פרק 2
אוטומט סופי

2.1 הגדרת אוטומט סופי דטרמיניסטי

הגדרה 2.1 אוטומט סופי דטרמיניסטי (DFA)

הגדרה פורמלית

אוטומט סופי דטרמיניסטי (באנגלית: Deterministic Finite Automaton - DFA) הינו חמישייה:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \ .$$

המרכיבים $Q, \Sigma, \delta, q_0, F$ הם מתוארים למטה.

- Q: קבוצת **מצבים** סופית.
- Σ: **האלפבית** שעליו מוגדרות המילים המוזנות לאוטומט.
- δ: **הפונקצית המעברים**,
$$\delta : Q \times \Sigma \to Q \ .$$
ניתן להגדיר את פונקציית המעברים בצורת נוסחה או בצורת תרשים מעברים.
- F: קבוצת **מצבי קבלה** (או מצבי סיום) $F \subseteq Q$.
- q_0: **מצב ההתחלה**, $q_0 \in Q$. זהו מצב שבו האוטומט נמצא בתחילתו של כל תהליך חישוב.

הרצה

- אוטומט מקבל כקלט מילה מעל האלפבית Σ.
- הקלט נקרא אות אות משמאל לימין.
- הקלט נקרא רק פעם אחת.
- מתחילים במצב ההתחלתי q_0.
- בכל צעד, האוטומט קורא אות ועובר ממצב הנוכחי למצב הבא לפי הפונקצית המעברים.
- החישוב מסתיים כשהקלט נגמר, כלומר, כאשר האות האחרונה של הקלט נקראת.

הגדרה 2.2 קבלה של מילה ע"י אוטומט

יהי A. אוטומט. אומרים כי A **מקבל מילה** w אם לאחר סריקת כל האותיות של w, האוטומט מגיע לאחד ממצבי הקבלה שלו.
אומרים כי המילה w מתקבלת על ידי האוטומט A.

דוגמה 2.1 אוטומט סופי דטרמיניסטי

יהי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אוטומט, כאשר:

- קבוצת המצבים:
$$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \ .$$
- האלפבית:
$$\Sigma = \{0, 1\} \ .$$
- המצב ההתחלתי הוא $q_0 \in Q$.
- קבוצת מצבי הקבלה היא
$$F = \{q_1\} \subset Q \ .$$

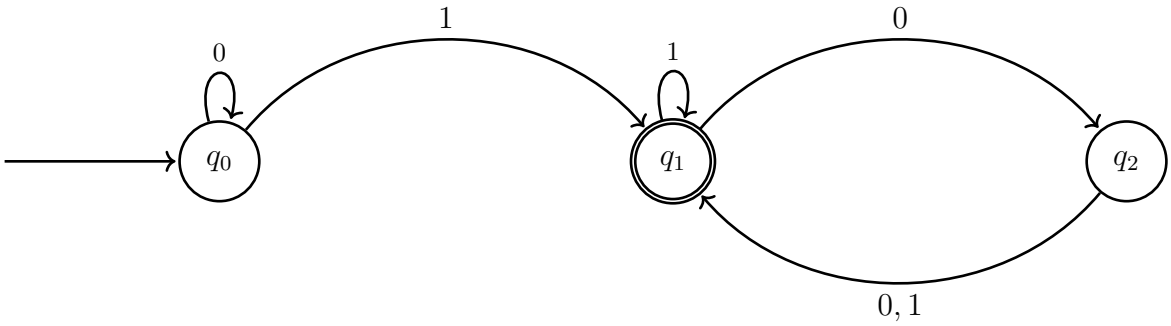
כלומר בדוגמה הספציפי הזו יש רק מצב אחד בקבוצת מצבי הקבלה.

- ראשית נתן הגדרה של פונקצית המעברים בצורת נוסחאות, ואז נתן את ההגדרה בצורת תרשים מצבים.

ההגדרה בצורת נוסחאות היא:

$$\delta(q_0, 0) = q_1 \ , \quad \delta(q_0, 1) = q_2 \ , \quad \delta(q_1, 1) = q_1 \ , \quad \delta(q_1, 0) = q_2 \ , \quad \delta(q_2, 0) = q_1 \ , \quad \delta(q_1, 1) = q_1 \ .$$

התרשים מעברים הוא מתואר למטה.



דוגמה 1) נבצע הרצה של האוטומט A על המילה 1101:

$$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{1} q_1 \in F \ .$$

ההרצה מסתיימת במצב קבלה ולכן המילה 1101 מתקבלת ע"י A.

דוגמה 2) כעת נבצע הרצה של האוטומט A על המילה 011:

$$q_0 \xrightarrow{0} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \in F \ .$$

ההרצה מסתיימת במצב קבלה ולכן המילה 011 מתקבלת ע"י A.

דוגמה 3) לעומת זאת המילה A על המילה 110 לא מתקבלת:

$$q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2 \notin F \ .$$

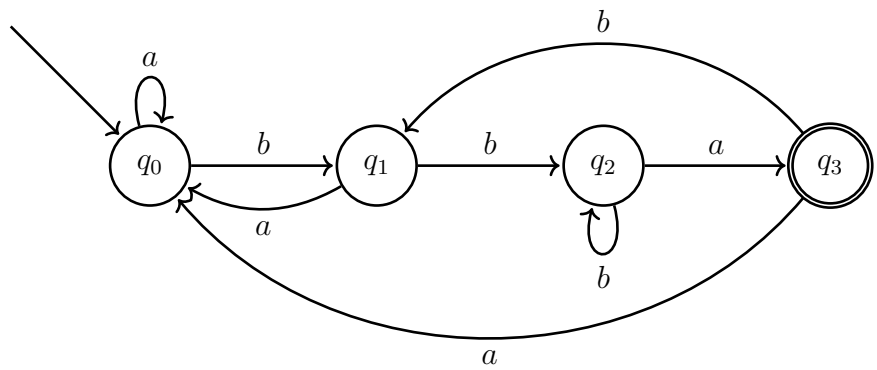
ההרצה מסתיימת במצב אשר לא מצב קבלה ולכן המילה 110 לא מתקבלת ע"י A.

