במקרה כזה, שבו הוא אינו מבצע אף מסע, נסמן ב- $s_0$.
- נסמן את אוסף כל המשחקים המוגדרים על ידי התתי־עצים של משחק השחמט ב־

$$F = \left\{\Gamma(x) \middle| x \in H\right\} \tag{1}$$

**משפט 23: *כלל השלילה של מכמתים**

- אם לא נכון ש "לכל $x \in X$ מתקיים המאורע $A$" אזי בהכרח קיים $x \in X$ שעבורו המאורע $A$ אינו מתקיים:

$$\neg\left(\forall x(A)\right) = \exists x\left(\neg A\right) \quad . \tag{2}$$

- אם לא נכון ש"קיים $x \in X$ שעבורו מתקיים המאורע $A$" אזי בהכרח לכל $x \in X$ המאורע $A$ אינו מתקיים.

$$\neg\left(\exists x(A)\right) = \forall x\left(\neg A\right) \quad . \tag{3}$$

**משפט 24: *משפט פון נוימן לשחמט**

במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות.

**(1)** ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

**(2)** לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

**(3)** לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

**הוכחה:**

- משחק השחמט הוא משחק סופי. ז"א קיים מספר טבעי $N$ מספיק גדול כך שהמשחק מסתיים לאחר לכל היותר $2N$ מהלכים ($N$ מהלכים של לבן ו- $N$ מהלכים של שחור).
- נניח לשם פשטות כי המשחק מסתיים לאחר בדיוק $2N$ מהלכים.

- לכל $1 \leq k \leq N$:
  - נסמן ב- $a_k$ את המסע שמבצע לבן בתור ה- $k$ שלו,
  - ונסמן ב- $b_k$ את המסע שמבצע שחור בתור ה- $k$ שלו.
- נסמן ב- $W$ את המאורע שלבן ניצח במשחק (לאחר $2N$ מהלכים).

$\Leftarrow$ $\neg W$ הוא המאורע שהמשחק מסתיים בתיקו או בניצחון שחור.

- הטענה "ללבן יש אסטרטגיה מנצחת" ניתן לרשום בצורה הבאה:
$$\exists a_1 \forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \ldots \exists a_N \forall b_N (W) \ . \tag{4}$$

$\Leftarrow$ הטענה "לא קיימת ללבן אסטרטגיה מנצחת" ניתן לרשום כך:
$$\neg \left(\exists a_1 \forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \ldots \exists a_N \forall b_N (W)\right) \ . \tag{5}$$

- על ידי הפעלה חוזרת של משוואות (2) ו- (3) נקבל כי פסוק זה שווה לפסוק
$$\begin{aligned}\neg \left(\exists a_1 \forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \ldots \exists a_N \forall b_N (W)\right) &= \forall a_1 \left(\neg \left(\forall b_1 \exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \ldots \exists a_N \forall b_N (W)\right)\right) \\ &= \forall a_1 \exists b_1 \left(\neg \left(\exists a_2 \forall b_2 \exists a_3 \ldots \exists a_N \forall b_N (W)\right)\right) \\ &\vdots \\ &\forall a_1 \exists b_1 \forall a_2 \exists b_2 \ldots \forall a_N \exists b_N (\neg W)\end{aligned} \tag{6}$$

- המשוואה (6) אומרת שלשחור יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.
- כלומר, הוכחנו כי אם ללבן אין אסטרטגיה מנצחת, אזי לשחור יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.
- באופן דומה, ניתן להוכיח כי אם לשחור אין אסטרטגיה מנצחת, אזי ללבן יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

$\Leftarrow$ אחת משלוש האפשרויות המצוינות במשפט 24 בהכרח מתקיימת.

■

**משפט 25: *משפט פון נוימן לשחמט**

במשחק השחמט נכונה אחת ורק אחת מהקביעות הבאות.

**(1)** ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

**(2)** לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

**(3)** לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.

**משפט 26: *משפט פון נוימן לשחמט (ניסוח חילופי)**

בכל משחק במשפחה $F$ מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות

**(1)** ללבן יש אסטרטגיה מנצחת.

**(2)** לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

**(3)** לכל אחד משני השחקנים יש אסטרטגיה המבטיחה לפחות תיקו.





**הוכחה:**
אינדוקציה על $n_x$, מספר הקדקודים בתת-עץ $\Gamma(x)$.

<u>שלב הבסיס:</u> $n_x = 1$.

במקרה זה $x$ הוא קדקוד סיום.

- אם המלך הלבן מאוים וללבן אין מהלך המנטרל איום זה $\Leftarrow$ השחור ניצח $\Leftarrow$ האסטרטגיה $s_0$ היא אסטרטגיה מנצחת לשחור.
- אם המלך השחור מאוים ולשחור אין מהלך המנטרל איום זה $\Leftarrow$ הלבן ניצח $\Leftarrow$ האסטרטגיה $s_0$ היא אסטרטגיה מנצחת ללבן.
- אחרת, המשחק מסתיים בתיקו ולכן אסטרגיה $s_0$ מבטיחה תיקו הן ללבן והן לשחור.

