# הרצאה 2: משחקים בצורה אסטרטגית, שליטה ושיווי משקל נאש

## 2.1 הגדרה של משחק בצורה אסטרטגית

**הגדרה 2.1 משחק בצורה אסטרטגית**

**משחק בצורה אסטרטגית** (או **משחק בצורה נורמלית**) הוא שלושה סדורה

$$G = \left(N\ ,\ (S_i)_{i\in N}\ ,(u_i)_{i\in N}\right)$$

שבה

**1)** $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ היא קבוצת שחקנים סופית.

**2)** לכל שחקן, $S_i, i \in N$ היא קבוצת האסטרטגיות של שחקן $i$.

**3)** נסמן ב-

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$$

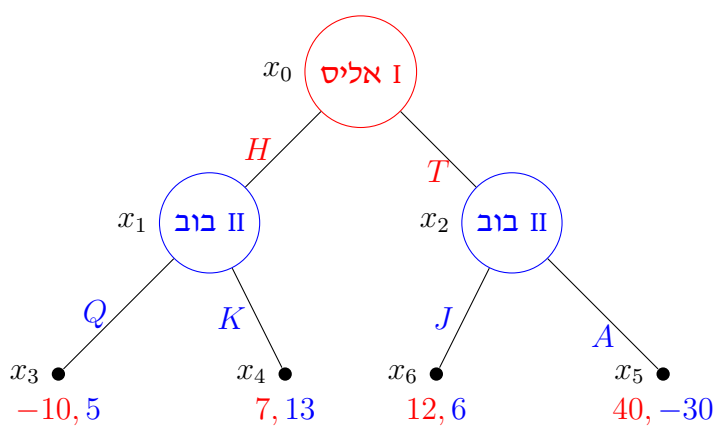
אצ קבוצת כל וקטורי האסטרטגיות. לכל שחקן $i \in N$:

$$u_i : S \to \mathbb{R}$$

היא פונקציה המתאימה לכל וקטור אסטרטגיות $s = (s_i)_{i\in N}$ תשלום לשחקן $i$.

**דוגמה 2.1 ( משחק של מטבע וקלף משחק )**

נתון את המשחק הבא
בצורה רחבה:




רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית.

**פתרון:**
לשחקן $I$ יש קדקוד אחד $x_0$ בו הוא מקבל החלטה בין שתי פעולות $H, T$.
אז לשחקן $I$ יש **קבוצה ידיעה אחת**:

$$U_I = \{(x_0, (H, T))\}\ ,$$

ולכן הקבוצת האסטרטגיות של שחקן $I$ היא:

$$S_I = \{H, T\} \ .$$

לשקחן $II$ יש שני קדקודים: $x_1, x_2$ בהם הוא מקבל החלטה.
אז הקבוצות ידיעה של שחקן $II$ הן:

$$U_{II} = \{(x_1, (Q, K)) \ , \ (x_2, (J, A)) \ \} \ .$$

מכיוון שלשחקן $II$ יש שתי קבוצותצ ידיעה $x_1, x_2$ ובכל קבוצה ידיעה יש בדיוק שתי פעולות אפשריות, אז יש לבוב $2 \times 2 = 4$ אסטרטגיות. בפרט הקבוצת אסטרטגיות של בוב היא:

$$S_{II} = \{(Q, J) \ , \ (Q, A) \ , \ (K, J) \ , \ (K, A)\} \ .$$

(נהוג לרשום את האסטרטגיות מלמעלה עד למטה ומשמאל לימון.)
אפשר לרשום את הצורה האסטרטגית של המשחק בצורת טבלה:

| $I \backslash II$ | $(Q, J)$ | $(Q, A)$ | $(K, J)$ | $(K, A)$ |
|---|---|---|---|---|
| $H$ | $-10, 5$ | $-10, 5$ | $7, 13$ | $7, 13$ |
| $T$ | $12, 6$ | $40, -30$ | $12, 6$ | $40, -30$ |