אפשר להוכיח כי A מקבל כל מילה שמסתיימת עם התו "1".

דוגמה 2.2 אוטומט סופי דטרמיניסטי

יהי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אוטומט, כאשר:

- קבוצת המצבים:
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} \ .$$
- האלפבית:
$$\Sigma = \{a, b\} \ .$$
- המצב ההתחלתי הוא $q_0 \in Q$.
- קבוצת מצבי הקבלה היא
$$F = \{q_3\} \subset Q \ .$$
כלומר בדוגמה הספציפי הזו יש רק מצב אחד בקבוצת מצבי הקבלה.
- **התרשים מעברים** הוא מתואר למטה.



דוגמה 1) נבצע הרצה של האוטומט A על המילה bbb:

$$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} \notin F \ .$$

ההרצה מסתיימת במצב שלא מצב קבלה ולכן המילה bbb מתקבלת ע"י A.

דוגמה 2) כעת נבצע הרצה של האוטומט A על המילה bba:

$$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \in F \ .$$

ההרצה מסתיימת במצב קבלה ולכן המילה bba מתקבלת ע"י A.

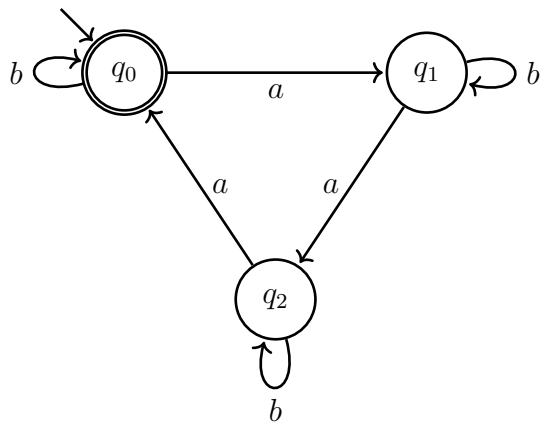
דוגמה 3) לעומת זאת המילה A על המילה $bbaba$ לא מתקבלת:

$$q_0 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_0 \notin F \ .$$

ההרצה מסתיימת במצב אשר לא מצב קבלה ולכן המילה $bbaba$ לא מתקבלת ע"י A.

אפשר להוכיח כי A מקבל כל מילה שמסתיימת עם הרצף "bba".

דוגמה 2.3 אוטומט שמקבל מילים בהן מספר ה- a -ים מתחלק ב 3



דוגמה 1) הרצה על המילה a:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \notin F$$

דוגמה 2) הרצה על המילה aba:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \notin F$$

דוגמה 3) הרצה על המילה $abbaa$:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{b} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_0 \in F$$

אפשר להוכיח כי האוטומט הזה מקבל רק מילים w שמקיימות את התנאי:

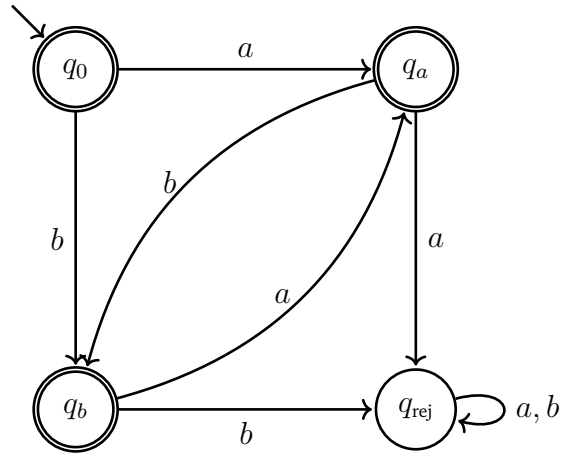
$$\#a_w \bmod 3 = 0 \ .$$

דוגמה 2.4 אין שתי אותיות רצופות זהות

בנו אוטומט שיקבל את רק כל המילים מעל האלפבית $\Sigma = \{a, b\}$ שבהן אין שתי אותיות רצופות זהות. כלומר:

- אין a אחרי a
- אין b אחרי b.

פתרון:



$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

כאשר

- $Q = \{q_0, q_a, q_b, q_{\text{rej}}\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- $$\begin{aligned} \delta(q_0, a) &= q_a \\ \delta(q_0, b) &= q_b \\ \delta(q_a, a) &= q_{\text{rej}} \\ \delta(q_a, b) &= q_b \\ \delta(q_b, a) &= q_a \\ \delta(q_b, b) &= q_{\text{rej}} \\ \delta(q_{\text{rej}}, \sigma) &= q_{\text{rej}} \ , \qquad (\sigma = a, b) \ . \end{aligned}$$
- $F = \{q_0, q_a, q_b\}$.

אפשר להציג את הפונקצית המעברים δ בצורת טבלה:

δ	a	b
q_0	q_a	q_b
q_a	q_{rej}	q_b
q_b	q_a	q_{rej}
q_{rej}	q_{rej}	q_{rej}

הגדרה 2.3 פונקציית המעבר המורחבת δ^*

הפונקציית המעבר המורחבת, מסומנת $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ היא פונקציה שמוגדרת באופן הבא (הגדרה רקורסיבית!)

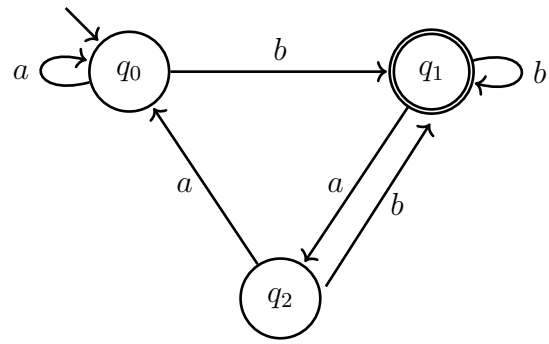
א) $\delta^*(q, \varepsilon) = q$

ב) לכל $a \in \Sigma$: $\delta^*(q, a) = \delta(q, a)$.

