,

פרק 7: מודלים סטוכסטיים ומשוואת בלק-שולס

מודלים פיננסיים מודרניים נשענים על ההנחה שאירועי העתיד בשוק ההון אינם ודאיים וניתנים לתיאור רק באמצעות כלים הסתברותיים. בפרק זה נבנה את התשתית המתמטית צעד אחר צעד - החל ממושג המשתנה המקרי, דרך תהליכים רציפים בזמן והלמה של איטו, הגדרת אופציות, ועד לגזירת משוואת בלק-שולס המפורסמת לתמחור אופציות.

7.1 משתנים סטוכסטיים והילוך מקרי

הגדרה 7.1 פונקצית הסתברות

- בהינתן ניסוי בעלת קבוצת תוצאות אפשריות בת מניה, הקבוצת כל התוצאות האפשריות תסומן Ω ותקרא **המרחב המדגם**.
- תת קבוצה כלשהי $A \subseteq \Omega$ של תוצאות תקרא **מאורע**.
- **פונקצית הסתברות** $P : \Omega \to [0,1]$ היא פונקציה המשייכת לכל מאורע $A \subseteq \Omega$ מספר ממשי המסומן $P(A)$ בקטע $[0,1]$.
- פונקצית הסתברות מקיימת את התנאים הבאים:

1) **אי־שליליות:** הסתברות לעולם איננה שלילית: $P(A) \geq 0$.

2) **נרמול:** $P(\Omega) = 1$. ז"א הסיכוי שמשהו יתרחש בניסוי הוא 1.

3) **חיבוריות:** עבור כל צמד מאורעות זרים A ו- B, מתקיים $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
באופן דומה, עבור n מאורעות $A_1, A_2, \ldots, A_n$ זרים בזוגות מתקיים

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right) \ .$$

הנוסחה הזאת נכונה גם למקרה של אינסוף מאורעות. למעשה המקרה הסופי מוכיחים ע"י המקרה האינסופי.

הגדרה 7.2 מרחב הסתברות

מרחב הסתברות הוא שלושה (Ω, F, P) כאשר:

- Ω המרחב המדגם,
- F קבוצה של כל המאורעות $A \subseteq \Omega$ שקיימים:

$$F = \left\{A \,\middle|\, A \subseteq \Omega\right\} \ .$$

- P פונקצית הסתברות $P : \Omega \to [0,1]$.

הגדרה 7.3 משתנה סטוכסטי (מקרי)

- משתנה סטוכסטי הוא משתנה שערכו אינו ידוע מראש, אלא נקבע כתוצאה מתופעה אקראית.
- יהי Ω מרחב מדגם. משתנה מקרי X הוא פונצקיה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ שמשייכת לכל איבר $\omega \in \Omega$ במרחב המדגם של ניסוי, מספר ממשי שמסומן $X(\omega) \in \mathbb{R}$.

דוגמה 7.1 ()

בניסוי נטיל 2 מטבעות. נגדיר
$X =$ מספר "עצים" (H) המתקבלים
נרשום את התוצאות של הניסוי והערך של X המתאים:

$\omega = (T,T)$	$X(\omega) = 0$
$\omega = (H,T)$	$X(\omega) = 1$
$\omega = (T,H)$	$X(\omega) = 1$
$\omega = (H,H)$	$X(\omega) = 2$

הערכים האפשריים של X נקבעים לפי התוצאות האפשריות של הניסוי:

$$X(\omega) = 0 \ , \quad X(\omega) = 1 \ , \quad X(\omega) = 2 \ .$$

לכל ערך יש הסתברות:

$$P(X = 0) = P\left(\{T,T\}\right) = \frac{1}{4} \ ,$$

$$P(X = 1) = P\left(\{T,H\},\{H,T\}\right) = \frac{1}{2} \ ,$$

$$P(X = 2) = P\left(\{H,H\}\right) = \frac{1}{4} \ .$$

כך X מהווה מ"מ בדיד.

דוגמה 7.2 ()

בניסוי נטיל 3 מטבעות. נגדיר
$Y =$ מספר "עצים" (H) המתקבלים
נרשום את התוצאות של הניסוי והערך של Y המתאים: הערכים האפשריים של Y נקבעים לפי התוצאות האפשריות של הניסוי:

$$Y = 0 \ , \quad Y = 1 \ , \quad Y = 2 \ , \quad Y = 3 \ .$$

לכל ערך יש הסתברות:

$$P(Y=0) = P(\{T,T,T\}) = \frac{1}{8}\ ,$$

$$P(Y=1) = P(\{H,T,T\},\{T,H,T\},\{T,T,H\}) = \frac{3}{8}\ ,$$

$$P(Y=2) = P(\{H,H,T\},\{H,T,H\},\{T,H,H\}) = \frac{3}{8}\ ,$$

$$P(Y=3) = P(\{H,H,H\}) = \frac{1}{8}\ .$$

כך Y מהווה מ"מ בדיד.