<u>שלב האינדוקציה:</u> $n_x > 1$.

נניח כי לכל קדקוד $y$ המקיים $n_y < n_x$ אחת ורק אחת מהאפשרויות **(1)**, **(2)**, **(3)** מתקיימת בתת-משחק $\Gamma(y)$ (ההנחת האינדוקציה).

בלי הגבלת הכלליות נניח כי במשחק $\Gamma(x)$ לבן משחק ראשון.

לכל מצב לוח $y$ שאליו ניתן להגיע מ- $x$ מתקיים
$$n_y < n_x \ ,$$
ולכן בתת-משחק $\Gamma(y)$ מתקיימת הנחת האינדוקציה.

נסמן ב- $C(x)$ את אוסף כל מצבי המשחק שאליהם ניתן להגיע מ-$x$ במהלך אחד של לבן.

**1)** אם קיים $y \in C(x)$ כך שב- $\Gamma(y)$ יש ללבן אסטרגיה מנצחת, אז אפשרות **(1)** במשפט 26 מתקיימת עבור $\Gamma(x)$:

אסטרגיה מנצחת ללבן ב- $\Gamma(x)$ היא לשחק במהלך הראשון את המהלך המוביל למצב הלוח $y$, ומהמהלך השני ואילך יפעל לפי אסטרגיה מנצחת ב- $\Gamma(y)$.

**2)** אם קיים $y \in C(x)$ כך שב- $\Gamma(y)$ יש לשחור אסטרגיה מנצחת, אז אפשרות **(2)** במשפט 26 מתקיימת עבור $\Gamma(x)$:

שחור יכול לנצח על ידי כך שיראה מה הוא מצב הלוח $y$ לאחר המהלך הראשון של לבן, ומהמהלך השני ואילך יפעל לפי אסטרטגיה מנצחת במשחק $\Gamma(y)$.

**3)** אם לא מקרה **1)** מתקיים ולא מקרה **2)** מתקיים:

**א)** אם מקרה **1)** אינו מתקיים, ולכן לכל $y \in C(x)$ אין ללבן אסטרגיה מנצחת ב- $\Gamma(y)$. מכיוון שהנחת האינדוקציה מתקיימת לכל קדקוד $y \in C(x)$, ב- $\Gamma(y)$ קיים לשחור אסטרגיה מנצחת, או שלשני השחקנים יש אסטרגיה המבטיחה לפחות תיקו.

**ב)** אם מקרה **2)** אינו מתקיים, ולכן קיים קדקוד $y_0 \in C(x)$ כך שלשחור אין אסטרגיה מנצחת ב- $\Gamma(y_0)$. מהנקודה הקודמת גם ללבן אין אסטרגיה מנצחת ב- $\Gamma(y_0)$. לכן מהנחת האינדוקציה ב- $\Gamma(y_0)$ יש לשני השחקנים אסטרגיה המבטיחה לפחות תיקו.

■

## 5 פרק 5: ערך המקסמין ומשחקים סכום אפס

**הגדרה 27: ערך המקסמין במשחק שני שחקנים**

יהי $G = (N = \{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_I, u_{II}\})$ משחק שני שחקנים.

- הערך המקסמין של שחקן $I$ מסומן $\underline{v}_1$ ומוגדר:
$$\underline{v}_1 = \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u_1(s_1, s_2) \ .$$
- הערך המקסמין של שחקן $II$ מסומן $\underline{v}_2$ ומוגדר:
$$\underline{v}_2 = \max_{s_2 \in S_{II}} \min_{s_1 \in S_I} u_2(s_1, s_2) \ .$$

**הגדרה 28: ערך המקסמין במשחק $n$ שחקנים**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. הערך המקסמין של שחקן $i$ מסומן $\underline{v}_i$ ומוגדר:
$$\underline{v}_i = \max_{s_i \in S_i} \min_{t_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \ .$$

**משפט 27:**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. אם $s_i^*$ אסטרטגיה של שחקן $i$ שולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות $t_i \in S_i$ אז $s_i^*$ היא אסטרטגיית מקסמין של שחקן $i$.