ג) לכל $w \in \Sigma$: $\delta^*(q, wa) = \delta^*(\delta^*(q, w), a)$.

דוגמה 2.5

נתון האוטומט הסופי הבא:



$$\delta^*(q_0, ba) = q_2 \ ,$$
$$\delta^*(q_2, aab) = q_1 \ .$$

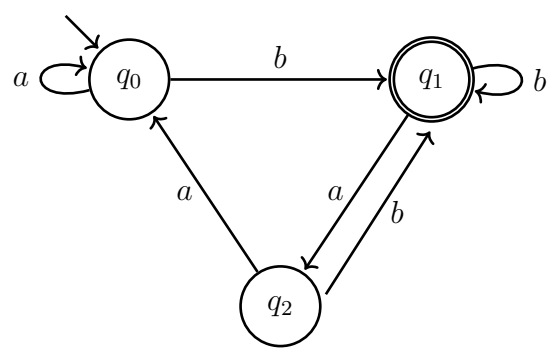
הגדרה 2.4 שפה של אוטומט

יהי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אוטומט סופי דטרמיניסטי. השפה של A תסומן $L(A)$ ותוגדר:

$$L(A) = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \delta^*(q_0, w) \in F \right\} \ .$$

דוגמה 2.6 שפה של אוטומט

נתון האוטומט הסופי הדטרמיניסטי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ המוגדר ע"י התרשים מעברים הבא (שכבר ראינו בדוגמה המשך של דוגמה):



השפה של האוטומט היא:

$$L(A) = \left\{ w \;\middle|\; w = ub, \ u \in \Sigma^* \right\} \ .$$

הגדרה 2.5 אוטומטים שקולים

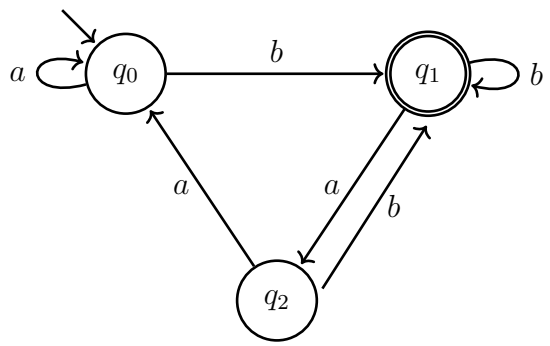
שני אוטומטים A, B נקראים **שקולים** אם

$$L(A) = L(B) \ .$$

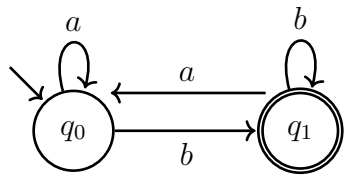
סימון: $A \equiv B$.

דוגמה 2.7 אוטומטים שקולים

A



B



השפה של האוטומט היא:

$$L(A) = \{w \mid w = ub,\ u \in \Sigma^*\} \ .$$

וגם

$$L(B) = \{w \mid w = ub,\ u \in \Sigma^*\} \ .$$

לכן

$$L(A) = L(B) \qquad \Rightarrow \qquad A \equiv B \ .$$

2.2 שיטות בתכנון אוטומטים

דוגמה 2.8 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את השפה

$$L = \{w = aau \mid u \in \{a,b\}^*\} \ ,$$

כלומר, אוטומט שיקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a,b\}$ הפותחות ברצף aa.

פתרון:

שלב 1: הבנת השפה.

דוגמאות של מילים שבשפה:

$$aa \in L \ ,$$
$$aaa \in L \ ,$$
$$aabb \in L \ ,$$
$$\ldots \ .$$

דוגמאות של מילים שלא בשפה:

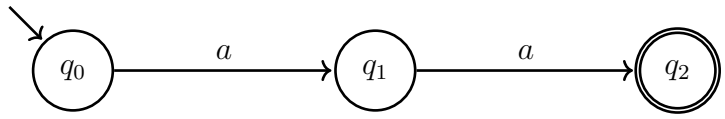
$$\begin{aligned} \varepsilon &\notin L \ , \\ a &\notin L \ , \\ b &\notin L \ , \\ baaa &\notin L \ , \\ &\dots \ . \end{aligned}$$

שלב 2: בניית האוטומט.

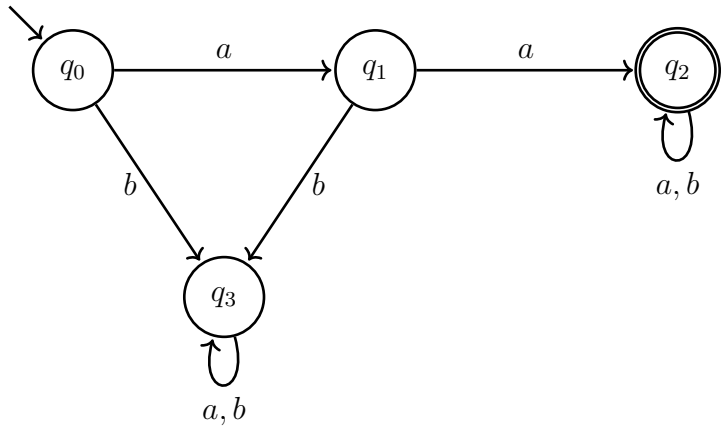
ראשית נבנה **שלד של האוטומט** שמתבסס על **מילה אופיינית**. בדוגמה שלנו מילה אופיינית היא:

$$w_0 = aa \ .$$

ז"א נבנה שלד של האוטומט שמקבל את המילה aa באופן הבא:



כעת נרחיב את האוטומט ע"י הוספת מעברים ומצבים כך שהאוטומט יקבל את כל המילים שבשפה באופן הבא:



שלב 3: בדיקת האוטומט.

