פרק 6
אוטומט מחסנית

הגדרה 6.1 אוטומט מחסנית (PDA)

אוטומט מחסנית הינו שישייה:

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, q_s, F) \ .$$

- Q: **קבוצת מצבים סופית**:

  אלה הן המצבים בהם האוטומט עשוי להמצא בכל שלב ושלב.

- Σ: **אלפבית קלט סופי**:

  זהו האלפבית שמעליו מוגדרות המחרוזות המוזנות לאוטומט.
  נסמן ע"י Σ_ε את קבוצת האלפבית יחד עם המילה הריקה ε:

  $$\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\} \ .$$

- Γ: **אלפבית מחסנית**:

  זוהי קבוצת התווים שניתן לדחוף או לשלוף מהמחסנית (stack) של האוטומט.
  נסמן ב־ Γ_ε את קבוצת האלפבית יחד עם המילה הריקה ε:

  $$\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\} \ ,$$

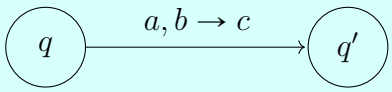
  וב- Γ^* את כל המילים שניתן ליצור באמצעות Γ.

- q_s מצב התחלתי
- F מצבים מקבלים. $F \subseteq Q$.
- Σ: **פונקציית המעברים**:

$$\Delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon \to P\left(Q \times \Gamma^*\right) \ ,$$

כאשר $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ ו- $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \cup \{\varepsilon\}$ ו- $P\left(Q \times \Gamma^*\right)$ הקבוצת החזקה של $Q \times \Gamma^*$.
Δ מוגדרת באופן הבא:

- $\Delta(q, a, b) = \{(q', c), \ldots\}$ משמעות הדר היא שאם P במצב q וקורא a במילת הקלט, אז באחד המעברים האפשריים, הוא שולף b מראש המחסנית ודוחף את התו c לראש האוטומט, ואז עובר למצב החדש q'.
- בתרשים מצבים מעבר כזה מסומן כמתואר למטה:



- אם $a = \varepsilon$ אז P יכול לעבור מ- q ל- q' בלי לקרוא אף אות במילת הקלט, כמו ב- NFA_ε רגיל.
- אם $b = \varepsilon$ אז P יכול לדחוף אות לראש המחסנית בלי לשלוף התו בראש המחסנית.
- אם $c = \varepsilon$ אז P יכול לשלוף אות מראש המחסנית בלי לדחוף אות לראש המחסנית.

- אוטומט מחסנית הוא למעשה אוטומט לא-דטרמיניסטי רגיל בתוספת התקן זיכרון. המחסנית שמצטרפת אליו היא למעשה התקן זיכרון המאפשר לאוטומט לשמור מידע על פעולות קודמות, ולהשתמש בו בשלבים מאוחרים יותר של החישוב.
- הקורא המצוי בשפות תיכנות יזהה את המחסנית כמבנה נתונים בסיסי ידוע שנקרא לפעמים $LIFO$ שפירושו Last In First Out.
- למרות זאת, מדובר בהתקן זיכרון מוגבל מאוד מאחר ובכל שלב בחישוב, לאוטומט יש גישה רק ל- **תו הראשי** במחסנית. כלומר, האוטומט מסוגל לקרוא רק את התו הנמצא ב- **ראש המחסנית**, ואין לו שום מידע לגבי התווים האחרים במחסנית.

