פרק 3
אוטומט לא דטרמיניסטי

3.1 אוטומט לא-דטרמיניסטי סופי

הגדרה 3.1 אוטומט לא-דטרמיניסטי סופי (NFA)

אוטומט לא-דטרמיניסטי סופי (באנגלית: Non-Deterministic Finite Automaton - NFA) הינו חמישייה:

$$A = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F) \ .$$

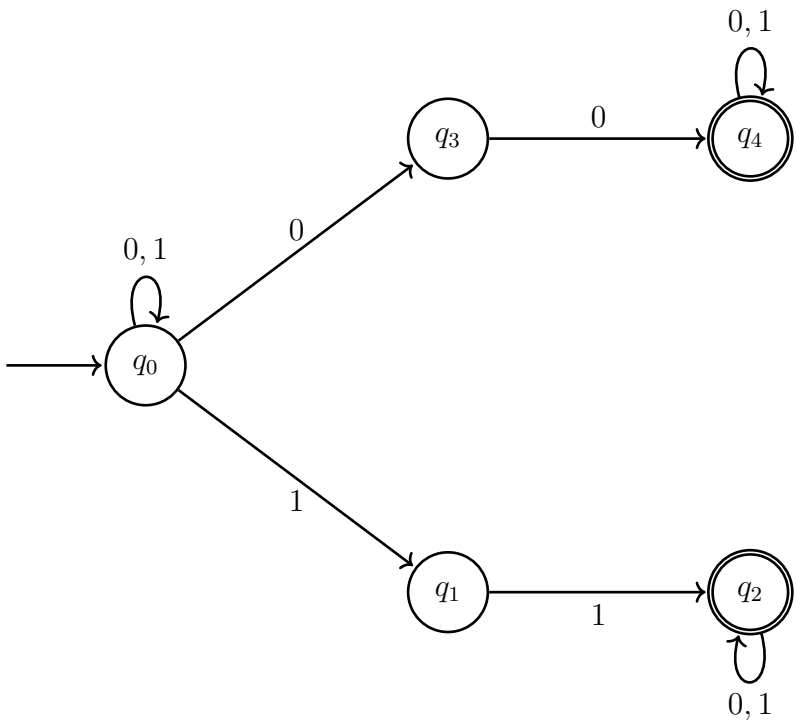
המרכיבים $Q, \Sigma, \Delta, q_0, F$ הם מתוארים למטה.

- Q: קבוצת **מצבים** סופית.
- Σ: **האלפבית** שעליו מוגדרות המילים המוזנות לאוטומט.
- Δ: **הפונקצית המעברים**,
$$\Delta : Q \times \Sigma \to P(Q) \ ,$$
כאשר $P(Q)$ היא קבוצת כל תתי-הקבוצות של Q. ניתן להגדיר את פונקציית המעברים בצורת נוסחה או בצורת תרשים מעברים.
- F: קבוצת **מצבי קבלה** (או מצבי סיום) $F \subseteq Q$.
- q_0: **מצב ההתחלה**, $q_0 \in Q$. זהו מצב שבו האוטומט נמצא בתחילתו של כל תהליך חישוב.

ההגדרהשל אוטומט לא-דטרמיניסטי זהה בכל להגדרת אוטומט דטרמיניסטי מלבד בפונקצייתהמעבר שמעתיקה זוג (q, σ) לקבוצת מצבים $\delta(q, \sigma) \subseteq Q$. משמעות הדבר היא שאם אוטומט לא-דטרמיניסטי נמצא במצב q כאשר הוא קורא תו σ הוא יוכל לעבור לכלאחד מהמצבים בקבוצה $\delta(q, \sigma)$.

- בכל פעם שמדברים על אוטומט לא-דטרמיניסטי יש לציין בבירור (אם זה לא ברור מתוך ההקשר) את כל חמשת הדברים הנ"ל.
- בניגוד לא וטומט דטרמיניסטי, עבור כל מחרוזת, w, קיימות בדרך כלל מספר גדול של סדרות חישוב שונות, ובמקרים מסוימים אף לא סדרת חישוב אחת.
- למשל ,באוטומט בדוגמה הבאה, קיימות ארבע סדרות חישוב שונות עבור המחרוזת $w = 11001$.

דוגמה 3.1



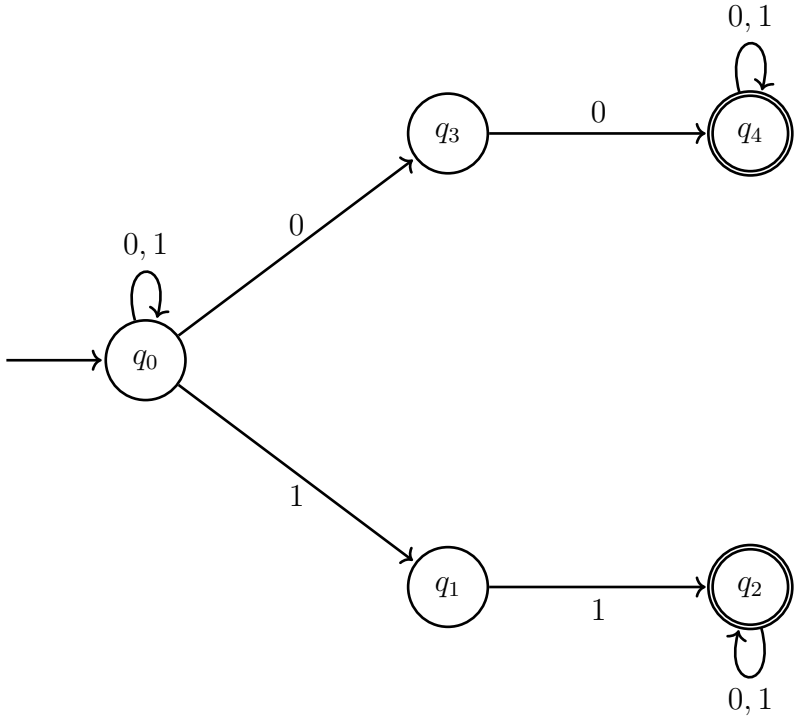
$$
\begin{array}{lllllllllll}
q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 \\
q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_3 & \xrightarrow{0} & q_4 & \xrightarrow{1} & q_4 \\
q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{1} & q_1 \\
q_0 & \xrightarrow{1} & q_1 & \xrightarrow{1} & q_2 & \xrightarrow{0} & q_2 & \xrightarrow{0} & q_2 & \xrightarrow{1} & q_2
\end{array}
$$

הגדרה 3.2 קבלה ע"י אוטומט לא-דטרמיניסטי סופי

אומרים כי מילה w מתקבלת על ידי אוטומט לא-דטרמיניסטי סופי N אם לפחות אחת מסדרות החישוב של w מסתיימת במצב קבלה.

דוגמה 3.2

נתון האטומט סופי לא-דטרמיניסטי N הבא:



א) רשמו את האוטומט בצורה פורמלית במונחי החמשת מרכיבים. ניתן להגדיר את הפונקצית המעברים כטבלת מעברים.

ב) הוכיחו כי המילה $w = 11001$ מתקבלת ע"י N.

פתרון:

א) $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$ כאשר:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$.
- $\Sigma = \{0, 1\}$.
- הפונקצית המעברים היא כמתוארת בטבלת המעברים הבאה:

Δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

- המצב ההתחלתי הוא q_0.
- המצבים המקבלים: $F = \{q_2, q_4\}$.

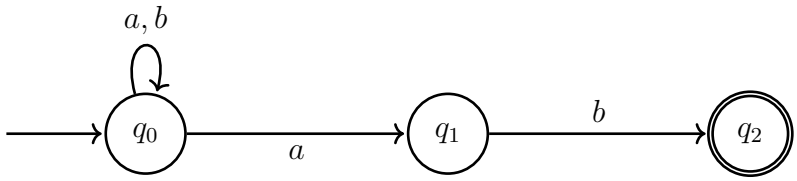
ב) קיים מסלול חישוב שמסתיים במצב קבלה:

$$q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{1} q_0 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{0} q_4 \xrightarrow{1} q_4 \in F$$

לכן המילה מתקבלת.

דוגמה 3.3

נתון האוטומט סופי לא דטרמיניסטי הבא:



רשמו את הפונקצית המעברים במונחי נוסחאות.

פתרון:

$$\Delta(q_0,a)=\{q_0,q_1\}\ ,\qquad \Delta(q_1,a)=\varnothing\ ,\qquad \Delta(q_2,a)=\varnothing\ .$$
$$\Delta(q_0,b)=\{q_0\}\ ,\qquad \Delta(q_1,b)=\{q_2\}\ ,\qquad \Delta(q_2,b)=\varnothing\ .$$

הגדרה 3.3 פונקציית המעבר המורחבת של אוטומט לא-דטרמיניסטי Δ^*

הפונקצית המעבר המוחרבת של אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי תסומן

$$\Delta^* : Q \times \Sigma^* \to P(Q)$$

ותוגדר באופן הבא.

א) $\Delta^*(q,\varepsilon)=\{q\}$.