דוגמה 7.3 ()

מטילים 2 קוביות הוגנות. נסמן ב- Y את סכום התוצאות שהתקבלו. הערכים האפשריים הינם:

$\{(1,1)\}$	$X=2$	$P(X=2)=\frac{1}{36}$
$\{(2,1),(1,2)\}$	$X=3$	$P(X=3)=\frac{1}{18}$
$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$X=4$	$P(X=4)=\frac{1}{12}$
$\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$	$X=5$	$P(X=5)=\frac{1}{9}$
$\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$	$X=6$	$P(X=6)=\frac{5}{36}$
$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$	$X=7$	$P(X=7)=\frac{1}{6}$
$\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$	$X=8$	$P(X=8)=\frac{5}{36}$
$\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$	$X=9$	$P(X=9)=\frac{1}{9}$
$\{(4,6),(5,5),(6,4\}$	$X=10$	$P(X=10)=\frac{1}{12}$
$\{(5,6),(6,5)\}$	$X=11$	$P(X=11)=\frac{1}{18}$
$\{(6,6)\}$	$X=12$	$P(X=12)=\frac{1}{36}$

דוגמה 7.4 ()

מטילים 3 קוביות הוגנות. נגדיר מ"מ X להיות התוצאה המקסימלית מבין ההטלות.

$\{(1,1,1)\}$	$X=1$	$P(X=1)=\frac{1}{216}$
$\{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2),(2,2,1),\cdots,(2,2,2)\}$	$X=2$	$P(X=2)=\frac{2^3-1^3}{216}=\frac{7}{216}$
$\{(3,1,1),(1,3,1),(1,1,3),(3,3,1),\cdots,(3,3,3)\}$	$X=3$	$P(X=3)=\frac{3^3-2^3}{216}=\frac{19}{216}$
$\vdots$ $\{(6,1,1),(1,6,1),(1,1,6),(6,6,1),\cdots,(6,6,6)\}$	$X=6$	$P(X=6)=\frac{6^3-5^3}{216}=\frac{9}{1}216.$

זו דוגמה של מ"מ כאשר X הוא המשתנה המקרי.

כאשר אנחנו בוחנים סדרה של משתנים סטוכסטיים המתרחשים לאורך זמן, אנחנו מקבלים **תהליך סטוכסטי**. התהליך הבסיסי ביותר הוא **ההילוך המקרי**.

הגדרה 7.4 הילוך מקרי

- יהי (Ω,F,P) מרחב הסתברות.
- יהיו $(X_t)_{t\geq 1}=\{X_1,X_2,\ldots\}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות.
- **הילוך מקרי** הוא סדרת משתנים מקריים $(S_t)_{t\leq 0}$ כאשר $S_0\in\mathbb{R}$ הערך ההתחלתי של ההילוך ולכל $n>0$:
$$S_n=S_0+\sum_{t=1}^{n}X_t\ .$$
- ניתן להגדיר הילוך מקרי בצורה רקורסיבית. כלומר בהינתן סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות $(X_t)_{t\geq 1}$ הילוך מקרי הוא סדרה $(S_t)_{t\geq 0}$ כאשר $S_0\in\mathbb{R}$ הערך ההתחלתי של ההילוך ו-
$$\forall t\geq 1:\quad S_t=S_{t-1}+X_t\ .$$

דוגמה 7.5 (הילוך מקרי על הקו המספרים השלמים)

נגדיר הילוך מקרי על הקו המספרים השלמים באופן הבא.
נאתחל $S_0=0$.
בכל שלב $t=1,2,\ldots$ נטיל קוביה הוגנת ונגדיר את המ"מ

$$\forall t\geq 1:\qquad X_t=\begin{cases}+1 & : \text{התוצאת ההטלה היא } H\\ -1 & : \text{התוצאת ההטלה היא } T\end{cases}\ .$$