- הרצה על המילה aa:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \in F \ .$$

- הרצה על המילה aaa:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_2 \in F \ .$$

- הרצה על המילה $aabb$:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_2 \in F \ .$$

- הרצה על המילה ε:

$$q_0 \xrightarrow{\varepsilon} q_0 \notin F \ .$$

- הרצה על המילה a:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \notin F \ .$$

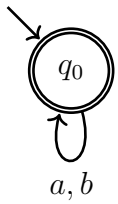
- הרצה על המילה $baaa$:

$$q_0 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \notin F \ .$$

דוגמה 2.9 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את השפה $L = \{w \in \{a,b\}^*\}$.

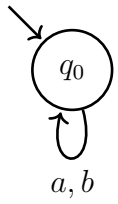
פתרון:



דוגמה 2.10 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את השפה $L = \varnothing$.

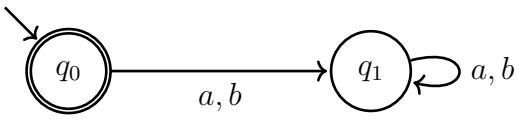
פתרון:



דוגמה 2.11 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את השפה $L = \{\varepsilon\}$.

פתרון:



דוגמה 2.12 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a,b\}$ שבהן האות האחרונה קיימת ושונה מהאות הראשונה.

פתרון:

שלב 1: הבנת השפה.

דוגמאות של מילים שבשפה:

$$ab \in L \ ,$$
$$ba \in L \ ,$$
$$abbb \in L \ ,$$
$$\dots \ .$$

דוגמאות של מילים שלא בשפה:

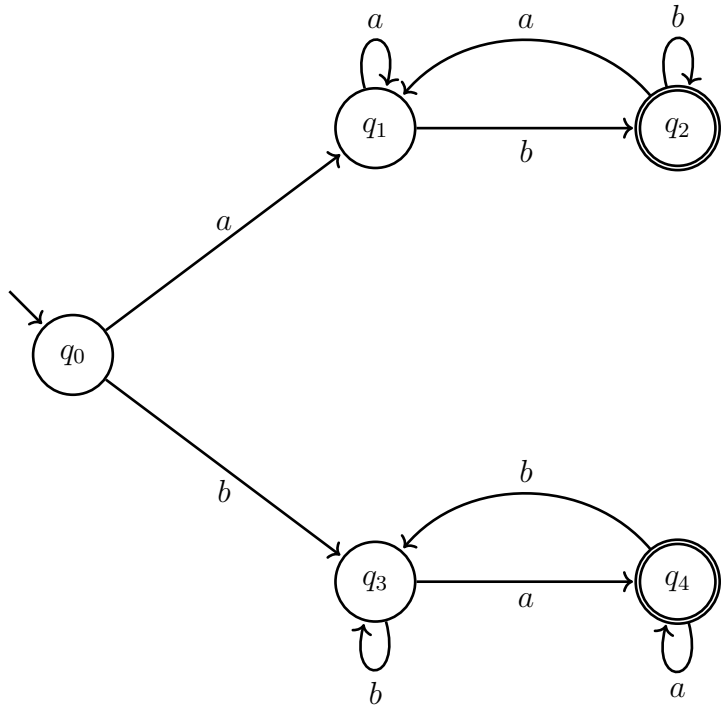
$$\varepsilon \notin L \ ,$$
$$a \notin L \ ,$$
$$b \notin L \ ,$$
$$aa \notin L \ ,$$
$$bb \notin L \ ,$$
$$abba \notin L \ ,$$
$$\dots \ .$$

הערה: המקרה שבמילה יש אות אחת, היא נחשבת הן האותר הראשונה והן האות האחרונה. 1 (ולא 0).

שלב 2: בניית האוטומט.

נבנה את האוטומט בשיטת פיצול למקרים. נשתמש בשיטה כאשר יש חלוקה ברורה למקרים בשפה.

- מתחילים מהמצב ההתחלתי.
- מטפלים בכל מקרה בענף נפרד באוטומט.



שלב 3: בדיקת האוטומט.

- הרצה על המילה a:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה aba:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה aaa:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה b:
$$q_0 \xrightarrow{b} q_3 \notin F \ .$$
- הרצה על המילה baa:
$$q_0 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \notin F \ .$$

דוגמה 2.13 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ הלא ריקות שבמקומות האי-זוגיים מופיעה האות a בלבד.

$$L = \left\{ w \in \{a,b\}^* \;\middle|\; w[i] = a \ , \ i \bmod 2 = 1 \ , w \neq \varepsilon \right\} \ .$$

פתרון:

שלב 1: הבנת השפה.

דוגמאות של מילים שבשפה:

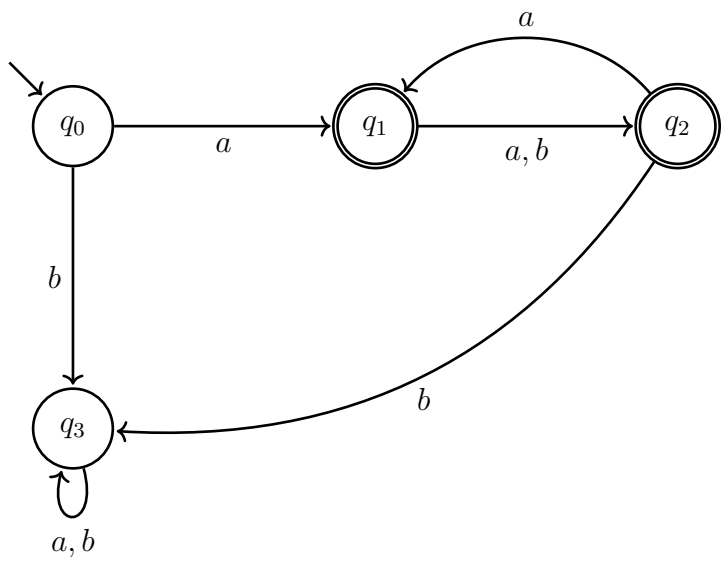
$$\begin{aligned} a &\in L \ , \\ aba &\in L \ , \\ aaa &\in L \ , \\ &\dots \ . \end{aligned}$$

דוגמאות של מילים שלא בשפה:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\notin L \ , \\ b &\notin L \ , \\ baa &\notin L \ , \\ baba &\notin L \ , \\ &\dots \ . \end{aligned}$$

הערה: האות הראשונה המילה היא אות במיקום 1 (ולא 0).