ב) לכל $\sigma \in \Sigma$:

$$\Delta^*(q,\sigma)=\Delta(q,\sigma)\ .$$

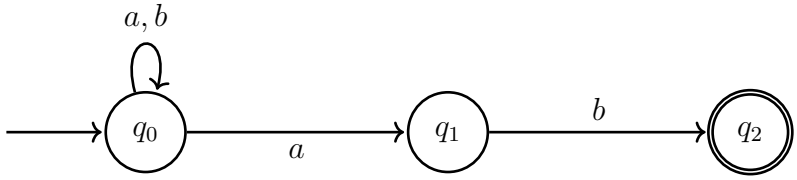
ג) לכל $w \in \Sigma^*$ ולכל $\sigma \in \Sigma$:

$$\Delta^*(q,w\sigma)=\Delta(\Delta^*(q,w)\ ,\ \sigma)\ .$$

זוהי <u>הגדרה רקורסיבית!</u>

דוגמה 3.4

נתון האוטומט סופי לא דטרמיניסטי הבא:



א) מצאו את $\Delta^*(q_0,aba)$.

ב) מצאו את $\Delta^*(q_1,ba)$.

פתרון:

א)

$$\Delta^*(q_0,a)=\{q_0,q_1\}\ ,$$

$$\Delta^*(q_0,ab)=\Delta(\Delta^*(q_0,a),b)\ =\ \Delta(\{q_0,q_1\},b)\ =\ \Delta(q_0,b)\cup\Delta(q_1,b)\ =\ \{q_0\}\cup\varnothing=\{q_0\}\ ,$$

$$\Delta^*(q_0,aba)=\Delta(\Delta^*(q_0,ab),a)\ =\ \Delta(\{q_0\},a)\ =\ \{q_0,q_1\}\ .$$

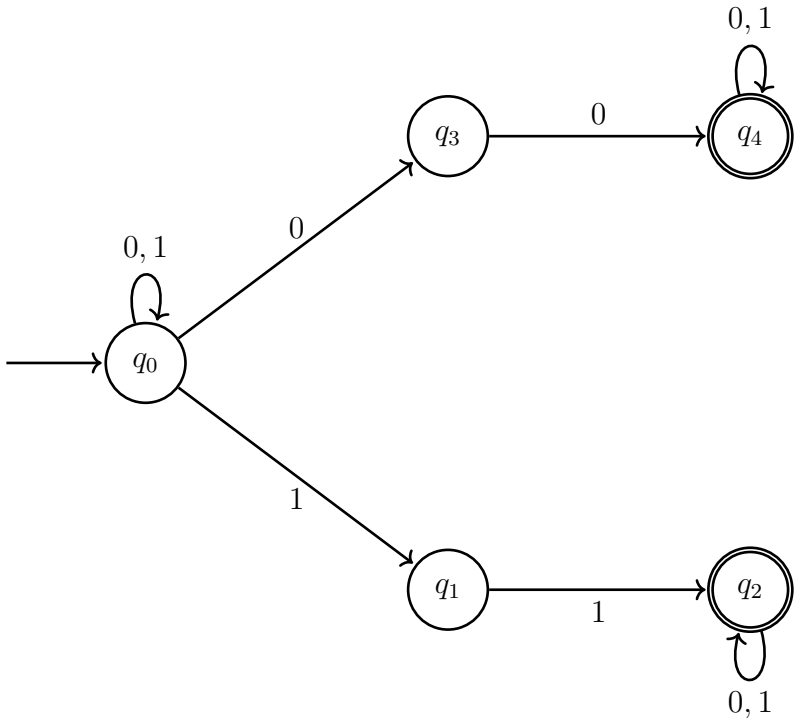
ב)

$$\Delta^*(q_1,b)=\{q_2\}\ ,$$

$$\Delta^*(q_1,ba)=\Delta(\Delta^*(q_1,b),a)\ =\ \Delta(\{q_2\},a)\ =\ \varnothing\ .$$

דוגמה 3.5

נתון האוטומט סופי לא-דטרמיניסטי הבא:



חשבו את $\Delta^*(q_0,11001)$.

פתרון:

$$\Delta^*(q_0,1) = \{q_0,q_1\} \ ,$$

$$\Delta^*(q_0,11) = \Delta(\Delta^*(q_0,1),1) = \Delta(\{q_0,q_1\},1) = \Delta(q_0,1)\cup\Delta(q_1,1) = \{q_0,q_1\}\cup\{q_2\} = \{q_0,q_1,q_2\} \ ,$$

$$\begin{aligned}\Delta^*(q_0,110) &= \Delta(\Delta^*(q_0,11),0) = \Delta(\{q_0,q_1,q_2\},0) = \Delta(q_0,0)\cup\Delta(q_1,0)\cup\Delta(q_2,0)\\ &= \{q_0,q_3\}\cup\varnothing\cup\{q_2\} = \{q_0,q_2,q_3\} \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^*(q_0,1100) &= \Delta(\Delta^*(q_0,110),0) = \Delta(\{q_0,q_2,q_3\},0) = \Delta(q_0,0)\cup\Delta(q_2,0)\cup\Delta(q_3,0)\\ &= \{q_0,q_3\}\cup\{q_2\}\cup\{q_4\} = \{q_0,q_2,q_3,q_4\} \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^*(q_0,11001) &= \Delta(\Delta^*(q_0,1100),1) = \Delta(\{q_0,q_2,q_3,q_4\},1) = \Delta(q_0,1)\cup\Delta(q_2,1)\cup\Delta(q_3,1)\cup\Delta(q_4,1)\\ &= \{q_0,q_1\}\cup\{q_2\}\cup\varnothing\cup\{q_4\} = \{q_0,q_1,q_2,q_4\} \ .\end{aligned}$$

הגדרה 3.4 השפה של אוטומט סופי לא דטרמיניסטי

השפה של N הינה הקבוצה:

$$L(N) = \left\{w\in\Sigma^* \;\middle|\; \Delta^*(q_0,w)\cap F\neq\varnothing\right\} \ .$$

כלומר: מילה w מתקבלת ע"י אוטומט סופי לא-דטרמיניסטי N אם ורק אם הקבוצה $\Delta^*(q_0,w)$ כוללת בתוכה לפחות מצב קבלה אחד.

משפט 3.1

לכל שתי מילים $u,w\in\Sigma^*$:

$$\Delta^*(q,uw) = \Delta^*(\Delta^*(q,u),w) \ .$$

הוכחה:
ניתן להוכיח טענה זו באמצעות אינדוקציה על אורך המילה w.

<u>שלב הבסיס: $|w|=1$</u>

אם $|w|=1$ אז w היא מילה עם אות אחת: $w=\sigma$. אז הטענה היא

$$\Delta^*(q,u\sigma) = \Delta^*(\Delta^*(q,u),\sigma) \ ,$$

שהיא פשוט ההגדרה הרקורסיבית של הפונקצית המעבר המורחבת, Δ^*, ולכן הטענה מתקיימת על פי ההגדרה.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח כי הטענה מתקיימת לכל מילה w באורך k, כלומר לכל מילה כך ש: $|w|=k$ מתקיים

$$\Delta^*(q,uw) = \Delta^*(\Delta^*(q,u),w) \ .$$

זאת היא ההנחת האינדוקיצה שלנו. נוכיח כי הטענה מתקיימת גם עבור כל מילה w' של אורך $k+1$.

אפשר לרשום w' בצורה

$$w' = w\sigma$$

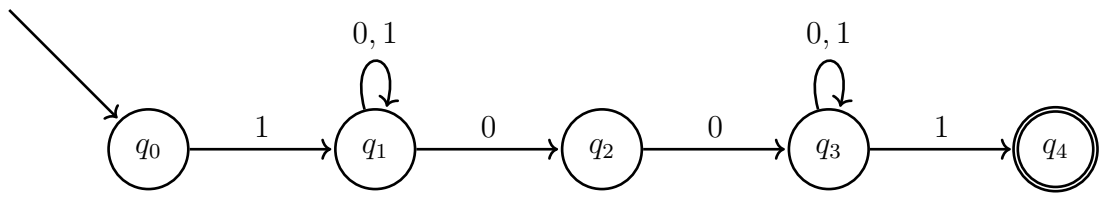
כאשר σ אות בודדת ו- w מילה באורך k. אז:

$$\begin{aligned}
\Delta^*(q, uw') &= \Delta^*(q, uw\sigma) && (w' = w\sigma \text{ הגדרה של})\\
&= \Delta(\Delta^*(q, uw), \sigma) && (\Delta^* \text{ הגדרה רקורסיבית של})\\
&= \Delta(\Delta^*(\Delta^*(q, u), w), \sigma) && (\text{ההנחת האינדוקציה})\\
&= \Delta^*(\Delta^*(q, u), w\sigma) && (\Delta^* \text{ הגדרה רקורסיבית של})\\
&= \Delta^*(\Delta^*(q, u), w') && (w' \text{ הגדרה של}) .
\end{aligned}$$

■

דוגמה 3.6

נתון האוטומט הבא:



מהי השפה שלו?

פתרון:
שפתהמילים מעל $\{0,1\}$ הפותחות ומסתיימות ב- 1 ומכילות את הביטוי 00.