הגדרה 6.2 קבלת מילה ע"י אוטומט מחסנית

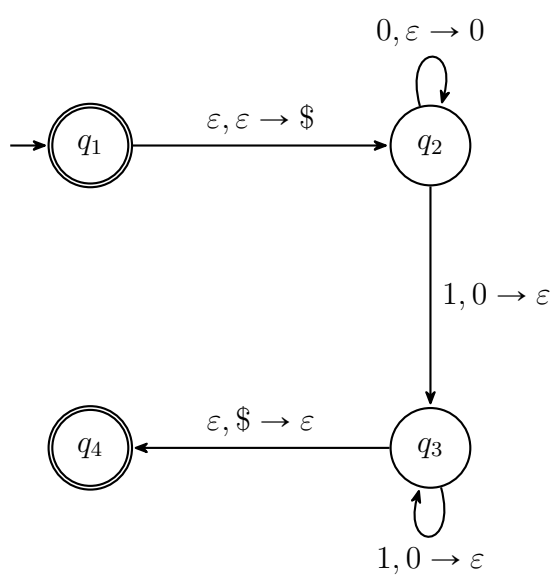
אוטומט מחסנית, P מקבל מילה $w = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ אם כל $\sigma_i \in \Sigma_\varepsilon$ וקיים סדרת מצבים $q_0, q_1, \ldots, q_m \in Q$ וקיימת סדרת מחרוזות $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) q_0 הוא המצב ההתחלתי של P וגם $s_0 = \varepsilon$. תנאי זה מבטיח ש- P מתחיל החישוב במצב ההתחלתי והמחסנית ריקה.

2) לכל $0 \leqslant i \leqslant m-1$:
$$(q_{i+1}, b) \in \Delta(q_i, \sigma_{i+1}, a)$$
כאשר $s_i = a\,t$ וגם $s_{i+1} = b\,t$ לכל $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ ו- $t \in \Gamma^*$.

3) $q_m \in F$. תנאי זה מבטיח כי כשהאוטומט מסיים לקרוא את התו האחרון של הקלט, האוטומט במצב מקבל.

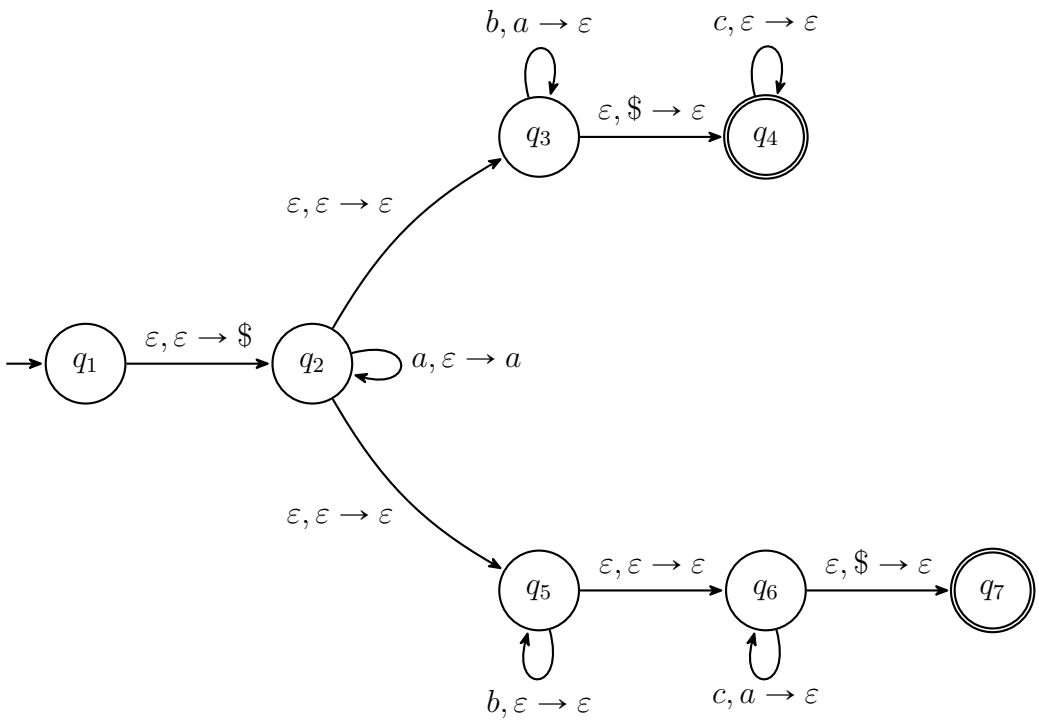
דוגמה 6.1



האוטומט המחסנית הזה מקבל את השפה:

$$L = \left\{0^n 1^n \;\middle|\; n \geqslant 0\right\} \ .$$

דוגמה 6.2

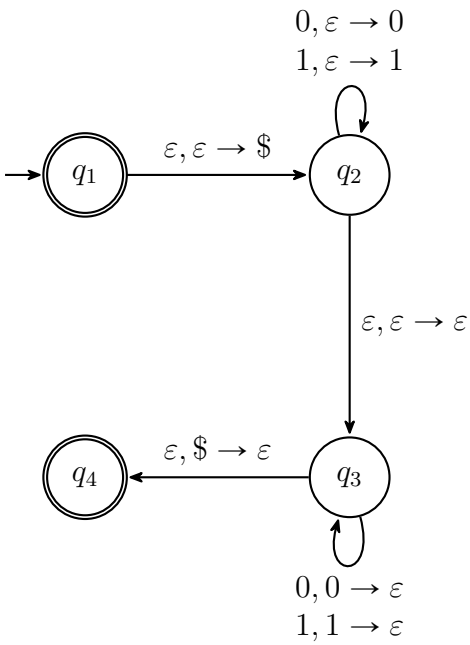


השפה של האוטומט היא:

$$L = \left\{a^i b^j c^k \;\middle|\; i, j, k \geqslant 0 \ \wedge \ (i = j \ \vee \ i = k)\right\} \ .$$

- **ענף עליון (q_3, q_4):** מנחש ש-$i = j$. הוא שולף את ה-a-ים מהמחסנית בזמן קריאת ה-b-ים, מצפה לסמל מחסנית ריקה ($\$$) כדי להוכיח שהם תואמים, ואז מתעלם מכל שאר ה-c-ים.
- **ענף תחתון (q_5, q_6, q_7):** מנחש ש-$i = k$. הוא מדלג על ה-b-ים מבלי לגעת במחסנית, שולף את ה-a-ים בזמן קריאת ה-c-ים, ולבסוף בודק שיש סמל מחסנית ריקה ($\$$) בסוף כדי להוכיח שהם תואמים.

דוגמה 6.3



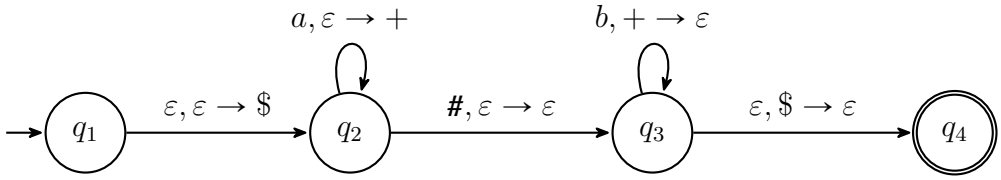
השפה של האוטומט היא:

$$L = \left\{ w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; w = uu^r \right\} \ .$$

הסבר על מכונת המצבים M_3 (זיהוי פלינדרומים):

- **מצב q_2 (דחיפה):** המכונה קוראת את תחילת המחרוזת ודוחפת כל אות (0 או 1) לתוך המחסנית.
- **המעבר האי-דטרמיניסטי ($q_2 \to q_3$):** מכיוון שהמכונה אינה יודעת היכן נמצא אמצע המחרוזת, היא מנחשת באופן אי-דטרמיניסטי את נקודת האמצע ומבצעת מעבר זה מבלי לקרוא קלט ומבלי לשנות את המחסנית.
- **מצב q_3 (שליפה והשוואה):** מעתה, המכונה קוראת את החצי השני של המחרוזת ומוודאת שכל אות נקראת תואמת בדיוק לאות הנשלפת מראש המחסנית (מה שמוכיח סימטריה של פלינדרום).
- **מצב q_4 (קבלה):** אם המחסנית מתרוקנת (הגעה לסמל \$), המכונה מקבלת את המחרוזת.