מכאן הצורת אסטרטגית הפורמלית של המשחק היא:

$$G = (N, (S_I, S_{II}), (u_I, u_{II}))$$

כאשר

- הקבוצת שחקנים היא
$$N = \{\text{בוב}, \text{אליס}\} = \{I, II\} \ .$$
- הקבוצות האסטרטגיות של המשחק הן $S = (S_I, S_{II})$, כאשר הקבוצת אסטרטגיות של שחקן $I$ היא:
$$S_I = \{H, T\}$$
והקבוצת אסטרטגיות של שחקן $II$ היא:
$$S_{II} = \{(Q, J) \ , \ (Q, A) \ , \ (K, J) \ , \ (K, A)\} \ .$$
- והפונקצית התשלומים של שחקן $II$ היא:
$$\begin{aligned} u_I(H, (Q, J)) &= -10 \ , & u_I(T, (Q, J)) &= 12 \ , \\ u_I(H, (Q, A)) &= -10 \ , & u_I(T, (Q, A)) &= 40 \ , \\ u_I(H, (K, J)) &= 7 \ , & u_I(T, (K, J)) &= 12 \ , \\ u_I(H, (K, A)) &= 7 \ , & u_I(T, (K, A)) &= 40 \ , \end{aligned}$$
והפונקצית התשלומים של שחקן $I$ היא:
$$\begin{aligned} u_{II}(H, (Q, J)) &= 5 \ , & u_{II}(T, (Q, J)) &= 6 \\ u_{II}(H, (Q, A)) &= 5 \ , & u_{II}(T, (Q, A)) &= -30 \ , \\ u_{II}(H, (K, J)) &= 13 \ , & u_{II}(T, (K, J)) &= 6 \ , \\ u_{II}(H, (K, A)) &= 13 \ , & u_{II}(T, (K, A)) &= -30 \ . \end{aligned}$$

■

## 2.2 סימונים

**הגדרה 2.2**

תהי $N = \{1, \ldots, n\}$ קבוצת סופית, ולכל $i \in N$ תהי $X_i$ קבוצה כלשהי.
נסמן

$$X = \bigtimes_{i \in N} X_i = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות $X_i$.
לכל $i \in N$ נגדיר

$$X_{-i} = \bigtimes_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_j = X_1 \times X_2 \times X_{i-1} \times X_{i+1} \ldots \times X_n$$

את המכפלה הקרטיזית של כל הקבוצות $X_j$ למעט הקבוצה $X_i$.
במילים אחרות,

$$X_{-i} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mid x_j \in X_j \ , \ \forall j \neq i\}$$

איבר ב- $X_{-i}$ מסומן ב-

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ .$$

זהו הווקטור ה- $(n-1)$ ממדי הנוצר מ- $(x_1, \ldots, x_n) \in X$ על ידי השמטת הקואורדינטה $i$.

## 2.3 מושג השליטה

**הגדרה 2.3 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק $n$ שחקנים**

נתון משחק $n$- שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\right)$.
אם קיימות אסטרטגיות $s_i, t_i \in S_i$ של שחקן $i$ כך שלכל אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ של שאר השחקנים מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i}) \ ,$$

אז אומרים כי $s_i$ **נשלטת חזק** $t_i$ (או $t_i$ **שולטת חזק** על $s_i$). במילים אחרות, אם קיימות $s_i, t_i \in S_i$ כך שלכל וקטור אסטרטגיות $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ של שאר השחקנים מתקיים

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

אז אומרים כי $t_i$ נשלטת חזק ע"י $s_i$. סימון:

$$s_i \prec t_i \ .$$

**למה 2.1 אסטרטגיה נשלטת חזק במשחק 2 שחקנים**

נתון משחק 2- שחקנים $G = (N, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$ כאשר $N = \{1, 2\}$ הקבוצת שחקנים.

- אם קיימות אסטרטגיות $s_1, t_1 \in S_1$ של שחקן 1 כך שלכל אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן 2 מתקיים:

  $$u_1(s_1, s_2) < u(t_1, s_2)$$

  אז אומרים כי $s_1$ **נשלטת חזק** ע"י $t_1$. סימון: $s_1 \prec t_1$.

- באותה מידה, אם קיימות אסטרטגיות $s_2, t_2 \in S_2$ של שחקן 2 כך שלכל אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 מתקיים:

  $$u_2(s_1, s_2) < u(s_1, t_2)$$

אז אומרים כי $s_2$ **נשלטת חזק** ע"י $t_2$. סימון: $s_2 \prec t_2$.

**דוגמה 2.2 (אסטרטגיות נשלטות חזק)**

נתון המשחק הבא בצורה אסטקטגית:

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $4,1$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $2,0$ |

**א)** מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן $I$.

**ב)** מצאו אסטרטגיה הנשלטת חזק של שחקן $II$.

**פתרון:**

**א)**

$$0 = u_I(B,L) < u_I(T,L) = 1 \ ,$$

$$0 = u_I(B,M) < u_I(T,M) = 1 \ ,$$

$$2 = u_I(B,R) < u_I(T,R) = 4 \ .$$

לכן אסטרטגיה $B$ נשלטת חזק על ידי $T$. סימון

$$B \prec T \ .$$

**ב)**

$$1 = u_{II}(T,R) < u_{II}(T,M) = 2 \ ,$$

$$0 = u_{II}(B,R) < u_{II}(B,M) = 1 \ .$$

לכן אסטרטגיה $R$ נשלטת חזק על ידי $M$:

$$R \prec M \ .$$

■

## 2.4 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים

**משפט 2.1 הנחות של רציונליות בתורת המשחקים**

**1)** שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק.

**2)** כל השחקנים במשחק רציונליים.

**3)** העובדה שכל השחקנים רציונליים היא ידיעה משותפת בין כל השחקנים.

# 2.5 סילוק חוזר

תחת הנחות של משפט 2.1, ניתן לסלק אסטרטגיות נשלטות חזק, ולהגיע לפתרון של המשחק.

**דוגמה 2.3 (סילוק חוזר)**

נתון המשחק הבא:

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $0,1$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $2,0$ |

מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק, והתשלום הסופי של המשחק.

**פתרון:**

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ | $R$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ | $0,1$ |
| $B$ | $0,3$ | $0,1$ | $2,0$ |

$\xrightarrow{R \prec M}$

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | $1,0$ | $1,2$ |
| ~~$B$~~ | ~~$0,3$~~ | ~~$0,1$~~ |

$\xrightarrow{B \prec T}$

| $I \backslash II$ | $L$ | $M$ |
|---|---|---|
| $T$ | ~~$1,0$~~ | $1,2$ |

$\xrightarrow{L \prec M}$

| $I \backslash II$ | $M$ |
|---|---|
| $T$ | $1,2$ |

$M$ באסטרטגיה ישתמש $II$ שחקן, $T$ באסטרטגיה ישתמש $I$ שחקו רציונליים, שחקנים של הכללים לפי לכן יהיה: הסופי והתשלום

$$u_I(T,M) = 1 \ , \qquad u_{II}(T,M) = 2 \ .$$

■

**דוגמה 2.4 (דילמה האסיר)**

משחק פשוט מאוד, ויחד עם זאת מהרבה בחינות, הוא המשחק הידוע בשם **"דילמה האסיר"**. המשחק מופיע בספרות בצורת הסיפור הבא.

שני עבריינים אליס (שחקן 1) ובוב (שחקן 2) ביצעו פשע חמור ונעצרו. בהעדר כל הוכחות אחרות, הדרך היחידה שבה יכולה המשטרה להשיג הרשעה על עבירה זו היא שאחד העצורים (או שניהם) יודה בביצוע המעשה. בחקירתם העמידה המשטרה כל אחד מהעצורים בפני ההחלטה הבאה:

- אם אליס מלשינה ובוב שותק $\Leftarrow$ אליס יוצאת חופשי ובוב מקבל 10 שנים מאסר.
- אם בוב מלשין ואליס שותקת $\Leftarrow$ בוב יוצא חופשי ואליס מקבלת 10 שנים מאסר.
- אם שניהם שותקים $\Leftarrow$ יש בידי המשטרה ראיות להרשעתם בעבירות פחותות (למשל, העלמת מס) שמוביל למאסר של שנה אחת לכל אחד.
- אם שניהם מלשינים $\Leftarrow$ המשטרה מבקשת להתחשב בשיתוף הפעולה שלהם ולגזור את עונשם ל־6 שנות מאסר לכל אחד.

רשמו את המשחק בצורה אסטרטגית ומצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

**פתרון:**
נסמן:
$C_1 =$ האסטרטגיה שאליס "מלשינה".
$D_1 =$ האסטרטגיה שאליס "שותקת".
$C_2 =$ האסטרטגיה שבוב "מלשין".
$D_2 =$ האסטרטגיה שבוב "שותק".

המשחק בצורה אסטרטגית הינו:

| 1 אליס \ 2 בוב | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_1$ | $-10,0$ | $-1,-1$ |

| 1 \ 2 | $C_2$ | $D_2$ |
|---|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ | $0,-10$ |
| $D_1$ | $-10,0$ | $-1,-1$ |

$\xrightarrow{D_2 \prec C_2}$

| 1 \ 2 | $C_2$ |
|---|---|
| $C_I$ | $-6,-6$ |
| $D_I$ | $\cancel{-10,-10}$ |

$\xrightarrow{D_I \prec C_1}$

| 1 \ 2 | $C_2$ |
|---|---|
| $C_1$ | $-6,-6$ |

לכן לפי הכללים של שחקנים רציונליים, שחקן $I$ ישתמש באסטרטגיה $C_1$, שחקן 2 ישתמש באסטרטגיה $C_{II}$ והתשלום הסופי יהיה:

$$u_1(C_1,C_2) = -6 \ , \qquad u_2(C_1,C_2) = -6 \ .$$

כפי שניתן לראות, עבור שני השחקנים האסטרטגיה "מלשין" שולטת חזק על האסטרטגיה "שותק". לכן תהליך סילוק אסטרטגיות נשלטות מוביל לפתרון שבו שני האסירים מלשינים, והתוצאה היא 6 שנות מאסר לשניהם.

העניין במשחק זה הוא בכך שאם שני השחקנים לא מלשינים (שותקים), תוצאת המשחק תהיה שנת מאסר אחת לשניהם, העדיפה לשני השחקנים. כלומר, הפתרון הנגזר מההנחות הרציונליות הנראות סבריות מאוד, אינו "יעיל": יש דרך ששני השחקנים יכולו לקבל תוצאה עדיפה לשניהם והיא לשתוק:

$$s = (C_1, C_2) \ .$$

לרוע מזלם, תוצאה זו אינה יציבה, שכן כל אחד מהם יכול לסטות (ולהלשין) ולקבל תוצאה עוד יותר טובה עבורו: שחרור במקום 6 שנותת מאסר (על חשבון שחקן השני שיקבל 10 שנות מאסר). ■

# 2.6 שיווי משקל נאש

**הגדרה 2.4 תשובה טובה ביותר במשחק $n$ שחקנים**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$.
אם קיימת אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן $i$ וקיימת וקטור אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ של שאר השחקנים כך ש:

$$u_i\left(s_i, s_{-i}\right) = \max_{t_i \in S_i} u_i\left(t_i, s_{-i}\right)$$

אז אומרים כי $s_i$ היא **התשובה הטובה ביותר** של שקחן $i$ בתגובה לוקטור אסטרטגיות $s_{-i}$ של שאר השחקנים.
במילים אחרות, האסטרטגיה $s_i$ של שחקן $i$ היא תשובה טובה ביותר בתגובה לאסטרטגיות $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ של שאר השחקנים אם אסטרטגיה $s_i$ נותנת לשחקן $i$ התשלום המקסימלי

מתוך כל האסטרטגיות האחרות $t_i \in S_i$ של שחקן $i$:

$$u_i\left(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) = \max_{t_i \in S_i} u_i\left(s_1, s_2, \ldots s_{i-1}, t_i, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \quad .$$

**למה 2.2 תשובה טובה ביותר במשחק 2 שחקנים**

נתון משחק 2 שחקנים: $G = (\{1,2\}, (S_1, S_2), (u_1, u_2))$.

- אם קיימת אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 וקיימת אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן 2 כך שמתקיים

$$\forall t_1 \in S_1 : \qquad u_1\left(s_1, s_2\right) = \max_{t_1 \in S_1} u_1\left(t_1, s_2\right)$$

  אז אומרים כי $s_1$ היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 1 בתגובה לאסטרטגיה $s_2$ של שחקן 2.
  דרך שקולה לציין התנאי הזה היא:

$$\forall t_1 \in S_1 : \qquad u_1\left(s_1, s_2\right) \geq u_1\left(t_1, s_2\right) \quad .$$

- אם קיימת אסטרטגיה $s_2 \in S_2$ של שחקן 2 וקיימת אסטרטגיה $s_1 \in S_1$ של שחקן 1 כך שמתקיים

$$\forall t_2 \in S_2 : \qquad u_2\left(s_1, s_2\right) = \max_{t_2 \in S_2} u_2\left(s_1, t_2\right)$$

  אז אומרים כי $s_2$ היא **תשובה טובה ביותר** של שחקן 2 בתגובה לאסטרטגיה $s_1$ של שחקן 1.
  דרך שקולה לציין התנאי הזה היא:

$$\forall t_2 \in S_2 : \qquad u_2\left(s_1, s_2\right) \geq u_2\left(s_1, t_2\right) \quad .$$