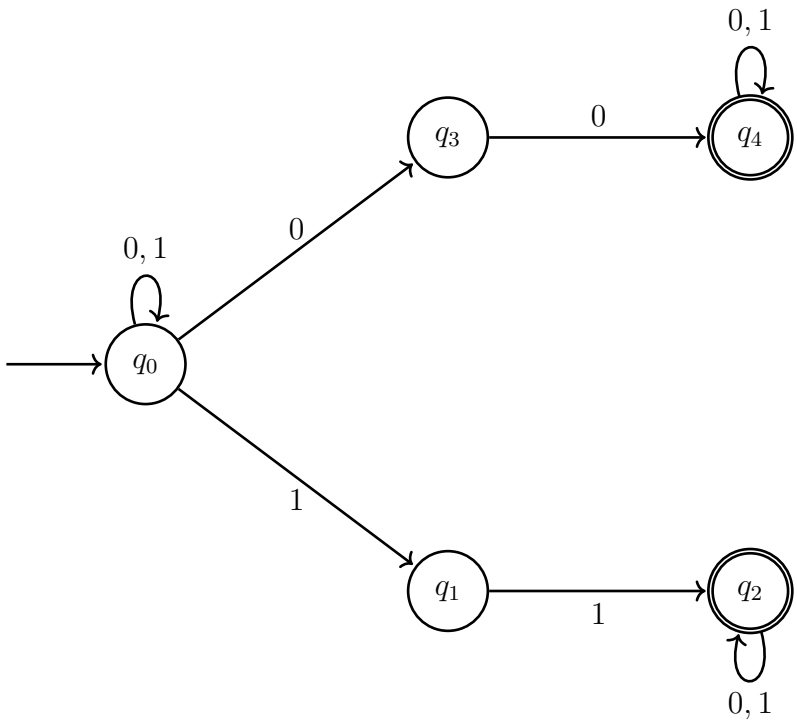
$$L(N) = \left\{ w = 1x00y1 \;\middle|\; x, y \in \{0,1\}^* \right\} .$$

הגדרה 3.5 גרירה

נרשום $q \xrightarrow{w} q'$ אם קיימת סדרת חישוב של המילה w שמתחילה במצב q ומסתיימת במצב q'.

דוגמה 3.7

נתון האוטומט N הבא:



הויכחו:

$$L(N) = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; 00 \in w \quad \vee \quad 11 \in w \right\} \ .$$

פתרון:

<u>כיוון ראשון:</u>

תהי $w \in \{0,1\}^*$ מילה המכילה המחרוזת 00 או 11.

$\Leftarrow$ $\exists$ מילים $x, y \in \{0,1\}^*$: $w = x00y$ או $w = x11y$.

$\Leftarrow$ מכיוון שלכל מחרוזות x, y: $q_0 \xrightarrow{x} q_0$ וגם $q_0 \xrightarrow{00} q_4$ וגם $q_4 \xrightarrow{y} q_4$ אזי $q_0 \xrightarrow{x00y} q_4$

$\Leftarrow$ כנ"ל לגבי $w = x11y$.

$\Leftarrow$ $q_0 \xrightarrow{w} q_2 \in F$ או $q_0 \xrightarrow{w} q_4 \in F$

<u>כיוון שני:</u>

תהי $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $q_2 \in \Delta^*(q_0, w)$ או $q_4 \in \Delta^*(q_0, w)$.

$\Leftarrow$ $\exists$ לפחות סדרת חישוב אחת של w המתחילה ב- q_0 ומסתיימת במצב q_2 או q_4.

$\Leftarrow$ סדרת זו חייבת להכיל המסלול $q_0 \xrightarrow{0} q_3 \xrightarrow{0} q_4$ או $q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_2$.

$\Leftarrow$

$$\exists x, y \in \{0,1\}^* : \qquad w = x00y \quad \vee \quad w = x11y \ .$$

3.2 בניית אוטומט לא דטרמיניסטי

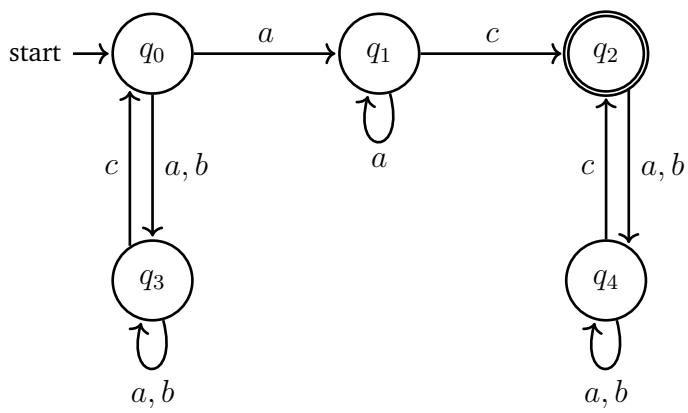
דוגמה 3.8

בנו אוטומט לא דטרמיניסטי לשפה הבאה:

$$L = \left\{ w_1 c w_2 c \ldots w_k c \;\middle|\; k \geqslant 1 \ , \ \forall 1 \leqslant i \leqslant k : \ w_i \in \{a,b\}^+ \ , \exists 1 \leqslant i \leqslant k : \ w_i \in \{a\}^+ \right\} \ .$$

- השפה מורכבת מרצפים: תת מילה ואחריה האות c.
- מספר הרצפים k הוא לפחות אחד.
- כל רצף הוא רצף לא ריק של האותיות a, b.
- קיים לפחות רצף אחד לא ריק שמורכב רק מהאות a.

פתרון:



3.3 שקילות בין אוטומט דטרמיניסטי ולא-דטרמיניסטי

משפט 3.2 שקילות בין DFA ו- NFA

אם N אוטומט לא-דטרמיניסטי ואם השפה שלו היא $L(N)$ אז קיים אוטומט דטרמיניסטי D כך ש:

$$L(D) = L(N) \ .$$

במילים אחרות: לכל אוטומט לא-דטרמיניסטי N קיים אוטומט דטרמיניסטי D השקול אליו.

הוכחה: יהי

$$N = (Q_N, \Sigma_N, \Delta_N, q_{0N}, F_N)$$

אוטומט לא-דטרמיניסטי המקבל את השפה L. נבנה אוטומט דטרמיניסטי

$$D = (Q_D, \Sigma_D, \delta_D, q_{0D}, F_D)$$

המקבל את L באופן הבא.

1)

$$Q_D = P(Q_N) \ .$$

פירוש הדבר הוא שאם באוטומט N יש n מצבים, אז באוטומט D יהיו 2^n מצבים. כל מצב של Q_D יסומן על ידי $[q_1, q_2, \ldots, q_i]$ (תת-קבוצה של Q_N). נדגיש ש- $[q_1, q_2, \ldots, q_i]$ זה מצב **יחיד** של Q_D. הרעיון מאחורי בחירה זו הוא שעל האוטומט D לזכור, במצב יחיד, את כל המצבים האפשריים בהם יכול להיות N בכל רגע נתון.

2) האלפביתים זהים עבור שני האוטומטים:

$$\Sigma_D = \Sigma_N$$

3) המצב התחלתי של D הוא $q_{0D} = [q_{0N}]$. מכיוון שהם זהים אז מכאן ואילך נסמן המצבים ההתחלתיים של D ושל N ע"י:

$$q_0 = q_{0D} = q_{0N} \ .$$

4) קבוצת מצבי הקבלה F_D של D תהיה מורכבת מכל תתי הקבוצות של Q_N המכילים לפחות מצב קבלה אחד של N:

$$F_D = \left\{ P \subseteq Q_N \;\middle|\; P \cap F_N \neq \varnothing \right\} \ .$$

5) פונקציית המעבר δ' של D תוגדר כך:

$$\delta_D\left([q_1, q_2, \ldots, q_i], \sigma\right) = [p_1, p_2, \ldots, p_j]$$

אם ורק אם

$$\Delta_N\left(\{q_1, q_2, \ldots, q_i\}, \sigma\right) = \{p_1, p_2, \ldots, p_j\}$$

ביותר פירוט

$$\delta_D\left([q_1, q_2, \ldots, q_i], \sigma\right) = \Delta_N\left(q_1, \sigma\right) \cup \Delta_N\left(q_2, \sigma\right) \cup \ldots \cup \Delta_N\left(q_i, \sigma\right) \ .$$

הנוסחה האחרונה תהיה חשובה לנו עבור דוגמאות מעשיות.

נעבור עכשיו לגוף ההוכחה.

<u>טענה עזר</u>

לכל מילה w:

$$\delta_D{}^*\left(q_0, w\right) = [q_1, q_2, \ldots, q_i] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta_N^*\left(q_0, w\right) = \{q_1, q_2, \ldots, q_i\} \ . \qquad (*)$$

<u>הוכחה</u>

נוכיח את הטענה הזו ע"י אינדוקציה של אורך המילה.

<u>שלב הבסיס:</u>

הטענה ברורה אם $|w| = 0$ כי אז $w = \varepsilon$ ועל פי ההגדרה של הרחבת Δ_N:

$$\Delta_N^*\left(q_0, \varepsilon\right) = \Delta_N\left(q_0, \varepsilon\right) = \{q_0\} \ .$$

מצד שני על פי ההגדרה של δ_D:

$$\delta_D{}^*\left(q_0, \varepsilon\right) = \delta_D\left(q_0, \varepsilon\right) = \{\Delta_N\left(q_0, \varepsilon\right)\} = \{q_0\} \ .$$

<u>שלב המעבר:</u>

ההנחת האינדוקציה: נניח שהטענה (*) מתקיימת לכל מילה w באורך n ומטה. נוכיח שהיא מתקיימת עבור כל מילה באורך $n+1$ באופן הבא.