שלב 2: בניית האוטומט.



שלב 3: בדיקת האוטומט.

- הרצה על המילה a:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה aba:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה aaa:
$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{a} q_2 \xrightarrow{a} q_1 \in F \ .$$
- הרצה על המילה b:
$$q_0 \xrightarrow{b} q_3 \notin F \ .$$
- הרצה על המילה baa:
$$q_0 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{a} q_3 \notin F \ .$$

דוגמה 2.14 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שכוללות את הרצף aba. כלומר השפה

$$L_1 = \left\{ w = xabay \;\middle|\; x, y \in \{a, b\}^* \right\}$$

פתרון:

שלב 1: הבנת השפה.

דוגמאות של מילים שבשפה:

$$\begin{aligned} aba &\in L_1 \ , \\ aaaaba &\in L_1 \ , \\ bbbaba &\in L_1 \ , \\ abababa &\in L_1 \ , \\ &\dots \ . \end{aligned}$$

דוגמאות של מילים שלא בשפה:

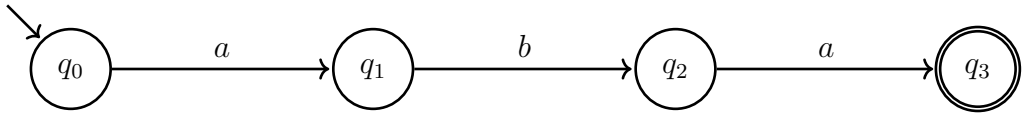
$$\begin{aligned} \varepsilon &\notin L_1 \ , \\ a &\notin L_1 \ , \\ b &\notin L_1 \ , \\ aa &\notin L_1 \ , \\ ab &\notin L_1 \ , \\ ba &\notin L_1 \ , \\ bb &\notin L_1 \ , \\ aaa &\notin L_1 \ , \\ aab &\notin L_1 \ , \\ \ldots & \ . \end{aligned}$$

שלב 2: בניית האוטומט.

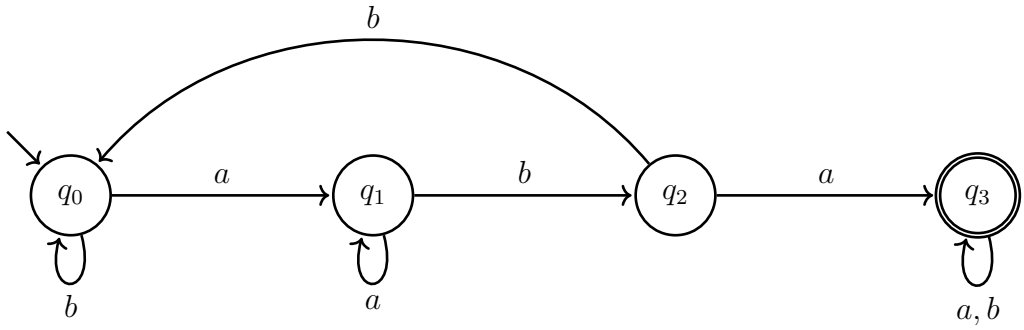
ראשית נבנה **שלד של האוטומט** שמתבסס על **מילה אופיינית**. בדוגמה שלנו מילה אופיינית היא:

$$w_0 = aba \ .$$

ז"א נבנה שלד של האוטומט שמקבל את המילה aba באופן הבא:



כעת נרחיב את השלד לאוטומט מלא.



שלב 3: בדיקת האוטומט.

- הרצה על המילה $abbabab$:

$$q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_2 \xrightarrow{a} q_3 \xrightarrow{b} q_3 \in F \ .$$