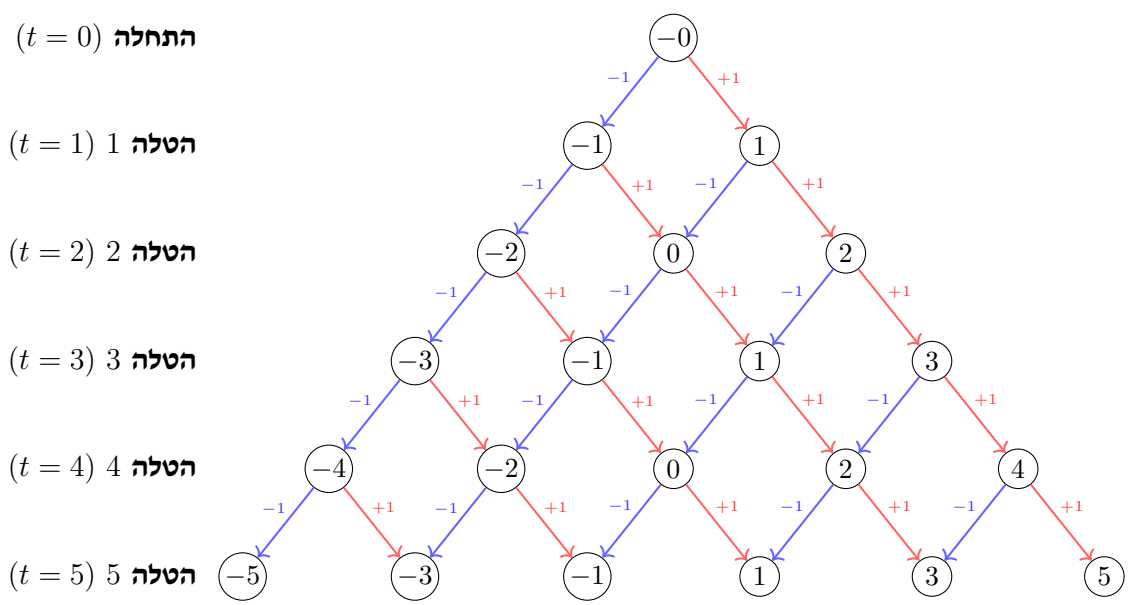
אזי נקבל את ההילוך מקרי

$$\forall n \geq 1: \qquad S_n = S_0 + \sum_{t=1}^{n} X_t \ .$$

למשל, אם נקבל הסדרת התוצאות $\{H, T, T, H, H\}$ אחרי 5 הטלות אזי $\{X_1 = +1, X_2 = -1, X_3 = -1, X_4 = +1, X_5 = +1\}$ ולכן:

$$\begin{aligned}
S_0 =& 0, \\
S_1 =& S_0 + X_1 \quad = 1 \ , \\
S_2 =& S_1 + X_2 \quad = 0 \ , \\
S_3 =& S_2 + X_3 \quad = -1 \ , \\
S_4 =& S_3 + X_4 \quad = 0 \ , \\
S_5 =& S_4 + X_5 \quad = 1 \ .
\end{aligned}$$

התרשים מתאר עץ של ההילוך המקרי. כל דור מייצג השלב הבא של ההילוך. כל קדקוד בדור ה- t מייצג ערך אפשרי של S_t.



דוגמה 7.6 (הילוך מקרי של מניית ערך)

ערכה של מניה מתחיל לנוע מגובה $x = 0$, על פני זמן בדיד. בכל שלב המניה עולה או יורדת, ביחידה אחת, בהסתברות שווה במשך 100 יחידות זמן. כל העליות/ירידות של המניה בלתי תלויות.

1) נסמן ב-Y את מספר הפעמים שהמניה עלתה. חשבו את פונקצית ההסתברות של Y.

2) חשבו את פונקצית ההסתברות של המניה בסוף התהליך?

3) מצאו את ההסתברות שבסופו של דבר המניה תמצא בנקודה $x = 10$, ובנקודה $x = 11$.

4) לאחר 100 יחידות זמן המניה הגיע לנקודה $x = 10$. חשבו את ההסתברות שהתנועה האחרונה שלה הייתה לכיוון מעלה?

פתרון:

נסמן ב X את המיקום האנכי של המניה וב Y את כמות התנועות מעלה. המיקום שווה למספר התנועות כלפי

מעלה בחיסור מספר התנועות כלפי מטה:

$$X = Y - (100 - Y) = 2Y - 100 \ .$$

1)

$$Y \sim \text{Bin}\left(100, \frac{1}{2}\right) \ .$$

2)

$$P(X = k) = P(2Y - 100 = k) = P\left(Y = \frac{k + 100}{2}\right) = \binom{100}{(k+100)/2}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \ ,$$

3)

$$P(X = 10) = P(Y = 55) = \binom{100}{55}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 0.0484743$$
$$P(X = 11) = 0 \ .$$

4) בהינתן שהמנייה הגיעה לגובה 10, היא ביצעה בדיוק 55 תנועות לכיוון מעלה ו- 45 לכיוון מטה. ההסתברות שהתנועה האחרונה תהיה כלפימעלה היא

$$\frac{55}{100}$$

הסבר: ישנם 55 צעדים כלפי מעלה ו- 45 כלפי מטה. צריכים לסדר אותם בשורה. הסיכוי שהצעדהאחרון יהיה כלפי מעלה הוא בחירה של צעד מעלה 55 אפשריים, מתוך 100 סה"כ.

■

7.2 תהליך וינר

הגדרה 7.5 תהליך וינר (Wiener Process)

תהליך ונר חד-ממדי הוא תהליך סטוכסטי ממשי, W_t, $t \geq 0$, המקיים:

1) נקודת התחלה: $W_0 = 0$ בהסתברות 1.