דוגמה 6.4



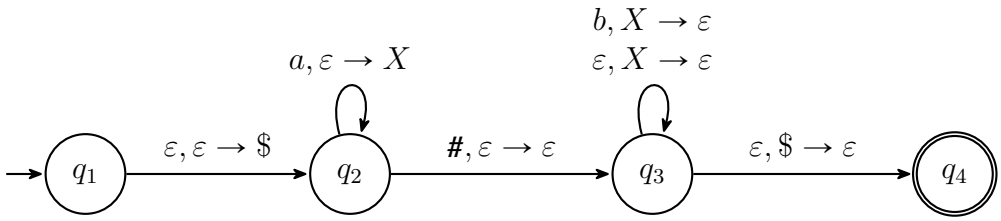
השפה של האוטומט הזה היא:

$$L = \left\{ a^n \# b^n \;\middle|\; n \geqslant 0 \right\} \ .$$

הסבר על מכונת המצבים $a^n\#b^n$**:**

- **מצב** q_2 **(דחיפה):** המכונה קוראת את האותיות a בתחילת המחרוזת ודוחפת כל אחת מהן לתוך המחסנית.
- **המעבר האמצעי (**$q_2 \to q_3$**):** להבדיל מפלינדרומים ללא סמן מפריד, כאן המכונה קוראת את התו # כדי לדעת באופן דטרמיניסטי מתי בדיוק החצי הראשון מסתיים. המעבר מתבצע מבלי לשנות את מצב המחסנית.
- **מצב** q_3 **(שליפה והשוואה):** המכונה קוראת את האותיות b בחצי השני של המחרוזת. עבור כל אות b שנקראת, היא שולפת אות a מראש המחסנית. פעולה זו מבטיחה שכמות ה-b-ים שווה לכמות ה-a-ים.
- **מצב** q_4 **(קבלה):** כאשר המחסנית מתרוקנת (המכונה קוראת את הסמל \$), אם לא נותרו אותיות במחרוזת, המכונה עוברת למצב קבלה. (מחרוזת ריקה עם סמן אמצע בלבד, דהיינו "#", תתקבל גם כן במסלול זה).

דוגמה 6.5



השפה של האוטומט היא:

$$L = \left\{a^n\#b^k \;\middle|\; n \geqslant k\right\} \ .$$

הסבר על מכונת המצבים ($a^n\#b^k$ **כאשר** $n \geqslant k$**):**

- **מצב** q_2 **(דחיפה):** המכונה קוראת את האותיות a בתחילת המחרוזת ודוחפת את הסימן X עבור כל אחת מהן לתוך המחסנית.
- **המעבר האמצעי (**$q_2 \to q_3$**):** המכונה קוראת את התו # כדי לדעת באופן דטרמיניסטי מתי בדיוק החצי הראשון מסתיים. המעבר מתבצע מבלי לשנות את מצב המחסנית.
- **מצב** q_3 **(שליפה והשוואה):** המכונה קוראת את האותיות b בחצי השני של המחרוזת. עבור כל אות b שנקראת, היא שולפת סימן X מראש המחסנית. בנוסף, מעבר חופשי ($\varepsilon, X \to \varepsilon$) מאפשר למכונה לשלוף סימני X מיותרים (כדי לאפשר את התנאי $n \geqslant k$).
- **מצב** q_4 **(קבלה):** כאשר המחסנית מתרוקנת (המכונה קוראת את הסמל \$), אם לא נותרו אותיות במחרוזת, המכונה עוברת למצב קבלה. מעבר זה מבטיח שהיו מספיק אותיות a (שיוצגו על ידי X במחסנית) כדי להתאים לכל ה-b-ים שנקראו.