**הוכחה:**

- תהי $s_i^*$ אסטרטגיה ששולטת (לא בהכרח חזק) על כל שאר האסטרטגיות של שחקן $i$.
- נגדיר קבוצת אסטרטגיות ספציפית של שאר השחקנים, $t_{-i} \in S_{-i}$, להיות הקבוצת האסטרטגיות של שאר השחקנים כך שהתשלום לשחקן $i$ כאשר הוא משחק לפי $s_i^*$ היא מינימלית:
$$u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \ . \qquad (*1)$$
- מכיוון ש- $s_i^*$ שולטת על כל האסטרטגיות של שחקן $i$ אז לכל $s_i \in S_i$:
$$u_i\left(s_i^*, t_{-i}\right) \geq u_i\left(s_i, t_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \ , \qquad (*2)$$
- לפיכך, ממשוואות (*1) ו- (*2), לכל $s_i \in S_i$ מקתיים:
$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \ .$$





- האי-שוויון הזה ניתן לרשום בצורה השקולה הבאה:
$$\min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i^*, s_{-i}\right) = \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \underline{v}_i \ .$$
- מכאן אפשר להסיק כי $s_i^*$ היא אסטרטגיה מקסמין של שחקן $i$.

■

**משפט 28:**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. אם $s^*$ היא שיווי משקל אז לכל שחקן $i \in N$ מתקיים:
$$u_i\left(s^*\right) \geq \underline{v}_i \ .$$

**הוכחה:**

- לכל אסטרטגיה $s_i \in S_i$ מתקיים:
$$u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \ .$$
- מצד שני על פי ההגדרה של שיווי משקל: $u_i\left(s^*\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$.
- לכן:
$$u_i\left(s^*\right) = \max_{s_i \in S_i} u_i\left(s_i, s_{-i}^*\right) \geq \max_{s_i \in S_i} \min_{s_{-i} \in S_{-i}} u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \underline{v}_i \ .$$

■

**הגדרה 29: משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים. אומרים כי $G$ **משחק סכום אפס** אם לכל ווקטור אסטרטגיות $(s_1, s_2)$ מתקיים:
$$\forall s_1 \in S_I : \quad \forall s_2 \in S_{II} : \qquad u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0 \ .$$

**הגדרה 30: פונקצית תשלום של משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס. לכל $s_1 \in S_I$ ולכל $s_2 \in S_{II}$, הפונקצית ההתשלום של המשחק מסומנת $U(s_1, s_2)$ ומוגדרת:
$$U(s_1, s_2) \triangleq u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2) \ .$$

**הגדרה 31: מטריצת המשחק של משחק שני שחקנים סכום אפס**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס. יהי $U$ פונקצית התשלום של המשחק.

אם
$$S_I = \left\{s_I^1, s_I^2, \ldots, s_I^m\right\}$$
ואם
$$S_{II} = \left\{s_{II}^1, s_{II}^2, \ldots, s_{II}^n\right\}$$

אז המטריצת המשחק היא מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ מוגדרת:

$$\forall i\ (1 \le i \le m): \quad \forall j\ (1 \le j \le n): \qquad A_{ij} = U\left(s_I^i, s_{II}^j\right) \ .$$

**משפט 29: המקסמין והמינמקס של משחק**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.

- ערך המקסמין של שחקן $I$ נתון על ידי
$$\underline{v}_1 = \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} u_1(s_1, s_2) = \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$
זוהי רמת הביטחון של שחקן 1 במשחק: התשלום המקסימלי שהוא יכול להבטיח לעצמו.
- הערך המקסמין של שחקן $II$ הוא
$$\begin{aligned}\underline{v}_2 &= \max_{s_2\in S_{II}} \min_{s_1\in S_I} u_2(s_1, s_2)\\ &= \max_{s_2\in S_{II}} \min_{s_1\in S_I} [-U(s_1, s_2)]\\ &= \max_{s_2\in S_{II}} [-\max_{s_1\in S_I} U(s_1, s_2)]\\ &= -\min_{s_2\in S_{II}} \max_{s_1\in S_I} U(s_1, s_2) \ .\end{aligned}$$
- **הערך המקסמין של המשחק** מסומן $\underline{v}$ ומוגדר:
$$\underline{v} \triangleq \max_{s_1\in S_I} \min_{s_2\in S_{II}} U(s_1, s_2) \ .$$
- **הערך המינמקס של המשחק** מסומן $\bar{v}$ ומוגדר:
$$\bar{v} \triangleq \min_{s_2\in S_{II}} \max_{s_1\in S_I} U(s_1, s_2)$$
- המשמעות:
  - שחקן $I$ יכול להבטיח שיקבל לפחות $\underline{v}$.
  - שחקן $II$ יכול להבטיח שישלם לכל היותר $\bar{v}$.
- * אסטרטגיה של שחקן 1 המבטיחה את $\underline{v}$ נקראת **אסטרטגיה מקסמין**.
  * אסטרטגיה של שחקן 2 המבטיחה את $\bar{v}$ נקראת **אסטרטגיה מינמקס**.