2) ל- W יש **תוספות זרות בלתי תלויות:** לכל $t > 0$. התוספות העתידיות $W_{t+u} - W_t$ אינן תלויות בערכי העבר W_s, $s < t$.

3) ל- W יש **תוספות נורמליות:** לכל $W_{t+u} - W_t$ יש התפלגות נורמלית עם תוחלת 0 ושונות u. כלומר:

$$W_{t+u} - W_t \sim N(0, u) \ .$$

4) ל- W יש **כמעט בוודאות נתיבים רציפים:** W_t הוא כמעט בוודאות רציף ב- t.

המשמעות שלתהליך יש תוספות זרות בלתי תלויות היא שאם $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2$ אז $W_{t_1} - W_{s_1}$ ו- $W_{t_2} - W_{s_2}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים. תכונה דומה מתקיימת עבור n תוספות.

דוגמה 7.7 (התפשטות אי-ודאות בתהליך וינר)

נניח שמניה מתחילה היום במחיר של 90\$. אנו ממדלים את מחירה העתידי, S_t, על ידי ההנחה ש- **השינוי** במחיר מונע אך ורק על ידי תהליך וינר תקני, W_t. המודל שלנו הוא:

$$S_t = 90 + W_t$$

מהי ההסתברות שמחיר המניה יהיה גבוה מ-
$100\$ ביום ה- 20 ($t = 20$)?

פתרון:

1. הגדרת ההתפלגות

על פי ההגדרה, התוספת של תהליך וינר תקני לאורך זמן t מתפלגת נורמלית עם תוחלת 0 ושונות t.

$$W_{20} \sim \mathcal{N}(0, 20)$$

משמעות הדבר היא שהשינוי הצפוי (התוחלת) הוא 0$, אך השונות של שינוי זה היא 20 (מה שהופך את סטיית התקן ל-$\sigma = \sqrt{20} \approx 4.472$).

2. בניית אי-השוויון

אנו רוצים למצוא את ההסתברות ש-$S_{20} > 100$. נציב את המודל שלנו באי-השוויון:

$$\begin{aligned} P(S_{20} > 100) &= P(90 + W_{20} > 100) \\ &= P(W_{20} > 10) \end{aligned}$$

כעת אנו פשוט מחפשים את ההסתברות שתהליך הוינר שלנו נסחף כלפי מעלה ביותר מ-10 נקודות לאחר 20 ימים.

3. תקנון לציון תקן (Z-Score)

כדי למצוא הסתברות זו, נמיר את הערך לציון תקן (Z):

$$Z = \frac{\text{תוחלת} - \text{יעד}}{\text{סטיית תקן}}$$

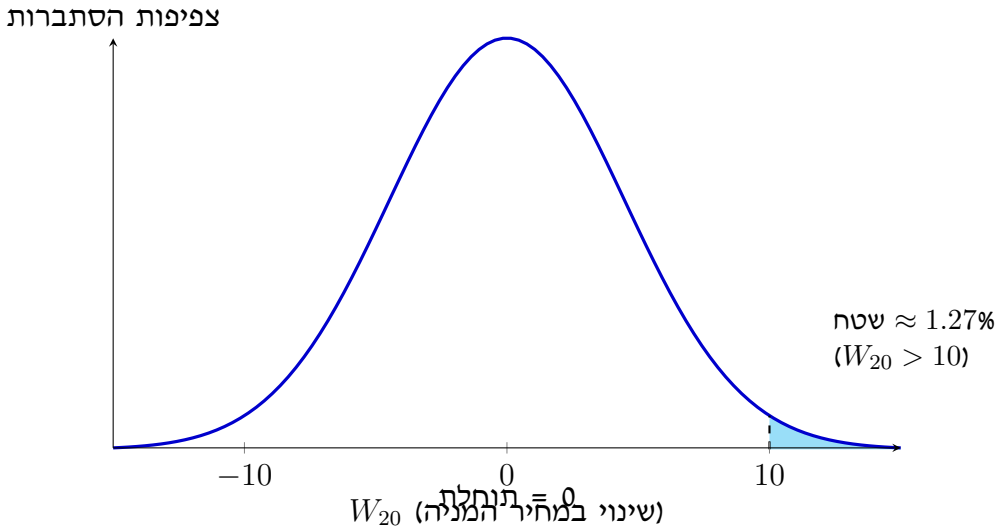
$$Z = \frac{10 - 0}{\sqrt{20}} = \frac{10}{4.472} \approx 2.236$$

4. ההסתברות הסופית

באמצעות טבלת התפלגות נורמלית סטנדרטית, נחפש את ההסתברות לקבל ציון תקן גדול מ-2.236.

$$P(Z > 2.236) \approx 0.0127$$

ישנו סיכוי של כ-**1.27%** שהמניה תהיה מעל 100$ בזמן $t = 20$.
להלן ההתפלגות הנורמלית של W_{20} המציגה את ההסתברות של 1.27% הממוקמת בזנב הימני הקיצוני.



