תרגילים 1: שפות

שאלה 1 נתונות השפות הבאות מעל הא"ב $\{0,1\}$:

$$L_1 = \{\varepsilon\} \ , \quad L_2 = \{110, 01\} \ , \quad L_3 = \emptyset \ , \quad L_4 = \{\varepsilon, 100\} \ , L_5 = \{00, 11\} \ .$$

כתבו את הגדרת השפה לשפות הבאות:

א) $L_1 L_2$

ב) $L_2 L_3$

ג) $L_4 - L_1$

ד) L_2^2

ה) L_5^R

ו) L_4^*

ז) $L_1 \cup L_2^R$

ח) $(L_2 \cup L_5)^2$

שאלה 2 הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א) לכל $n \in \mathbb{N}$: $L_1^n L_2^n = (L_1 L_2)^n$.

ב) $L_1 L_1^* L_1 = L_1^* L_1^2 \cap L_1^2 \Sigma^*$

ג) $(L_1^* L_2^*)^* = ((L_1 L_2) \cup (L_1 L_1) \cup L_2)^* \cup L_1^*$

ד) $L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = \Sigma^* - \left(\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2} \cap \overline{L_3}\right)\right)$

ה) $L_1 \left(L_2^* \cup L_3\right) = (L_1 L_2^*) \cup (L_1 L_3)$.

שאלה 3 מעל הא"ב $\{x, y, z\}$ השלימו את התיאור הפורמלי לכל אחת מהשפות הבאות:

א) L_1

- כמות ההופעות של x מתחלקת ב- 2.
- כמות ההופעות של y מתחלקת ב- 3.
- כמות ההופעות של z מתחלקת ב- 5.

ב) L_2

- כמות ההופעות של x הינה מספר ההופעות של y בחזקת 3.
- כמות ההופעות של z הינה לפחות ככמות ההופעות של x.

ג) L_3

- הצירוף xyz מופיע בכל מילה לפחות פעמיים.

ד) L_4

- כל מילה הינה פלינדרום.

ה) L_5

- כל מילה מתחילה באות z.
- אורך כל מילה הינה זוגי.

שאלה 4 תנו דוגמאות לשפה L כך שמתקיים:

א) $L^* = L^+$:

ב) $L^* \neq L^+$

ג) $L = L^*$

ד) $L \neq L^*$

ה) L^* סופית.

שאלה 5 תנו דוגמא לשפות אינסופיות L_1, L_2 שמקיימות:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \quad \wedge \quad L_1 L_2 = L_2 L_1 \ .$$

נמקו את תשובתכם.

שאלה 6 תנו דוגמא לשפות אינסופיות L_1, L_2 שמקיימות:

$$L_1 \cap L_2 = \emptyset \quad \wedge \quad L_1 L_2 = L_2 L_1 \ .$$

נמקו את תשובתכם.

שאלה 7 תנו דוגמה לקבוצה אינסופית A של שפות מעל הא"ב $\{0,1\}$ כך שמתקיים התנאים הבאים:

1) כל חיתוך של מספר סופי של שפות אינו ריק.

2) קיימת תת-קבוצה (אינסופית) של A כך שחיתוך השפות בה הוא ריק.

* חובה להוכיח שהדוגמה שנתתם מקיימת את 2 התנאים.

פתרונות

שאלה 1

א) L_1L_2:

שרשור של L_1 (שפת המילה הריקה) עם L_2. כיוון ששרשור של כל מילה w עם ε נותן את w, השפה לא משתנה:

$$L_1L_2 = \{110, 01\} \ .$$

ב) L_2L_3:

שרשור של שפה עם השפה הריקה ($\emptyset$). כיוון שאין אף מילה ב- L_3 שאפשר לשרשר למילות L_2, התוצאה היא קבוצה ריקה:

$$L_2L_3 = \emptyset \ .$$

ג) $L_4 - L_1$:

הפרש קבוצות. אנחנו לוקחים את כל המילים ב- L_4 ומסירים מהן את המילים שנמצאות ב- L_1 (כלומר, מסירים את המילה הריקה ε, אם היא קיימת שם):

$$L_4 - L_1 = L_4 \backslash \{\varepsilon\} = \{100\} \ .$$

ד) L_2^2:

שרשור של L_2 עם עצמה (L_2L_2). לוקחים כל מילה מ- L_2 ומשרשרים לה כל מילה מ- L_2:

- $110 + 110 = 110110$.
- $110 + 01 = 11001$
- $01 + 110 = 01110$
- $01 + 01 = 0101$

$$L_2^2 = \{110110, 11001, 01110, 0101\} \ .$$

ה) L_5^R:

היפוך (Reverse) של השפה L_5. הופכים את סדר האותיות בכל מילה:

- 00 נשאר 00.
- 11 נשאר 11.

$$L_5^R = \{00, 11\}$$

במקרה זה $L_5^R = L_5$.

ו) L_4^*:

סגור קליני .(Kleene Star) זוהי קבוצת כל השרשורים האפשריים (באורך כלשהו) של מילים מתוך L_4. מכיוון ש- L_4 מכילה את המילה הריקה ואת "100", כל שרשור ביניהן יניב רצפים של "100" או את המילה הריקה עצמה.

$$L_4^* = \{\varepsilon, 100, 100100, 100100100, \dots\} = \{(100)^n \mid n \geq 0\} \ .$$

ז) $L_1 \cup L_2^R$:

איחוד של L_1 עם היפוך השפה L_2:

- $L_1 = \{\varepsilon\}$.
- $L_2^R = \{011, 10\}$.
- $L_1 \cup L_2^R = \{\varepsilon, 011, 10\}$.

ח) $(L_2 \cup L_5)^2$

קודם נאחד את השפות ואז נשרשר את התוצאה עם עצמה: $L_2 \cup L_5 = \{110, 01, 00, 11\}$ כעת נשרשר את הקבוצה הזו עם עצמה (סך הכל 16 צירופים אפשריים):

$$\begin{aligned}(L_2 \cup L_5)^2 = \{&110110, 11001, 11000, 11011,\\ &01110, 0101, 0100, 0111,\\ &00110, 0001, 0000, 0011,\\ &11110, 1101, 1100, 1111\}\end{aligned}$$

שאלה 2

א) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית ($n = 2$):
$L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$.

$$L_1^2 = \{aa\}, \quad L_2^2 = \{bb\}, \quad L_1^2 L_2^2 = \{aabb\} \ .$$

$$L_1 L_2 = \{ab\}, \quad (L_1 L_2)^2 = \{abab\} \neq L_1^2 L_2^2 \ .$$

ב) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_1 = \{a\}$.

$$L_1 L_1^* L_1 = \{a\} \circ \{\varepsilon, a, aa, \dots\} \circ \{a\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1 L_1^* L_1 = \{a\} \circ \{\varepsilon, a, aa, \dots\} \circ \{a\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1^*L_1^2 = \{\varepsilon, a, aa, \ldots\} \circ \{aa\} = \left\{a^n \;\middle|\; n \geq 2\right\} \ .$$

$$L_1^2\Sigma^* = \{aa, aaa, \ldots\} \circ \{a, b, \ldots\} = \{aaa, aab, \ldots\} \ .$$

$aab \in L_1^*L_1^2 \cap L_2^2\Sigma^*$ אבל $aab \notin L_1L_1^*L_1$.

ג) הטענה לא נכונה. דוגמה נגדית: $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$.

$$(L_1^*L_2^*)^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \ldots\} = \{\varepsilon, a, b\}^* \ .$$

$$L_1L_2 = \{ab\} \ , \ L_1L_1 = \{aa\} \ \Rightarrow \ L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2 = \{aa, ab, b\} \ \Rightarrow \ (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* = \{aa, ab, b\}^* \ .$$

בנוסף $L_1^* = \{a\}^*$ לפיכך:

$$(L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^*\{aa, ab, b\}^* \cup \{a\}^* = \{a, aa, ab, b\}^* \ .$$

לכן: $\varepsilon \in (L_1^*L_2^*)^*$ אבל $\varepsilon \notin (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^*$ לכן

$$(L_1^*L_2^*)^* \neq (L_1L_2 \cup L_1L_1 \cup L_2)^* \cup L_1^* \ .$$

ד) הטענה נכונה. הוכחה:
לפי חוקי דה-מורגן:

$$\Sigma^* - (A \cup B) = \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \ .$$

לכן:

$$\begin{aligned}\Sigma^* - \left(\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2} \cap \overline{L_3}\right)\right) =& \Sigma^* - \left(\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2 \cup L_3}\right)\right) \\ =& \left(\overline{\overline{L_1} \cup \left(\overline{L_2 \cup L_3}\right)}\right) \\ =& (L_1 \cap (L_2 \cup L_3))\end{aligned}$$

ה) הטענה נכונה. הוכחה:

יש להוכיח שלכל $w \in \Sigma^*$ מתקיים

$$w \in L_1\left(L_2^* \cup L_3\right) \iff w \in (L_1L_2^*) \cup (L_1L_3)$$

<u>כיוון $\Leftarrow$</u>

אם $w \in L_1\left(L_2^* \cup L_3\right)$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $x \in L_1$ וגם $y \in L_2^* \cup L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $x \in L_1$ וגם $y \in L_2^* \vee y \in L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ ו- $xy \in L_1L_2^* \vee xy \in L_1L_3$

$\Leftarrow$ $w \in L_1L_2^* \vee w \in L_1L_3$

$\Leftarrow$ $w \in (L_1 L_2^* \cup L_1 L_3)$.

<u>כיוון $\Rightarrow$</u>

אם $w \in (L_1 L_2^* \cup L_1 L_3)$

$\Leftarrow$ $w \in L_1 L_2^* \vee w \in L_1 L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ כאשר $x \in L_1$ ו- $y \in L_2^* \vee y \in L_3$

$\Leftarrow$ $w = xy$ כאשר $x \in L_1$ ו- $y \in (L_2^* \cup L_3)$

$\Leftarrow$ $w \in L_1 (L_2^* \cup L_3)$.

שאלה 3

א)

$$L_1 = \left\{ \{x,y,z\}^* \;\middle|\; \#x_w \equiv 0 \pmod 2,\ \#y_w \equiv 0 \pmod 3,\ \#z_w \equiv 0 \pmod 5 \right\} .$$

ב)

$$L_2 = \left\{ w \in \{x,y,z\}^* \;\middle|\; \#x_w = (\#y_w)^3 \ ,\ \#z_w \geq \#x_w \right\}$$

ג)

$$L_3 = \Sigma^* \circ (xyz) \circ \Sigma^* \circ (xyz) \circ \Sigma^*$$

או, במפורשות:

$$L_3 = \{x,y,z\}^* \circ (xyz) \circ \{x,y,z\}^* \circ (xyz) \circ \{x,y,z\}^*$$

ד)

$$L_4 = \left\{ ww^r \;\middle|\; w \in \{x,y,z\}^* \right\} .$$

ה)

$$L_5 = \left\{ w \in \{z\} \circ \{x,y,z\}^* \;\middle|\; |w| \equiv 0 \pmod 2 \right\} .$$

שאלה 4

א) $L^* = L^+$ אם ורק אם $\varepsilon \in L$, כלומר מילה הריקה ב- L. דוגמאות:

- $L = \{\varepsilon, a\}$,
- $L = \{0, 1, \varepsilon\}$.

ב) אם מילה הריקה לא ב- L אז $L^* \neq L^+$. דוגמאות:

- $L = \{a\}$,
- $L = \{01, 11\}$.

ג) אם L סגור תחת הפעולת כוכב קליין אז $L = L^*$, שגורר לתנאים: (1) $\varepsilon \in L$ (2) אם $x, y \in L$ אז $xy \in L$. דוגמאות של שפות שמקיימות התנאי הזה הן:

- $L = \{\varepsilon\}$
- $L = \{a\}^*$
- בהינתן אלפבית Σ כלשהי, $L = \Sigma^*$.

ד) כל שפה סופית L עבורה $L \neq \emptyset$ וגם $L \neq \{\varepsilon\}$ מקיימת $L \neq L^*$.
לדוגמה, אם $L = \{a\}$ אז $L^* = \{\varepsilon, a, aa, \ldots\} \neq L$.

ה) אם שפה L מכילה מילה w עבורה $|w| > 0$ אז L^* לא סופית. לפיכך האפשרויות לשפות שעבורן הכוכב קליין הוא שפה סופית הן כדלקמן:

- אם $L = \emptyset$ אז $L^* = \emptyset$ ולכן L^* סופית.
- אם $L = \{\varepsilon\}$ אז $L^* = \{\varepsilon\}$ ולכן L^* סופית.

שאלה 5

שאלה 6 $L_1 = \left\{a^n \;\middle|\; n \text{ אי-זוגי}\right\}$ ו- $L_2 = \left\{a^n \;\middle|\; n > 0 \ \wedge\ n \text{ זוגי}\right\}$

שאלה 7 נגדיר

$$A = \{L_1, L_2, \ldots, \}$$

כאשר $L_i = \left\{w \in \{0,1\}^* \;\middle|\; |w| \geq i\right\}$.

1) כל חיתוך של מספר סופי של שפות מקיים את התנאי הבא:

$$L_{i_1} \cap L_{i_2} \cap \cdots \cap L_{i_n} = L_{i_m} \ , \quad m = \max\left(i_1, i_2, \ldots, i_m\right) \ .$$

בפרט, $L_{i_m} \neq \emptyset$.

2) נגדיר תת-קבוצה אינסופית $B \subseteq A$ להיות הקבוצה A עצמה:

$$B = A \ .$$

החיתוך של כל השפות של B הוא:

$$\bigcap_{L \in B} L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i \ .$$

נוכיח כי הקבוצה זו היא קבוצת הריקה:

$$\bigcap_{L \in B} L = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \emptyset \ .$$

נוכיח את הטענה הזו דרך השלילה באופן הבא. נניח בשלילה כי קיימת לפחות מילה אחת $w \in B$.

אם	$\exists w \in B$	(ההנחת המוצא בשלילה)
$\Rightarrow$	$\exists w \in \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$	(הגדרת התת-קבוצה B)
$\Rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}^+ :\ \lvert w\rvert = k$	(w מילה סופית)
$\Rightarrow$	$w \in L_{k+1}$	(w שייכת לחיתוך השפות $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$)
$\Rightarrow$	$\exists k \in \mathbb{N}^+ :\ \lvert w\rvert \geq k+1$	(הגדרת השפה L_{k+1})
$\Rightarrow$	$k \geq k+1$	($\lvert w\rvert = k$)
$\Rightarrow$	סתירה	($k \ngeq k+1$)