תרגילים תורת המשחקים

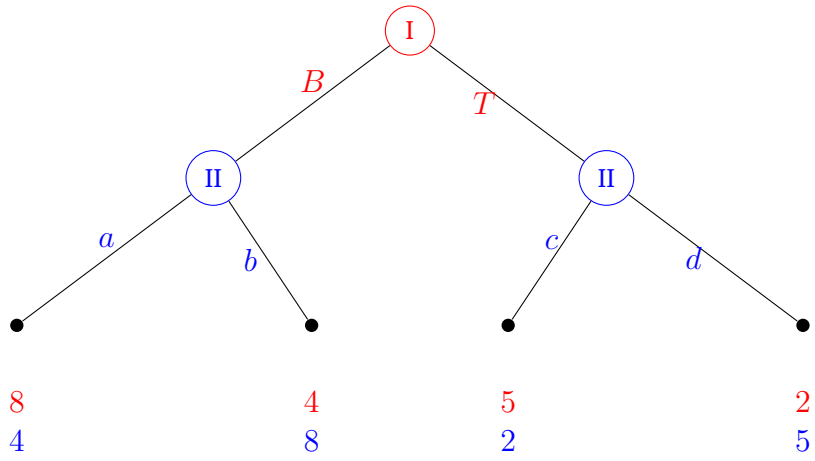
שאלה 1 עבור כל אחד של המשחקים הבאים:

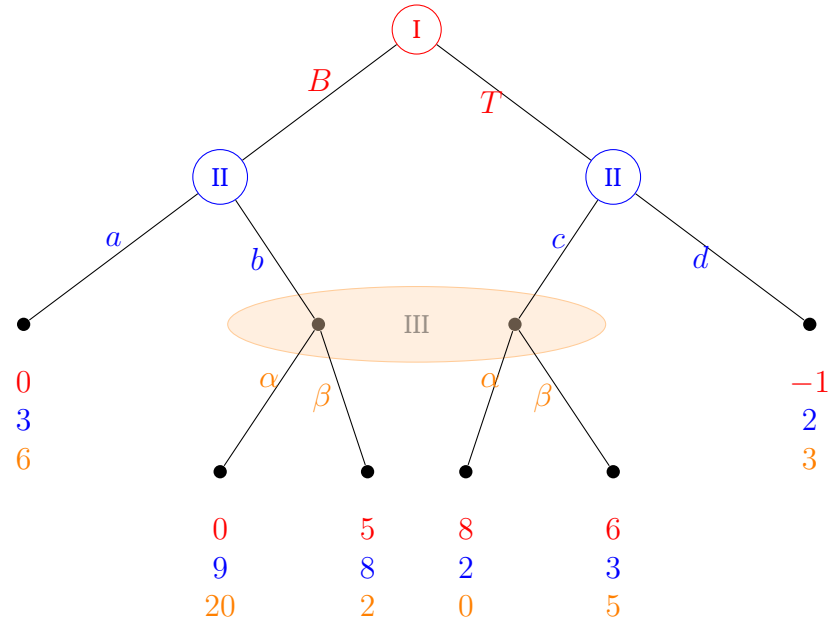
1) רשמו את הקבוצות אסטרטגיות של כל שחקן.

2) רשמו את הצורה אסטרטגית של המשחק.

3) חשבו את השיווי משקל של המשחק.

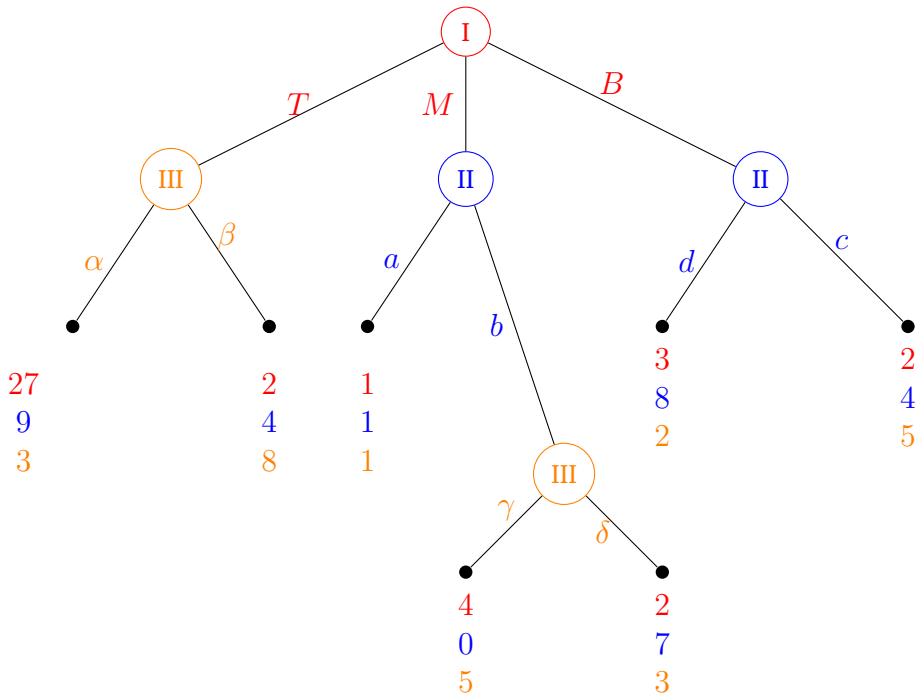
א)