■

דוגמה 7.8 (התפשטות אי-ודאות בתהליך וינר)

נניח שמחיר נכס מסוים עוקב אחר תהליך וינר תקני. אנו יודעים שהמחיר היום ($t = 0$) הוא 100 ₪. מכיוון שהתהליך הוא תהליך וינר, התוספת במחיר בעוד 4 ימים ($W_4 - W_0$) מתפלגת נורמלית עם תוחלת 0 ושונות 4. סטיית התקן היא $\sqrt{4} = 2$. לכן, התפלגות המחיר תהיה נורמלית סביב 100 ₪, עם סטיית תקן של 2 ₪. ככל שמסתכלים רחוק יותר לעתיד, אי-הוודאות גדלה בקצב הפרופורציונלי ל-$\sqrt{t}$.

7.3 תהליך איטו והלמה של איטו

תהליך וינר תקני מניח תוחלת אפס ושונות של 1 ליחידת זמן. במציאות, לנכסים יש מגמת צמיחה ותנודתיות שונה. אנו מכלילים את תהליך וינר לתהליך איטו.

הגדרה 7.6 תהליך איטו

תהליך איטו מתאר משתנה סטוכסטי X_t המורכב מחלק דטרמיניסטי (סחף/מגמה) וחלק אקראי (תנודתיות). צורתו הדיפרנציאלית היא:

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t$$

כאשר:

- dX_t הוא השינוי האינפיניטסימלי במשתנה.
- $\mu(X_t, t)$ הוא פרמטר ה**סחף (Drift)**, המייצג את קצב הגידול הממוצע.
- $\sigma(X_t, t)$ הוא פרמטר ה**תנודתיות (Volatility)**.
- dW_t הוא השינוי בתהליך וינר התקני.

הכלי החשוב ביותר בחשבון הסטוכסטי הוא הלמה של איטו, שהיא המקבילה של כלל השרשרת מגזירה רגילה, מותאמת לתהליכים אקראיים.

משפט 7.1 הלמה של איטו (It□'s Lemma)

יהי X_t תהליך איטו הנתון על ידי $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$. תהי $f(x,t)$ פונקציה גזירה פעמיים לפי x ופעם אחת לפי t. אזי הפונקציה החדשה $Y_t = f(X_t, t)$ היא גם תהליך איטו, והדיפרנציאל שלה נתון על ידי:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) dt + \sigma_t \frac{\partial f}{\partial x} dW_t$$

הוכחה: (הוכחה היוריסטית מבוססת פיתוח טיילור) נפתח את הפונקציה $f(X_t, t)$ לטור טיילור מסדר שני סביב הנקודה (x, t):

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dX_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}dX_t dt + \dots$$

נציב את הדיפרנציאל של תהליך איטו $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$:

$$(dX_t)^2 = (\mu dt + \sigma dW_t)^2 = \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dt dW_t + \sigma^2 (dW_t)^2$$

בחשבון סטוכסטי, כאשר לוקחים את הגבול שבו $dt \to 0$, איברים מסדר גבוה של dt הופכים לזניחים. לכן, $dt^2 \to 0$ ו-$dtdW_t \to 0$. עם זאת, מתכונות תהליך וינר אנו יודעים כי שונות התהליך שווה לזמן, ולכן בגבול מתקיים הכלל:

$$(dW_t)^2 \to dt$$

נציב זאת חזרה אל תוך $(dX_t)^2$ ונקבל:

$$(dX_t)^2 \to 0 + 0 + \sigma^2 dt = \sigma^2 dt$$

נציב את dX_t ואת $(dX_t)^2 = \sigma^2 dt$ בתוך פיתוח טיילור המקורי, נתעלם מאיברים הכוללים $(dt)^2$ ו-$dtdW_t$, ונקבל:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sigma^2 dt) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW_t \end{aligned}$$

ובכך סיימנו את ההוכחה. ■

דוגמה 7.9 (שימוש בלמה של איטו למניות)

כאשר ממדלים מחירי מניות (S_t), המודל המקובל הוא "תנועה בראונית גיאומטרית": $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$. אם נרצה למצוא את התהליך שעובר הלוגריתם של מחיר המניה, נגדיר פונקציה $f(S,t) = \ln(S)$. הנגזרות הן: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$. נציב בלמה של איטו:

$$d(\ln S_t) = \left(0 + \mu S_t\frac{1}{S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)\right)dt + \sigma S_t\frac{1}{S_t}dW_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW_t$$

זוהי תוצאה יסודית המראה שהלוגריתם של מחיר המניה גדל בקצב של $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$, ולא μ.

7.4 חשבון בנק וריבית רציפה

במודלים פיננסיים, אנו חייבים להגדיר נכס חסר סיכון (Risk-Free Asset), שבו ניתן להלוות וללוות כספים ללא סיכון כלל.