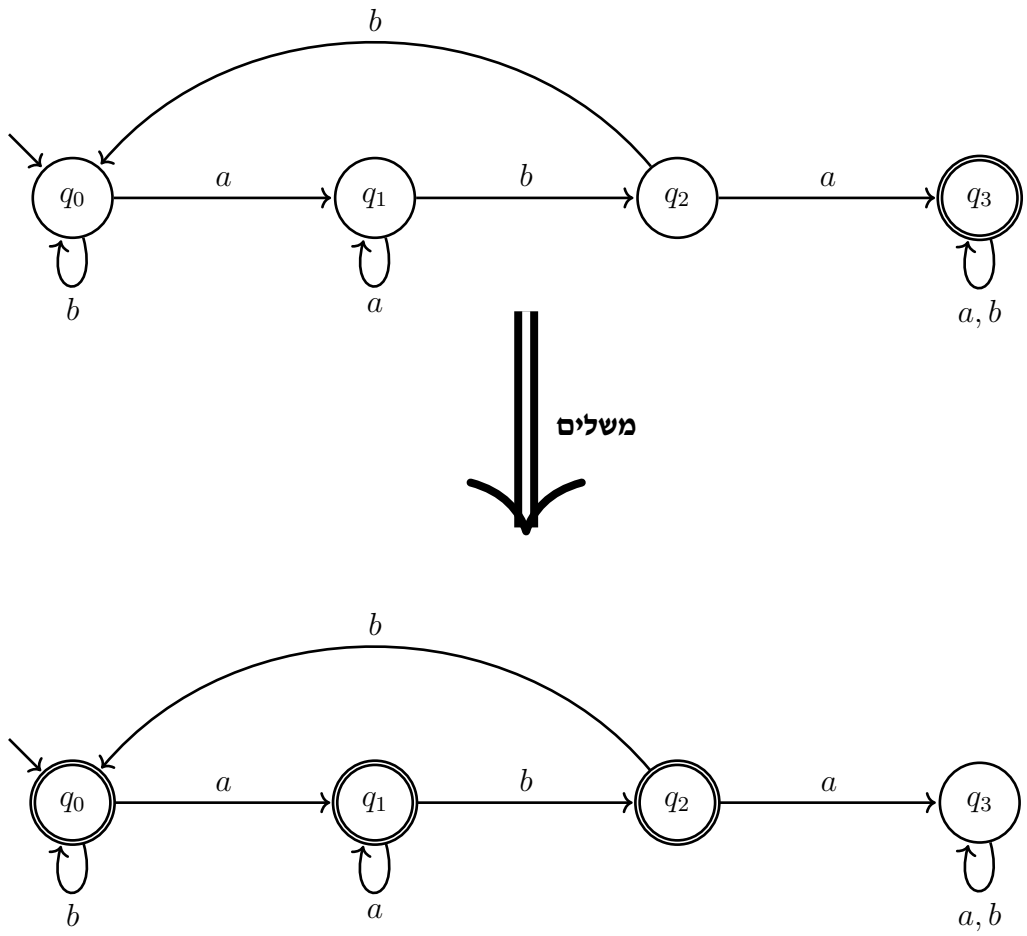
דוגמה 2.15 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שאינן כוללות את הרצף aba. כלומר, אם

$$L_1 = \left\{ w = xabay \;\middle|\; x, y \in \{a, b\}^* \right\} \ ,$$

בנו אוטומט שמקבל כל המילים מעל $\{a, b\}$ בשפה $\overline{L_1}$.

פתרון:
זוהי השפה המשלימה של השפה הקודמת בדוגמה 2.14. אפשר לבנות אוטומט לשפה משלימה באופן הבא. המצב המקבל באוטומט של השפה L_1 מציין כי המילה כוללת את הרצף aba. וזה בדיוק מה שאנחנו לא רוצים לקבל. לכן נהפוך את המצב הזה ללא מקבל. ואת המצבים הלא מקבלים נהפוך למקבלים.



דוגמה 2.16 בניית אוטומט סופי דטרמיניסטי

בנו אוטומט שמקבל את שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ המייצגות מספר המתחלק ב- 3. כלומר השפה:

$$L = \{x \in \{0,\ldots,9\}^* \mid x \bmod 3 = 0\} \ .$$

פתרון:

שלב 1: הבנת השפה.

דוגמאות של מילים שבשפה:

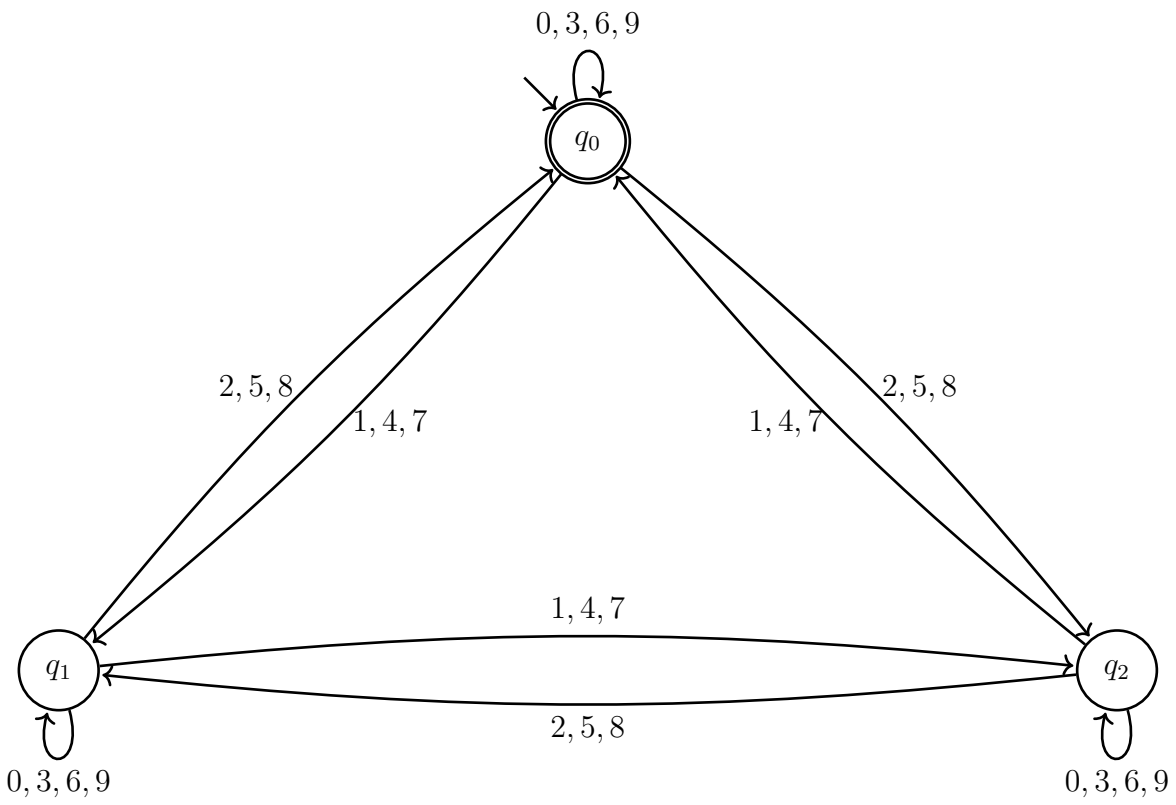
$$81 \in L \ ,$$
$$9 \in L \ ,$$
$$009 \in L \ ,$$
$$27 \in L \ ,$$
$$\ldots \ .$$