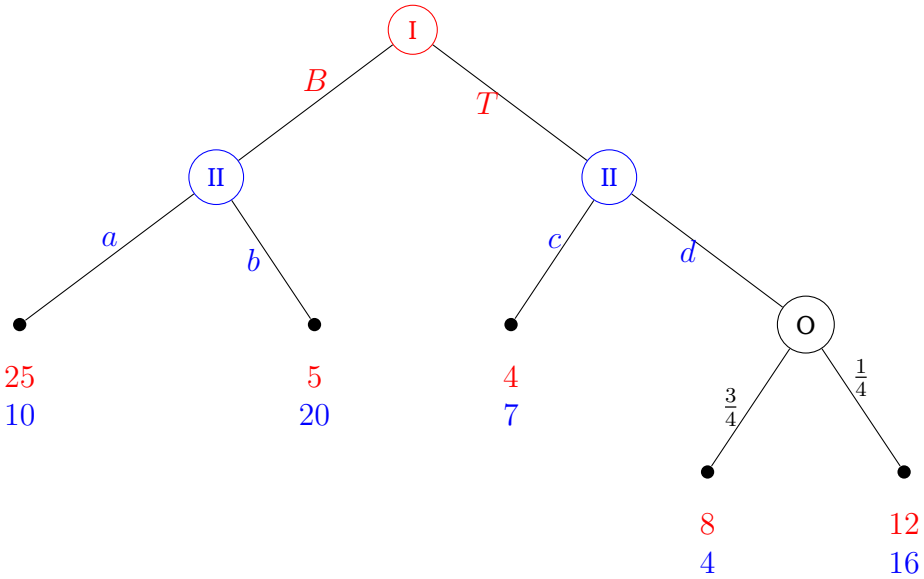


ב)

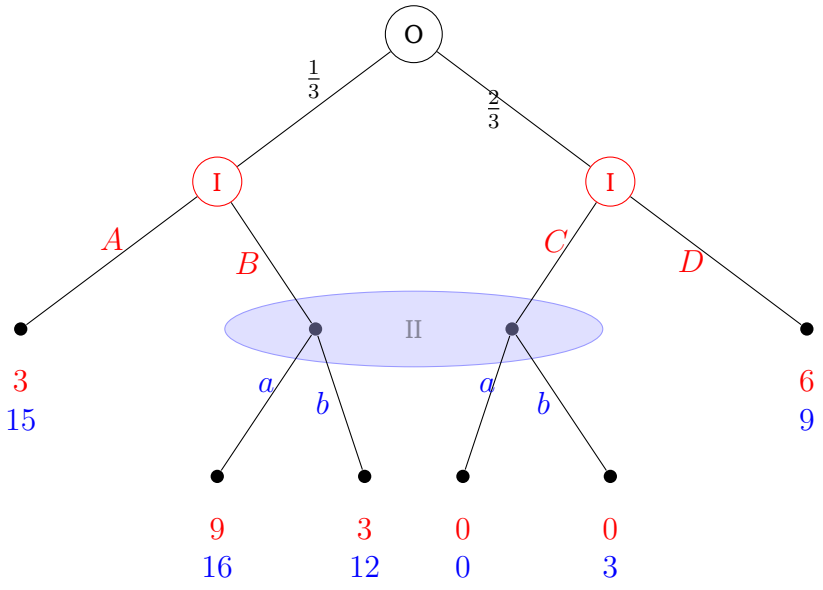
ג)


I
T
M
B
III
II
II
α
β
a
b
d
c
27
9
3
2
4
8
1
1
1
3
8
2
2
4
5
III
γ
δ
4
0
5
2
7
3

ד)


I
B
T
II
II
a
b
c
d
O
25
10
5
20
4
7
3/4
1/4
8
4
12
16

ה)



שאלה 2 תארו את המשחק הבא בצורה רחבה.

שתי ערמות גפרורים מונחות על השולחן. באחת גפרור אחד, ובשנייה שני גפרורים.
שני שחקנים מסלקים גפרורים לפי התור. כל שחקן, בתורו, חייב לסלק גפרורים אך ורק מערמה אחת, והוא חייב לסלק לפחות גפרור אחד. מי שמסלק את הגפרור האחרון מפסיד.
הציגו את עץ המשחק. סמנו את השחקנים ב- I ו- II, וכל קודקוד בשחקן שתורו לשחק. על הקשתות ציינו את הפעולה (כמה גפרורים נלקחו ומאיזו ערמה). הוסיפו תשלומים בעלים: שחקן I מרוויח 1₪ אם הוא מנצח ומפסיד 1 שקל אם הוא מפסיד. כנ"ל לשחקן II. הדגישו את האסטרטגיה המנצחת.

שאלה 3 תארו את המשחק הבא בצורה רחבה. שלוש ערמות גפרורים מונחות על השולחן. באחת גפרור אחד, בשנייה שני גפרורים, ובשלישית שלושה גפרורים. שני שחקנים מסלקים גפרורים לפי התור. כל שחקן, בתורו, חייב לסלק גפרורים אך ורק מערמה אחת, והוא חייב לסלק לפחות גפרור אחד. מימשסלק את הגפרור האחרון מפסיד.

ע"י חיצים בעץ המשחק, הצביעו על דרך משחק של אחד השחקנים, המבטיחה לו ניצחון.

שאלה 4 משה ואהרון משתתפים במשחק טלוויזיה, שבו על כל אחד מהם להגיש בכתב בתוך מעטפה סגורה אחת משתי הבקשות הבאות והבקשות של שניהם תתבצענה:

- תן לי $1,000$₪.
- תן לו (לשני) $4,000$₪.

א) רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

ב) כיצד השחקנים ינהגו במשחק ומדוע? ו

שאלה 5 האם במשחקים הבאים סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק מסתיים בווקטור אסטרטגיות יחיד? אם כן, מה הוא ווקטור זה?

א)

שחקן II

שחקן I	L	R
H	$4,2$	$0,1$
T	$3,3$	$1,1$

ב)

שחקן II

שחקן I	L	R
H	$2,3$	$1,4$
T	$0,2$	$0,4$

ג)

שחקן II

שחקן I	a	b	c
α	$1,0$	$3,0$	$2,1$
β	$3,1$	$0,1$	$1,2$
γ	$2,1$	$1,6$	$0,2$

שאלה 6 מצאו את כל ווקטורי האסטרטגיות הרציונליים במשחקים הבאים.

א)

$I \backslash II$	L	R
T	$9,5$	$5,3$
B	$8,6$	$8,4$

ב)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	$6,2$	$6,3$	$7,6$	$2,8$
B	$8,5$	$6,9$	$4,6$	$4,7$

ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
T	$-1,20$	$-7,-7$	$-1,2$	$-5,8$
M	$27,20$	$13,-1$	$21,2$	$13,-1$
B	$-5,20$	$-3,5$	$7,-1$	$3,-4$

ד)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	$3,7$	$0,13$	$4,5$	$5,3$
β	$5,3$	$4,5$	$4,5$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$4,5$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$	$4,5$	$4,5$

שאלה 7 יהי $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק בצורה אסטרטגית ויהי $\hat{G} = \left(N, (\hat{S}_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$ משחק המתקבל מ- G על ידי השמטת חלק מהאסורוגיות של השחקנים. ז"א $\hat{S}_i \subseteq S_i$ לכל שחקן i.
הוכיחו את הטענה הבאה:
אם s^* הוא שיווי משקל במשחק G, ואם $s_i^* \in \hat{S}_i$ לכל שחקן i, אזי s^* הוא שיווי משקח במשחק $\hat{G}$.

שאלה 8 משחק שני שחקנים נקרא **משחק סימטרי** אם לשני השחקנים אותה קבוצת אסטרטגיות $S_1 = S_2$ ופונקציות התשלומים מקיימות $u_1(s_1, s_2) = u_2(s_2, s_1)$ לכל $s_1, s_2 \in S_1$.
הוכיחו שקבוצת שיוויי המשקל במשחק סימטרי היא קבוצת סימטרי:
כלומר אם (s_1, s_2) היא שיווי משקל, אז גם (s_2, s_1) הוא שיווי משקל.

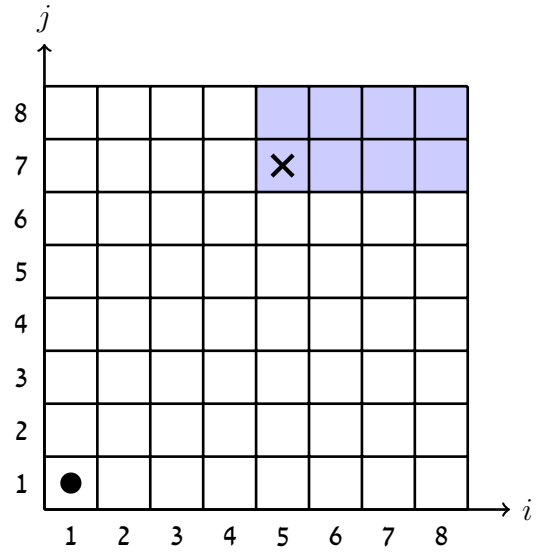
שאלה 9 יהי $T = (V, E, x_0)$ גרף עץ מכוון עם שורש x_0. הוכיחו את הטענה הבאה:
לכל קדקוד $x \in V$, קיים מסלול יחיד מהשורש x_0 לקדקוד x.

שאלה 10 יהי $G = (\{I, II\}, \{S_I, S_{II}\}, \{u_1, u_2\})$ משחק שני שחקנים. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם הוקטור אסטרטגיות (s_1^*, s_2^*) הוא שיווי משקל של G אז הוא פתרון למשחק G באסטרטגיות השולטות חזק.

שאלה 11 המשחק צ'ומפ הוא משחק שני שחקנים משוחק על לוח משבצות $n \times m$. הכללים של המשחק הם כדלקמן:

- המשבצות מסומנות בעזרת זוג הקואורדינטות (i, j) כאשר $1 \le i \le n$ ו- $1 \le j \le m$.
  - i מסמן את הקואורדינטה האופקית
  - j מסמן את הקואורדינטה האנכית.

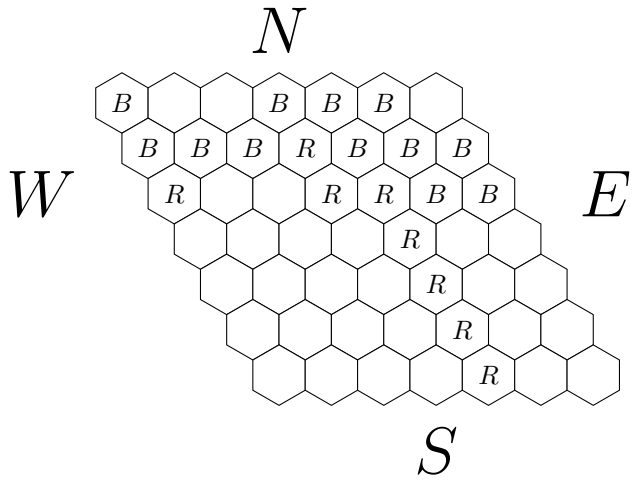
התרשים מראה דוגמה של לוח 8×8, כלומר $n = 8, m = 8$.



- כל שחקן חייב לכבוש בתורו משבצת בכפוף לתנאי הבא:
- אם נכבשה המשבצת (i_0, j_0), לא ניתן יותר לכבוש שום משבצת הנמצאת צפון־מזרחית ממנה. ז"א מסולקות מהלוח כל המשבצות (i, j) המקיימות $i \geq i_0$ ו- $j \geq j_0$.
- שחקן I הוא הפותח במשחק. השחקן הכובש את המשבצת $(1, 1)$ הוא המפסיד.

הוכיחו כי משחק צ'ומפ לא יכול להסתיים בתיקו.

שאלה 12 משחק הקס הוא משחק שני שחקנים: שחקן הכחול (B) ושחקן האדום (R). המשחק משוחק על לוח $n \times n$ עם n^2 משבצות משושות. התרשים מראה דוגמה של לוח הקס 7×7.



הכללים של המשחק הם כדלקמן:

- כל שחקן שולט על שתי צלעות נגדיות של המעוין:
  אדום שולט על הצלעות N, S וכחול שולט בצלעות E, W.
- כל שחקן בתורו בוחר משושה פנוי ומניח עליו אבן בצבע שלו.
- שחקן המצליח לחבר את שתי הצלעות שהוא שולט עליהן ע"י שרשרת אבנים בצבע שלו, מנצח המשחק.
- אם אף שחקן לא מצליח לקשר את הצלעות השייכות לו ע"י האבנים שלו, התוצאה נחשבת תיקו.

התרשים מראה דוגמה של שרשרת מנצחת של שחקן כחול (B) ולכן שחקן כחול מנצח את המשחק בדוגמה הזאת.

הוכיחו כי משחק הקס לא יכול להסתיים בתיקו.

שאלה 13 נתון המשחק שני שחקנים הבא:

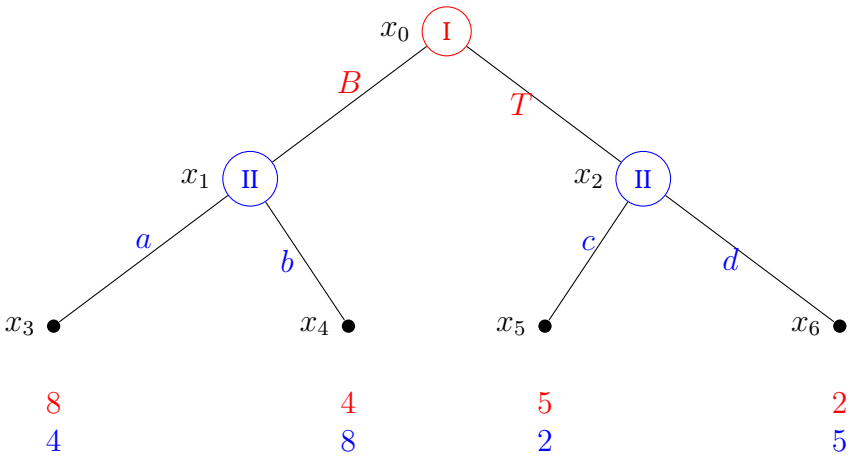
$I \backslash II$	L	R
T	$5, -5$	$0, 11$
B	$0, 6$	$11, 0$

עבור כל שחקן: מצאו את הערך המקסמין, והאסטרטגיה של המקסמין באסטרטגיות מעורבות.

פתרונות

שאלה 1

א)



1) קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = \{B, T\} \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\} \ .$$

2) הצורת אסטרטגיה של המשחק היא:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$8,4$	$8,4$	$4,8$	$4,8$
T	$5,2$	$2,5$	$5,2$	$2,5$

3) נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$8,4$	$8,4$	$4,8$	$4,8$
T	$5,2$	$2,5$	$5,2$	$2,5$

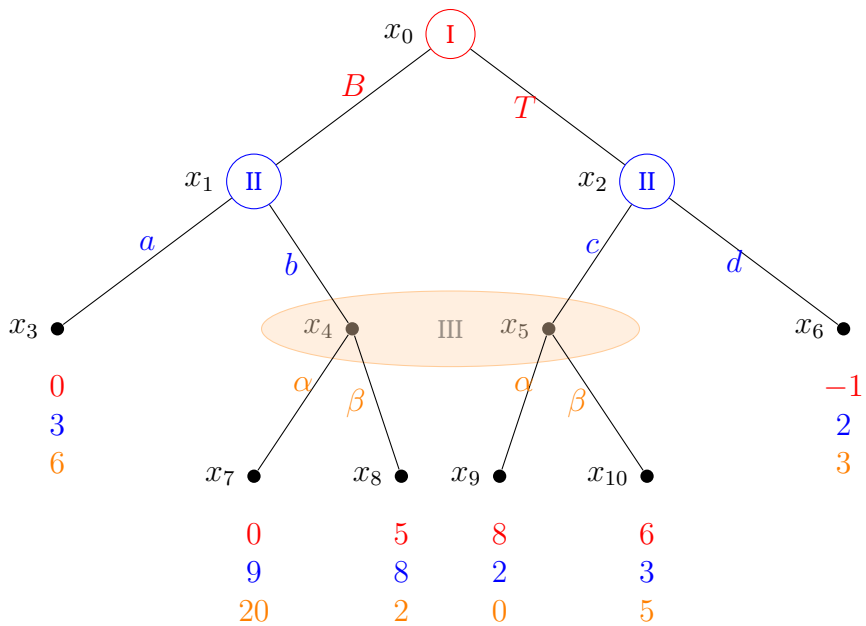
נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$8,4$	$8,4$	$4,8$	$4,8$
T	$5,2$	$2,5$	$5,2$	$2,5$

לכן השיווי משקל נאש הוא:

$$s^* = (B, (b, d)) \ .$$

ב)



1) קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = \{B, T\}$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן III:

$$S_{III} = \{\alpha, \beta\} \ .$$

צורת אסטרטגיה של המשחק:

2)

β

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$5,8,2$	$5,8,2$
T	$6,3,5$	$-1,2,3$	$6,3,5$	$-1,2,3$

α

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$0,9,20$	$0,9,20$
T	$8,2,0$	$-1,2,3$	$8,2,0$	$-1,2,3$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II ולכל אסטרטגיה של שחקן III:

β

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$5,8,2$	$5,8,2$
T	$6,3,5$	$-1,2,3$	$6,3,5$	$-1,2,3$

α

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$0,9,20$	$0,9,20$
T	$8,2,0$	$-1,2,3$	$8,2,0$	$-1,2,3$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I ולכל אסטרטגיה של שחקן III:

β

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$5,8,2$	$5,8,2$
T	$6,3,5$	$-1,2,3$	$6,3,5$	$1,2,3$

α

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$0,9,20$	$0,9,20$
T	$8,2,0$	$-1,2,3$	$8,2,0$	$-1,2,3$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן III לכל אסטרטגיה של שחקן I ולכל אסטרטגיה של שחקן II:

β

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$5,8,2$	$5,8,2$
T	$6,3,5$	$-1,2,3$	$8,2,5$	$-1,2,3$

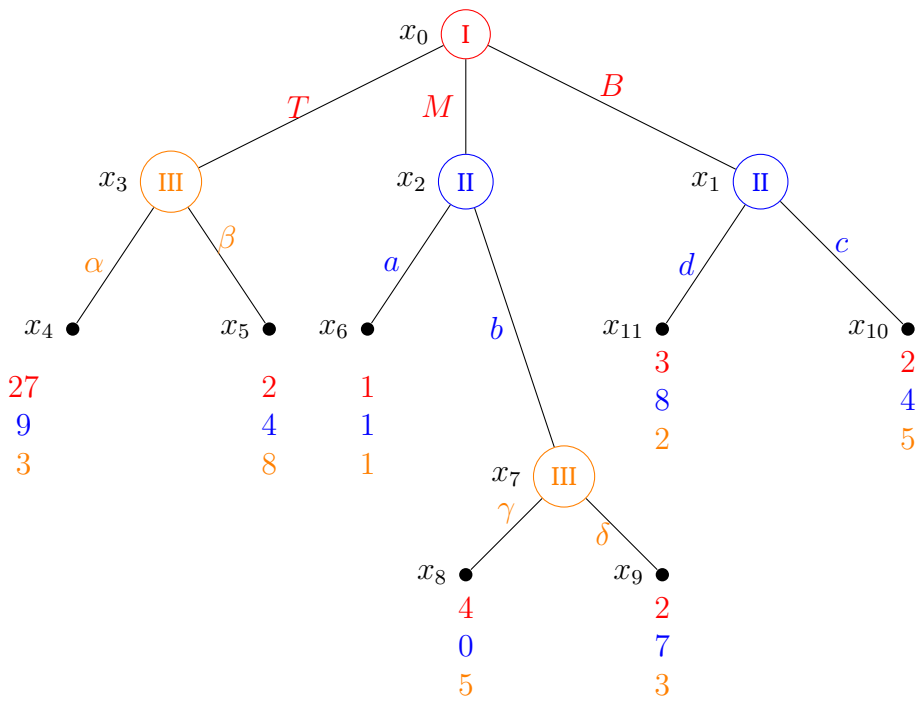
α

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
B	$0,3,6$	$0,3,6$	$0,9,20$	$0,9,20$
T	$8,2,0$	$-1,2,3$	$8,2,0$	$-1,2,3$

לכן השיווי משקל נאש הוא:

$$s^* = (T,(a,c),\beta) \ .$$

ג)



1) קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = \{T, B, M\}$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = \{(a,c)\ ,\ (a,d)\ ,\ (b,c)\ ,\ (b,d)\}\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן III:

$$S_{III} = \{(\alpha,\gamma)\ ,\ (\alpha,\delta)\ ,\ (\beta,\gamma)\ ,\ (\beta,\delta)\}\ .$$

צורת אסטרטגיה של המשחק:

2)

הצורה האסורוגית של המשחק היא:

(α,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(α,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

3)

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II ולכל אסטרטגיה של שחקן III:

(α,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(α,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I ולכל אסטרטגיה של שחקן III:

(α,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(α,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן III לכל אסטרטגיה של שחקן I ולכל אסטרטגיה של שחקן II:

(α,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(α,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$	$27,9,3$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

(β,γ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$4,0,5$	$4,0,5$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

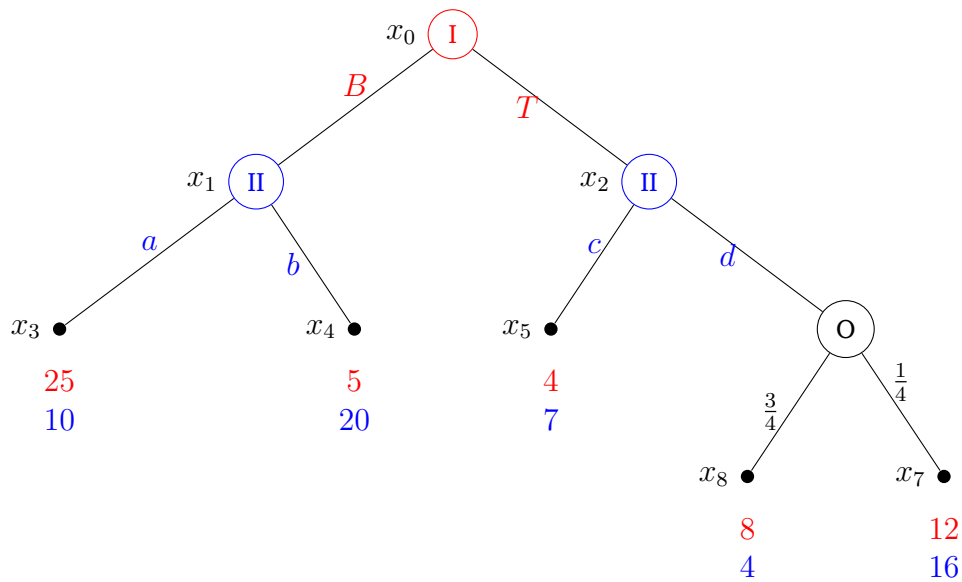
(β,δ)