**הגדרה 32: ערך המשחק ואסטרטגיות אופטימליות**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס. אם $\underline{v} = \bar{v}$ אז אומרים כי הכמות
$$v \triangleq \underline{v} = \bar{v}$$
היא **הערך של המשחק.**

במקרה זה הווקטור אסטרטגיות שמבטיח הערך המשחק נקרא **ווקטור אסטרטגיות אופטימלי.**





**משפט 30: משפט המקסמין**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.
אם $\underline{v}$ הערך המקסמין ואם $\bar{v}$ הערך המינמקס אז
$$\underline{v} \le \bar{v} \ .$$

**הוכחה:**

- תהי $A$ המטריצה של המשחק. אז
$$\underline{v} = \max_i \min_j A_{ij} \ , \qquad \bar{v} = \min_j \max_i A_{ij} \ .$$
- לכל $i$, מתקיים: $\min_j A_{ij} \le A_{ij}$,
- לכל $j$ מתקיים: $\max_i A_{ij} \ge A_{ij}$.
- לפיכך:
$$\min_j A_{ij} \le A_{ij} \le \max_i A_{ij} \ .$$
- לכן
$$(*) \qquad \forall i: \quad \forall j: \qquad \min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij}$$
- המשוואה (*) מתקיימת לכל $i$. בפרט היא מתקיימת גם עבור הערך של $i$ הספציפי שעבורו האגף השמאל הוא מקסימלי. לכן:
$$(\#) \qquad \forall j: \qquad \max_i \min_j A_{ij} \le \max_i A_{ij}$$
- המשוואה (#) מתקיימת לכל $j$. בפרט היא מתקיימת גם עבור הערך של $j$ הספציפי שעבורו האגף השמאל הוא מינימלי. לכן:
$$\max_i \min_j A_{ij} \le \min_j \max_i A_{ij}$$

מש"ל.

■

**משפט 31:**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.
אם קיים ערך v של המשחק $G$, ואם $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ וקטור אסטרטגיות אופטימליות, אז $s^* = (s_1^*, s_2^*)$ גם שיווי משקל של $G$ וגם $u(s^*) = (\mathrm{v}, -\mathrm{v})$.

**הוכחה:**

אם $s_1^*$ אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $I$ אז:
$$\min_{s_2\in S_{II}} u\left(s_1^*, s_2\right) = \mathrm{v} \ ,$$

ולכן לכל $s_2 \in S_{II}$ מתקיים:

$$u\left(s_1^*, s_2\right) \geq \mathrm{v} \ .$$

באותה מידה אם $s_2^*$ אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $II$ אז:

$$\max_{s_1 \in S_I} u\left(s_1, s_2^*\right) = \mathrm{v} \ ,$$

ולכן לכל $s_1 \in S_I$ מתקיים:

$$u\left(s_1, s_2^*\right) \leq \mathrm{v} \ .$$

לסיכום, אם $s_1^*, s_2^*$ אסטרטגיות אופטימליות אז

$$\forall s_2 \in S_{II}: \qquad u\left(s_1^*, s_2\right) \geq \mathrm{v} \ , \qquad (*1)$$

$$\forall s_1 \in S_I: \qquad u\left(s_1, s_2^*\right) \leq \mathrm{v} \ . \qquad (*2)$$

אם נציב $s_2 = s_2^*$ במשוואה (*1) נקבל: $u\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq \mathrm{v}$.

אם נציב $s_1 = s_1^*$ במשוואה (*2) נקבל: $u\left(s_1^*, s_2^*\right) \leq \mathrm{v}$.

לכן

$$\left[u\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq \mathrm{v}\right] \quad \wedge \quad \left[u\left(s_1^*, s_2^*\right) \leq \mathrm{v}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = u\left(s_1^*, s_2^*\right) \ .$$

נציב $\mathrm{v} = u\left(s_1^*, s_2^*\right)$ במשוואות (*1) ו- (*2):

$$\begin{aligned} & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u\left(s_1^*, s_2\right) \geq u\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_2 \in S_{II}: \quad -u_2\left(s_1^*, s_2\right) \geq -u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \leq u_2\left(s_1^*, s_2\right) \ . \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u\left(s_1, s_2^*\right) \leq u\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1\left(s_1, s_2^*\right) \leq u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ \Rightarrow \quad & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) \ . \end{aligned}$$

לסיכום מצאנו כי:

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1, s_2^*\right) \ , \\ & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u_1\left(s_1^*, s_2\right) \ . \end{aligned}$$

לכן $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא שיווי משקל עם התשלומים $(\mathrm{v}, -\mathrm{v})$. ■

**משפט 32:**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.
אם $s^* = \left(s_1^*, s_2^*\right)$ שיווי משקל של $G$ אז יש למשחק יש ערך $\mathrm{v} = u\left(s_1^*, s_2^*\right)$, וגם $s^* = \left(s_1^*, s_2^*\right)$ אסטרטגיות אופטימליות.