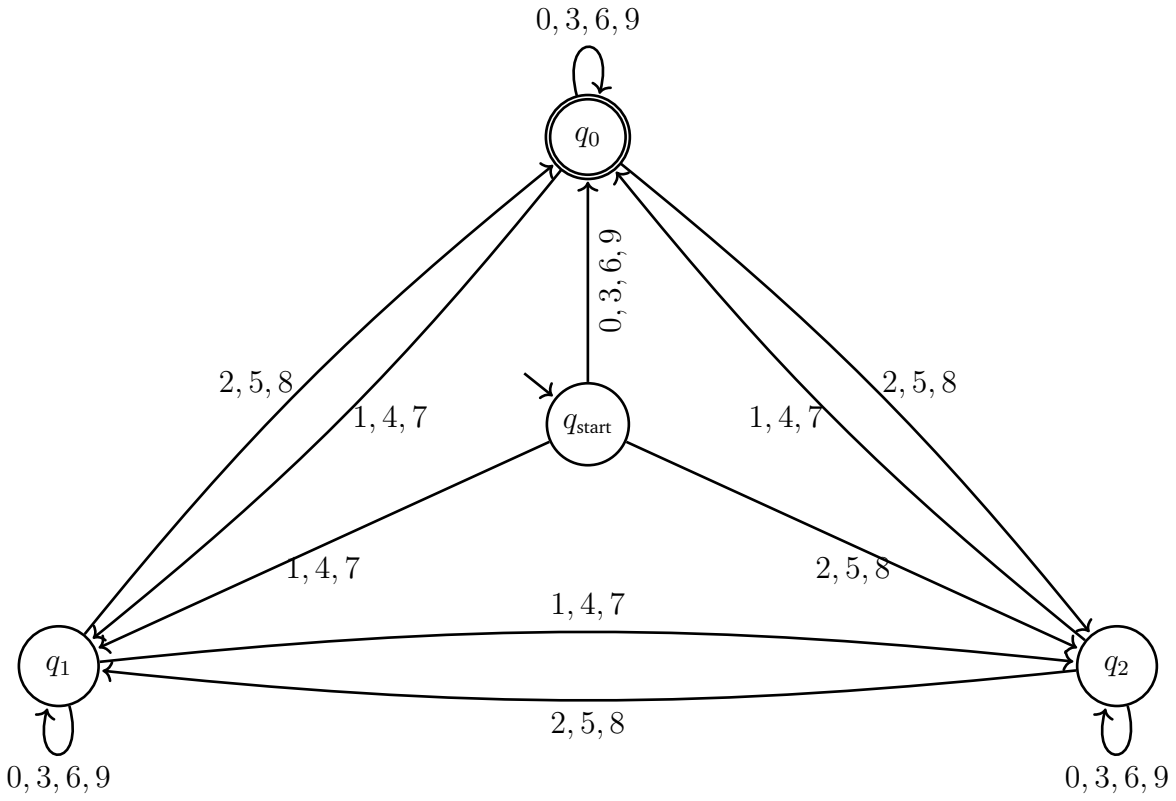
דוגמאות של מילים שלא בשפה:

$$\varepsilon \notin L \ ,$$
$$43 \notin L \ ,$$
$$10 \notin L \ ,$$
$$\ldots \ .$$

נעזר בכלל החלוקה ב- 3: אם סכום הספרות של מספר מתחלק ב- 3 אז המספר מתחלק ב- 3.

שלב 2: בניית האוטומט.





שלב 3: בדיקת האוטומט.

- הרצה על המילה 3147:

$$q_{\text{start}} \xrightarrow{3} q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{4} q_2 \xrightarrow{7} q_0 \in F \ .$$

2.3 שפות משלימות

דוגמה 2.17

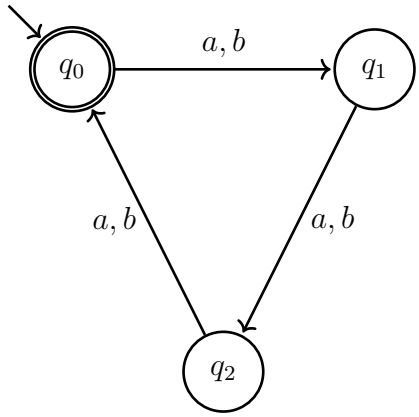
א) בנו האוטומט שמקבל שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שאורכן מתחלק ב- 3.

ב) בנו אוטומט שמקבל שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שאורכן לא מתחלק ב- 3.

פתרון:

סעיף א) יהי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
האוטומט שמקבל שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שאורכן מתחלק ב- 3.

A

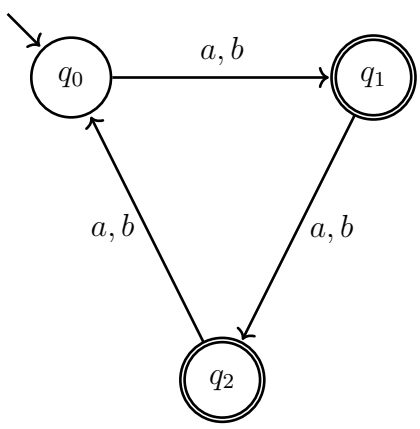


סעיף ב) יהי B אוטומט שמקבל שפת כל המילים מעל $\Sigma = \{a, b\}$ שאורכן לא מתחלק ב- 3.

$$L(B) = \overline{L(A)}$$

כאשר $\overline{L(A)} = \Sigma^* \backslash L(A)$.