$I \backslash II$	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$	$2,4,8$
M	$1,1,1$	$1,1,1$	$2,7,3$	$2,7,3$
B	$2,4,5$	$3,8,2$	$2,4,5$	$3,8,2$

לכן השיווי משקל נאש הם:

$$
\begin{aligned}
s^* &= (T,(a,c),(\beta,\gamma)) \ , \\
s^* &= (T,(a,c),(\beta,\delta)) \ , \\
s^* &= (B,(a,d),(\beta,\gamma)) \ , \\
s^* &= (B,(a,d),(\beta,\delta)) \ , \\
s^* &= (B,(b,d),(\beta,\gamma)) \ .
\end{aligned}
$$

ד)



1) קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = (T, B)$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = ((a,c)\ ,\ (a,d)\ ,\ (b,c)\ ,\ (b,d))\ .$$

2) הצורה האסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$4,7$	$9,7$	$4,7$	$9,7$
B	$25,10$	$25,10$	$5,20$	$5,20$

3) נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$4,7$	$9,7$	$4,7$	$9,7$
B	$25,10$	$25,10$	$5,20$	$5,20$

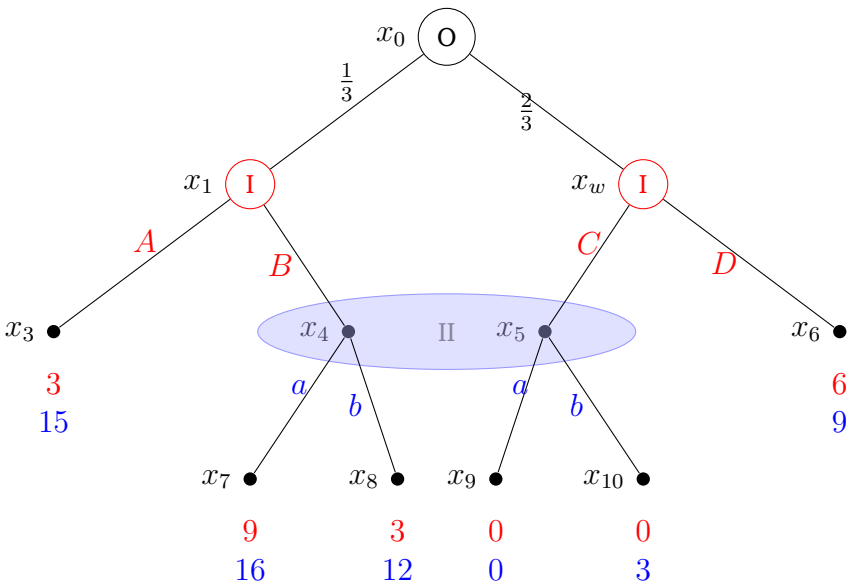
נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I:

I \ II	(a,c)	(a,d)	(b,c)	(b,d)
T	$4,7$	$9,7$	$4,7$	$9,7$
B	$25,10$	$25,10$	$5,20$	$5,20$

השיווי משקל נאש הם:

$$s^* = (T,(b,d))\ ,\quad s^* = (B,(b,c))\ .$$

ה)



1) קבוצת אסטרטגיות של שחקן I:

$$S_I = \{(A,C)\ ,\ (A,D)\ ,\ (B,C)\ ,\ (B,D)\}$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן II:

$$S_{II} = \{a,b\}\ .$$

2) הצורה האסטרטגית של המשחק היא:

I \ II	a	b
(A,C)	$1,5$	$1,7$
(A,D)	$5,11$	$5,11$
(B,C)	$3,\frac{16}{3}$	$1,6$
(B,D)	$13,16$	$5,10$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן I לכל אסטרטגיה של שחקן II:

I \ II	a	b
(A,C)	$1,5$	$1,7$
(A,D)	$5,11$	$5,11$
(B,C)	$3,\frac{16}{3}$	$1,6$
(B,D)	$13,16$	$5,10$

נחפש את התשובה הטובה ביותר של שחקן II לכל אסטרטגיה של שחקן I:

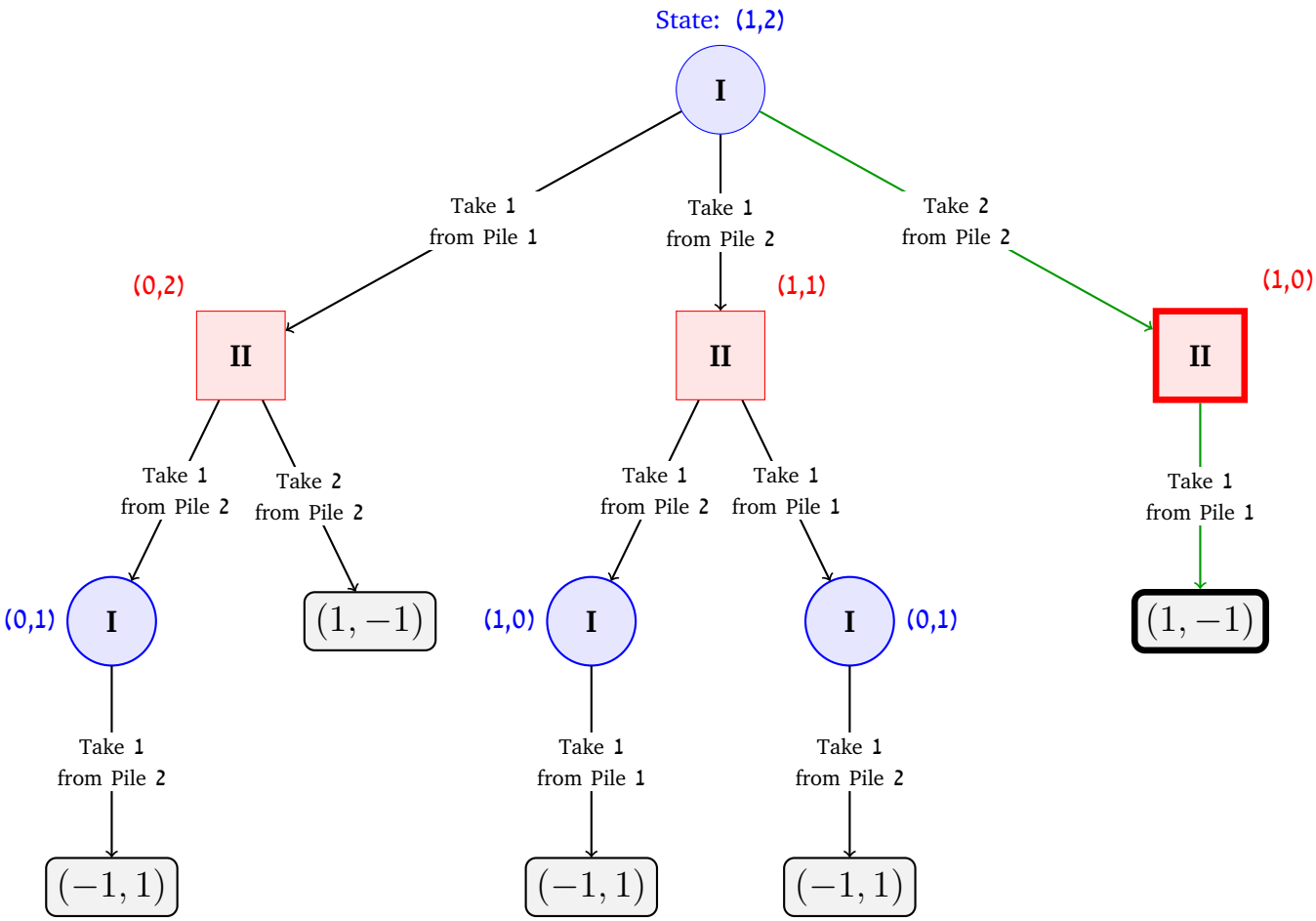
3)

I \ II	a	b
(A,C)	$1,5$	$1,7$
(A,D)	$5,11$	$5,11$
(B,C)	$3,\frac{16}{3}$	$1,6$
(B,D)	$13,16$	$5,10$

שיווי משקל נאש:

$$s^* = ((A,D),b)\ , \quad s^* = ((B,D),a)\ .$$

שאלה 2



מפתח:

- I **Player I's Turn**
- II **Player II's Turn**
- **State** (x, y)**:** Number of matches remaining in Pile 1 and Pile 2 respectively.
- (P_1, P_2)**:** Payoffs for Player I and Player II at the leaf node. (1 for Win, -1 for Loss).
- ⟶ **Winning Strategy Path** for Player I.

שאלה 3

שאלה 4

א) נקרא משה שחקן I ונקרא אהרון שחקן II. המשחק בצורה אסטרטגית הינה:

		שחקן II	
		A	B
שחקן I	A	$(1000, 1000)$	$(5000, 0)$
	B	$(0, 5000)$	$(4000, 4000)$

ב)

$$1000 = u_I(A, A) > u_I(B, A) = 0 \ ,$$
$$5000 = u_I(A, B) > u_I(B, B) = 4000$$

לכן האסטרטגיה $s_I = A$ שולטת חזק.

$$1000 = u_{II}(A, A) > u_{II}(A, B) = 0 \ ,$$
$$5000 = u_{II}(B, A) > u_{II}(B, B) = 4000$$

לכן האסטרטגיה $s_{II} = A$ שולטת חזק.

על פי ההנחות של שני השחקנים רציונלים, אז שניהם ישחקו לפי אסטרטגיה A.

שאלה 5

א)

I \ II	L	R
H	$4, 2$	$0, 1$
T	$3, 3$	$1, 1$

$\xrightarrow{R \prec L}$

I \ II	L
H	$4, 2$
T	$\cancel{3, 3}$

$\xrightarrow{T \prec H}$

I \ II	L
H	$4, 2$

תשלום סופי: $(u_I, u_{II}) = (4, 2)$.

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: $(s_I, s_{II}) = (H, L)$.

ב)

I \ II	L	R
H	$2,3$	$1,4$
T	$\cancel{0,2}$	$\cancel{0,4}$

$\xrightarrow{T \prec H}$

I \ II	L	R
H	$2,3$	$1,4$

$\xrightarrow{L \prec R}$

I \ II	R
H	$1,4$

תשלום סופי: $(u_I, u_{II}) = (1,4)$.

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: $(s_I, s_{II}) = (H, R)$.

ג)

I \ II	a	b	c
α	$1,0$	$3,0$	$2,1$
β	$3,1$	$0,1$	$1,2$
γ	$2,1$	$1,6$	$0,2$

$\xrightarrow{a \prec c}$

I \ II	b	c
α	$3,0$	$2,1$
β	$\cancel{0,1}$	$\cancel{1,2}$
γ	$\cancel{1,6}$	$\cancel{0,2}$

$\xrightarrow{\beta \prec \alpha,\ \gamma \prec \alpha}$

I \ II	b	c
α	$3,0$	$2,1$

$\xrightarrow{b \prec c}$

I \ II	c
α	$2,1$

תשלום סופי: $(u_I, u_{II}) = (2,1)$.

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: $(s_I, s_{II}) = (\alpha, c)$.

שאלה 6

א)

I \ II	L	R
T	$9,5$	$5,3$
B	$8,6$	$8,4$

$\xrightarrow{R \prec L}$

I \ II	L
T	$9,5$
B	$\cancel{8,6}$

$\xrightarrow{B \prec T}$

I \ II	L
T	$9,5$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: $(s_I, s_{II}) = (T, L)$.