הגדרה 7.7 נכס חסר סיכון (חשבון בנק)

נסמן ב-B_t את הערך בזמן t של יחידת מטבע אחת (למשל, שקל אחד) שהופקדה בחשבון בנק בזמן $t = 0$. החשבון נושא ריבית חסרת סיכון קבועה ורציפה r.

נראה כעת מדוע ערכו של החשבון הוא אקספוננציאלי. מכיוון שהריבית רציפה וללא שום רכיב סטוכסטי או סיכון, השינוי האינפיניטסימלי בערך החשבון dB_t תלוי רק בריבית r, בזמן שחלף dt, ובסכום הקיים בחשבון B_t:

$$dB_t = rB_t dt$$

נחלק את שני האגפים ב-B_t:

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים מ-0 ועד t:

$$\int_0^t \frac{dB_s}{B_s} = \int_0^t rds$$

$$\ln(B_t) - \ln(B_0) = rt$$

מכיוון שהשקענו יחידת מטבע אחת בזמן 0, אזי $B_0 = 1$ ולכן $\ln(B_0) = 0$. מכאן נקבל:

$$\ln(B_t) = rt \implies B_t = \exp(rt)$$

לכן, יחידת מטבע אחת המושקעת בזמן 0 תהיה שווה בדיוק ל-e^{rt} בזמן t.

דוגמה 7.10 (חישוב ריבית רציפה)

אם הריבית חסרת הסיכון היא 5% בשנה ($r = 0.05$), ונשקיע $1,000$ ₪ למשך 3 שנים ($t = 3$), אזי ערך חשבון הבנק יהיה: $1000 \cdot e^{0.05 \cdot 3} = 1000 \cdot e^{0.15} \approx 1000 \cdot 1.1618 = 1,161.8$ ₪.

7.5 נגזרים פיננסיים: אופציות רכש ומכר

לפני שנגזור את משוואת בלק-שולס, עלינו להגדיר את הנכסים שאותם היא מתמחרת.

הגדרה 7.8 אופציות (Options)

אופציה היא חוזה פיננסי המעניק לקונה את **הזכות** (אך לא את החובה) לבצע עסקה בנכס בסיס (כגון מניה) בתנאים שנקבעו מראש. ישנם שני סוגים עיקריים:

- **אופציית רכש (Call Option):** מעניקה לקונה את הזכות **לקנות** את נכס הבסיס. הקונה יממש זכות זו רק אם מחיר השוק גבוה מהמחיר המוסכם.
- **אופציית מכר (Put Option):** מעניקה לקונה את הזכות **למכור** את נכס הבסיס. הקונה יממש זכות זו רק אם מחיר השוק נמוך מהמחיר המוסכם.

לכל אופציה יש שני פרמטרים קריטיים המוגדרים בחוזה:

1. **מחיר מימוש (Strike Price, מסומן ב-K):** המחיר המוסכם והקבוע שבו תתבצע העסקה (הקנייה או המכירה) במידה והאופציה תמומש.
2. **תאריך פקיעה (Expiration / Maturity, מסומן ב-T):** התאריך שבו או עד אליו ניתן לממש את האופציה. לאחר מועד זה, האופציה פוקעת והופכת לחסרת ערך.

7.6 משוואת בלק-שולס וגזירתה

באמצעות הלמה של איטו, פישר בלק, מיירון שולס ורוברט מרטון פיתחו משוואה המתארת את התפתחות המחיר של אופציה נגזרת. הרעיון המהפכני היה שניתן להעלים את הרכיב האקראי על ידי בניית תיק השקעות המשלב את המניה והאופציה, ובכך לאלץ את התיק להניב את הריבית חסרת הסיכון (לפי עיקרון היעדר ארביטראז').

משפט 7.2 משוואת בלק-שולס

מחירה של אופציה $C(S,t)$ התלויה במחיר נכס בסיס S ובזמן t, חייב לקיים את המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הבאה:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

הסבר המונחים במשוואה:

- $C(S,t)$: מחיר האופציה כפונקציה של מחיר המניה והזמן.
- $\frac{\partial C}{\partial t}$: תטא ($\Theta$). קצב שחיקת ערך האופציה עם חלוף הזמן.
- $\frac{\partial C}{\partial S}$: דלתא ($\Delta$). הרגישות של מחיר האופציה לשינויים במחיר המניה.
- $\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$: גמא ($\Gamma$). הקמירות של מחיר האופציה (קצב שינוי הדלתא).

- $\boldsymbol{\sigma}$: התנודתיות של נכס הבסיס S.
- $\boldsymbol{r}$: הריבית חסרת הסיכון בשוק.