תהי $u \in \Sigma^*$ מילה באורך $n+1$. אזי קיימת אות $\sigma \in \Sigma$ ומילה $w \in \Sigma^*$ עבורה $|w| = n$ כך ש- $u = w\sigma$.

על פי ההגדרה של הפונקצית המעבר המורחבת:

$$\delta_D{}^*\left(q_0, w\sigma\right) = \delta_D\left(\delta_D{}^*\left(q_0, w\right), \sigma\right) \ .$$

על פי ההנחת האינדוקציה:

$$\delta_D{}^*\left(\left[q_1, q_2, \ldots, q_i\right], w\right) = \left[p_1, p_2, \ldots, p_j\right]$$

אם ורק אם

$$\Delta_N^*\left(\left\{q_1, q_2, \ldots, q_i\right\}, w\right) = \left\{p_1, p_2, \ldots, p_j\right\} \ .$$

אבל על פי ההגדרה של δ_D:

$$\delta_D{}^*\left(\left[p_1, p_2, \ldots, p_j\right], \sigma\right) = \left[r_1, r_2, \ldots, r_k\right] \ .$$

אם ורק אם

$$\Delta_N{}^*\left(\left\{p_1, p_2, \ldots, p_j\right\}, \sigma\right) = \left\{r_1, r_2, \ldots, r_k\right\} \ ,$$

ומכאן ש-

$$\delta_D{}^*\left(q_0, w\sigma\right) = \left[r_1, r_2, \ldots, r_k\right] \ .$$

אם ורק אם

$$\Delta_N{}^*\left(q_0, w\sigma\right) = \left\{r_1, r_2, \ldots, r_k\right\} \ ,$$

ובכך הושלמה הוכחת הטענה.

כנדרש.

■

תהי $L(D)$ הפשה של D. כדי להשלים את הוכחת המשפט, עלינו להוכיח כי $L(D) = L(N)$.

לכל מילה $w \in \Sigma^*$:

$$w \in L(D) \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_D{}^*\left(q_0, w\right) \in F_D \ .$$

נניח כי

$$\delta_D{}^*\left(q_0, w\right) = \left[q_1, q_2, \ldots, q_i\right] \ . \qquad (**)$$

מהגדרת F_D נובע כי

$$\left\{q_1, q_2, \ldots, q_i\right\} \cap F_N \neq \varnothing \ .$$

ועל פי הטענת עזר לעיל, השוויון (**) שקול לטענה

$$\Delta_N^*\left(q_0, w\right) = \left\{q_1, q_2, \ldots, q_i\right\} \ .$$

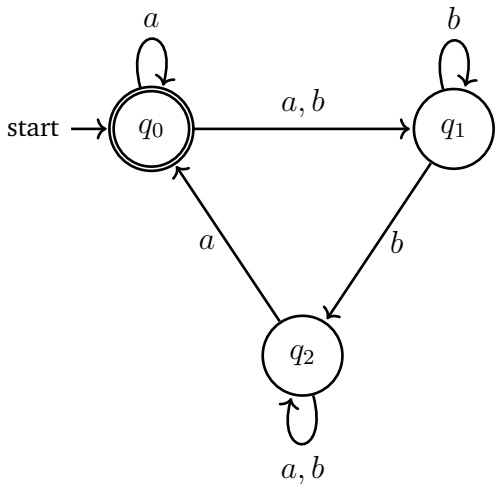
קיבלנו כי $w \in L(D)$ אם ורק אם קבוצת המצבים $\Delta_N^*\left(q_0, w\right)$ מכילה מצב קבלה של N.

כלומר: $w \in L(D)$ אם ורק אם $w \in L(N)$.

לכן: $L(D) = L(N)$. ■

דוגמה 3.9 מעבר מאוטומט לא-דטרמיניסטי לאוטומט דטרמיניסטי

נתון אוטומט לא דטרמיניסטי הבא:



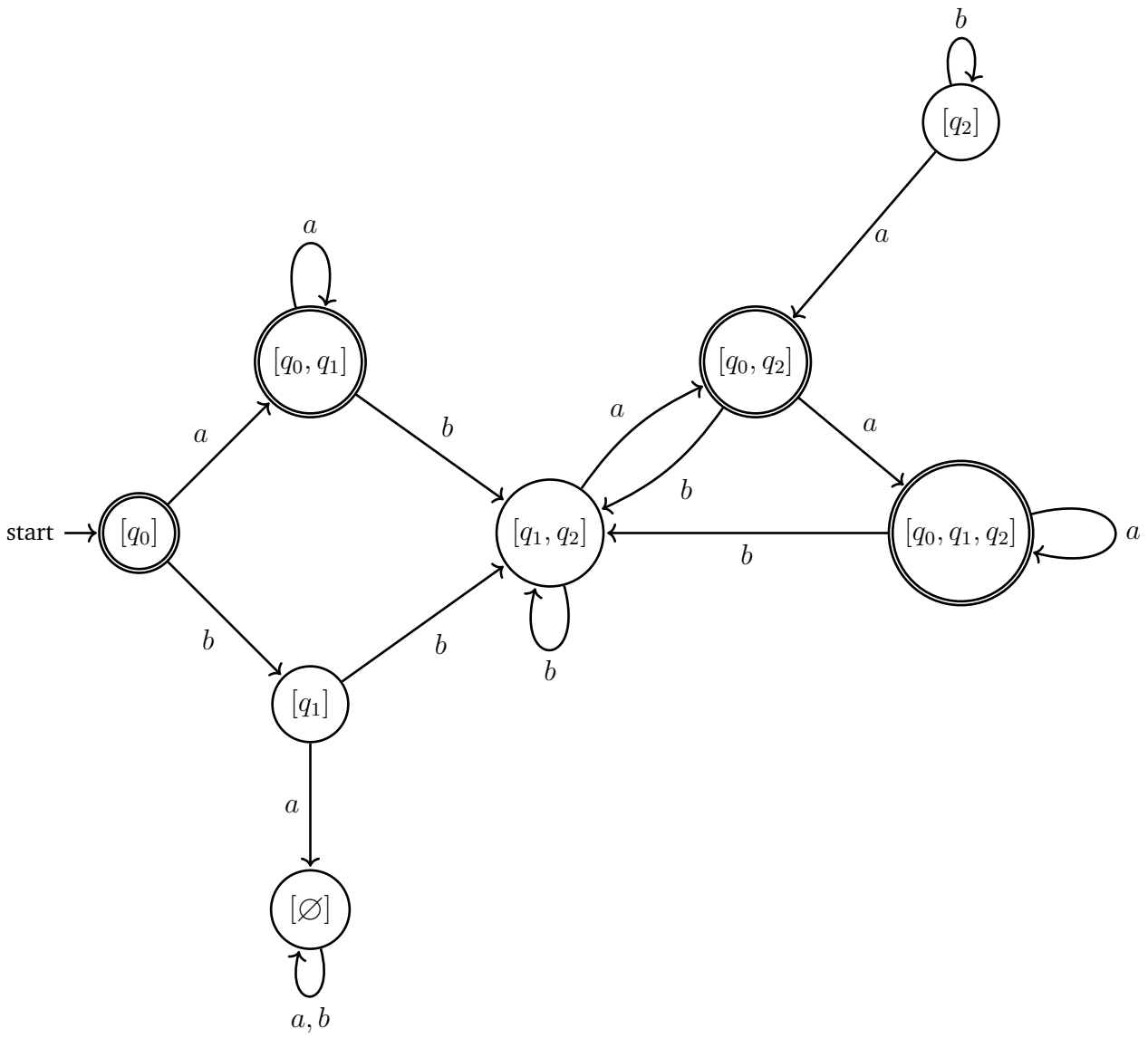
בנו את האוטומט הדטרמיניסטי השקול אליו.

פתרון:

Δ_N	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_0, q_2\}$	$\{q_2\}$

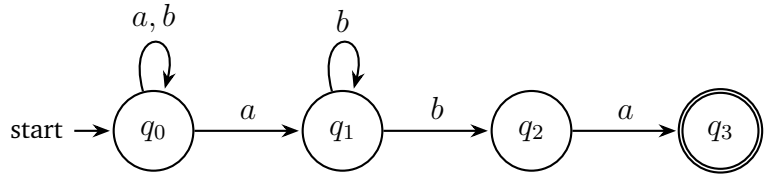
כעת נבנה את הטבלת המעברים של האוטומט הדטרמיניסטי השקול.

δ_D	a	b
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1]$
$[q_1]$	$[\varnothing]$	$[q_1, q_2]$
$[q_2]$	$[q_0, q_2]$	$[q_2]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_1, q_2]$
$[q_1, q_2]$	$[q_0, q_2]$	$[q_1, q_2]$
$[q_0, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_1, q_2]$
$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_1, q_2]$
$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$



דוגמה 3.10 מעבר מאוטומט לא-דטרמיניסטי לאוטומט דטרמיניסטי

נתון אוטומט לא דטרמיניסטי הבא:



א) מהי השפה של האוטומט.

ב) בנו את האוטומט הדטרמיניסטי השקול אליו.

פתרון:

א)

$$L = \left\{ xayba \;\middle|\; x \in \{a,b\}^* \ , \ y = b^* \right\} \ .$$

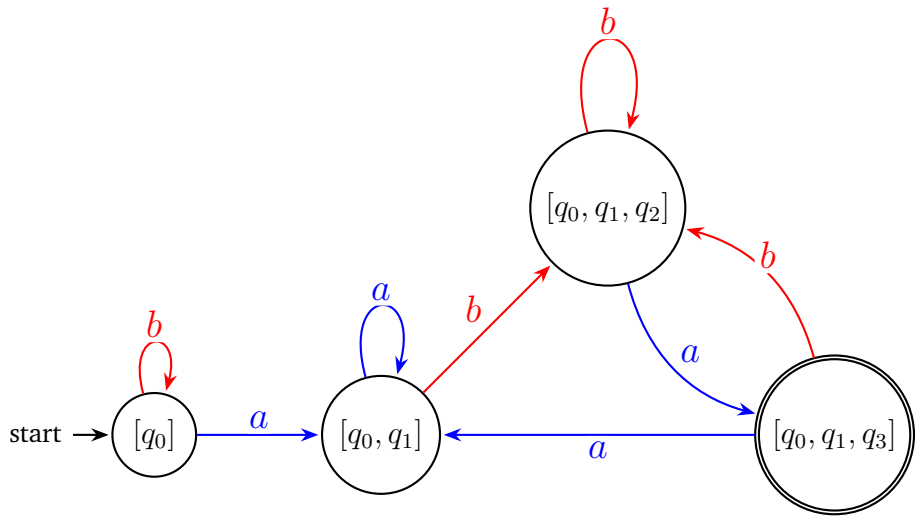
ב)

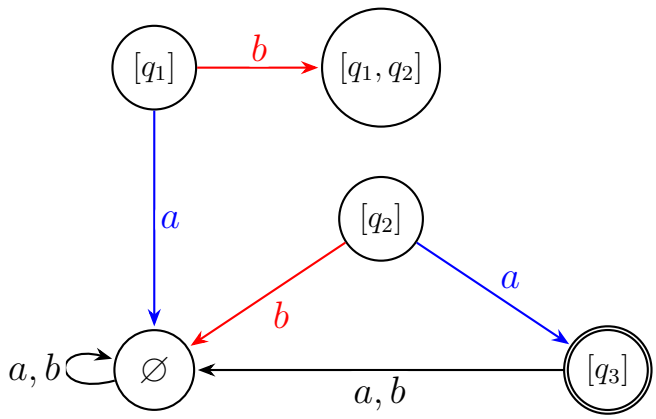
Δ_N	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_3	$\varnothing$	$\varnothing$

כעת נבנה את הטבלת המעברים של האוטומט הדטרמיניסטי השקול.

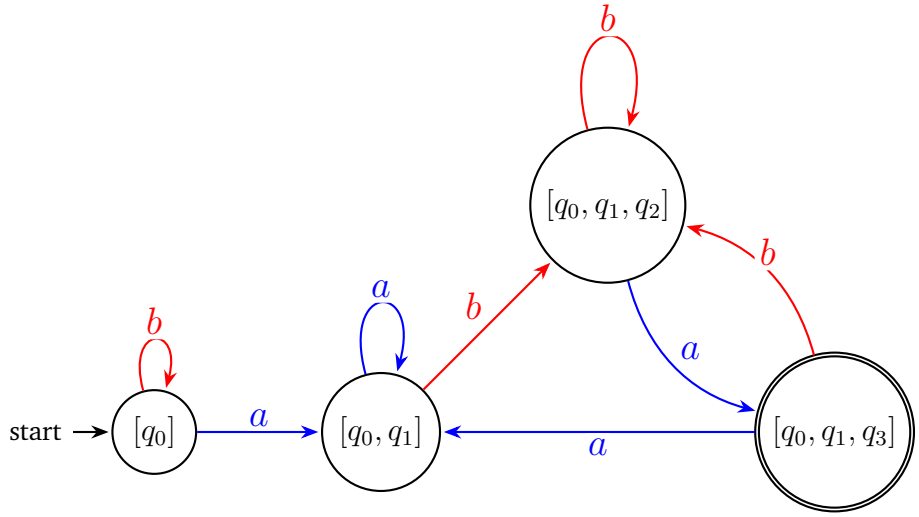
δ_D	a	b
$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$
$[q_0]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0]$
$[q_1]$	$[\varnothing]$	$[q_1, q_2]$
$[q_2]$	$[q_3]$	$[\varnothing]$
$[q_3]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1, q_2]$
$[q_0, q_1, q_2]$	$[q_0, q_1, q_3]$	$[q_0, q_1, q_2]$
$[q_0, q_1, q_3]$	$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_1, q_2]$

התרשים מצבים של האוטומט הדטרמיניסטי השקול



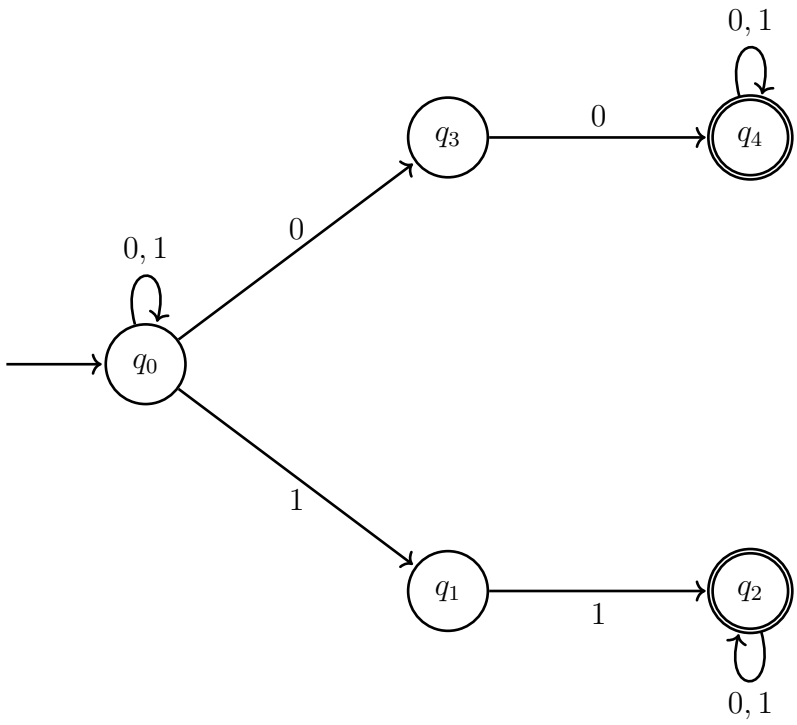


התרשים מצבים של האוטומט הדטרמיניסטי עם רק המצבים הנגישים בלבד



דוגמה 3.11 מעבר מאוטומט לא-דטרמיניסטי לאוטומט דטרמיניסטי

נתון אוטומט לא דטרמיניסטי הבא:



א) מהי השפה של האוטומט.

ב) בנו את האוטומט הדטרמיניסטי השקול אליו.

פתרון:

א)

$$L = \left\{ w = x00y \vee w = x11y \;\middle|\; x \in \{0,1\}^* \ , \ x \in \{0,1\}^* \right\} \ .$$

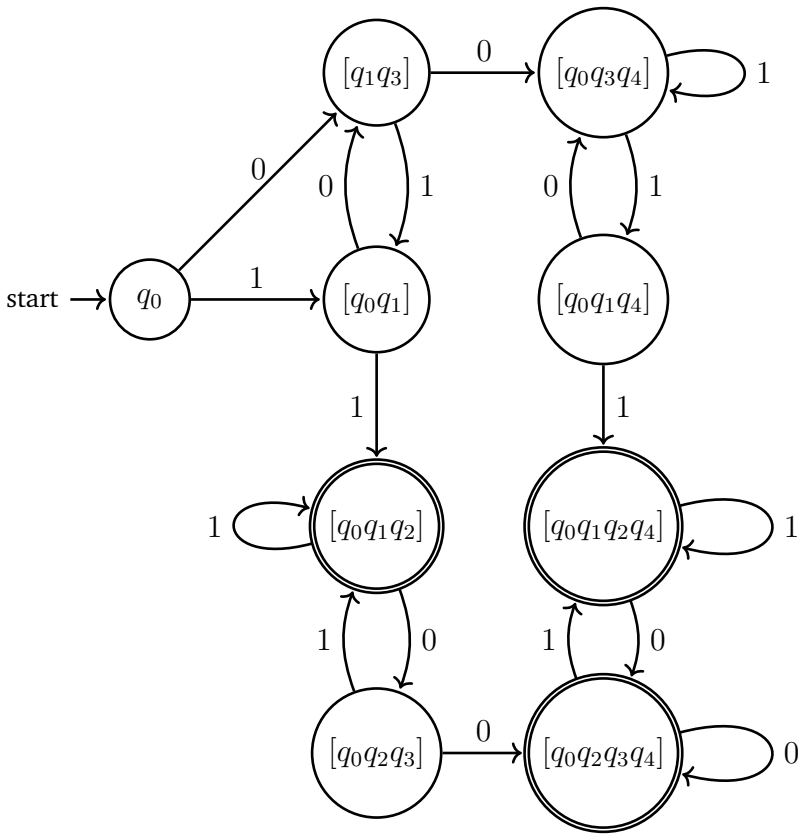
ב)

Δ	0	1
q_0	$\{q_0, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$

כעת נבנה את הטבלת המעברים של האוטומט הדטרמיניסטי השקול.

