פרק 1: משחקים בצורה רחבה

1.1 גרפים ועצים

הגדרה 1.1 גרף מכוון

גרף מכוון סופי הוא זוג $G = (V, E)$ שבו:

- V הוא קבוצה סופית של הקודקודים של הגרף.

  בדרך כלל קודקודים יסומנו $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

- $E \supseteq V \times V$ הוא קבוצה סופית של הצלעות של הגרף.

  אם V הוא הקבוצת הקודקודים של G, ואם קיימת צלע מקודקוד $x_i \in V$ לקודקוד $x_j \in V$, הצלע הזו תסומן

$$x_i x_j \in E \ .$$

הגדרה 1.2 קודקוד אב וקודקוד בן

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון קשיר. אם קיימת צלע $x_1 x_2 \in E$, כלומר אם קיימת צלע היוצאת מקודקוד x_1 ונכנסת לקודקוד x_2, אומרים כי:

- x_2 הוא **בן** של הקודקוד x_1,
- x_1 הוא **אב** של הקודקוד x_2.

אם $x \in V$ קודקוד של G. הקבוצת כל הבנים של x תסומן $c(x)$, וקבוצת כל האבות של x תסומן $p(x)$:

$$c(x) \triangleq \text{"קבוצת הבנים של } x\text{"} \ ,$$
$$p(x) \triangleq \text{"קבוצת האבות של } x\text{"} \ .$$

הגדרה 1.3 עץ מכוון

עץ מכוון הוא שלשה (V, E, x_0) כאשר (V, E) גרף מכוון ו- $x_0 \in V$ הוא קודקוד של G, שנקרא **השורש** של העץ, כך שהתנאים הבאים מתקיימים.

1) לא קיימות צלעות שנכנסות לשורש x_0.

2) לכל קודקוד פרט לשורש, $x \in V$ ($x \neq x_0$), קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליה.

3) G לא מכיל מחזורים.

משפט 1.1 קיום אב יחיד לכל בן בעץ

אם (V, E, x_0) הוא עץ אז לכל קודקוד $x \in V$ מתקיים $x = x_0$ או ל- x קיים אב אחד בדיוק.

הוכחה: יהי $T = (V, E, x_0)$ עץ. יהי $x \in V$ קודקוד ונניח ש- $x \neq x_0$. נראה כי ל- x קיים אב ואז נראה כי האב של x הוא יחודי.

$\Leftarrow$ נניח של- x לא קיים אב.

$\Leftarrow$ לא קיימת צלע שנכנסת אליו.

$\Leftarrow$ הגענו לסתירה לכך שבעץ, לכל קודקוד (חוץ מהשורש) קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליו.

לכן לכל קודקוד $x \neq x_0$ קיים אב.

הוכחנו קיום אב לכל קודקוד פרט לשורש.

כעת נוכיח כי האב של x הוא יחיודי.

נניח שקיים קודקוד x בעץ ולו יש שתי אבות: x' ו- x''.

$\Leftarrow$ קיימות שתי צלעות שנכנסות אליו: $xx' \in E$ ו- $xx'' \in E$.

$\Leftarrow$ הגענו לסתירה לכך שבעץ לכל קודקוד (חוץ מהשורש) קיימת צלע אחת בדיוק שנכנסת אליו.

■

משפט 1.2 בעץ קיים מסלול יחיד מהשורש לכל קודקוד

אם (V, E, x_0) הוא עץ אז קיימת מסלול יחיד מהשורש x_0 לכל קודקוד $x \in V$.

הוכחה: נוכיח קיום מסלול מ- x_0 לכל קודקוד x באינדוקציה. נסמן ב- d את האורך של המסלול, כאשר אורך של מסלול מוגדר להיות מספר הקודקודים שהמסלול עובר.

<u>שלב הבסיס: $d = 1$</u>

אם $d = 1$ אז המסלול הוא מ- x_0 לעצמו ולכן הטענה נכונה באופן טריוויאלי.

<u>שלב המעבר</u>

נניח כי הטעה נכונה עבור $d = k$. זאת היא ההנחת האינדוקציה שלנו. נוכיח את הטענה למקרה $d = k + 1$ באופן הבא.

- אם x קודקוד בעץ במרחק $d = k + 1$ מ- x_0

$\Leftarrow$ ל- x קיים אב $p(x) = x'$.

$\Leftarrow$ x' במרחק k מ- x_0.

$\Leftarrow$ לפי ההנחת האינדוקציה קיים מסלול מ- x_0 ל- x',
ומכיוון ש- x' הוא האב של x אז קיים מסלול מ- x' ל- x.

$\Leftarrow$ קיים מסלול מ- x_0 ל- x.

הוכחנו קיום מסלול מ- x_0 לכל קודקוד x. כעת נוכיח כי המסלול יחודי באופן הבא.

- נניח בשלילה כי קיים קודקוד x עבורו קיימים שני מסלולים מ- x_0 ל- x.

$\Leftarrow$ קיים קודקוד ראשון y שבו המסלולים מסתעפים וקודקוד האחרון y' שלפניו המסלולים היו שונים.

$\Leftarrow$ לקודקוד y' נכנסות שתי צלעות שונות.

$\Leftarrow$ סתירה לכך שבעץ לכל קודקוד יש בדיוק צלע אחת שנכנסת אליו.

■

משפט 1.3 כל מסלול בעץ הוא יחודי

אם (V, E, x_0) הוא עץ ואם קיים מסלול מקודקוד $x \in V$ לקודקוד $x' \in V$ אז הוא יחודי.

הוכחה: יהיו $x, x' \in V$ שני קודקודים שונים של העץ. נוכיח את הטענה דרך השלילה.

- אם קיימים קודקודים $x, x' \in V$ שביניהם קיימים שני מסלולים שונים.

$\Leftarrow$ קיים קודקוד ראשון y שבו המסלולים מסתעפים וקודקוד האחרון y' שלפניו המסלולים היו שונים.

$\Leftarrow$ לקודקוד y' נכנסות שתי צלעות שונות.

$\Leftarrow$ סתירה לכך שבעץ לכל קודקוד יש בדיוק צלע אחת שנכנסת אליו.

■

1.2 הגדרת צורה הרחבה של משחק

התיאור הכי טבעי של משחק הוא **הצורה הרחבה**.

הגדרה 1.4 חלוקה

תהי B קבוצה לא ריקה. **חלוקה** היא סדרה

$$(B_i)_{i=1}^{k} = (B_1,\ B_2,\ \dots\ B_k)$$

המקיימת התנאים הבאים:

1) לכל $1 \le i \le k$, B_i היא תת-קבוצה של B:

$$B_i \subseteq B\ , \qquad 1 \le i \le k$$

2) התתי-קבוצות זרות. כלומר כל חיתוך של כל מספר סופי של תת-קבוצות הוא ריק. כלומר לכל תת-קבוצה $X \subseteq \{1, \dots, k\}$:

$$\bigcap_{x \in X} B_x = \emptyset\ .$$

3) האיחוד של כל תתי-קבוצות הו הקבוצה B:

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = B\ .$$

הגדרה 1.5 משחק בצורה רחבה

משחק בצורה רחבה הוא שביעייה סדורה:

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right) \ .$$

המרכיבים של המשחק, Γ הם מוגדרים באופן הבא.

1) $N =$ קבוצה סופית של **שחקנים**.

(x_0, V, E) הוא עץ שנקרא **עץ המשחק**.

2) $x_0 =$ **השורש של העץ**, שהוא קודקוד שבו השחקן הראשון בתור מקבל ההחלטה הראשונה בין הפעולות המייוצגות ע"י הצלעות שיוצאות ממנה.

3) $V =$ קבוצת **הקדקודים** של עץ המשחק.

בכל קדקוד שחקן מקבל החלטה בין פעולות.

4) $E =$ קבוצת **הצלעות** של עץ המשחק.

כל צלע מייצגת פעולה של אותו שחקן שקיבל החלטה בקודקוד שממנו הצלע יצאה.

5) $(V_i)_{i\in N} = (V_1, V_2, V_3, \ldots)$ היא **חלוקה** של הקבוצת הקודקודים שאינם עלים כך ש:

- $V_1 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן 1 מקבל החלטה,
- $V_2 =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן 2 מקבל החלטה.

במקרה הכללי:

- $V_j =$ הקבוצה של כל הקדקודים שבהן שחקן j מקבל החלטה.

6) $O =$ **קבוצת העלים** של העץ.

כלומר $O \subset V$ היא תת-קבוצת קודקודים של העץ שמכילה כל הנקודות סיום של העץ.

7) $(u_i)_{i\in N} = (u_1, u_2, \ldots)$ כאשר u_i היא **פונקצית התשלום** של שחקן i, שמתאימה לכל עלה בעץ המשחק תשלום לשחקן i. (למטה בהגדרה 1.9 נתן הגדרה שקולה של פונקצית התשפלום במונחי אסטרטגיות.)

דוגמה 1.1 (משחק התאמת המטבעות)

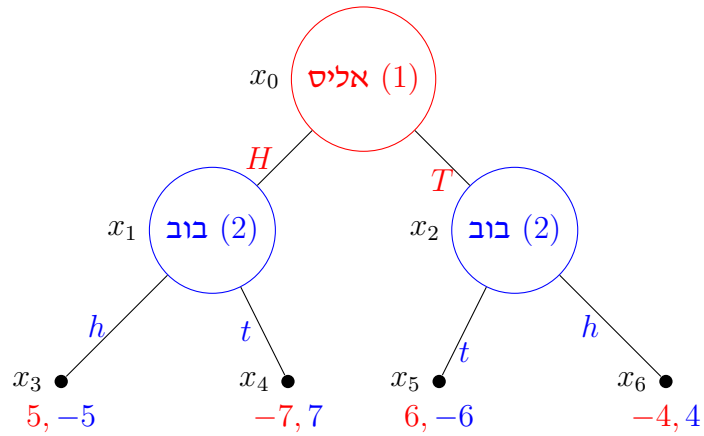
אליס בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי). היא רושמת בחירותה על פתק, חותמת עליו ומעבירה אותו לשופט. אחר כך בוב בוחר h (עץ) או t (פלי), רושם בחירותו על פתק, חותם עליו ומעביר אותו לשופט.

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס ₪ 5.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר t ₪ 7.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר h אז בוב משלם לאליס ₪ 6.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר t אז אליס משלמת לבוב ₪ 4.

רשמו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:

תהי אליס שחקן I ובוב שחקן II. העץ המשחק הוא מתואר בתרשים למטה:



הצורה הרחבה של המשחק היא:

$$\Gamma = (N, V, E, x_0, (V_I, V_{II}), O, (u_I, u_{II})) \ ,$$

כאשר הרכיבים של המשחק מפורטים למטה.

1) קבוצת השחקנים:

$$N = \{\text{אליס}, \text{בוב}\} = \{I, II\} \ .$$

2) השורש העץ: x_0.

3) קבוצת הקודקודים:

$$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

4) קבוצת הצלעות:

$$E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\} \ .$$

5) קבוצת הקודקודים של אליס (שחקן I):

$$V_I = \{x_0\} \ .$$

קבוצות הקודקודים של בוב (שחקן II):

$$V_{II} = \{x_1 \ , \ x_2\} \ .$$

6) קבוצת העלים:

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

7) הפונקציית התשלום של שחקן I היא:

$$\begin{aligned} u_I(x_3) &= 5 \ , & u_{II}(x_3) &= -5 \ , \\ u_I(x_4) &= -7 \ , & u_{II}(x_4) &= 7 \ , \\ u_I(x_5) &= -4 \ , & u_{II}(x_5) &= 4 \ , \\ u_I(x_6) &= 6 \ , & u_{II}(x_6) &= -6 \ . \end{aligned}$$

■

הגדרה 1.6 פונקצית הפעולות

הפונקצית הפעולות, $A(x)$ מתאימה לקודקוד x, כל הפעולות האפשריות ששחקן יכול לבחור בקודקוד x.

דוגמה 1.2 (המשך של דוגמה 1.1)

עבור המשחק של דוגמה 1.1:

$$\begin{aligned} A(x_0) &= (H,T) \ , \\ A(x_1) &= (h,t) \ , \\ A(x_2) &= (h,t) \ . \end{aligned}$$

הגדרה 1.7 אסטרטגיה

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה, ויהי $V_i = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ קבוצת הקודקודים של שחקן $i \in N$.

- **אסטרטגיה** של שחקן $i \in N$ היא פונקציה $s_i(x)$ המתאימה לכל קודקוד $x \in V_i$ פעולה ב- $A(x)$.

  אסטרגטיה יחידה, s_i של שחקן i תסומן כסדרת פעולות בכל קודקוד:

$$s_i = (s_i(x_1),\ s_i(x_2),\ \ldots\ , s_i(x_n)) = (a_1,\ a_2,\ \ldots\ , a_n) \ , \qquad a_j \in A(x_j) \ .$$

- **הקבוצת האסטרטגיות** של שחקן $i \in N$ תסומן S_i ותוגדר:

$$S_i = \left\{ \ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n) \ \middle|\ a_1 \in A(x_1)\ , \quad \ldots \quad ,\ a_n \in A(x_n) \ \right\} \ .$$

  כלומר, הקבוצת אסטרטגיות S_i היא אוסף כל האסטרטגיות האפשריות של שחקן i במשחק Γ.

- נניח ששחקן I בוחר באסטרטגיה $s_I \in S_I$, שחקן II בוחר באסטרטגיה $s_{II} \in S_{II}$, ובאופן כללי נניח כי שחקן $i \in N$ בוחר באסטרטגיה $s_i \in S_i$.

  וקטור אסטרטגיה של המשחק הוא וקטור של הפונקציות אסטרטגיות של כל השחקנים:

$$s = (s_i)_{i\in N} = (s_I,\ s_{II},\ \ldots\ )$$

הגדרה 1.8 קבוצת ידיעה

יהי $\Gamma = \left(N, V, E, x_0, (V_i)_{i\in N}, O, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה רחבה. **הקבוצת ידיעה** של שחקן $i \in N$ תסומן U_i ותוגדר הקבוצת זוגות הבאה:

$$\bigcup_{x\in V_i} (\ x\ ,\ A(x)\ )\ ,$$

ז"א U_i מכילה כל הזוגות, כאשר כל זוג מכיל קודוד x והקבוצות הפעולות האפשריות $A(x)$.

דוגמה 1.3 (מטבע וקלפים)

אליס ובוב משחקים משחק עם הכללים הבאים.

- שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
- אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
- אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

התשלומים של המשחק הם כמפורטים למטה.

- אם אליס בוחרת H ובוב בחר Q אז בוב משלם לאליס ₪ 50.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪ 70.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב משלם לאליס ₪ 60.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס משלם לבוב ₪ 40.

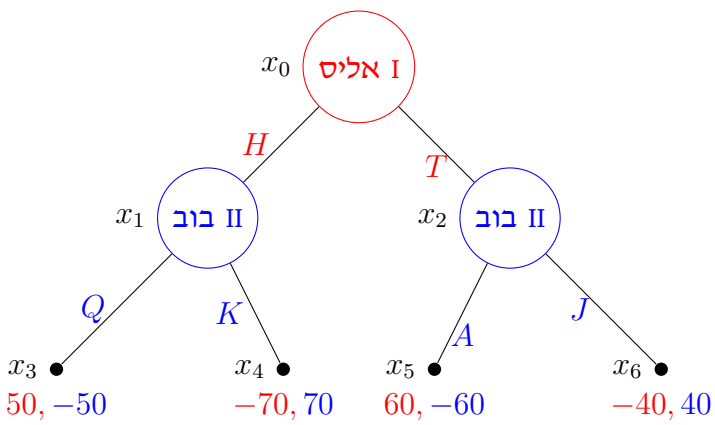
סעיף 1) רשמו את המשחק בצורה רחבה.

סעיף 2) רשמו את הקבוצות ידיעה של אליס ושל בוב.

סעיף 3) רשמו את הקבוצות אסטרטגיות של אליס ושל בוב.

פתרון:

סעיף 1)



סעיף 2)

- לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 שבו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T. לכן הקבוצת קודקודים של שחקן I היא

$$V_I = \{ \ x_0 \ \}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן I הן:

$$U_I = \{(x_0, (H, T))\} \ .$$

- הקבוצת קודקודים של שחקן II היא:

$$V_{II} = \{ \ x_1 \ , \ x_2 \ \}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן II הן:

$$U_{II} = \{ \ (x_1, (Q, K)) \ , \ (x_2, (A, J)) \ \} \ .$$

סעיף 3)

- $$S_I = \{(a_1) \mid a_1 \in A(x_0)\} = \{(a_1) \mid a_1 \in (H,T)\} = \{(H)\ ,\ (T)\}\ .$$

- $$\begin{aligned} S_{II} &= \{(a_1,a_2) \mid a_1 \in A(x_1), a_2 \in A(x_2)\} \\ &= \{(a_1,a_2) \mid a_1 \in (Q,K)\,, a_2 \in (A,J)\} \\ &= \{(Q,A)\ ,(Q,J)\ ,\ (K,A)\ ,\ (K,J)\}\ . \end{aligned}$$

■

הגדרה 1.9 פונקצית תשלום

נתון משחק n-שחקנים.

- **הפונקצית התשלום של שחקן** i, מסומנת u_i, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)$ של המשחק תשלום לשחקן i:

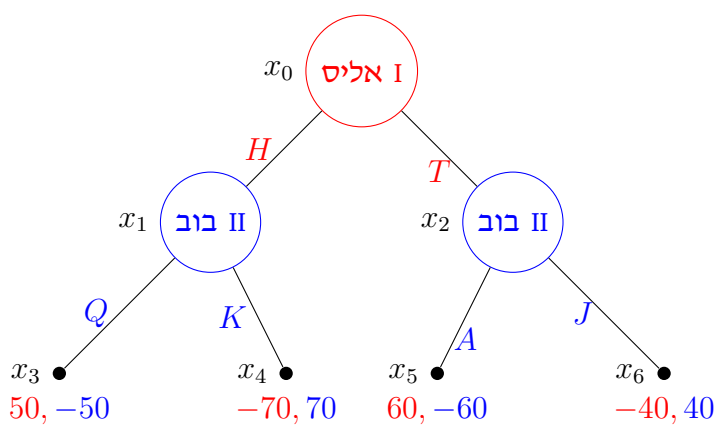
$$u_i\,(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)\ =\ \text{"תשלום לשחקן } i\text{"}\ .$$

- **הפונקצית התשלום של המשחק**, מסומנת u, מתאימה לכל וקטור אסטרטגיה $(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)$ וקטור $(u_1,\ \dots\ u_n)$ כאשר u_i הוא התשלום לשחקן i:

$$u\,(s_1,\ s_2,\ \dots\ s_n)\ =\ (u_1,\ \dots\ u_n)\ .$$

דוגמה 1.4 (מטבע וקלפים: המשך של דוגמה 1.3)

נתון המשחק בעל עץ המשחק הבא:



סעיף א) רשמו את כל הוקטורי אסטרטגיות של המשחק.

סעיף ב) רשמו את הפונקצית התשלום של כל השחקן והפונקצית התשלום של המשחק.

פתרון:

סעיף א) בדוגמה 1.3 מצאנו אמ הקבוצות אסטרטגיות של שחקן I שחקן II:

$$\begin{aligned} S_I &= \{(H)\ ,\ (T)\}\ , \\ S_{II} &= \{(Q,A)\ ,\ (Q,J)\ ,\ (K,A)\ ,\ (K,J)\}\ . \end{aligned}$$

- נניח כי אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = (Q, A)$. הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = \big(H, (Q, A)\big) \ .$$

- אם אליס משחקת לפי האסטרטגיה $s_I = H$ ובוב משחק לפי האסטרטגיה $s_{II} = (Q, J)$. הווקטור אסטרטגיות של המשחק הוא

$$s = (s_I, s_{II}) = \big(H, (Q, J)\big) \ .$$

- וכן הלאה.

בסה"כ למשחק הזה יש 8 ווקטורי אסטרטגיות:

$$s = (s_I, s_{II}) = \begin{cases} \big(H \ , \ (Q, A)\big) \\ \big(H \ , \ (K, A)\big) \\ \big(H \ , \ (Q, J)\big) \\ \big(H \ , \ (K, J)\big) \\ \big(T \ , \ (Q, A)\big) \\ \big(T \ , \ (K, A)\big) \\ \big(T \ , \ (Q, J)\big) \\ \big(T \ , \ (K, J)\big) \end{cases}$$

סעיף ב) הפונקצית תשלום של המשחק הינו

$$\begin{aligned} u\big(H \ , \ (Q, A)\big) &= (50, -50) \ , \\ u\big(H \ , \ (Q, J)\big) &= (50, -50) \ , \\ u\big(H \ , \ (K, A)\big) &= (-70, 70) \ , \\ u\big(H \ , \ (K, J)\big) &= (-70, 70) \ , \\ u\big(T \ , \ (Q, A)\big) &= (60, -60) \ , \\ u\big(T \ , \ (Q, J)\big) &= (-40, 40) \ , \\ u\big(T \ , \ (K, A)\big) &= (60, -60) \ , \\ u\big(T \ , \ (K, J)\big) &= (-40, 40) \ . \end{aligned}$$

■

1.3 משחקים עם ידיעה שלמה והצורה אסטרטגית

הגדרה 1.10 משחק עם ידיעה שלמה

- בכל שלב במשחק, כל שחקן מודע לכלל ההחלטות שהתקבלו על ידי השחקנים האחרים בשלבים המוקדמים יותר.

- לפיכך, השחקן יודע בדיוק אילו פעולות ננקטו, ובעת קבלת ההחלטה, הוא יודע בוודאות באיזה צומת הוא נמצא בעץ המשחק.

דוגמה 1.5 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה שלמה)

נתבונן על משחק עם הכללים הבאים:

- שחקן I (אליס) בוחר אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
- אחר כך, אם אליס בוחרת H אז שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).
- אחרת אם אליס בוחרת T בוב בוחר קלף נסיך (J) או קלף אס (A).

התשלומים של המשחק:

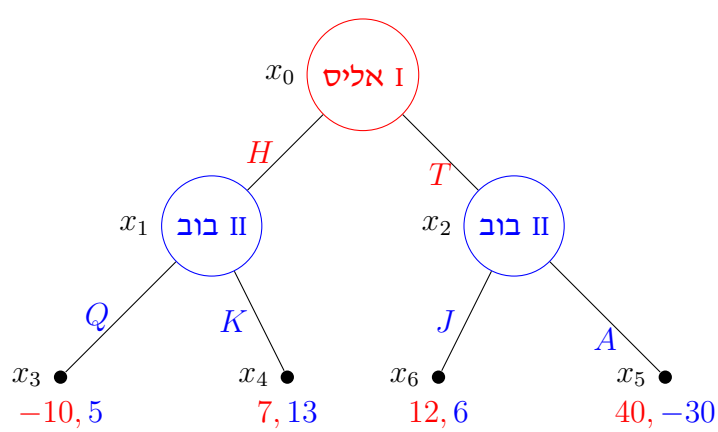
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב מקבל ₪ 5 ואליס מפסידה ₪ 10
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס מקבלת ₪ 7 ובוב מקבל ₪ 13
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר J אז בוב מקבל ₪ 6 ואליס מקבלת ₪ 12.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר A אז אליס מקבלת ₪ 40 ובוב מפסיד ₪ 30

א) רשמו את המשחק בצורה רחבה.

ב) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

פתרון:

סעיף א)



סעיף ב)

- לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T.
  ז"א הקבוצת קודקודים של שחקן I היא:

$$V_I = \{x_0\}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן I הן:

$$U_I = \{(x_0, (H, T))\} \ .$$

מכאן הקבוצת האסטרטגיות של שחקן I היא:

$$S_I = \{(H)\ ,\ (T)\}\ .$$

- לשקחן II יש שני קדקודים x_1, x_2 בהם הוא מקבל החלטה. לכן הקבוצת קודקודים של שחקן II היא:

$$V_{II} = \{x_1\ ,\ x_2\ \}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן II הן:

$$U_{II} = \{(x_1, (Q, K))\ ,\ (x_2, (J, A))\ \}\ .$$

מכיוון שלשחקן II יש שתי קבוצות ידיעה x_1, x_2 ובכל אחד יש שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = \{(Q, J)\ ,\ (Q, A)\ ,\ (K, J)\ ,\ (K, A)\}\ .$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)

הווקטורי האסטרטגיות של המשחק הן:

$$(s_I, s_{II}) = \begin{cases} (H, (Q, A)) \\ (H, (Q, J)) \\ (H, (K, A)) \\ (H, (K, J)) \\ (T, (Q, A)) \\ (T, (Q, J)) \\ (T, (K, A)) \\ (T, (K, J)) \end{cases} .$$

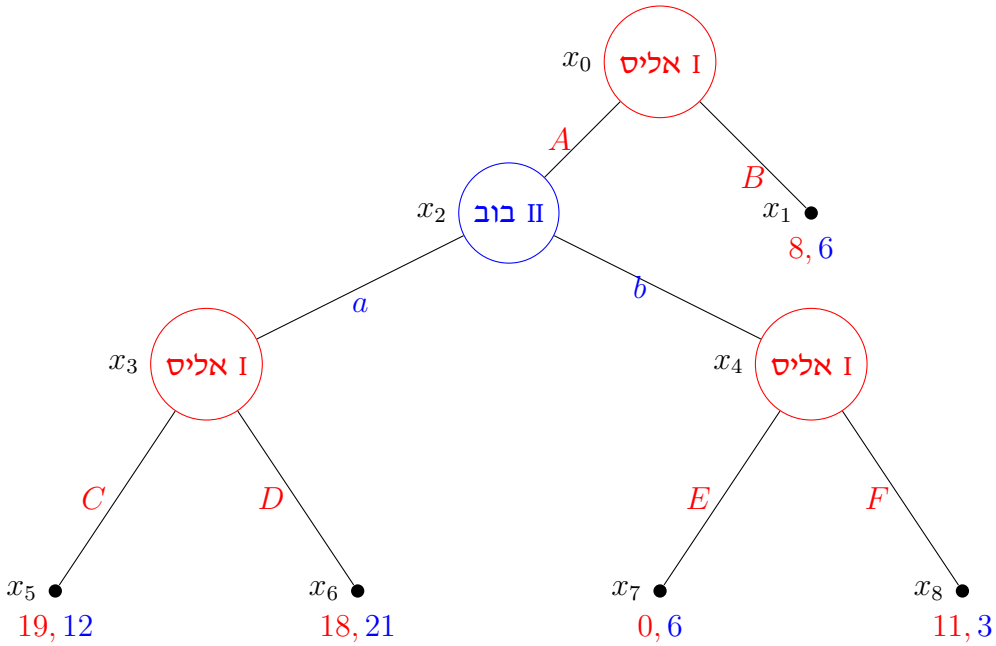
ניתן להציג את הפונקצית התשלומים בצורה אסטרטגית של המשחק בטבלה הבאה:

$I \backslash II$	(Q, J)	(Q, A)	(K, J)	(K, A)
H	$-10, 5$	$-10, 5$	$7, 13$	$7, 13$
T	$12, 6$	$40, -30$	$12, 6$	$40, -30$

■

דוגמה 1.6 (מעבר מצורה רחבה לצורה אסטרטגית)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:
במשחק הזה, אליס (שחקן I) פותח עם המהלך הראשון, ואחר כך בוב מבצע המהלך השני, ואז אליס מבצע מהלך שוב.

המשחק הוא משחק עם ידיעה שלמה.

- הקבוצת קודקודים של אליס היא:

$$V_I = \{x_0, x_3, x_4\}$$

והקבוצות ידיעה של אליס הן:

$$U_I = \{(x_0, (A, B)), (x_3, (C, D)), (x_4, (E, F))\}$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 \times 2 = 8$ קבוצות אסטרטגיות:

$$S_I = \{(A, C, E)\ ,\ (A, C, F)\ ,\ (A, D, E)\ ,\ (A, D, F)\ ,\ (B, C, E)\ ,\ (B, C, F)\ ,\ (B, D, E)\ ,\ (B, D, F)\}\ .$$

- הקבוצת קודקודים של בוב היא:

$$V_{II} = \{x_2\}$$

והקבוצות ידיעה של בוב הן:

$$U_{II} = \{(x_2, (a, b))\}\ .$$

בקבוצות ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 קבוצות אסטרטגיות:

$$S_{II} = \{(a)\ ,\ (b)\}\ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
(A,C,E)	$19,12$	$0,6$
(A,C,F)	$19,12$	$11,3$
(A,D,E)	$18,21$	$0,6$
(A,D,F)	$18,21$	$11,3$
(B,C,E)	$8,6$	$8,6$
(B,C,F)	$8,6$	$8,6$
(B,D,E)	$8,6$	$8,6$
(B,D,F)	$8,6$	$8,6$

■

1.4 משחקים עם ידיעה לא שלמה

הגדרה 1.11 משחק עם ידיעה לא שלמה

משחק עם ידיעה לא שלמה הוא משחק שבו:

- קיים שחקן i כך שאם V_i הקבוצת קודקודים שלו, קיימת תת-קבוצת קודקודים $V_i' \subseteq V_i$ שבה שחקן i לא יודע אילו פעולה ביצע השחקן בקוקוד אב של הקודקודים ב- V_i'.
- לכן, כאשר מגיע תורו של אותו שחקן, הוא אינו יודע באיזה צומת הוא נמצא בתוך עץ המשחק.
- התת-קבוצה V_i' תקרא **קבוצת ידיעה לא שלמה**.

דוגמה 1.7 (משחק מטבע וקלף עם ידיעה לא שלמה)

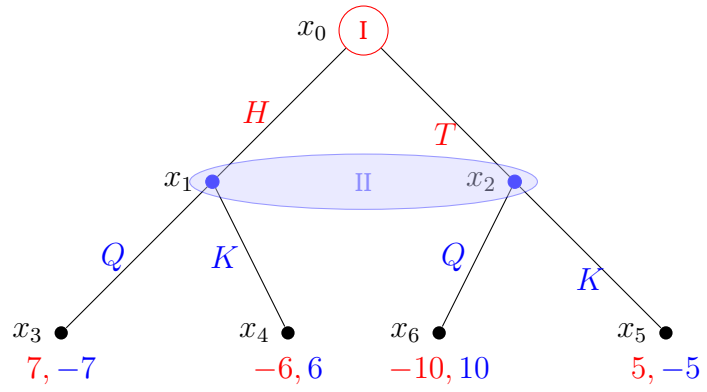
הכללים של המשחק הם:

- שחקן I (אליס) בוחרת אחד הצדדים של מטבע, H (עץ) או T (פלי).
- אחר כך, **בלי ידיעה של הבחירה של אליס**, שחקן II (בוב) בוחר קלף מלכה (Q) או קלף מלך (K).

בשונה לדוגמה הקודמת, שחקן II לא יודע את ההחלטה של שחקן I עד סוף המשחק.
התשלומים של המשחק הם:

- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר Q אז בוב משלם לאליס ₪ 7.
- אם אליס בוחרת H ובוב בוחר K אז אליס משלם לבוב ₪ 6.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר Q אז אליס משלם לבוב ₪ 10.
- אם אליס בוחרת T ובוב בוחר K אז בוב משלם לאליס ₪ 5.

נרשום את המשחק **בצורה רחבה**:



- לשחקן I יש קדקוד אחד x_0 בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות H, T. לכן הקבוצת הקודקודים שלה היא:

$$V_I = \{ \ x_0 \ \}$$

והקבוצות הידיעה של אליס הן:

$$U_I = \{ \ (x_0, (H, T)) \ \} \ .$$

לפיכך הקבוצת האסטרטגיות של אליס היא:

$$S_I = \{(H), (T)\} \ .$$

- בניגוד לדוגמה הקודמת, בוב (שקחן II) לא יודע איזה אופציה אליס בחרה: H או T. לכן בוב לא יודע באיזה קדקוד הוא נמצא: x_1 או x_2. מכיוון שהוא לא יודע מה ההחלטה של אליס, בחירת הפעולות הזמינות לו בקודקודים x_1 ו- x_2 זהה. לכן הקבוצת הפעולות שיוצאות מקודקוד x_1 זהה קבוצת הפעולות שיוצאות מקודקוד x_2:

$$A(x_1) = A(x_2) \ .$$

אומרים כי הצומת במשחק עם של הקודקודים x_1 ו- x_2 הוא **צומת ללא ידיעה שלמה**. אנחנו רושמים את הקודקודים בצומת ללא ידיעה שלמה כקודקוד אחד. כלומר הקבוצת קודקודים של בוב היא:

$$V_{II} = \{x_1 x_2\}$$

והקבוצות ידיעה של בוב היא:

$$U_{II} = \{(x_1 x_2, (K, Q))\} \ .$$

לכן הקבוצת האסטרטגיות של בוב היא:

$$S_{II} = \{ \ (Q) \ , \ (K) \ \} \ .$$

נשים לב כי מכל אחד של הקדקודים x_1 ו- x_2 יוצאות אותן קבוצת פעולות. אחרת בוב היה יודע מה ההחלטה של אליס.

כעת נרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק:

$I \backslash II$	Q	K
H	$7, -7$	$-6, 6$
T	$-10, 10$	$5, -5$

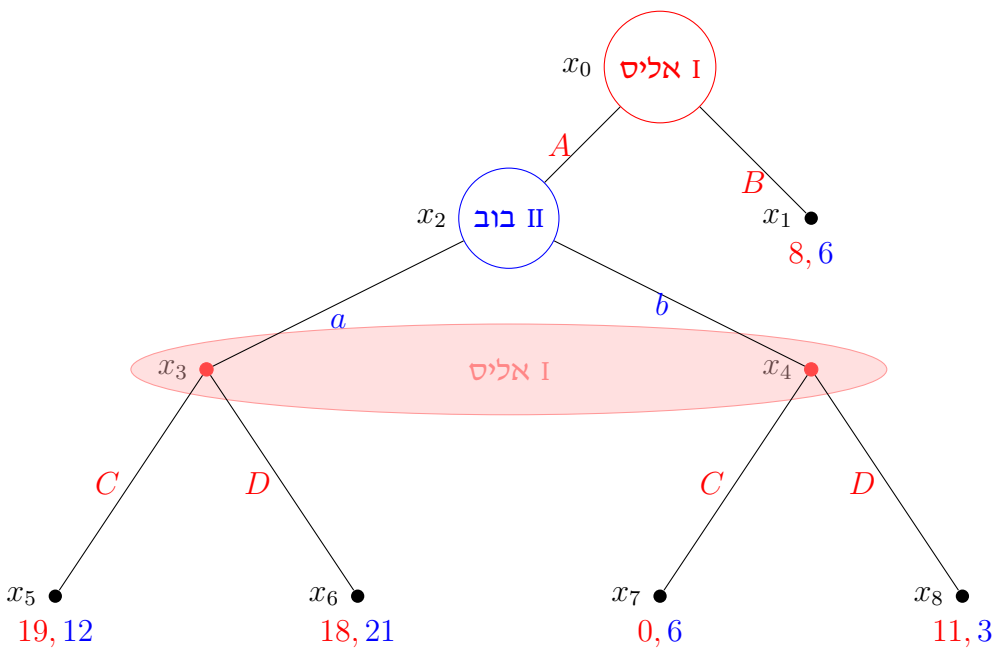
משפט 1.4 פעולות שיוצאות מקבוצת ידיעה לא שלמה

אם x, x' הם קודודים של אותה קבוצת ידיעה לא שלמה, אז הקבוצת הפעולות של x ו- x' זהות:

$$A(x) = A(x') \ .$$

דוגמה 1.8 (משחק עם ידיעה לא שלמה)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

שימו לב: בדומה לדוגמה הקודמת, הצמתים x_3 ו- x_4 שייכים לאותה קבוצת מידע של אליס, כיוון שהיא אינה מודעת למהלך שבחר בוב בצומת x_2 (כלומר, אינה יודעת אם בוב בחר a או b). מסיבה זו, קבוצת הפעולות הזמינות לאליס חייבת להיות זהה בשני הצמתים הללו. אם היו הפעולות האפשריות ב- x_3 וב- x_4 שונות זו מזו, אליס הייתה יכולה להסיק מתוך קבוצת הפעולות העומדות לרשותה מהי הבחירה שביצע בוב קודם לכן. לדוגמה, אילו היו זמינות לאליס הפעולות E ו- F בצומת x_4, אך לא ב- x_3, היא הייתה מזהה בוודאות שהיא נמצאת ב- x_4 (ובכך מסיקה שבוב בחר b). באופן דומה, אילו הייתה לה בחירה בין C ו- D בצומת x_3 בלבד, היא הייתה יודעת שהיא נמצאת ב- x_3 (ומסיקה שבוב בחר a).

- הקבוצת הקודקודים של אליס היא:

$$V_I = \{x_0 \ , \ x_3 x_4\}$$

והקבוצות הידיעה שלה הן:

$$U_I = \{(x_0 \ (A, B)) \ , \ (x_3 x_4 \ (C, D)) \ \} \ .$$

בכל אחד של הקדקודים האלה לאליס יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לה $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות:

$$S_I = \{(A, C) \ , \ (A, D) \ , \ (B, C) \ , \ (B, D)\} \ .$$

- הקבוצת הקודקודים של בוב היא:

$$V_{II} = \{x_2\}$$

והקבוצות הידיעה של בוב הן:

$$U_{II} = \{(x_2, (a, b))\} \ .$$

בקבוצת ידיעה הזאת של בוב יש 2 פעולות אפשריות לכן יהיו לו 2 אסטרטגיות:

$$S_{II} = \{(a) \ , \ (b)\} \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית בלבד של המשחק הינה:

$I \backslash II$	a	b
(A, C)	$19, 12$	$0, 6$
(A, D)	$18, 21$	$11, 3$
(B, C)	$8, 6$	$8, 6$
(B, D)	$8, 6$	$8, 6$

■

1.5 משחק עם מהלכי גורל

במשחקים שבהם עסקנו עד כה, כל מעבר בין מצבי המשחק התבצע על ידי אחד השחקנים. מודל זה הולם משחקים כגון שחמט או דמקה, אך אינו מתאים למשחקים המשלבים אלמנטים של מקריות, כגון משחקי קלפים או קוביות (למשל פוקר או שש-בש), שבהם המעבר בין מצבים מוכתב על ידי תהליך אקראי. מעבר זה יכול לנבוע גם מגורמים חיצוניים בלתי נשלטים, כגון תנאי מזג אוויר, אירועים טבעיים או תנודות בשוק ההון. מעבר מסוג זה מוגדר כמהלך גורל (Chance Move). כדי להרחיב את המודל, נסמן חלק מהצמתים בעץ המשחק (V, E, x_0) כ'צמתי גורל'. הצלעות היוצאות מצמתים אלו מייצגות את התוצאות האפשריות של ההגרלה, כאשר לצד כל צלע מצוינת ההסתברות להתרחשות התוצאה המתאימה.

הגדרה 1.12 משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל

משחק בצורה רחבה עם מהלכי גורל הוא שמינייה סדורה:

$$\Gamma = \left(N, V, E, x_0, \{V_0, V_1, V_2, V_3, \ldots\}, (p_x)_{x \in V_0}, O, u\right) \ ,$$

שבה:

- N הוא קבוצה סופית של שחקנים.
- (V, E, x_0) הוא עץ המשחק.
- $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$ היא חלוקה של קבוצת הקודקודים שאינן עלים.
- לכל קדקוד $x \in V_0$, p_x היא פונקצית ההסתברות של הפעולות (הצלעות) היוצאות מ- x.
- O היא הקבוצת העלים, המייצגים הקבוצת התוצאות האפשריות.
- u הוא פונקצית התשלומים של המשחק.

הסימונים הם כמקודם בהגדרה 1.5 עם ההבדלים הבאים.

- החלוקה של קבוצת הקודקודים היא עתה $(V_i)_{i \in N \cup \{0\}}$. כלומר, נוספה עתה הקבוצה V_0 שהיא קבוצת הקודקודים שבהם מתבצע מהלדכי גורל.
- לכל קודקוד $x_0 \in V_0$ הוקטור p_x הוא ההסתברויות של הצלעות היוצאות מ- x.

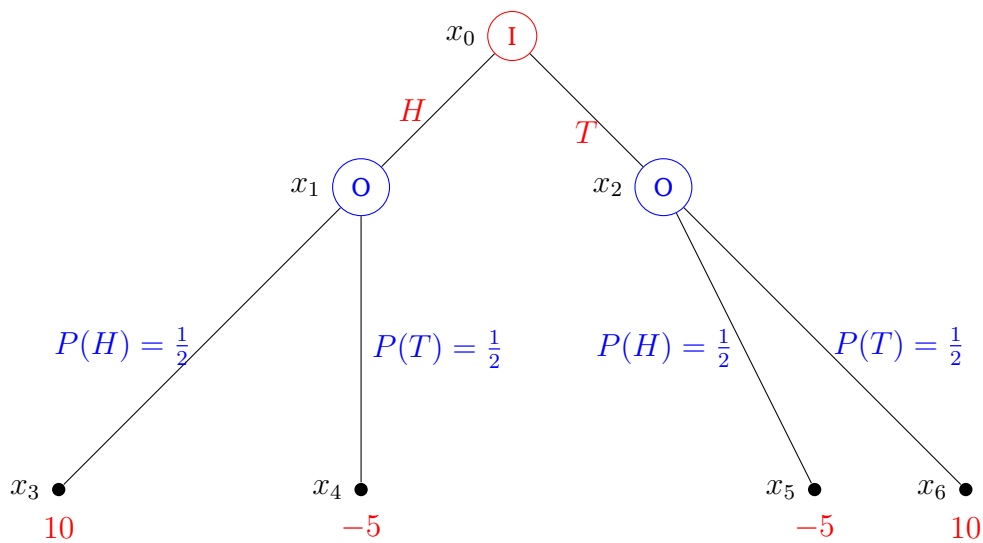
דוגמה 1.9 (משחק עם מהלך גורל)

נתון משחק עם הכללים הבאים.

- שחקן בוחר H ("עץ") או T ("פלי").
- אחרי שהשחקן בוחר, הוא מטיל מטבע.
- אם המטבע מראה את בחירתו, הוא מנצח ומקבל 10 ₪.
- אם לא הוא מפסיד 5 ₪.

שרטטו את המשחק בצורה רחבה.

פתרון:



$$\Gamma = (N, V, E, x_0, \{V_1, V_2\}, \{p_{x_1}, p_{x_2}\}, O, u) \ .$$

שחקנים:

$$N = \{I\}$$

קדקודים:

$$V = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

צלעות:

$$E = \{x_0x_1 \ , x_0x_2 \ , \ x_1x_3 \ , \ x_1x_4 \ , \ x_2x_5 \ , \ x_2x_6\} \ .$$

שורש העץ (המצב ההתחלתי של המשחק): x_0.

קבוצות הקודקודים של שחקן I:

$$V_1 = \{ \ x_0 \ \}$$

קבוצות הקודקודים של שחקן הגורל:

$$V_0 = \{ \ x_1 \ , \ x_2\} \ .$$

פונקצית ההסתברות של שחקני גורל:

$$P_{x_1}(H) = \frac{1}{2} \ , \quad P_{x_1}(T) = \frac{1}{2} \ .$$

$$P_{x_2}(H) = \frac{1}{2} \ , \quad P_{x_2}(T) = \frac{1}{2} \ .$$

קבוצת העלים (תוצאות אפשרייות):

$$O = \{x_3, x_4, x_5, x_6\} \ .$$

הקבוצות הידיעה של שחקן I הן:

$$U_I = \{(x_0, (H, T))\} \ .$$

הקבוצת האסטרטגיות של שחקן I היא:

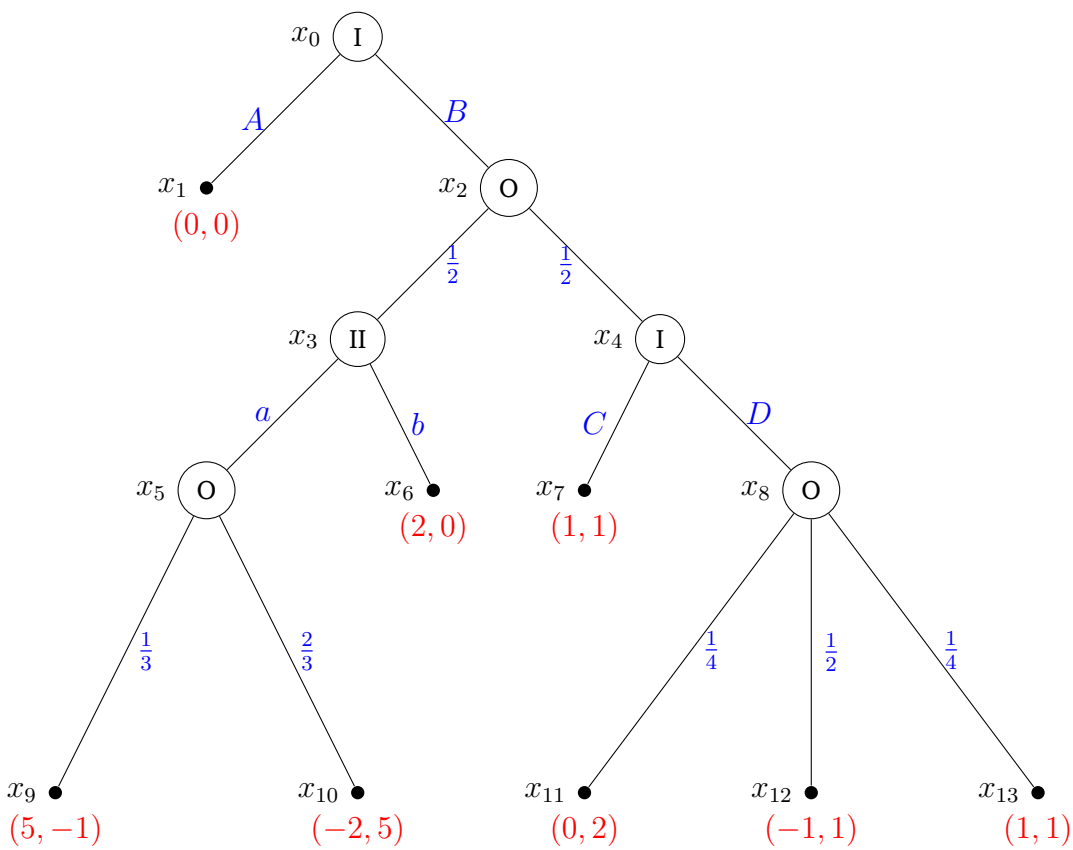
$$S_I = \{H, T\} \ .$$

הווקטורי האסטרטגיות של המשחק הן $s = H$ ו- $s = T$. מכאן הפונקציית התשלום היא:

$$\begin{aligned} u(H) =& \frac{1}{2} \cdot (10) + \frac{1}{2}(-5) &&= \frac{5}{2} \ , \\ u(T) =& \frac{1}{2} \cdot (-5) + \frac{1}{2} \cdot (10) &&= \frac{5}{2} \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 1.10 (אסטרטגיות במשחק עם מהלכי גורל)



קבוצת קודקודים של שחקן I היא

$$V_I = \{x_0, x_4\}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן I הן:

$$U_I = \{(x_0, (A, B)) \ , (x_4, (C, D))\} \ .$$

הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא:

$$S_I = ((A, C) \ , \ (A, D) \ , \ (B, C) \ , \ (B, D) \ ) \ .$$

הקבוצת קודקודים של שחקן II היא:

$$V_{II} = \{x_3\}$$

והקבוצות ידיעה של שחקן II הן:

$$U_{II} = \{(x_3, (a, b))\} \ .$$

הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I היא:

$$S_{II} = \{a \ , \ b \ \} \ .$$

הווקטורי אסטרטגיות של המשחקן הם:

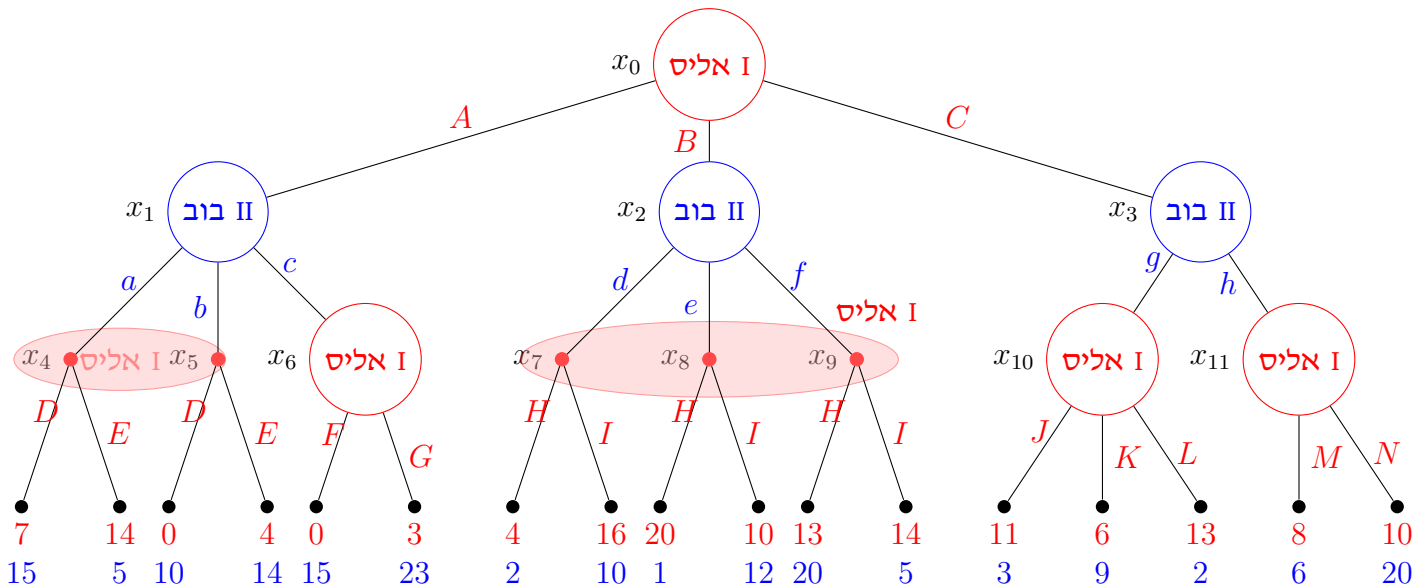
$$(s_I, s_{II}) = \begin{cases} ((A,C),a) \\ ((A,D),a) \\ ((B,C),a) \\ ((B,D),a) \\ ((A,C),b) \\ ((A,D),b) \\ ((B,C),b) \\ ((B,D),b) \end{cases} \ .$$

פונקצית התשלום:

$$\begin{aligned}
u\left((A,C),a\right) =& (0,0) \ , \\
u\left((A,D),a\right) =& (0,0) \ , \\
u\left((B,C),a\right) =& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5) + \frac{1}{2}(1,1) && = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{6}\right) \ , \\
u\left((B,D),a\right) =& \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}(5,-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(-2,5) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1) && = \left(-\frac{1}{48}, \frac{33}{16}\right) \ , \\
u\left((A,C),b\right) =& (0,0) \ , \\
u\left((A,D),b\right) =& (0,0) \ , \\
u\left((B,C),b\right) =& \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(1,1) && = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \ , \\
u\left((B,D),b\right) =& \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(0,2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-1,1) + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(1,1) && = \left(-\frac{11}{16}, \frac{9}{16}\right) \ .
\end{aligned}$$

דוגמה 1.11 (מעבר מצורה רחבה לצורה אסטרטגית משחק)

נתון המשחק הבא בצורה רחבה. רשמו אותו בצורה אסטרטגית.



פתרון:

המשחק הוא משחק עם ידיעה לא שלמה.

לאליס יש 5 קבוצות ידיעה:

$$U_I = \{(x_0,(A,B,C)) \ ,(x_4x_5, \ (D,E)) \ ,(x_6, \ (F,G)) \ ,(x_7x_8x_9,(H,I)) \ ,(x_10, \ (J,K,L)) \ ,(x_{11}, \ (M,N))\} \ .$$

לכן יהיו לאליס $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 144$ אסטרטגיות:

$$S_I = \{(A,D,F,H,J,M) \ , \ (B,D,F,H,J,M) \ , \ (C,D,F,H,J,M) \ ,\dots$$
$$\dots \ ,(C,E,G,I,L,N)\} \ .$$

לבוב יש 3 קבוצות ידיעה:

$$U_{II} = \{(x_1, \ (a,b,c)) \ ,(x_2, \ (d,e,f)) \ ,(x_3, \ (g,h))\} \ .$$

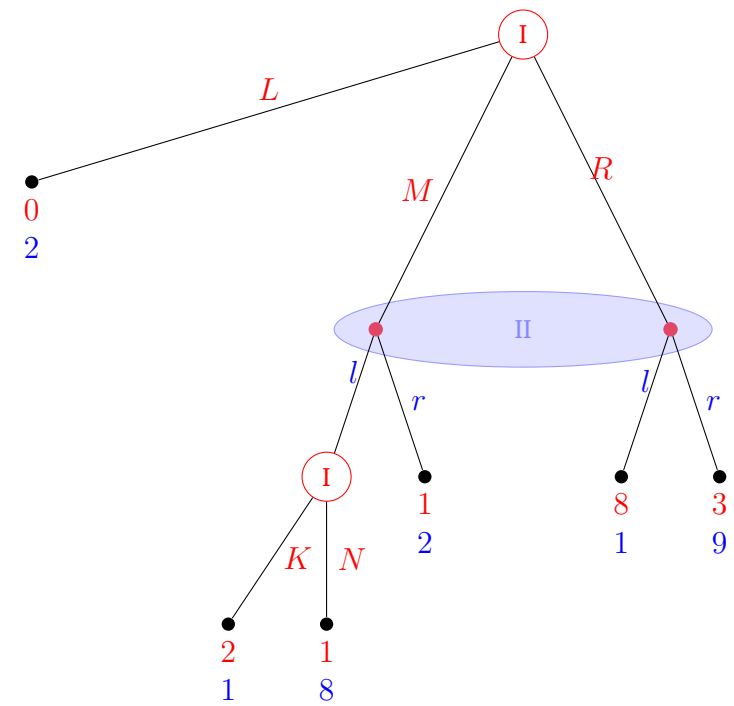
לכן לבוב יהיו: $3 \times 3 \times 2 = 18$ אסטרטגיות:

$$S_{II} = \{(a,d,g) \ , \ (b,d,g) \ ,\dots \ ,(c,f,h)\} \ .$$

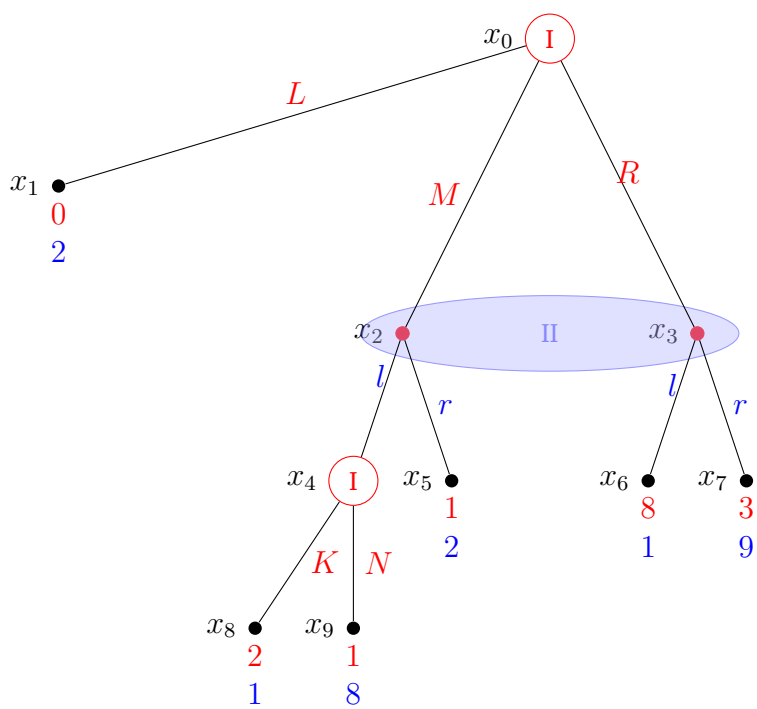
■

דוגמה 1.12 (מעבר מצורה רחבה לצורה אסטרטגית משחק)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצת אסטרטגיות של שחקן 1:

$$S_1 = \{(L,K)\ ,\ (M,K)\ ,\ (R,K)\ ,\ (L,N)\ ,\ (M,N)\ ,\ (R,N)\ \}\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן 2:

$$S_2 = \{(l,r)\}\ .$$

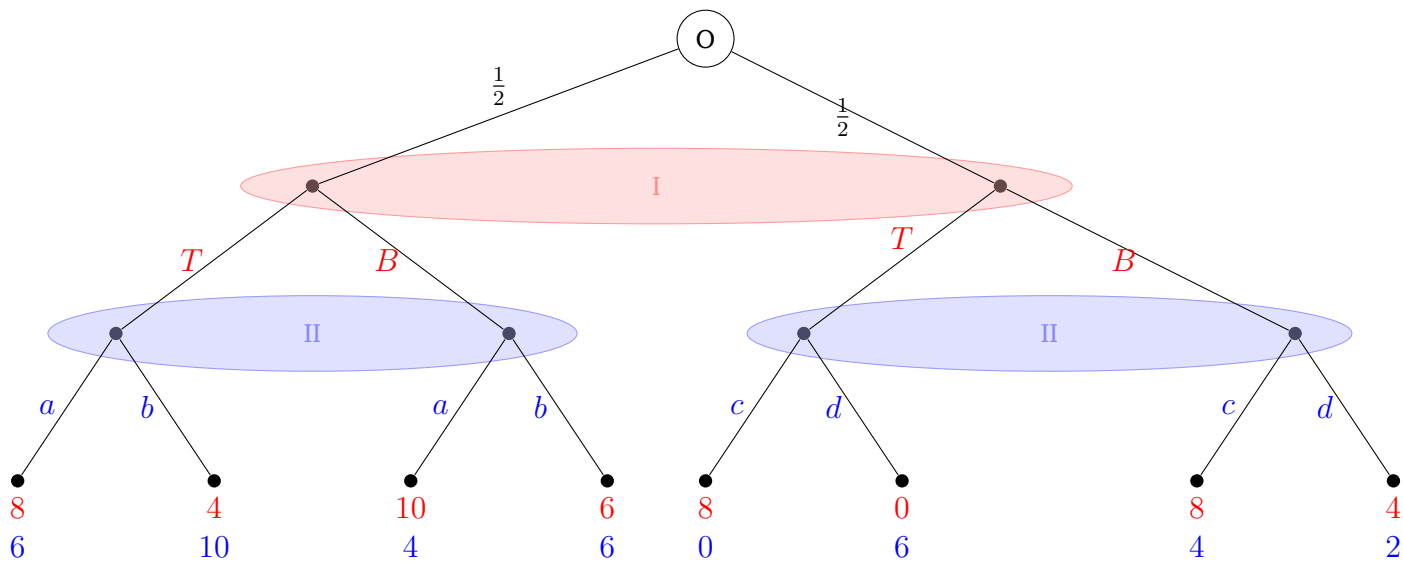
מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

$I \backslash II$	l	r
(L,K)	$0,2$	$0,2$
(M,K)	$2,1$	$1,2$
(R,K)	$8,1$	$3,9$
(L,N)	$0,2$	$0,2$
(M,N)	$1,8$	$1,2$
(R,N)	$8,1$	$3,9$

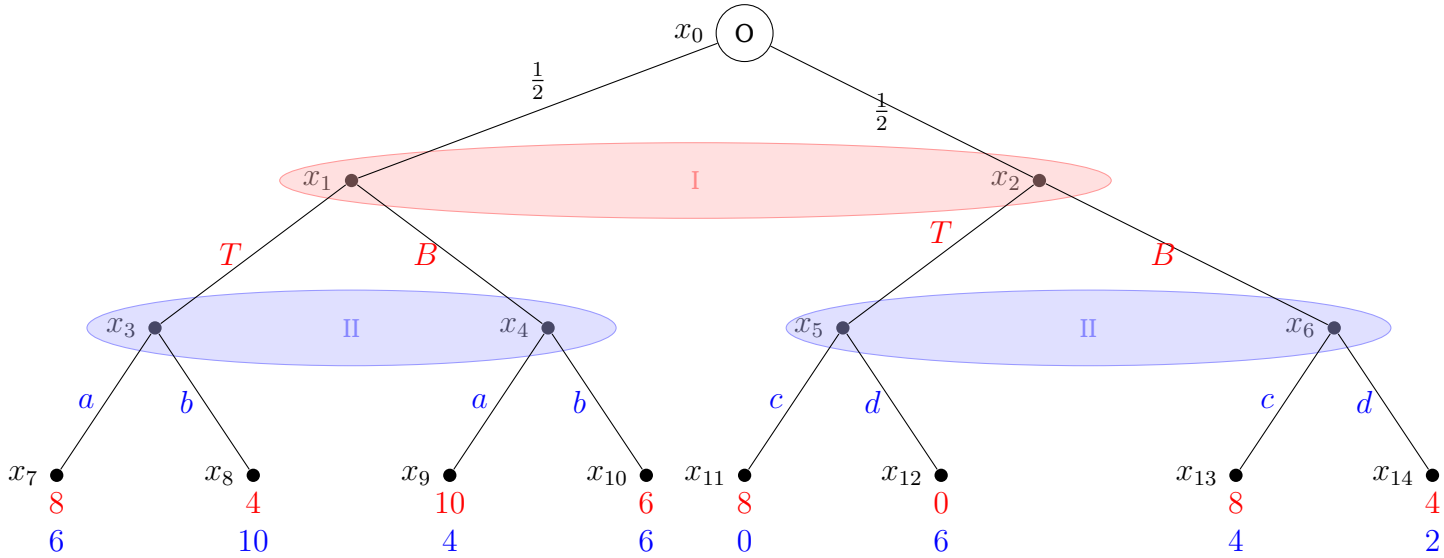
■

דוגמה 1.13 (משחק עם ידיעה לא שלמה עם מהלך גורל)

רשמו את המשחק הבא בצורה אסטרטגית.



פתרון:



קבוצות ידיעה של שחקן I:

$$U_I = \{(x_1x_2, (T, B))\} \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = \{(T), (B)\} \ .$$

קבוצות ידיעה של שחקן II:

$$U_{II} = \{(x_3x_4, (a, b)) \ , \ (x_5x_6, (c, d))\} \ .$$

קבוצות אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = \{(a, c) \ , \ (a, d) \ , \ (b, c) \ , \ (b, d)\} \ .$$

צורה אסטרטגית של המשחק:

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(8,6)+\frac{1}{2}(0,6)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(8,0)$	$\frac{1}{2}(4,10)+\frac{1}{2}(0,6)$
B	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(10,4)+\frac{1}{2}(4,2)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(8,4)$	$\frac{1}{2}(6,6)+\frac{1}{2}(4,2)$

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$(4,3)$	$(4,6)$	$(6,5)$	$(2,8)$
B	$(9,6)$	$(7,3)$	$(7,5)$	$(5,4)$

■

הגדרה 1.13 פונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים ואי-זוגיים

הפונקצית האינדיקטור של מספרים זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = \begin{cases} 1: & n \text{ זוגי} \\ 0: & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{even}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{even}}(n) = 1 - n \bmod 2 \ .$$

הפונקצית האינדיקטור של מספרים אי-זוגיים תסומן $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ ותוגדר:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = \begin{cases} 0: & n \text{ זוגי} \\ 1: & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

דרך אחת לרשום $\mathbb{1}_{\text{odd}}(n)$ במפורשות היא:

$$\mathbb{1}_{\text{odd}}(n) = n \bmod 2 \ .$$

דוגמה 1.14 (משחק מרבה הרגליים)

במשחק מרבה הרגליים שני שחקנים, לכל שחקן יש קופה שבה מצטבר כסף במהלך המשחק. בתחילת המשחק בקופתו של שחקן I ₪$1,000$ וקופתו של שחקן II ריקה. כל שחקן בתורו יכול להפסיק (q),

ואז כל שחקן מקבל את הסכם הנמצא בקופתו, או להמשיך (c) במשחק. אם הוא ממשיך, עליו להעביר $1,000$₪ לשחקן השני, ומנהל המשחק מוסיף עוד $2,000$₪ לשחקן השני. אם אף שחקן לא הפסיק את המשחק במהלך 100 התורות הראשונים, המשחק מסתיים, וכל שחקן מקבל את הסכום הנמצא בקופתו.

א) רשמו את העץ של המשחק.

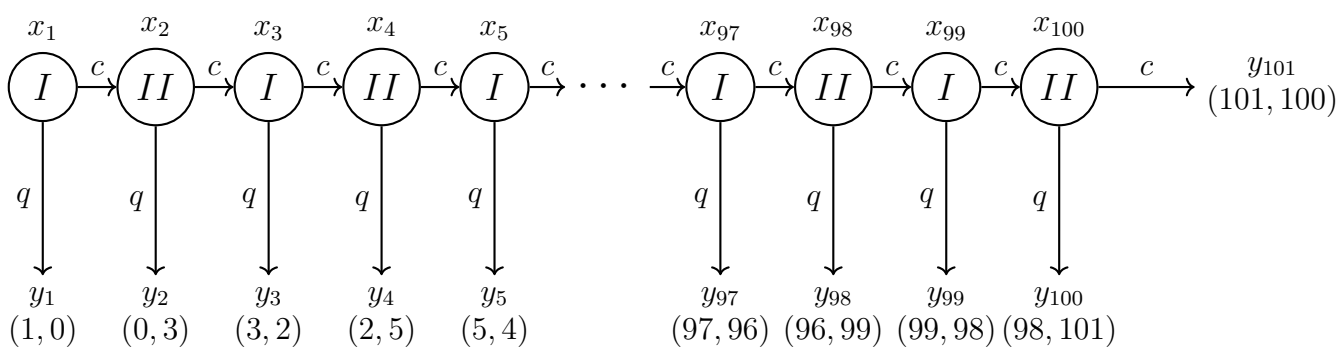
ב) מצאו את הקבוצת אסטרטגיות של שחקן I ושל שחקן II.

ג) רשמו את הפונקצית התשלומים כפונקציה של האסטרטגיות של השחקנים.

פתרון:

סעיף א)

עץ המשחק למשחק מרבה הרגליים



התשלומים באלפי ש"ח.

סעיף ב)

- הקבוצת הקדקודים של שחקן I:

$$V_I = \{x_1, x_3, \ldots, x_{99}\} = \left\{x_i \;\middle|\; 1 \le i \le 100, i \bmod 2 = 1\right\} \ .$$

- הקבוצות הידיעה של שחקן I:

$$U_I = \{(x_1,(c_1,q_1)),(x_3,(c_3,q_3)),\ldots,(x_{99},(c_{99},q_{99}))\} = \left\{(x_i,(c_i,q_i)) \;\middle|\; 1 \le i \le 100, i \bmod 2 = 1\right\} \ .$$

- הקבוצת הקדקודים של שחקן II:

$$V_{II} = \{x_2, x_4, \ldots, x_{100}\} = \left\{x_i \;\middle|\; 1 \le i \le 100, i \bmod 2 = 0\right\} \ .$$

- הקבוצות הידיעה של שחקן II:

$$U_{II} = \{(x_2,(c_2,q_2)),(x_4,(c_4,q_4)),\ldots,(x_{100},(c_{100},q_{100}))\} = \left\{(x_i,(c_i,q_i)) \;\middle|\; 1 \le i \le 100, i \bmod 2 = 0\right\} \ .$$

- הקבוצת האסטרטגיות של שחקן I היא:

$$S_I = \left\{(a_1, a_3, \ \ldots \ , a_{99}) \,\middle|\, a_i \in \{c_i, q_i\}\right\} \ .$$

לדוגמה: $s_1 = (q_1, c_3, c_5, \ldots, c_{99}) \in S_I$ ו- $s_1' = (q_1, q_3, c_5, \ldots, c_{99}) \in S_I$ וכן הלה.

- הקבוצת האסטרטגיות של שחקן II היא:

$$S_{II} = \left\{(a_2, a_4, \ \dots \ , a_{100}) \middle| a_i \in \{c_i, q_i\}\right\} \ .$$

$s_2 = (q_2, c_4, c_6, \dots, c_{100}) \in S_{II}$ ו- $s_2' = (q_2, q_4, c_6, \dots, c_{100}) \in S_{II}$ וכן הלה.

סעיף ג) ראשית נרשום את הפונקצית התשלומים של כל שחקן כפונקציה של הנקודות סיום $\{y_i\}$ ($1 \le i \le 100$).

i	$u_1(y_i)$	$u_2(y_i)$
1	1	0
2	0	3
3	3	2
4	2	5
5	5	4
6	4	7
7	7	6
8	6	9
$\vdots$		
98	96	99
99	99	98
100	98	101

מכאן הנוסחה המגדירה את הפונקצית התשלום של כל שחקן בכל נקודת סיום y_i תלויה אם i זוגי או אי-זוגי:

$$u_1(y_i) = \begin{cases} i: & i \text{ אי-זוגי} \\ i-2: & i \text{ זוגי} \end{cases} \quad , \qquad u_2(y_i) = \begin{cases} i-1: & i \text{ אי-זוגי} \\ i+1: & i \text{ זוגי} \end{cases} \ .$$

כעת נבטא את הפונקציות התשלומים כפונקציות של האסטרטגיות של השחקנים. נניח כי שחקן I משחק האסטרגיה:

$$s_I = (a_1, a_3, \ \dots \ a_{99}) \ , \quad a_i \in \{c_i, q_i\}$$

ושחקן II משחק האסטרגיה:

$$s_{II} = (a_2, a_4, \ \dots \ a_{100}) \ , \quad a_i \in \{c_i, q_i\} \ .$$

המשחק מסתיים בקדקוד y_i אם ורק אם:

$$(\forall j < i: \quad a_j = c_j) \quad \wedge \quad a_i = q_i \ .$$

ניתן לרשום את הפונקצית השתלום של כל שחקן במונחי הפונצקית האינדיקטור של מספרים זוגיים והפונצקית האינדיקטור של מספרים אי-זוגיים (ראו הגדרה 1.13 למעלה) באופן הבא:

$$u_1(y_i) = i\mathbb{1}_{\text{odd}}(i) + (i-2)\mathbb{1}_{\text{even}}(i) \ , \qquad u_2(y_i) = (i-1)\mathbb{1}_{\text{odd}}(i) + (i+1)\mathbb{1}_{\text{even}}(i) \ .$$

נסמן: $m = \min\left(\{i \mid a_i = q_i\} \cup \{101\}\right)$. אז

$$u_I(s_I, s_{II}) = m\mathbb{1}_{\text{odd}}(m) + (m-2)\mathbb{1}_{\text{even}}(m) \ , \qquad u_{II}(s_I, s_{II}) = (m-1)\mathbb{1}_{\text{odd}}(m) + (m+1)\mathbb{1}_{\text{even}}(m) \ .$$

$$\begin{aligned} u_I(s_I, s_{II}) =& m(m \bmod 2) + (m-2)(1 - m \bmod 2) \\ =& 2(m \bmod 2) + m - 2 \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{II}(s_I, s_{II}) =& (m-1)(m \bmod 2) + (m+1)(1 - m \bmod 2) \\ =& -2(m \bmod 2) + m + 1 \ . \end{aligned}$$

■

דוגמה 1.15 (דו-קרב אדום-שחור Red-Black Dual)))

במשחק זה משתתפים שני שחקנים. בהתחלה בקופה המרכזית יש 10₪. ולכל שחקן יש צ'יפ אישי בשווי 5₪. המשחק משוחק לפי הכללים הבאים:

1) **הגרלה:** קלף אחד נשלף באקראי (בהסתברות $\frac{1}{2}$ לכל צבע). **רק שחקן I רואה את הקלף.** שחקן II אינו יודע איזה קלף נשלף.

2) **תור שחקן I:** שחקן I בוחר אחת משתי אפשרויות:

- **לפרוש (F):** המשחק מסתיים. שחקן II זוכה בקופה המרכזית (10₪). כל שחקן שומר את הצ'יפ האישי שלו.
- **להעלות (R):** שחקן I מכניס את הצ'יפ שלו (5₪) לקופה.

3) **תור שחקן II:** (מתקיים רק אם שחקן I בחר R). שחקן II בוחר:

- **לפרוש (F):** המשחק מסתיים. שחקן I זוכה בקופה המרכזית (10₪) ולוקח חזרה את הצ'יפ שלו.
- **להשוות (C):** שחקן II מכניס גם הוא את הצ'יפ שלו (5₪) לקופה (כעת בקופה 20₪בסך הכל).

4) **חשיפה:** אם שחקן II השווה, שחקן I מציג את הקלף:

- **אדום:** שחקן I מנצח וגורף את כל ה- 20₪.
- **שחור:** שחקן II מנצח וגורף את כל ה- 20₪.

הערה: התשלומים בעץ ובטבלה ייצגו את הרווח הנקי של כל שחקן (השינוי במצבו הכלכלי לעומת תחילת המשחק).

א) שרטטו את עץ המשחק. הקפידו לסמן בבירור את מהלך הטבע, את קבוצות הידיעה, ואת התשלומים (רווח נקי) בסוף כל מסלול.

ב) הגדירו במפורש את קבוצת האסטרטגיות S_I של שחקן I, ואת קבוצת האסטרטגיות S_{II} של שחקן II.

ג) רשמו את פונקציית התשלומים התוחלתית של שחקן I, כלומר $u_1(s_I, s_{II})$, עבור כל שילוב של אסטרטגיות (כמטריצת תשלומים או כפונקציה מפורשת).

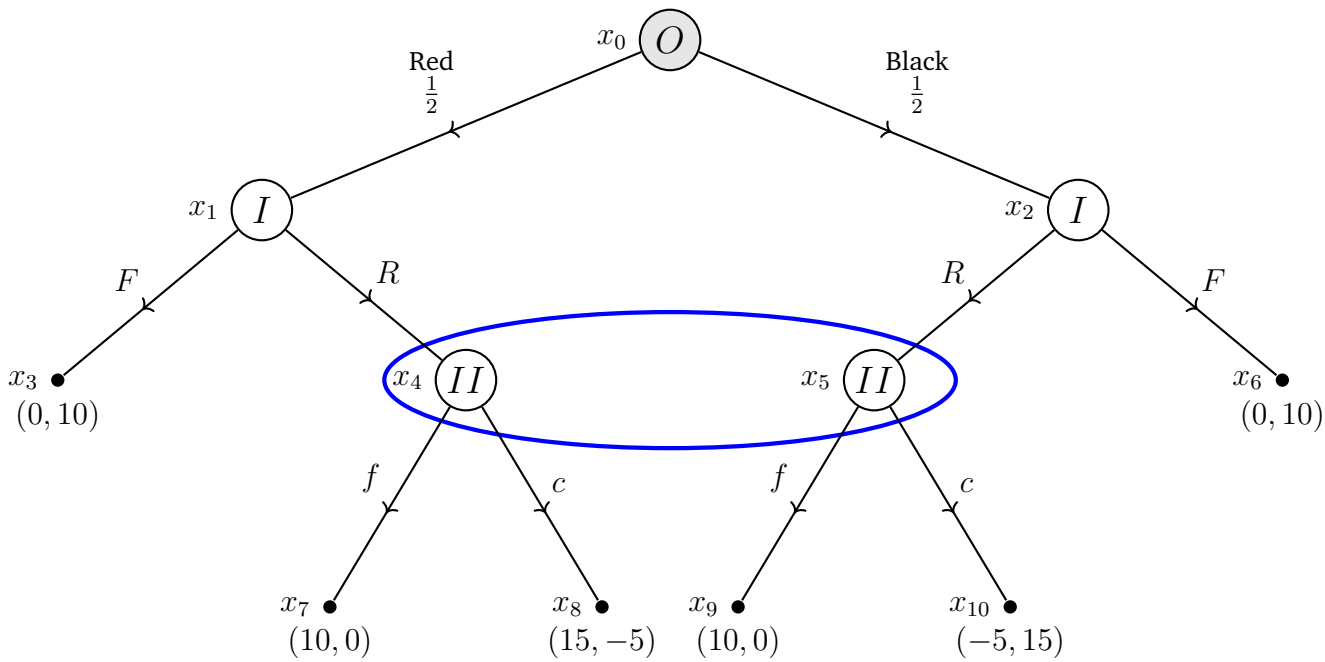
פתרון:

סעיף א) עץ המשחק:

נחשב תחילה את תשלומי הרווח הנקי (u_1, u_2) בכל אחת מהתוצאות:

- I פורש (F):
  הקופה המרכזית מגיעה ל-II. רווחים: $(0, 10)$.
- I מעלה (R) ו- II פורש (F):
  הקופה המרכזית מגיעה ל-I (הוא לוקח בחזרה את ה-5 שלו ולכן אינו מפסיד אותם). רווחים: $(10, 0)$.
- I מעלה (R), II משווה (C), והקלף אדום:
  I לוקח את כל ה- 20. הוא השקיע 5, ולכן הרוויח 15. II הפסיד את ה- 5 שלו. רווחים: $(15, -5)$.

- I מעלה (R), II משווה (C), והקלף שחור:
  II לוקח הכל. הרוויח 15, ו-I הפסיד את ה- 5 שלו. רווחים: $(-5, 15)$.



סעיף ב) קבוצות האסטרטגיות:

- לשחקן I יש שתי קבוצות ידיעה (הוא יודע אם הקלף אדום או שחור). לכן, כל אסטרטגיה שלו מורכבת מזוג החלטות: (פעולה אם אדום, פעולה אם שחור).

$$S_I = \{(F, F), (F, R), (R, F), (R, R)\}$$

לדוגמה: האסטרטגיה (R, F) משמעותה להעלות אם הקלף אדום, ולפרוש אם הקלף שחור.

- לשחקן II יש קבוצת ידיעה אחת בלבד (הוא נדרש להחליט רק לאחר ששחקן I בחר להעלות, מבלי לדעת את צבע הקלף). לכן, אסטרטגיה שלו היא פעולה יחידה:

$$S_{II} = \{f, c\}$$

סעיף ג) פונקציית התשלומים התוחלתית של שחקן I (u_1) ושל שחקן II (u_2) :

כדי לחשב את התוחלת של שחקן I עבור כל פרופיל אסטרטגיות, עלינו לשקלל את ההסתברויות של שני מהלכי הטבע ($\frac{1}{2}$ אדום, $\frac{1}{2}$ שחור).

נדגים חישוב עבור הפרופיל $((R, R), C)$ (שחקן I "מבלף" תמיד, שחקן II תמיד משווה):

$$u_1((R, R), c) = \frac{1}{2} \cdot 15 + \frac{1}{2} \cdot (-5) = 7.5 - 2.5 = 5$$

להלן מטריצת התשלומים המלאה המייצגת את תוחלת הרווח של שחקן I, $u_1(s_I, s_{II})$:

s_I \ s_{II}	f	c
(F,F)	$0,10$	$5,5$
(F,R)	$5,5$	$-2.5,12.5$
(R,F)	$5,5$	$7.5,2.5$
(R,R)	$10,0$	$5,5$

הערה: זהו משחק סכום-קבוע, שכן סכום הרווחים הנקיים של שני השחקנים יחד מסתכם תמיד ל-10 (סכום הקופה המרכזית ההתחלתית). לכן, התשלום של שחקן II ניתן לחישוב פשוט כ- $u_2 = 10 - u_1$.

■