ב)

I \ II	a	b	c	d
T	$-1,20$	$-7,-7$	$-1,2$	$-5,8$
M	$27,20$	$13,-1$	$21,2$	$13,-1$
B	$-5,20$	$-3,5$	$7,-1$	$3,-4$

$\xrightarrow{b \prec a,\ c \prec a,\ d \prec a}$

I \ II	a
T	$\cancel{-1,20}$
M	$27,20$
B	$\cancel{-5,20}$

$\xrightarrow{T \prec M,\ B \prec M}$

I \ II	a
M	$27,20$

פתרון באסטרטגיות שולטות חזק: $(s_I, s_{II}) = (M, a)$.

ג)

$I \backslash II$	a	b	c	d
α	$3,7$	$0,13$	$4,5$	$5,3$
β	$5,3$	$4,5$	$4,5$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$4,5$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$	$4,5$	$4,5$

$\xrightarrow{c \preceq b}$

$I \backslash II$	a	b	d
α	~~$3,7$~~	~~$0,13$~~	~~$5,3$~~
β	$5,3$	$4,5$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$	$4,5$

$\xrightarrow{\alpha \preceq \gamma}$

$I \backslash II$	a	b	d
β	$5,3$	$4,5$	$3,7$
γ	$4,5$	$3,7$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$	$4,5$

$\xrightarrow{a \preceq b}$

$I \backslash II$	b	d
β	~~$4,5$~~	~~$3,7$~~
γ	$3,7$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$

$\xrightarrow{\beta \preceq \delta}$

$I \backslash II$	b	d
γ	$3,7$	$5,3$
δ	$4,5$	$4,5$

$\xrightarrow{b \preceq d}$

$I \backslash II$	d
γ	$5,3$
δ	~~$4,5$~~

$\xrightarrow{\delta \preceq \gamma}$

$I \backslash II$	d
γ	$5,3$

פתרון באסטרטגיות שולטות חלש: $(s_I, s_{II}) = (\gamma, d)$.

<u>שאלה 7</u> s^* שיווי משקל במשחק G. לכן לכל שחקן $i \in N$ מתקיים

$$\forall s_i \in S_i : \quad u_i(s_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*) \ .$$

מכיוון ש- $\hat{S}_i \subseteq S_i$ לכל שחקן $i \in N$, בפרט מתקיים גם:

$$\forall s_i \in \hat{S}_i : \quad u_i(s_i, s^*_{-i}) \leq u_i(s^*) \ .$$

מכיוון ש- s^* ווקטור אסטרטגיות במשחק $\hat{G}$, נובע מכאן כי הוא שיווי משקל במשחק זה.

<u>שאלה 8</u> יהי G משחק סימטרי. יהי הווקטור אסטרטגיות (s_1, s_2) שיווי משקל של המשחק G. אזי

$$u_1(s_1, s_2) = \max_{s \in S_1} u_1(s, s_2) \qquad \wedge \qquad u_2(s_1, s_2) = \max_{s \in S_2} u_1(s_1, s) \ .$$

המשחק סימטרי לכן

$$u_2\left(s_2,s_1\right)=u_1\left(s_1,s_2\right)=\max_{s\in S_1}u_1\left(s,s_2\right)=\max_{s\in S_1}u_2\left(s_2,s\right)=\max_{s\in S_2}u_2\left(s_2,s\right)\ ,$$

וגם

$$u_1\left(s_2,s_1\right)=u_2\left(s_1,s_2\right)=\max_{s\in S_2}u_2\left(s_1,s\right)=\max_{s\in S_2}u_1\left(s,s_2\right)=\max_{s\in S_1}u_1\left(s,s_2\right)\ .$$

לכן הוקטור אסטרטגיות (s_2,s_1) הוא שיווי משקל של המשחק G.

שאלה 9

שאלה 10

שאלה 11

שאלה 12

שאלה 13 התשלום המקסמין של I:

$$\underline{\mathrm{v}}_1=\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U_1(x,y)\ .$$

פונקצית התשלום של שחקן I באסטרטגיות מעורבות:

$$U_1(x,y)=5xy+0x(1-y)+0(1-x)y+11(1-x)(1-y)=16xy-11x-11y+11$$

כפונקציה ליניארית של y:

$$U_1(x,y)=\left(16x-11\right)y-11x+11$$

מכאן:

$$\min_{y\in[0,1]}U_1(x,y)=\begin{cases}-11x+11: & x\geq\frac{11}{16}\\ 5x: & x\leq\frac{11}{16}\end{cases}$$

לכן $x^*=\dfrac{11}{16}$ וגם:

$$\max_{x\in[0,1]}\min_{y\in[0,1]}U_1(x,y)=\frac{55}{16}$$

כאשר האסטרטגיה המקסמין היא

$$\sigma_1^*=(x^*(T),(1-x^*)(B))=\left(\frac{11}{16}(T),\frac{5}{16}(B)\right)\ .$$

התשלום המקסמין של II:

$$\underline{\mathrm{v}}_2=\max_{y\in[0,1]}\min_{x\in[0,1]}U_2(x,y)\ .$$

פונקצית התשלום של שחקן I באסטרטגיות מעורבות:

$$U_2(x,y) = -5xy + 11x(1-y) + 6(1-x)y + 0(1-x)(1-y) = -22xy + 11x + 6y$$

כפונקציה ליניארית של x:

$$U_2(x,y) = (-22y + 11)\,x + 6y$$

מכאן:

$$\min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) = \begin{cases} 6y: & y \le \frac{1}{2} \\ -16y + 11: & y \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

לכן $y^* = \dfrac{1}{2}$ וגם:

$$\max_{y\in[0,1]} \min_{x\in[0,1]} U_2(x,y) = 3$$

כאשר האסטרטגיה המקסמין היא

$$\sigma_2^* = (y^*(L), (1-y^*)(R)) = \left(\frac{1}{2}(L), \frac{1}{2}(T)\right) \ .$$