δ	0	1
$[q_0]$	$[q_0, q_3]$	$[q_0, q_1]$
$[q_0, q_1]$	$[q_0, q_3]$	$[q_0, q_1, q_2]$
$[q_0, q_3]$	$[q_0, q_3, q_4]$	$[\varnothing]$
$[q_0, q_1, q_2]$	$[\varnothing]$	$[q_0, q_1, q_2]$
$[q_0, q_2, q_3]$	$[q_0, q_2, q_3, q_4]$	$[q_0, q_1, q_2]$
$[q_0, q_1, q_4]$	$[q_0, q_3, q_4]$	$[q_0, q_1, q_2, q_4]$
$[q_0, q_3, q_4]$	$[q_0, q_3, q_4]$	$[q_0, q_1, q_4]$
$[q_0, q_1, q_2, q_4]$	$[q_0, q_2, q_3, q_4]$	$[q_0, q_1, q_2, q_4]$
$[q_0, q_2, q_3, q_4]$	$[q_0, q_2, q_3, q_4]$	$[q_0, q_1, q_2, q_4]$

מצבים נגישים בלבד (9 מצבים)



3.4 אוטומטים עם מעברי ε

כל היצמדות למודל יחיד של חישוביות מתבררת מהר כטעות חמורה. ריבוי מודלים תאורטיים של חישוביות בדרך כלל מועיל לשם הבנת טבעו המורכב של מושג החישוביות ומספק לנו אלטרנטיבות רבות להתמודד עם בעיות שונות. מודל מסוים של חישוביות עשוי להתאים בצורה טבעית לסוג מסוים של בעיות, אך לא להתאים לסוג אחר של בעיות.

בפרק זה נציג מודל מורחב של אוטומט לא-דטרמיניסטי שמתאים במיוחד לטיפול בביטויים רגולריים השכיחים מאוד בשפות מעטפת או שפות סקריפט כגון: perl, grep, awk, csh, python.

באוטומט עם מעברי ε, הרעיון הוא לאפשר מעבר גם בלי לקרוא שום אות בקלט. באוטומט כזה חלק מהקשתות מסומנות "באפסילון", ε. על קשתות המסומנות ε, ניתן לעבור גם בלי לקרוא אות מהקלט. כלומר ,לבצע מעבר ספונטני /עצמוני. לא חייבים לעבור על מעברי ה- ε. זאת אפשרות לא דטרמיניסטית.

הגדרה 3.6 אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי ε

אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי ε מתאפיין ע"י חמשת המרכיבים של אוטומט לא-דטרמיניסטי של ההגדרה 3.1:

$$M = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, F)$$

עם הבדל קטן (אך משמעותי) בפונקציית המעבר:

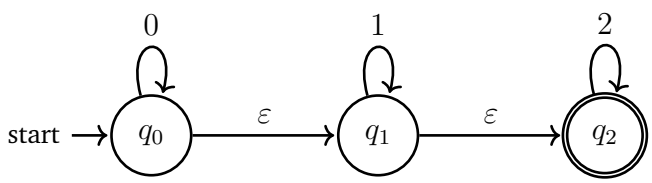
$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to P(Q) \ ,$$

לרשימת התווים Σ נוספת המילה הריקה ε.

פירוש הדבר הוא שניתן במצבים מסוימים לעבור ממצב אחד למצב שני ללא קליטת תו. מעבר כזה נקרא **מעבר-** ε . מבחינה גרפית, הדבר מתבטא בכך שמותר לנו לסמן צלעות בדיאגרמת המעבר על ידי המילה הריקה ε. המעבר בין שני המצבים בצלע כזו יעשה ללאקריאת תו.

דוגמה 3.12

אוטומט לא דטרמיניסטי עם מעברי ε.



אוטומט זה כולל שני מעברי ε, ולא קשה לראות כי הוא מגדיר את שפת כל המילים באלפבית $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ המורכבות מסדרת אפסים שלאחריה באה סדרת 1־ים ולבסוף סדרת 2 ־ים (כל אחת מהסדרות הללו עשויה להיות ריקה!). האוטומט יקבל מילים כגון 000112, 0022, ε, 2222, וכו'.
כמו קודם, יתברר לנו כי אוטומטים עם מעברי - ε אינם מסוגלים להגדיר שפות חדשות שלא יכולנו להגדיר באמצעות אוטומט דטרמיניסטי רגיל או אוטומט לא-דטרמיניסטי, אך אוטומט לא-דטרמיניסטי רגיל ללא מעברי- ε המגדיר את אותה השפה עשוי להיות מורכב הרבה יותר!
להלן מספר דוגמאות של סדרות חישוב:

$$\begin{array}{lllllllllll}
q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{0} & q_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_1 & \xrightarrow{1} & q_1 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_2 \\
q_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_1 & \xrightarrow{1} & q_1 & \xrightarrow{1} & q_1 & \xrightarrow{1} & q_1 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_2 \\
q_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_1 & \xrightarrow{\varepsilon} & q_2 \ . & & & & & &
\end{array}$$

כל הסדרות מסתיימות במצב קבלה q_2. הסדרה הראשונה מוכיחה כי M מקבל את המילה 001, הסדרה השניה את 111, והאחרונה את ε.
להלן הגדרה פורמלית מלאה של M:

- קבוצת המצבים:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \ .$$

- האלפבית:

$$\Sigma = \{0, 1, 2\} \ .$$

- המצב ההתחלתי הוא:

$$q_0 \ .$$

- המצבים המקבלים:

$$F = \{q_2\} \ .$$

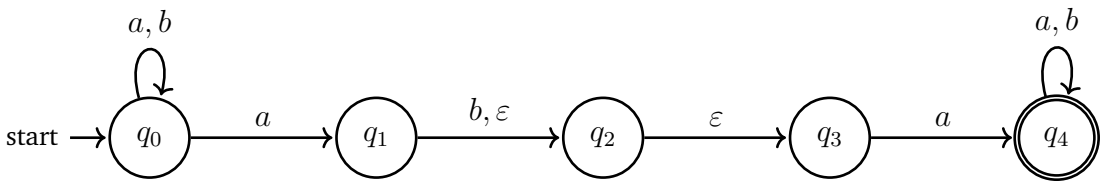
- הפונקצית המעבר מתוארת בטבלה להלן:

Δ	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

יש לשים לב לכך שבטבלת המעבר נוספה עמודה חדשה עבור ε.

דוגמה 3.13

נתון האוטומט הבא:



1) רשמו את האוטומט בצורה פורמלית.

2) הוכיחו כי השפה של האוטומט היא $L = \{w = xabay \ \vee \ w = xaay \ | x, y \in \{a,b\}^* \}$.

פתרון:

1) נסמן את האוטומט ב- M:

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

כאשר:

- קבוצת המצבים:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} \ .$$

- האלפבית:

$$\Sigma = \{a, b\} \ .$$

- המצב ההתחלתי הוא:

$$q_0 \ .$$

- המצבים המקבלים:

$$F = \{q_4\} \ .$$

- הפונקצית המעבר מתוארת בטבלה להלן:

Δ	a	b	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\varnothing$
q_1	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\{q_4\}$	$\varnothing$

יש לשים לב לכך שבטבלת המעבר נוספה עמודה חדשה עבור ε.

2) נראה כי $L(M) = L$ כאשר

$$L = \{xabay \ \vee \ xaay | \ x, y \in \{a,b\}^*\} \ .$$

<u>כיוון ראשון</u>

תהי $w \in L$.

$\Leftarrow$

$$\exists \ x, y \in \{a,b\}^* : \quad w = xabay \ \vee \ w = xaay$$

$\Leftarrow$ $\exists$ הרצה של M על w כך ש:

$$q_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{\varepsilon} q_3 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{y} q_4 \in F \ .$$

או

$$q_0 \xrightarrow{x} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_2 \xrightarrow{\varepsilon} q_3 \xrightarrow{a} q_4 \xrightarrow{y} q_4 \in F \ .$$

כלומר אם $w = xabay$ אז $\Delta^*(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$, או אם $w = xaay$ אז $\Delta^*(q_0, w) \cap F \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$ $w \in L(M)$.

<u>כיוון שני</u>

תהי $w \in L(M)$.

$\Leftarrow$ $\exists$ הרצה של M על w שמסתיימת במצב q_4.

$\Leftarrow$ מכיוון שכל מסלול חישוב שמסתיים במצב q_4 עובר דרך המעבר $q_1 \to q_2 \to q_3 \to q_4$ אזי w מכילה את הרצף aba או הרצף aa

$\Leftarrow$

$$\exists \ x, y \in \{a,b\}^* : \quad w = xabay \ \vee \ w = xaay \ .$$

$\Leftarrow$ $w \in L$.

מטרתנו העקרית בפרק זה היא להוכיח כי כל אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε שקול לאוטומט לא-דטרמיניסטי רגיל. לשם כך נזדקק למושגים הבאים.

הגדרה 3.7 ε - סגור

לכל מצב q נסמן על ידי $C_\varepsilon(q)$ את קבוצת כל המצבים p כך שקיים מסלול מהמצב q למצב p אשר כל צלעותיו מסומנות ε.

$$C_\varepsilon(q) \triangleq \left\{ p \in Q \ \middle| q \xrightarrow{\varepsilon} r_1 \xrightarrow{\varepsilon} \cdots \xrightarrow{\varepsilon} r_i \xrightarrow{\varepsilon} p \text{ קיים מסלול } \right\}$$

הקבוצה $C_\varepsilon(q)$ תמיד תכלול בתוכה את q.

דוגמה 3.14

לדוגמה, באוטומט בדוגמה 3.12 שלעיל:

$$\begin{aligned} C_\varepsilon(q_0) &= \{q_0, q_1, q_2\} \ , \\ C_\varepsilon(q_1) &= \{q_1, q_2\} \ , \\ C_\varepsilon(q_2) &= \{q_2\} \ . \end{aligned}$$

עכשיו נרחיב, בצורה טבעית לגמרי, את הגדרת האופרטור C_ε כך שיפעל לא רק על מצב בודד אלא גם על קבוצת מצבים $P \subseteq Q$:

הגדרה 3.8 ε - סגור

יהי $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε. אם $P\subseteq Q$ תת-קבוצה של מצבים אז

$$C_\varepsilon(P)=\bigcup_{q\in P}C_\varepsilon(q)\ .$$

הרחבת פונקציית המעבר δ לפונקציה δ^*

כפי שעשינו זאת עבור אוטומט רגיל ואוטומט לא-דטרמיניסטי, גם במקרה זה יש צורך להגדיר את ההרחבה δ^*. אלא שכאן מעברי ה- ε מוסיפים קושי מסוים, שבכדי להתגבר עליו היה עלינו ראשית כל להגדיר את האופרטור C_ε.

הגדרה 3.9 פונקצית המעבר המורחבת של אוטומט עם מעברי- ε

יהי $M=(Q,\Sigma,\Delta,q_0,F)$ אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε. ראשית לכל מצב $q\in Q$ נגדיר:

$$\Delta^*(q,\varepsilon)=C_\varepsilon(q)\ .$$

לכל מילה $w\in\Sigma^*$ נגדיר $\Delta^*(q,w)$ באמצעות האלגוריתם הבא.

על כל מילה $w=\sigma_1\cdots\sigma_k$ ומצב $q\in Q$ הפונקציה Δ^* תפעיל כך:

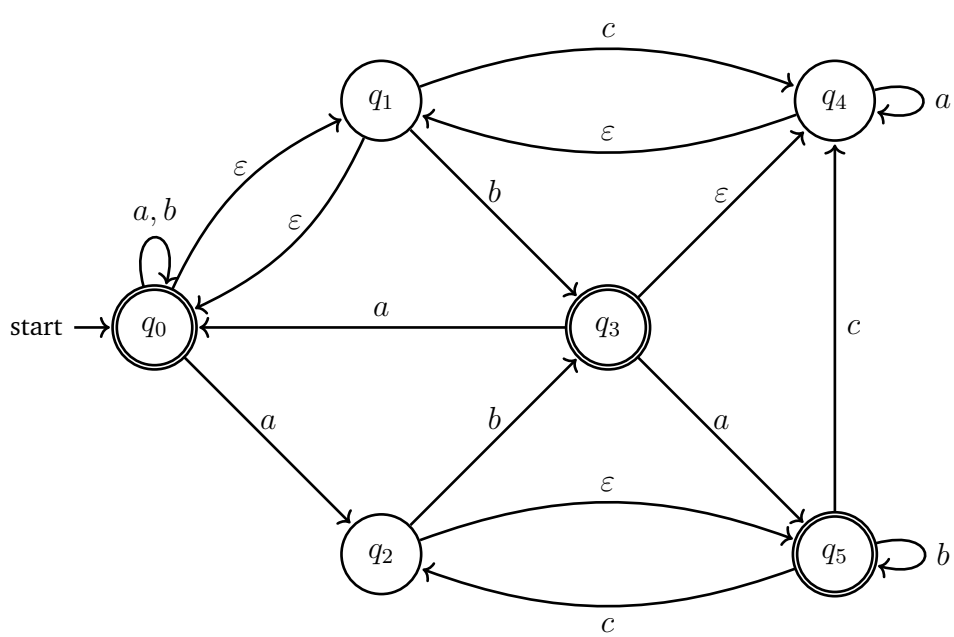
1) מחשבת $P=\Delta^*(q,\varepsilon)=C_\varepsilon(q)$.

2) לכל $1\leqslant i\leqslant k$:

- מחשבת $P\leftarrow\bigcup_{r\in P}\Delta(r,\sigma_i)$
- מחשבת $P\leftarrow\bigcup_{r\in P}C_\varepsilon(r)$

3) מחזירה P.

דוגמה 3.15



המילים aaa, acb, $babb$, מתקבלות על ידי האוטומט אז כפי שסדרות החישוב הבאות מוכיחות:

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_5 \xrightarrow{b} q_5 \xrightarrow{b} q_5$$
$$q_0 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{\varepsilon} q_5 \xrightarrow{c} q_2 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{\varepsilon} q_4 \xrightarrow{\varepsilon} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_0$$
$$q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_0 \xrightarrow{a} q_0$$

נחשב את הפונקצית המעבר המורחבת Δ^* של האוטומט הזה על המילה $w = ac$, כלומר נחשב $\Delta^*(q_0, ac)$:

$$\Delta^*(q_0, \varepsilon) = \{q_0, q_1\} \ ,$$

$$\begin{aligned} P &= \Delta(q_0, a) \cup \Delta(q_1, a) \\ &= \{q_0, q_2\} \cup \varnothing \\ &= \{q_0, q_2\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^*(q_0, a) &= C_\varepsilon(\{q_0, q_2\}) \\ &= C_\varepsilon(q_0) \cup C_\varepsilon(q_2) \\ &= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2, q_5\} \\ &= \{q_0, q_1, q_2, q_5\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \Delta(q_0, c) \cup \Delta(q_1, c) \cup \Delta(q_2, c) \cup \Delta(q_5, c) \\ &= \varnothing \cup \{q_4\} \cup \varnothing \cup \{q_2, q_4\} \\ &= \{q_2, q_4\} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^*(q_0, ac) &= C_\varepsilon(\{q_2, q_4\}) \\ &= C_\varepsilon(q_2) \cup C_\varepsilon(q_4) \\ &= \{q_2, q_5\} \cup \{q_4, q_1, q_0\} \\ &= \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_5\} \ . \end{aligned}$$

הגדרה 3.10 קבלה ע"י אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי ε

השפה $L(M)$ המתקבלת על ידי אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε היא

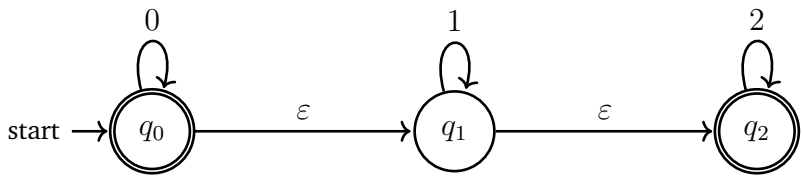
$$L(M) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \Delta^*(q_0, w) \text{ מכילה מצב של } F \right\} \ .$$

משפט 3.3
שקילות בין אוטומט אי-דטרמיניסטי עם מעברי- ε לבין אוטומט א"ד ללא מעברי ε

תהי L שפה. אם קיים אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε, A_ε המקבל את L אז קיים אוטומט לא-דטרמיניסטי ללא מעברי- ε, A_N המקבל את L.

דוגמה 3.16

נתון האוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε הבא:



המירו אותו לאוטומט לא-דטרמיניסטי ללא מעברי- ε.

פתרון:
הטבלת המעברים של Δ_ε:

Δ_ε	0	1	2	ε
q_0	$\{q_0\}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_1\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$	$\varnothing$

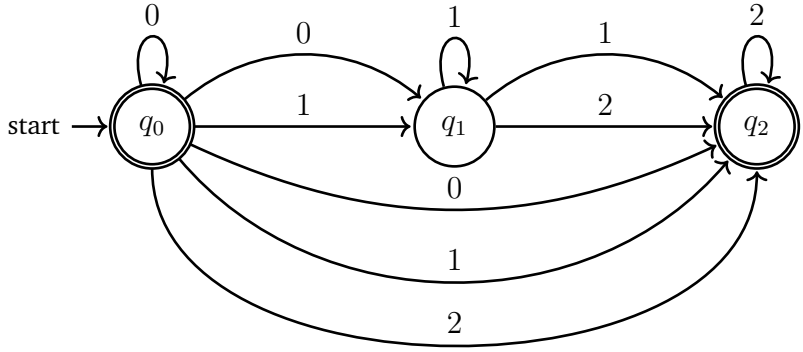
הטבלת המעברים של Δ_ε^*:

Δ_ε^*	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$

את טבלת המעבר של Δ_N נחשב על פי הנוסחה $\Delta_N(q,\sigma) = \Delta_\varepsilon^*(q,\sigma)$.