הוכחה: (גזירת משוואת בלק-שולס באמצעות ארגומנט השכפול) נניח שמחיר המניה S_t מתנהג לפי תנועה בראונית גיאומטרית:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

נסמן ב-$C(S,t)$ את מחיר האופציה (Call). לפי הלמה של איטו (שהוכחנו קודם), הדיפרנציאל של מחיר האופציה הוא:

$$dC = \left(\mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S} dW_t$$

כעת, נבנה "אסטרטגיית מסחר המממנת את עצמה" (Self-financing trading strategy) שבה נחזיק בכל רגע t, x_t יחידות בחשבון הבנק חסר הסיכון B_t, ו-y_t יחידות של מניית הבסיס S_t. ערך התיק שלנו, P_t, יקיים:

$$P_t = x_t B_t + y_t S_t$$

מכיוון שהתיק מממן את עצמו (כלומר, איננו מכניסים או מושכים כסף חיצוני, אלא רק מזיזים הון בין המניה לחשבון הבנק), השינוי בערך התיק נובע אך ורק מהשינויים במחירי הנכסים:

$$dP_t = x_t dB_t + y_t dS_t$$

נציב את $dB_t = rB_t dt$ ואת התנהגות המניה dS_t:

$$\begin{aligned} dP_t &= x_t(rB_t dt) + y_t(\mu S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= (rx_t B_t + y_t \mu S_t)dt + y_t \sigma S_t dW_t \end{aligned}$$

נבחר את הכמויות x_t ו-y_t כך שהתיק שלנו ישכפל בדיוק את מחיר האופציה בכל רגע נתון. כדי ש-dP_t יהיה זהה ל-dC, עלינו להשוות את האיברים שלהם. ראשית, נשווה את האיברים המכילים את הרכיב האקראי dW_t:

$$y_t \sigma S_t = \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S} \implies y_t = \frac{\partial C}{\partial S}$$

המשמעות היא שכמות המניות שעלינו להחזיק היא בדיוק ה"דלתא" של האופציה. כעת נשווה את האיברים הדטרמיניסטיים המכילים את dt:

$$rx_t B_t + y_t \mu S_t = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

נציב את $y_t = \frac{\partial C}{\partial S}$ באגף שמאל:

$$rx_t B_t + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

איברי ה-μ מצטמצמים משני האגפים (זוהי תוצאה קריטית - התוחלת של המניה אינה משפיעה על מחיר האופציה!), ונותר:

$$rx_t B_t = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

מכיוון שבנינו תיק שמשכפל בדיוק את האופציה, ערך התיק שווה לערך האופציה ($P_t = C$). לכן, מהגדרת התיק $C = x_t B_t + y_t S_t$, ניתן לבודד את המזומן:

$$x_t B_t = C - y_t S_t = C - S_t \frac{\partial C}{\partial S}$$

נציב זאת למשוואה הקודמת:

$$r\left(C - S_t \frac{\partial C}{\partial S}\right) = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

נעביר את כל האיברים לאגף אחד ונסדר מחדש, ונקבל את משוואת בלק-שולס:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

■

7.7 תנודתיות ותנודתיות גלומה (Volatility and Implied Volatility)

לאחר שהכרנו את משוואת בלק-שולס, חשוב להתעכב על הפרמטר σ, שהוא אחד המרכיבים המרכזיים ביותר במודל.

הגדרה 7.9 תנודתיות (Volatility)

תנודתיות היא מדד סטטיסטי לפיזור התשואות של נכס פיננסי לאורך זמן. במודל בלק-שולס (הנשען על תנועה בראונית גיאומטרית), התנודתיות, המסומנת באות σ, מייצגת את סטיית התקן השנתית של התשואות הרציפות של נכס הבסיס. ככל שהתנודתיות גבוהה יותר, כך התנודות במחיר המניה חדות ומהירות יותר, מה שמגדיל את אי-הוודאות ובהתאם לכך - מעלה את מחירי האופציות.

הגדרה 7.10 תנודתיות גלומה (Implied Volatility)

משוואת בלק-שולס דורשת להזין את פרמטר התנודתיות σ כדי לחשב את מחיר האופציה. עם זאת, במציאות, מחירי האופציות נסחרים בשוק ונקבעים על ידי היצע וביקוש. **תנודתיות גלומה** היא הערך של σ אשר אם נציב אותו במשוואת בלק-שולס, יניב מחיר תיאורטי השווה בדיוק למחיר השוק הנוכחי של האופציה. במילים אחרות, במקום להשתמש בתנודתיות היסטורית כדי למצוא את מחיר האופציה, אנו משתמשים במחיר האופציה בשוק כדי "לחלץ" את התנודתיות. ערך זה משקף את ציפיות השוק לתנודתיות המניה בעתיד (עד למועד הפקיעה).

7.8 גידור סיכונים הלכה למעשה (Delta Hedging)

הרעיון שעומד מאחורי גזירת בלק-שולס הוא יישומי לחלוטין. הוא מאפשר לסוחרים לבנות "תיק גידור" (Hedged Portfolio) שאינו מושפע מתנודות השוק. אם התיק אינו נושא סיכון, הוא חייב להניב בדיוק את הריבית חסרת הסיכון r.