**הוכחה:** אם $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ שיווי משקל אז לאף שחקן אין סטייה כדאית:

$$\begin{aligned} & \forall s_1 \in S_I: \quad u_1\left(s_1, s_2^*\right) \leq u_1\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ & \qquad \Rightarrow \quad u\left(s_1, s_2^*\right) \leq u\left(s_1^*, s_2^*\right) \ , \qquad (\#1) \\ & \forall s_2 \in S_{II}: \quad u_2\left(s_1^*, s_2\right) \leq u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ & \qquad \Rightarrow \quad -u_2\left(s_1^*, s_2\right) \geq -u_2\left(s_1^*, s_2^*\right) \\ & \qquad \Rightarrow \quad u\left(s_1^*, s_2\right) \geq u\left(s_1^*, s_2^*\right) \ . \qquad (\#2) \end{aligned}$$

נסמן $\mathrm{v} = u\left(s_1^*, s_2^*\right)$ ונוכיח כי $\mathrm{v}$ אמנם הוא הערך של המשחק.
ממשוואה (#2) נקבל

$$\forall s_2 \in S_{II}: \quad u\left(s_1^*, s_2\right) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_{II}} u\left(s_1^*, s_2\right) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u\left(s_1, s_2\right) \geq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} \geq \mathrm{v} \ .$$





ממשוואה (#1) נקבל

$$\forall s_1 \in S_I: \quad u\left(s_1, s_2^*\right) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \max_{s_1 \in S_I} u\left(s_1, s_2^*\right) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} u\left(s_1, s_2\right) \leq \mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \overline{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

מכיוון ש- $\underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}}$ מתקיים תמיד אזי

$$\mathrm{v} \leq \underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}} \leq \mathrm{v} \ .$$

ולפיכך בהכרח

$$\underline{\mathrm{v}} = \mathrm{v} = \overline{\mathrm{v}} \ .$$

■

**הגדרה 33: נקודת אוכף**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.
זוג אסטרטגיות $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ נקרא **נקודת אוכף** של הפונקציה $u: S_I \times S_{II} \to \mathbb{R}$ אם

$$\left(\forall s_1 \in S_I: \ u\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u\left(s_1, s_2^*\right)\right) \quad \wedge \quad \left(\forall s_2 \in S_{II}: \ u\left(s_1^*, s_2^*\right) \leq u\left(s_1^*, s_2\right)\right) \ .$$

במילים אחרות, $u\left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא המספר הגדול ביותר בעמודה $s_2^*$ והקטן ביותר בשורה $s_1^*$.

אם אנחנו רושמים את $u\left(s_1, s_2\right)$ בהצגת מטריצה:

$$A_{ij} = u\left(s_I^i, s_{II}^j\right)$$

אז הזוג אסטרטגיות $\left(s_{i^*}, s_{j^*}\right)$ הוא נקודת אוכף אם

$$\begin{aligned} \forall i: \quad & A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \ , \\ \forall j: \quad & A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \ . \end{aligned}$$

**משפט 33: יחס בין נקודת אכף לבין וקטור אסטרטגיות**

יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים סכום אפס.
$u\left(s_1^*, s_2^*\right)$ היא נקודת אוכף אם ורק אם

- $s_1^*$ היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $I$,
- $s_2^*$ היא אסטרטגיה אופטימלית של שחקן $II$.

במקרה זה $u\left(s_1^*, s_2^*\right)$ הוא הערך של המשחק.

דרך אחרת לנסח את המשפט היא:

$$\left.\begin{aligned} \forall i: \quad & A_{i^*j^*} \geq A_{ij^*} \\ \forall j: \quad & A_{i^*j^*} \leq A_{i^*j} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max_i \min_j A_{ij} = \min_j \max_i A_{ij} = \mathrm{v}$$

**הוכחה:** אם $G$ משחק שני שחקנים סכום אפס ו- $\left(s_1^*, s_2^*\right)$ נקודת אוכף אז:

$$\left(\forall s_1 \in S_I: \ u\left(s_1^*, s_2^*\right) \geq u\left(s_1, s_2^*\right)\right) \quad \wedge \quad \left(\forall s_2 \in S_{II}: \ u\left(s_1^*, s_2^*\right) \leq u\left(s_1^*, s_2\right)\right) \ .$$

התנאי הראשון מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*, s_2^*\right) = \max_{s_1 \in S_I} u\left(s_1, s_2^*\right) \geq \min_{s_2 \in S_{II}} \max_{s_1 \in S_I} u\left(s_1, s_2\right) = \overline{\mathrm{v}} \ .$$

התנאי השני מתקיים אם ורק אם

$$u\left(s_1^*, s_2^*\right) = \min_{s_2 \in S_{II}} u\left(s_1^*, s_2\right) \leq \max_{s_1 \in S_I} \min_{s_2 \in S_{II}} u\left(s_1, s_2\right) = \underline{\mathrm{v}} \ .$$