B



משפט 2.1

יהי A אוטומט סופי. אז קיים אוטומט סופי B כך ש:

$$L(B) = \overline{L(A)} \ .$$

הוכחה: יהי $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. נבנה אוטומט סופי B באופן הבא:

$$B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \backslash F) \ .$$

מכאן אפשר להוכיח כי $L(B) = \overline{L(A)}$, בופן הבא. ראשית נציין כי האוטומטים A ו- B הם זהים, פרט לקבוצות המצבי קבלה שלהם: הקבוצת מצבי קבלה של B היא המשלימה של הקבוצת מצבי קבלה של A. למרות זה, כל מסלול חישוב של הרצה של A על כל מילה $w \in \Sigma^*$ זהה למסלול חישוב של הרצה של B על w. ההבדל היחיד

הוא שאם המצב הסופי של A הוא מצב קבלה, אז המצב הסופי של B לא יהיה מצב קבלה ולהפך. כעת נוכיח ש: $L(B) = \overline{L(A)}$ ע"י הכלה בשני כיוונים באופן הבא.

כיוון 1:

נוכיח כי $L(B) \subseteq \overline{L(A)}$.

יהי $w \in \Sigma^*$ מילה כלשהי כך ש: $w \in L(B)$.

$\Leftarrow$ $\exists$ הרצה של B על w שמסתיימת במצב $q \in Q \backslash F$.

$\Leftarrow$ כיוון שההרצות של A, B על w זהים, אז $\exists$ הרצה של A על w שמסתיימת במצב $q \notin F$.

$\Leftarrow$ $w \notin L(A)$.

$\Leftarrow$ $w \in \overline{L(A)}$.

$\Leftarrow$ $L(B) \subseteq \overline{L(A)}$.

כיוון 1:

נוכיח כי $\overline{L(A)} \subseteq L(B)$.

יהי $w \in \Sigma^*$ מילה כלשהי כך ש: $w \in \overline{L(A)}$.

$\Leftarrow$ $\exists$ הרצה של A על w שמסתיימת במצב $q \notin F$.

$\Leftarrow$ כיוון שההרצות של A, B על w זהים, אז $\exists$ הרצה של B על w שמסתיימת במצב $q \notin F$.

$\Leftarrow$ כיוון שההרצות של A, B על w זהים, אז $\exists$ הרצה של B על w שמסתיימת במצב $q \in Q \backslash F$.

$\Leftarrow$ $w \in L(B)$.

$\Leftarrow$ $\overline{L(A)} \subseteq L(B)$.

■

2.4 שפה רגולרית

הגדרה 2.6 שפה רגולרית

שפה L נקראת **שפה רגולרית** אם קיים אוטומט A כך ש- $L = L(A)$.

משפט 2.2

אם L רגולרית אזי $\bar{L}$ רגולרית.

הוכחה: כיוון ש- L רגולרית אז קיים אוטומט סופי A כך ש- $L = L(A)$.
נבנה אוטומט B, כך ש-

$$L(B) = \overline{L(A)} \ .$$

בניית האוטומט

אם $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ אז $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \backslash F)$.
כלומר החמישיות של האוטומטים זהות, למעט קבוצת המצבים המקבלים.
המצבים המקבלים של האוטומט B הם כל המצבים שאינם מקבלים באוטומט A.

הוכחת סגירות למשלים

נוכיח ש $w \in L(B) \iff w \in \overline{L(A)}$.

כיוון 1

יהי $w \in L(B)$.

$\Leftarrow$ על פי הגדרת שפת אוטומט מתקיים $\delta^*(q_0, w) = q \in Q \backslash F$

(כלומר קריאת המילה מהמצב ההתחלתי מגיעה לאחת המבצים המקבלים של B שע"פ הבנייה שלנו זה הקבוצה $Q \backslash F$).

$\Leftarrow$ $\delta^*(q_0, w) = q \notin F$

$\Leftarrow$ (ע"פ הגדרת שפת אוטומט) $w \notin L(A)$

$\Leftarrow$ $w \in \overline{L(A)}$.

כיוון 2

יהי $w \in \overline{L(A)}$.

$\Leftarrow$ מתקיים $\delta^*(q_0, w) \notin F$

$\Leftarrow$ $\delta^*(q_0, w) \in Q \backslash F$

$\Leftarrow$ מכיוון שהקבוצה $Q \backslash F$ היא המצבים המקבלים של B אז ע"פ ההגדרת שפט אוטומט, $w \in L(B)$.

■

2.5 אוטומט המכפלה

הגדרה 2.7 אוטומט המכפלה

יהיו $A_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_{01}, F_1)$ ו- $A_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_{02}, F_2)$ שני אוטומטים. אם $\Sigma_1 = \Sigma_2$ אז **האוטומט המכפלה** של A_1 ו- A_2 הוא אוטומט:

$$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

כך ש:

- $Q = Q_1 \times Q_2$
- $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$

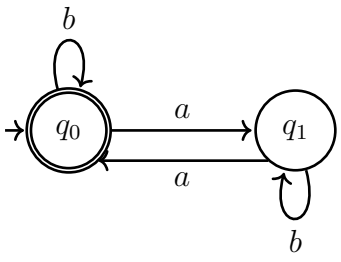
- $\delta : \Sigma \times (Q_1 \times Q_2) \to Q_1 \times Q_2$ כאשר הפונקצית המעברים δ של האוטומט המכפלה מוגדרת:

$$\delta\left(\left(q_1, q_2\right), \sigma\right) = \left(\delta_1\left(q_1, \sigma\right), \delta_2\left(q_2, \sigma\right)\right) \ .$$

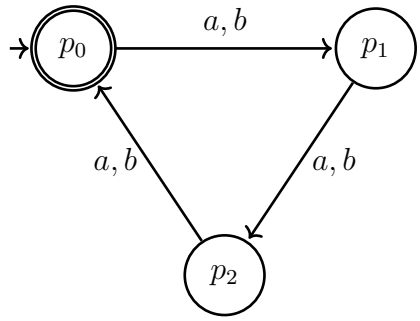
- $q_0 = (q_{0_1}, q_{0_2})$
- $F = F_1 \times F_2$.

דוגמה 2.18

A_1



A_2



פתרון: