העבודה הזו כוללת **6 שאלות.**

מועד הגשה

1) ההגשה היא עד סוף יום ראשון $2026 - 08 - 02$ עד השעה 23:59 באותו היום. אל תחכו לרגע האחרון. תכננו את זמנכם בהתאם. הגישו לפני.

2) איחור במועד ההגשה יגרור הורדה של ציון, 5 נק' לכל יום איחור או חלק ממנו. בכל מקרה לא יהיה ניתן להגיש מעבר ל-2 ימי איחור ממועד ההגשה דלעיל כלומר עד יום שלישי $2026 - 08 - 04$ (עד השעה 23:59).

אופן הגשה

1) קראו היטב את השאלות. עליכם לענות על כל השאלות בעבודה זו.

2) הגשת העבודה תהיה דרך אתר הקורס במודל בלבד. הגשת העבודה היא ביחידים.

3) כיצד להגיש?

א) יש לסרוק או להמיר את העבודה לקובץ pdf ולהגיש אותו (סריקה לא ברורה או מטושטשת לא תיבדק).

ב) שם הקובץ שיוגש למערכת ההגשה יהיה מספר ת"ז המגיש. לדוגמה: 123456789.pdf.

4) בקובץ המוגש יש להוסיף את התיעוד הבא בעמוד הראשון (בעברית או באנגלית, לבחירתכם). יש לשנות את השם לשם שלכם ואת תעודת הזהות לתעודת הזהות שלכם. ובמקום סולמית יש לכתוב את מספר העבודה.

Assignment: #
Author: Israel Israeli, ID: 01234567

5) לאחר שהעליתם את הקבצים שלכם למודל, הורידו אותם מהמודל למחשב שלכם וודאו כי הקבצים תקינים וכי העליתם את הקבצים הנכונים והמלאים. לאחר תום מועד ההגשה לא יתקבלו ערעורים על כך שהעליתם קבצים לא תקינים או שהעליתם בטעות קבצים אחרים / לא נכונים.

שאלות

1) שאלות בנוגע העבודה יש לשאול בפורום באתר המודל של הקורס או בשעות קבלה של המתרגל/ת האחראי/ת בלבד. אין לשלוח שאלות במייל לא למתרגל האחראי ולא למתרגלים/מרצים אחרים.

2) ניתן לשאול שאלות הבהרה ומיקוד על המשימות שבעבודה במידה ומשימה מסוימת לא ברורה. לא ניתן לשאול על הפתרונות שלכם. לדוגמא, לא ניתן לשאול האם הפתרון שלי נכון, לא ניתן לשאול למה הפתרון לא עובד, וכדומה.

3) העבודה הזו כוללת **6 שאלות.**

4) בחלק של השאלות יש סעיפים.

5) יש לענות על השאלות.

עבודה 1: סדרות

שאלה 1 **(15 נקודות)**

הוכיחו את הטענה הבאה: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ וגם לכל $n \in \mathbb{N}^+$: $a_n \geq 0$ אזי $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{L}$.

שאלה 2 **(15 נקודות)**

הוכיחו את הטענה הבאה: אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ אזי $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

רמז: אי-שוויון ההפוך. לכל x, y מתקיים: $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

שאלה 3 **(15 נקודות)**

עבור כל אחת של הסדרות הבאות, הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

א) **(5 נקודות)**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}\ , \\ a_1 = 12\ . \end{cases}$$

ב) **(5 נקודות)**

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\sqrt{4 - 3a_n}\ , \\ a_1 = 0\ . \end{cases}$$

ג) **(5 נקודות)**

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)\ , \\ a_1 = 2\ . \end{cases}$$

רמז: לכל $x, y \geq 0$: $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$.

שאלה 4 **(15 נקודות)**

הסדרה $\{a_n\}$ נתונה ע"י הרקורסיה:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt[6]{5a_n}\ , \\ a_1 = 1\ . \end{cases}$$

א) האם הסדרה מונוטונית?

ב) האם הסדרה חסומה? אם כן תנו חסם עליון וחסם תחתון . אחרת הסבירו למה הסדרה לא חסומה.

ג) האם הסדרה מתכנסת? אם כן חשבו את גבולה . אחרת הסבירו למה הסדרה לא מתכנסת.

שאלה 5 (15 נקודות)

תהי $\{a_n\}$ הסדרה $a_n = \frac{1}{n!}$. הוכיחו או הפריכו: a_n מתכנסת.

שאלה 6 (25 נקודות)

תהי $\{a_n\}$ סדרה מונוטונית עולה ותהי $\{b_n\}$ סדרה מונוטונית יורדת כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

1) לכל $n \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$,

2) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$.

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: $\{a_n\}$ מתכנסת וגם $\{b_n\}$ מתכנסת לאותו גבול.

פתרונות

שאלה 1 יש שני מקרים: $L > 0$ ו- $L = 0$. נוכיח את הטענה עבור $L > 0$.
a_n מתכנסת ל- L. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי טבעי כך שלכל $n > N$:

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

מכאן

$$\left|\sqrt{a}_n - \sqrt{L}\right| = \frac{\left|\sqrt{a}_n - \sqrt{L}\right| \cdot \left|\sqrt{a}_n + \sqrt{L}\right|}{\left|\sqrt{a}_n + \sqrt{L}\right|} \leq \frac{\left|\sqrt{a}_n - \sqrt{L}\right| \cdot \left|\sqrt{a}_n + \sqrt{L}\right|}{\sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} < \frac{\epsilon}{\sqrt{L}}$$

נגדיר $\epsilon' = \frac{\epsilon}{\sqrt{L}}$. בגלל ש- $L > 0$ וגם $\epsilon > 0$ אז $\epsilon' > 0$. קיבלנו שלכל $\epsilon' > 0$ קיים טבעי N כך שלכל $n > N$:
$\left|\sqrt{a}_n - \sqrt{L}\right| < \epsilon'$ ולפיכך $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a}_n = \sqrt{L}$.

כעת נוכיח את הטענה עבור $L = 0$.
אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אז לכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי N כך שלכל $n > N$:

$$|a_n - 0| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \sqrt{|a_n|} < \sqrt{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{a_n}| < \sqrt{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{a_n} - 0| < \sqrt{\epsilon} \ .$$

נגדיר $\epsilon' = \sqrt{\epsilon}$. בגלל $\epsilon > 0$ אז $\epsilon' > 0$. קיבלנו שלכל $\epsilon' > 0$ קיים טבעי N כך שלכל $n > N$: $|\sqrt{a}_n - | < \epsilon'$
ולפיכך $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a}_n = 0$.

שאלה 2 a_n מתכנסת ל- L. ז"א לכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי טבעי כך שלכל $n > N$:

$$|a_n - L| < \epsilon \ .$$

נשתמש באי-שוויום הבא. לכל x, y מתקיים: $||x| - |y|| \leq |x - y|$. מכאן:

$$||a_n| - |L|| \leq |a_n - L| < \epsilon \ .$$

קיבלנו שלכל $\epsilon > 0$ קיים טבעי טבעי כך שלכל $n > N$:

$$||a_n| - |L|| < \epsilon \ .$$

לפיכך: $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |L|$.

שאלה 3

א)

מונוטוניות

$a_1 = 12$ ו- $a_2 = \sqrt{a_1 + 12} = \sqrt{12 + 12} < 12 = a_1$.
נוכיח באינדוקציה כי הסדרה יורדת מונוטונית.

שלב הבסיס:

$a_2 < a_1$.

שלב המעבר:

נניח שעבור $n = k > 2$ מתקיים $a_{k+1} < a_k$ (ההנחת האינדוקציה). אזי:

$$a_{k+2} = \sqrt{a_{k+1} + 12} < \sqrt{a_k + 12} = a_{k+1}$$

ז"א $a_{k+2} < a_{k+1}$.

לכן לפי אינדוקציה הסדרה יורדת מונוטונית.

חסימות

ראשית מכיוון שהסדרה עולה מונוטונית אז לכל n:

$$a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < \cdots < a_1 = 12$$

ז"א לכל n מתקיים $a_n \leq 12$ ולכן הסדרה חסומה מלמעלה.

נוכיח באינדוקציה כי $a_n > 4$ לכל n.

שלב הבסיס:

$a_1 = 12 > 4$.

שלב המעבר:

נניח שעבור $n = k > 2$ מתקיים $a_k < 4$ (הנחת האינדוקציה). אזי:

$$a_{k+1} = \sqrt{a_k + 12} > \sqrt{4 + 12} = 4 \ .$$

ז"א $a_{k+1} < 4$.

לכן לפי אינדוקציה:

$$4 < a_n \leq 12$$

לכל n ולפיכך הסדרה חסומה.

חישוב הגבול

הסדרה מונוטונית וגם חסומה ולכן היא מתכנסת. נחשב גבולה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+12} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + 12} \quad \Longrightarrow \quad L = \sqrt{L+12}\ .$$

מכאן

$$L^2 = L+12 \quad \Longrightarrow \quad L^2 - L - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (L-4)(L+3) = 0$$

ולכן $L = 4 \ \vee \ L = -3$. מכיוון שהסדרה חסומה מלמטה ע"י החסם התחתון 4 הגבול לא יכול להיות $L = -3$ ולכן $L = 4$.

ב) (5 נקודות)

מונוטוניות

$a_1 = 0$ וגם $a_2 = -\sqrt{4-3a_1} = -2 < a_1$.
נוכיח באינדוקציה כי הסדרה יורדת מונוטונית.

שלב הבסיס:

$a_2 < a_1$.

שלב המעבר:

נניח שעבור $n = k > 2$ מתקיים $a_{k+1} < a_k$ (ההנחת האינדוקציה). אזי:

$$-3a_{k+1} > -3a_k \quad \Rightarrow \quad 4-3a_{k+1} > 4-3a_k \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-3a_{k+1}} > \sqrt{4-3a_k} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{4-3a_{k+1}} < -\sqrt{4-3a_k}$$

ז"א $a_{k+2} < a_{k+1}$.

לכן לפי אינדוקציה הסדרה יורדת מונוטונית.

חסימות

ראשית מכיוון שהסדרה יורדת מונוטונית אז לכל n:

$$a_n < a_{n-1} < a_{n-2} < \cdots < a_1 = 0$$

ז"א לכל n מתקיים $a_n \le 0$ ולכן הסדרה חסומה מלמעלה.

נוכיח באינדוקציה כי $a_n \ge -4$ לכל n.

שלב הבסיס:

$a_1 = 0 > -4$.

<u>שלב המעבר:</u>

נניח שעבור $n = k > 2$ מתקיים $a_k \geq -4$ (ההנחת האינדוקציה). אזי:

$$-3a_k \leq 12 \quad \Rightarrow \quad 4-3a_k \leq 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{4-3a_k} \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{4-3a_k} \geq -4 \quad \Rightarrow \quad a_{k+1} \geq -4 \ .$$

ז"א $a_{k+1} \geq -4$.

לכן לפי אינדוקציה הסדרה חסומה מלמטה ע"י -4.

לכן הסדרה חסומה:

$$-4 \leq a_n \leq 0 \ .$$

<u>חישוב הגבול</u>

הסדרה מונוטונית וגם חסומה ולכן היא מתכנסת. נחשב גבולה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = -\lim_{n\to\infty} \sqrt{4-3a_n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = -\sqrt{4-3\lim_{n\to\infty} a_n} \quad \Longrightarrow \quad L = -\sqrt{4-3L} \ .$$

מכאן

$$L^2 = 4-3L \quad \Longrightarrow \quad L^2+3L-4=0 \quad \Longrightarrow \quad (L+4)(L-1)=0$$

ולכן $L = -4 \ \vee \ L = 1$. מכיוון שהסדרה חסומה מלמעלה ע"י החסם התחתון 0 וגם יורדת מונוטונית אז הגבול לא יכול להיות $L = 1$ ולכן $L = -4$.

ג) (5 נקודות)

לפי האי-שיוויון לכל $x, y \geq 0$ מתקיים $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, אזי:

$$\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \left(a_n \cdot \frac{1}{a_n}\right) = 1$$

ולכן $a_n \geq 1$ לכל n.

$a_2 = \frac{5}{4} < a_1$. נוכיח כי הסדרה יורדת מונוטונית.

מכיוון ש- $a_n \geq 1$ לכל n מתקיים:

$$\frac{1}{a_n} \leq 1 \leq a_n \quad \Rightarrow \quad a_n + \frac{1}{a_n} \leq 2a_n \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \leq a_n \ .$$

מכיוון שהסדרה יורדת מונוטונית אז לכל n:

$$a_n \leq a_{n-1} \leq \cdots \leq a_1 = 2 \ .$$

לכן קיים חסם עליון $a_n \leq 2$. לפיכך הסדרה חסומה:

$$1 \leq a_n \leq 2 \ .$$

חישוב הגבול

הוכחנו כי הסדרה חסומה ומונוטונית יורדת ולכן היא מתכנסת. נחשב גבולה:

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\right) \ .$$

נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) \quad \Rightarrow \quad 2L^2 = L^2 + L \quad \Rightarrow \quad L(L-1) = 0$$

לכן $L = 1 \ \vee \ L = 0$. לא ייתכן כי $L = 0$ כי הסדרה חסומה ע"י החסם תחתון 0 לכן $L = 1$.

שאלה 4

א)

נוכיח באינדוקציה כי הסדרה עולה מונוטונית.

שלב הבסיס:
$a_1 = 1$ ו- $a_2 = \sqrt[6]{5\cdot 1} = \sqrt[6]{5}$. מכיוון ש- $5 > 1$, מתקיים $\sqrt[6]{5} > 1$, ולכן $a_2 > a_1$.

שלב המעבר:
נניח שעבור $n = k$ מתקיים $a_{k+1} > a_k$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח שעבור $n = k+1$ מתקיים $a_{k+2} > a_{k+1}$:

$$a_{k+1} > a_k \quad \Longrightarrow \quad 5a_{k+1} > 5a_k \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[6]{5a_{k+1}} > \sqrt[6]{5a_k} \quad \Longrightarrow \quad a_{k+2} > a_{k+1} \ .$$

לכן לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הסדרה עולה מונוטונית.

ב)

מכיוון שהסדרה עולה מונוטונית, היא חסומה מלמטה על ידי האיבר הראשון שלה, $a_1 = 1$. כעת, נוכיח באינדוקציה כי הסדרה חסומה מלמעלה על ידי 2 (ניתן כמובן להוכיח חסימות על ידי $\sqrt[5]{5}$, אך 2 הוא חסם עליון שלם שפשוט יותר להוכחה).

שלב הבסיס:
$a_1 = 1 < 2$.

שלב המעבר:
נניח שעבור $n = k$ מתקיים $a_k < 2$ (הנחת האינדוקציה). נוכיח שעבור $n = k+1$ מתקיים $a_{k+1} < 2$:

$$a_{k+1} = \sqrt[6]{5a_k} < \sqrt[6]{5\cdot 2} = \sqrt[6]{10} < \sqrt[6]{64} = 2 \ .$$

כלומר $a_{k+1} < 2$.

לכן לפי אינדוקציה, הסדרה חסומה מלמעלה. לסיכום, הסדרה חסומה מלעיל ומלרע: $1 \le a_n < 2$.

ג)

הראינו שהסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלעיל, ולכן לפי משפט התכנסות המונוטונית, היא מתכנסת לגבול סופי L. נחשב את הגבול על ידי הפעלת גבול על שני אגפי נוסחת הנסיגה:

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[6]{5a_n} = \sqrt[6]{5L}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת 6:

$$L^6 = 5L \quad \Longrightarrow \quad L^6 - 5L = 0 \quad \Longrightarrow \quad L(L^5 - 5) = 0$$

מכאן אנחנו מקבלים שני פתרונות אפשריים:

$$L = 0 \quad \text{או} \quad L^5 = 5 \implies L = \sqrt[5]{5}$$

מכיוון שהסדרה עולה מונוטונית וחסומה מלמטה על ידי 1 (כלומר $a_n \geq 1$ לכל n), הגבול לא יכול להיות קטן מ-1. לכן, אנחנו פוסלים את האפשרות ש- $L = 0$.

מכאן שגבול הסדרה הוא: $L = \sqrt[5]{5}$.

<u>שאלה 5</u> ראשית הסדרה יורדת מונוטוניות. לכל $n \in \mathbb{N}^+$:

$$(n+1)! > n! \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} a_{n+1} < a_n \ .$$

בנוסף, לכל $n \in \mathbb{N}^+$ יש לנו כי $a_n = \frac{1}{n!} > 0$ וגם $a_n = \frac{1}{n!} < 1$ ולפיכך הסדרה חסומה:

$$0 < a_n < 1 \ .$$

מכיוון שהסדרה חסומה ומונוטונית אז היא בהכרח מתכנסת.

<u>שאלה 6</u>

הטענה נכונה.

$\{a_n\}$ מונוטונית עולה ו- $\{b_n\}$ מונוטונית יורדת וגם שלכל n טבעי: $a_n \leq b_n$. לפיכך לכל n:

$$a_1 \leq a_n \leq b_n \leq b_1$$

לכן שני דברים:

1. a_n גם מונוטונית וגם חסומה ולכן מתכנסת. נסמן גבולה A.
2. b_n גם מונוטונית וגם חסומה ולכן מתכנסת. נסמן גבולה B.

כעת נוכיח $A = B$.
נוכיח בשלילה $A \neq B$. אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) \neq 0 \ ,$$

סבתירה לכך ש- $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. לכן a_n ו- b_n מתכנסות לאותו גבול.