לפי משפט המקסמין 30: $\underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}}$. לכן

$$u\left(s_1^*, s_2^*\right) \ \leq \ \underline{\mathrm{v}} \leq \overline{\mathrm{v}} = u\left(s_1^*, s_2^*\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v} \ .$$

■

# 6 פרק 6: אסטרטגיות מעורבות

**הגדרה 34: אסטרטגיות מעורבות**

- יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
- **אסטרטגיה מעורבת** של שחקן $i$ היא פונקצית הסתברות $\sigma_i : S_i \to [0,1]$ של קבוצת האסטרטגיות $S_i$ שלו.
- **קבוצת אסטרטגיות מעורבות** של שחקן $i$ תסומן $\Sigma_i$ ותוגדר:

$$\Sigma_i \triangleq \left\{ \sigma_i : S_i \to [0,1] \quad : \quad \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i\left(s_i\right) = 1 \right\} \ .$$

**הגדרה 35: סימפלקס**

- לכל קבוצה סופית $A$, סימפלקס על הקבוצה $A$ יסומן $\Delta(A)$ ויוגדר כל וקטורי ההסתברות על $A$ באופן הבא:

$$\Delta(A) \ \triangleq \ \left\{ p : A \to [0,1] \ : \ \sum_{a \in A} p(a) = 1 \right\} \ .$$

- הקבוצה $\Delta(A)$ נמצאת במרחב $\mathbb{R}^{|A|}$.
- הממד של הסימפלקס $\Delta(A)$ הוא

$$\dim \Delta(A) = |A| - 1$$

בגלל האילוץ $\sum_{a \in A} p(a) = 1$.

**משפט 34:**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $n$ שחקנים. אם הקבוצת אסטרטגיות טהורות של שחקן $i$ היא

$$S_i = \left\{ s_i^1, s_i^2, \ldots, s_i^{m_i} \right\} \ ,$$

כאשר המספר האסטרטגות הטהורות של שחקן $i$ הוא

$$m_i = |S_i|$$

אז הקבוצת האסטרטגיות המעורבות של שחקן $i$ היא:

$$\Sigma_i = \Delta\left(S_i\right)$$





כאשר $\Delta\left(S_i\right)$ היא הסימפלקס של $S_i$, וגם $\Sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ היא תת-קבוצה של $\mathbb{R}^{m_i}$ וגם

$$\dim\left(\Sigma_i\right) = |\Sigma_i| - 1 = m_i - 1 \ .$$

**הוכחה:** ■

**הגדרה 36: ההרחבה של משחק לאסטרטגיות מעורבות**

- יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית.
- נסמן ב- $S \triangleq S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ את קבוצת וקטורי האסטרטגיות הטהורות.
- **ההרחבה של $G$ לאסטרטגיות מעורבות** הוא המשחק

$$\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$$

שבו לכל $i \in N$ קבוצת האסטרטגיות של שחקן $i$ היא $\Sigma_i = \Delta\left(S_i\right)$.

- במשחק $\Gamma$ הפונקציית התשלומים לשחקן $i$ היא הפונקציה $U_i : \Sigma \to \mathbb{R}$, המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ את התשלום

$$U_i\left(\sigma\right) = E_\sigma\left[u_i\left(\sigma\right)\right] = \sum_{(s_1, \ldots, s_n) \in S} u_i(s_1, \ldots, s_n) \sigma_1(s_1) \sigma_2(s_2) \ldots \sigma_n(s_n)$$

**הגדרה 37: שיווי משקל נאש באסטרטגיות מעורבות**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק $N$ שחקנים באסטרטגיות טהורות
ויהי $\Gamma = \left(N, (\Sigma_i)_{i \in N}, (U_i)_{i \in N}\right)$ ההחרבה שלו לאסטרטגיות מעורבות.
$\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_N^*)$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אם התנאי הבא מתקיים

$$U_i\left(\sigma^*\right) \geq U_i\left(\sigma_i, \sigma_{-i}^*\right) \ .$$

**משפט 35: עקרון האדישות**

יהי $\sigma^*$ שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה $s_i$ ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן $i$.
אם $\sigma_i^*\left(s_i\right) > 0$ וכן $\sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) > 0$ אזי

$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

**הוכחה:** נניח בשלילה כי משוואה (6) אינה מתקיימת ובלי הגבלת הכללות נניח כי

$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) > U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \ . \tag{7}$$

תהי $\sigma_i$ האסטרטגיה של שחקן $i$ המוגדרת באופן הבא:

$$\sigma_i(t_i) \triangleq \begin{cases} \sigma_i^*\left(t_i\right) & t_i \notin \left\{s_i, \hat{s}_i\right\} \ , \\ 0 & t_i = \hat{s}_i \ , \\ \sigma_i^*\left(s_i\right) + \sigma_i^*\left(\hat{s}_i\right) & t_i = s_i \ . \end{cases}$$

$$U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)=\sum_{t_i\in S_i}\sigma\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{8}$$

$$=\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\left(\sigma^*\left(s_i\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{9}$$

$$>\sum_{t_i\notin\{s_i,\hat{s}_i\}}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(s_i\right)U_i\left(s_i,\sigma_{-i}^*\right)+\sigma^*\left(\hat{s}_i\right)U_i\left(\hat{s}_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{10}$$

$$=\sum_{t_i\in S_i}\sigma^*\left(t_i\right)U_i\left(t_i,\sigma_{-i}^*\right) \tag{11}$$

$$=U_i\left(\sigma^*\right)\ . \tag{12}$$

קיבלנו כי $U_i\left(\sigma_i,\sigma_{-i}^*\right)>U_i\left(\sigma^*\right)$ בסתירה לכך ש- $X^*$ שיווי משקל. ■

**משפט 36: נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים ריבועי**

יהי $G=\left(\{1,2\},\{S_1,S_2\},\{u_1,u_2\}\right)$ משחק שני שחקנים ריבועי שבו לכל שחקן יש $n$ אסטרטגיות טהורות.

יהי $x^*=\begin{pmatrix}x_1^*\\ \vdots\\ x_n^*\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 1,

יהי $y^*=\begin{pmatrix}y_1^*\\ \vdots\\ y_n^*\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ וקטור אסטרטגיות שיווי משקל של שחקן 2

תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 1, תהי $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצת התשלומים של שחקן 2,

ויהו $U_1^*$ ו- $U_2^*$ התשלומי שיווי משקל של שחקן 1 ושחקן 2 בהתאמה.

אזי

$$x^{*t}=\frac{e^tB^{-1}}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ ,\qquad U_1^*=\langle x^*,Ay^*\rangle=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}$$

$$y^*=\frac{A^{-1}e}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ ,\qquad U_2^*=\langle x^*,By^*\rangle=\frac{1}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ .$$





כאשר $e=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ וקטור של $\mathbb{R}^n$ שבו כל איבר שווה ל- 1.

**הוכחה:**

- לפי עקרון האדישות, אם שחקן 1 משחק לפי האסורוגיה המעורבת $x^*$ של שיווי המשקל אזי שחקן 2 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א
$$x^{*t}B=U_2e^t\ .$$
לכן
$$x^{*t}=U_2e^tB^{-1}\ .$$
מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז
$$1=x^{*t}e=U_2e^tB^{-1}e\qquad\Rightarrow\qquad U_2=\frac{1}{e^tB^{-1}e}=\frac{1}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ .$$
על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל
$$x^{*t}=\frac{e^tB^{-1}}{\langle e,B^{-1}e\rangle}\ .$$
- באותה מידה לפי עקרון האדישות, אם שחקן 2 משחק לפי האסורוגיה המעורבת $y^*$ של שיווי המשקל אזי שחקן 1 יהיה אדיש בין האסטרטגיות הטהורות שלו. ז"א
$$Ay^*=U_1e\ .$$
לכן
$$y^*=U_1A^{-1}e\ .$$
מכיוון שהסכום של ההסתברויות שווה ל- 1 אז
$$1=e^ty^*=U_1e^tA^{-1}e\qquad\Rightarrow\qquad U_1=\frac{1}{e^tA^{-1}e}=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ .$$
על ידי הצבה בביטוי הקודם נקבל
$$y^*=\frac{A^{-1}e}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ .$$
- $$\begin{aligned}U_1^*&=\langle x^*,Ay^*\rangle=x^{*t}Ay^*\\&=\frac{e^tB^{-1}AA^{-1}e}{\langle e,A^{-1}e\rangle\langle e,B^{-1}e\rangle}\\&=\frac{e^tB^{-1}e}{\langle e,A^{-1}e\rangle\langle e,B^{-1}e\rangle}\\&=\frac{\langle e,B^{-1}e\rangle}{\langle e,A^{-1}e\rangle\langle e,B^{-1}e\rangle}\\&=\frac{1}{\langle e,A^{-1}e\rangle}\ .\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} U_2^* &= \langle x^*, By^* \rangle = x^{*t} B y^* \\ &= \frac{e^t B^{-1} B A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{e^t A^{-1} e}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{\langle e, A^{-1}e \rangle}{\langle e, A^{-1}e \rangle \langle e, B^{-1}e \rangle} \\ &= \frac{1}{\langle e, B^{-1}e \rangle} \ . \end{aligned}$$