Δ_N	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\varnothing$	$\varnothing$	$\{q_2\}$

להלן התוצאה המתקבלת:



3.5 *הוכחת משפט שקילות בין NFA_ε לבין NFA

משפט 3.4
שקילות בין אוטומט אי-דטרמיניסטי עם מעברי- ε לבין אוטומט א"ד ללא מעברי ε

תהי L שפה. אם קיים אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε, A_ε המקבל את L אז קיים אוטומט לא-דטרמיניסטי ללא מעברי- ε, A_N המקבל את L.

הוכחה: יהי

$$A_\varepsilon = (Q, \Sigma, \Delta_\varepsilon, q_0, F_\varepsilon)$$

אוטומט לא-דטרמיניסטי עם מעברי- ε המקבל את השפה L. נבנה אוטומט לא-דטרמיניסטי חדש

$$A_N = (Q, \Sigma, \Delta_N, q_0, F_N)$$

ללא מעברי- ε אשר יקבל את אותה השפה L. האוטומט A_N יהיה זהה לאוטומט A_ε מלבד בפונקציה המעבר Δ_N ובקבוצת מצבי קבלה F_N.

- **הגדרת F_N:**

אם $C_\varepsilon(q_0)$ כוללת בתוכה מצב קבלה של F_ε אז נגדיר $F_N = F_\varepsilon \cup \{q_0\}$, אחרת, נגדיר $F_N = F_\varepsilon$. במילים אחרות:

$$F_N = \begin{cases} F_\varepsilon \cup \{q_0\} & : \quad C_\varepsilon(q_0) \cup F_\varepsilon \neq \varnothing \ , \\ F_\varepsilon & : \quad C_\varepsilon(q_0) \cup F_\varepsilon = \varnothing \ . \end{cases}$$

- **הגדרת פונקצית המעבר Δ_N:**

נתבסס על פונקציית המעבר המורחבת Δ_ε^* של A_ε אשר הגדרנו בסעיפים הקודמים.
לכל $q \in Q$ ולכל $\sigma \in \Sigma$ נגדיר:

$$\Delta_N(q, \sigma) = \Delta_\varepsilon^*(q, \sigma) = \bigcup_{p \in \Delta_\varepsilon(q,\sigma)} C_\varepsilon(p) \ .$$

- בשלב הזה סיימנו להציג את האלגוריתם שבאמצעותו אנחנו ממירים אוטומט עם מעברי- ε לאוטומט שקול ללא מעברי- ε. ניגש עכשיו להוכחת הנכונות של האלגוריתם. כלומר: עלינו להוכיח ש־

$$L(A_N) = L = L(A_\varepsilon) \ .$$

למטרה זו היינו מעוניינים להוכיח, באינדוקציה על אורך מילה w, טענה יותר חזקה:

$$\forall w \in \Sigma^* \ : \quad {\Delta_N}^*(q_0, w) = {\Delta_\varepsilon}^*(q_0, w) \ .$$

המשפט שלנו יינבע מייד מטענה זו. נתחיל לכן את האינדוקציה שלנו מהשלב $n = 1$.

- **בסיס האינדוקיצה:**

אם $|w| = 1$ אז $w = \sigma$ עבור תו $\sigma \in \Sigma$. זה נובע מיד מהגדרת Δ':

$$\Delta_N(q, \sigma) = {\Delta_\varepsilon}^*(q, \sigma) \ .$$

- **הנחת האינדוקציה:**

לכל מילה u באורך n:

$${\Delta_N}^*(q_0, u) = {\Delta_\varepsilon}^*(q_0, u) \ .$$

- **אינדוקציה:**

תהי w מילה באורך $n+1$. ז"א קיימת אות $\sigma \in \Sigma$ ומילה $u \in \Sigma^*$ כך ש- $|u| = n$ ו- $w = u\sigma$. אזי

$$\begin{aligned}
\Delta_N{}^*(q_0, w) =& \Delta_N{}^*(q_0, u\sigma) && \text{(הגדרת המילה } w = u\sigma\text{)} \\
=& \Delta_N(\Delta_N{}^*(q_0, u), \sigma) && \text{(הגדרת רקורסיבית של } \Delta_N{}^*\text{)} \\
=& \Delta_N(\Delta_\varepsilon{}^*(q_0, u), \sigma) && \text{(ההנחת האינדוקציה)} \\
=& \bigcup_{q \in P} \Delta_N(q, \sigma) && \text{(כאשר } P = \Delta_\varepsilon^*(q_0, u)\text{)} \\
=& \bigcup_{q \in P} \Delta_\varepsilon^*(q, \sigma) && \text{(בסיס האינדוקציה)} \\
=& \bigcup_{q \in P} C_\varepsilon(\Delta_\varepsilon(q, \sigma)) && \text{(ההגדרה של } \Delta_\varepsilon^*\text{)} \\
=& \Delta_\varepsilon^*(q_0, w) && \text{(ההגדרה הרקורסיבית של } \Delta_\varepsilon^*\text{)}
\end{aligned}$$

.

- בכדי להשלים את ההוכחה נוכיח את הטענה הבאה:

לכל מילה $w \in \Sigma^*$:

$$\Delta_N(q_0, w) \cap F_N \neq \varnothing \iff \Delta_\varepsilon(q_0, w) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing \ .$$

ראשית נטפל בקמרה ש- $w = \varepsilon$.

שימו לב: $\Delta_\varepsilon(q_0, \varepsilon) = C_\varepsilon(q_0)$ וגם $\Delta_N(q_0, \varepsilon) = \{q_0\}$.

<u>כיוון ראשון</u>

אם $\Delta_N^*(q_0, \varepsilon) \cap F_N \neq \varnothing$

$\Leftarrow \{q_0\} \cap F_N \neq \varnothing$

$\Leftarrow F_N = F_\varepsilon \cup \{q_0\}$

$\Leftarrow C_\varepsilon(q_0) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$

$\Leftarrow \Delta_\varepsilon^*(q_0, \varepsilon) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$

<u>כיוון שני</u>

אם $\Delta_\varepsilon^*(q_0, \varepsilon) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$

$\Leftarrow C_\varepsilon(q_0) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$

$\Leftarrow F_N = F_\varepsilon \cup \{q_0\}$

$\Leftarrow \{q_0\} \cap F_N \neq \varnothing$

$\Leftarrow \Delta_N^*(q_0, \varepsilon) \cap F_N \neq \varnothing$

כעת נטפל בקמרה ש- $w \neq \varepsilon$.

מכיוון ש- $w \neq \varepsilon$, מותר לנו כעת להשתמש בלמת העזר: $\Delta_N^*(q_0, w) = \Delta_\varepsilon^*(q_0, w)$.

<u>כיוון ראשון</u>

$\Longleftarrow$ נניח ש- $w \in L(A_\varepsilon)$. משמעות הדבר היא ש- $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ לפי טענת העזר שלנו, $\Delta^*_N(q_0, w) = \Delta^*_\varepsilon(q_0, w)$, ולכן נוכל להציב: $\Delta^*_N(q_0, w) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ לפי ההגדרה $F_\varepsilon \subseteq F_N$.

$\Longleftarrow$ $\Delta^*_N(q_0, w) \cap F_N \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ מכאן נובע כי $w \in L(A_N)$.

<u>כיוון שני</u>

$\Longleftarrow$ נניח ש- $w \in L(A_N)$. משמעות הדבר היא ש- $\Delta^*_N(q_0, w) \cap F_N \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ לפי טענת העזר, נציב את $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) = \Delta^*_N(q_0, w)$ ואז נקבל: $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_N \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ נזכור ש- F_N היא או F_ε או $F_\varepsilon \cup \{q_0\}$ ולכן יש שני מקרים:

* **מקרה 1:**
  החיתוך $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_N$ מכיל מצב p כך ש- $p \in F_\varepsilon$.
  $\Longleftarrow$ $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$
  $\Longleftarrow$ $w \in L(A_\varepsilon)$.
* **מקרה 2:** החיתוך $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_N$ **אינו** מכיל אף מצב מתוך F_ε, כלומר מצב הקבלה **היחיד** בחיתוך חייב להיות q_0.
  $\Longleftarrow$ מכיוון שהחיתוך $\Delta^*_\epsilon(q_0, w) \cap F_N$ אינו ריק (לפי ההנחה), אך אינו מכיל אף איבר מ- F_ϵ, המצב היחיד שיכול להיות בו הוא q_0.
  $\Longleftarrow$ $q_0 \in F_N \backslash F_\varepsilon$ (המשמעות היא ש- q_0 התווסף ל- F_N בזמן בניית האוטומט.)
  $\Longleftarrow$ לפי תנאי ההוספה של q_0 ל- F_N, $C_\varepsilon(q_0) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$. כלומר, קיים מצב קבלה מקורי $p \in C_\varepsilon(q_0) \cap F_\varepsilon$.
  $\Longleftarrow$ מכיוון ש- $C_\varepsilon(q_0) \subseteq \Delta^*_\varepsilon(q_0, w)$ אז $\Delta^*_\varepsilon(q_0, w) \cap F_\varepsilon \neq \varnothing$.

$\Longleftarrow$ בשני תת-המקרים שראינו, הגענו למסקנה ש- $w \in L(A_\varepsilon)$.

■