דוגמה 7.11 (דוגמה מעשית: יצירת תיק באפס סיכון (Zero Risk))

נניח שבבעלותכם אופציית רכש (Call) אחת על מניית "טבע". אתם חוששים שמחיר המניה ירד (מה שיפגע בערך האופציה). כיצד תיצרו איזון מושלם כך שהרווח/הפסד שלכם יהיה באפס סיכון?

פתרון:

כדי להפוך את התיק לחסר סיכון, נבודד את הרגישות למחיר המניה. נניח כי הדלתא ($\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$) של האופציה כרגע היא 0.6. המשמעות: על כל עלייה של 1 ₪ במניה, האופציה עולה ב-0.6 ₪.

כדי לגדר סיכון זה, נבנה תיק (Π) שבו אנו **מוכרים בחסר (Short)** בדיוק Δ מניות עבור כל אופציה שיש לנו:

$$\Pi = C - \Delta \cdot S$$

נבחן מה קורה לערך התיק כאשר מחיר המניה משתנה קלות (dS):

$$d\Pi = dC - \Delta \cdot dS$$

מכיוון ש-$dC \approx \Delta \cdot dS$ (שינוי קטן במחיר האופציה שווה לדלתא כפול השינוי במניה), נקבל:

$$d\Pi \approx \Delta \cdot dS - \Delta \cdot dS = 0$$

פרקטית: אם המניה **תרד** ב-1 ₪, תפסידו 0.6 ₪ על האופציה, אך תרוויחו 0.6 ₪ מפוזיציית ה-Short על המניה. סך הרווח/הפסד = 0. התיק כעת חסר סיכון. מכיוון שהדלתא משתנה כל הזמן, הסוחר חייב להתאים (Rebalance) את כמות המניות בפוזיציה שלו ברציפות. זהו הבסיס לגידור דינמי (Dynamic Delta Hedging). ■

7.9 יצירת תיק ניטרלי לסיכון (Risk Neutral Portfolios)

בפרק זה נרחיב את מושג הגידור לתיקים מורכבים יותר המשלבים מספר נגזרים ונכסי בסיס.

ניתן לנטרל לא רק את הדלתא (Δ), אלא גם את הגמא (Γ), המייצגת את הקמירות של מחיר האופציה ביחס למניה. תיק שבו גם הדלתא וגם הגמא מאופסים נקרא תיק Delta-Gamma Neutral.

כדי לנטרל גם את הרגישות לשינויי מחיר (דלתא) וגם את הרגישות לשינויים בסטיית התקן או בתנודות המחיר (גמא), עלינו לבנות תיק המשלב אופציות נוספות ונכס הבסיס.

נגדיר תיק Π המורכב מהאופציה המקורית V_0, כמות n_1 של אופציה ראשונה V_1, כמות n_2 של אופציה שנייה V_2, וכמות Δ_{stock} של מניות:

$$\Pi = V_0 + n_1 V_1 + n_2 V_2 + \Delta_{stock} \cdot S$$

כדי שהתיק יהיה ניטרלי, עלינו לפתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\Gamma_\Pi = \Gamma_0 + n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 = 0$$
$$\Delta_\Pi = \Delta_0 + n_1\Delta_1 + n_2\Delta_2 + \Delta_{stock} = 0$$

דוגמה 7.12 (דוגמה לפתרון מערכת גידור)

נתונים:

- אופציה בתיק (V_0): $\Delta_0 = 0.5, \Gamma_0 = 0.05$
- אופציה לגידור (V_1): $\Delta_1 = 0.3, \Gamma_1 = 0.10$

1. ננטרל גמא באמצעות האופציה הראשונה בלבד: $\Gamma_0 + n_1\Gamma_1 = 0.05 + n_1(0.10) = 0 \implies n_1 = -0.5$.
2. נחשב את הדלתא הנותרת: $\Delta_{new} = 0.5 + (-0.5)(0.3) = 0.5 - 0.15 = 0.35$.
3. ננטרל דלתא באמצעות מניות: $\Delta_{stock} = -0.35$. **סיכום:** מכירת חצי יחידה של אופציה V_1 ומכירת 0.35 מניות מנטרלת את התיק.

דוגמה 7.13 (גידור באמצעות אופציות רכש ומכר (Put-Call Parity))

לפי שוויון פוט-קול ($C - P = S - Ke^{-rt}$), מתקיים הקשר $\Gamma_{call} = \Gamma_{put}$ (מאחר ו-S ליניארי ב-S ו-K קבוע). ניתן להשתמש באופציית מכר כדי לגדר גמא של אופציית רכש בדיוק באותו אופן שמשתמשים באופציית רכש נוספת, מה שמאפשר גמישות בבחירת מחירי מימוש שונים להשגת יעד הגידור.