■

**משפט 37: נוסחאות שיווי משקל למשחק שני-שחקנים סכום-אפס ריבועי**

במשחק סכום אפס ריבועי שבו לכל שחקן יש $n$ אסטרטגיות טהורות. אם $A$ המטריצת המשחק אז הווקטורי אסטרטגיות שיווי משקל $x^*$ ו- $y^*$ של שחקן $1$ (שחקן השורות) ושחקן $2$ (שחקן העמודות), והתשלום שיווי משקל נתונים על ידי

$$x^{*t} = \frac{e^t A^{-1}}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ , \qquad y^* = \frac{A^{-1}e}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ , \qquad U = \langle x^*, Ay^* \rangle = \frac{1}{\langle e, A^{-1}e \rangle} \ .$$

**משפט 38:**

יהי $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ו- $\Gamma$ ההרחבה שלו לאסטרטגיות מעורבות. וקטור אסטרטגיות מעורבות $\sigma^*$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק $\Gamma$ אם ורק אם לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$ מתקיים

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \ .$$

**הוכחה:** $\sigma^*$ שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות במשחק $\Gamma$ אז

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(\sigma_i, \sigma^*_{-i}\right)$$

לכל שחקן $i$ ולכל אסטרטגיה מעורבת $\sigma_i \in \Sigma_i$.

כל אסטרטגיה טהורה היא אסטרטגיה מעורבת, אז

$$U_i(\sigma^*) \geq U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$$

לכל שחקן $i$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.

להוכחת הכיוון ההפוך, נניח כי וקטור האסטרטגיות המעורבות $\sigma^*$ מקיים את המשוואה (6) לכל שחקן $i \in N$ ולכל אסטרטגיה טהורה $s_i \in S_i$.





אזי לכל אסטרטגיה מעורבת $\sigma_i$ של שחקן $i$:

$$U_i\left(\sigma_i, \sigma^*_{-i}\right) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \tag{13}$$

$$\leq \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) U_i(\sigma^*) \tag{14}$$

$$= U_i(\sigma^*) \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = U_i(\sigma^*) \ , \tag{15}$$

כאשר השוויון (13) נובע מכך ש- $U_i$ היא פונקציה מולטי-לינארית והאי-שוויון (14) נובע מהאי-שוויון (6). בפרט, $\sigma^*$ הוא שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות ב- $\Gamma$. ■

**משפט 39: ***

יהי $\sigma^*$ שיווי משקל במשחק בצורה אסטרטגית, ותהיינה $s_i$ ו- $\hat{s}_i$ שתי אסטרטגיות טהורות של שחקן $i$.

**1)** אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i(\sigma^*)$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.

**2)** אם $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.

**3)** אם $\sigma^*_i(s_i) > 0$ ו- $\sigma^*_i(\hat{s}_i) > 0$ אז $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right)$.

**4)** אם $s_i$ נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$ אז $\sigma^*_i(s_i) = 0$.

**הוכחה:**

**1)** נניח $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i(\sigma^*)$.

נניח בשלילה כי $\sigma^*_i(s_i) > 0$. לפי עקרטו האדישות לכל אסטרטגיה טהורה $\hat{s}_i$ עבורה $\sigma^*_i(\hat{s}_i) > 0$ מתקיים $U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) = U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right)$ לכן

$$\begin{aligned} U_i(\sigma^*) &= \sum_{\hat{s}_i \in S_i} \sigma^*_i(\hat{s}_i) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ \sigma^*_i(\hat{s}_i) > 0}} \sigma^*_i(\hat{s}_i) U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= \sum_{\substack{\hat{s}_i \in S_i \\ \sigma^*_i(\hat{s}_i) > 0}} \sigma^*_i(\hat{s}_i) U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \\ &= U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) \end{aligned}$$

בסתירה לכך ש- $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i(\sigma^*)$.

**2)**

$$U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma^*_{-i}\right) \overset{\text{אדישות}}{=} U_i(\sigma^*)$$

ז"א $U_i\left(s_i, \sigma^*_{-i}\right) < U_i(\sigma^*)$ ולכן לפי סעיף א' $\sigma^*_i(s_i) = 0$.

**3)** עקרון האדישות (משפט 35).

**4)** נניח כי $s_i$ נשלטת חזק על ידי $\hat{s}_i$. אזי

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) < u_i\left(\hat{s}_i, s_{-i}\right) \qquad \forall s_{-i} \in S_{-i} \ .$$

מכאן

$$\begin{aligned} U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*\left(s_{-i}\right) u_i\left(s_i, s_{-i}\right) \\ &< \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}^*\left(s_{-i}\right) u_i\left(\hat{s}_i, s_{-i}\right) \\ &= U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right) \end{aligned}$$

ז"א

$$U_i\left(s_i, \sigma_{-i}^*\right) < U_i\left(\hat{s}_i, \sigma_{-i}^*\right)$$

ולכן לפי סעיף ב' $\sigma_i^*\left(s_i\right) = 0$.

■