**דוגמה 2.5 (תשובה טובה ביותר)**

נתון המשחק שני שחקנים הבא:

| $I$ \ $II$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $0,5$ | $1,2$ | $2,2$ | $3,4$ |
| $\beta$ | $8,4$ | $7,0$ | $6,-1$ | $5,2$ |
| $\gamma$ | $0,3$ | $2,2$ | $0,1$ | $-1,3$ |
| $\delta$ | $5,2$ | $3,1$ | $2,2$ | $4,5$ |

- אם שחקן $I$ משחק לפי האסטרטגיה $\alpha$ אזי התשובה הטובה ביותר של שחקן $II$ היא אסטרטגיה $a$.
- אם שחקן $I$ משחק לפי האסטרטגיה $\delta$ אזי התשובה הטובה ביותר של שחקן $II$ היא אסטרטגיה $d$.
- אם שחקן $II$ משחק לפי האסטרטגיה $b$ אזי התשובה הטובה ביותר של שחקן $I$ היא אסטרטגיה $\beta$.
- אם שחקן $II$ משחק לפי האסטרטגיה $c$ אזי התשובה הטובה ביותר של שחקן $I$ היא אסטרטגיה $\beta$.

**הגדרה 2.5 שיווי משקל נאש**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G=\left(N,\left(S_i\right)_{i\in N},\left(u_i\right)_{i\in N}\right)$. אם קיים וקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ כך שלכל שחקן $i\in N$ ולכל אסטרטגיה $s_i\in S_i$ של שחקן $i$ מקתיים:

$$u_i\left(s^*\right)\geq u_i\left(s_i,s_{-i}^*\right)$$

אז אומרים כי $s^*$ הוא **שיווי משקל נאש** של המשחק.

המשמעות של שיווי משקל, נניח שכל שחקן $i\in N$ משחק לפי האסטרטגיה $s_i^*$ של השיווי משקל: $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$. אזי התשלום לכל שחקן $i\in N$ יהיה $u_i\left(s^*\right)$. כעת נניח ששחקן אחד $j\in N$ בוחר לשחק לפי אסטרטגיה אחרת $s_j\neq s_j^*$, אשר לא בווקטור אסטרטגיות $s^*$. אז התשלום לשחקן $j$ יהיה פחות מהתשלום שהוא היה מקבל אם הוא היה משחק לפי האסטרטגיה $s_j^*\in s^*$ של השיווי משקל $s^*$. כלומר:

$$u_j\left(s_1^*,\ldots,s_{j-1}^*,s_j^*,s_{j+1}^*,\ldots,s_n^*\right)\geq u_j\left(s_1^*,\ldots,s_{j-1}^*,s_j,s_{j+1}^*,\ldots,s_n^*\right)\ .$$

וקטור התשלום $u\left(s^*\right)$ נקרא **תשלום שיווי משקל** של המשחק.

**למה 2.3 שיווי משקל נאש במשחק $2$ שחקנים**

נתון משחק 2 שחקנים: $G=\left(\{1,2\},\left(S_1,S_2\right),\left(u_1,u_2\right)\right)$. אם קיים ווקטור אסטרטגיות, $s^*=\left(s_1^*,s_2^*\right)$ של המשחק כך שלכל אסטרטגיה $s_1\in S_1$ של שחקן $1$ ולכל אסטרטגיה $s_2\in S_2$ התנאים הבאים מתקיימים:

$$\begin{aligned}\forall s_1\in S_1: &\quad u_1\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u_1\left(s_1,s_2^*\right)\ ,\\ \forall s_2\in S_2: &\quad u_2\left(s_1^*,s_2^*\right)\geq u_1\left(s_1^*,s_2\right)\ ,\end{aligned}$$

אז אומרים כי $s^*=\left(s_1^*,s_2^*\right)$ הוא **שיווי משקל של המשחק**.

**דוגמה 2.6 (שיווי משקל נאש במשחק 2 שחקנים)**

נתון המשחק הבא בצורה אסטרטגית:

| 1 \ 2 | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $2,1$ | $0,0$ | $1,2$ |
| $b$ | $0,3$ | $2,2$ | $3,1$ |
| $c$ | $1,1$ | $3,2$ | $2,2$ |

מצאו את השיוויי המשקל של המשחק.

**פתרון:**

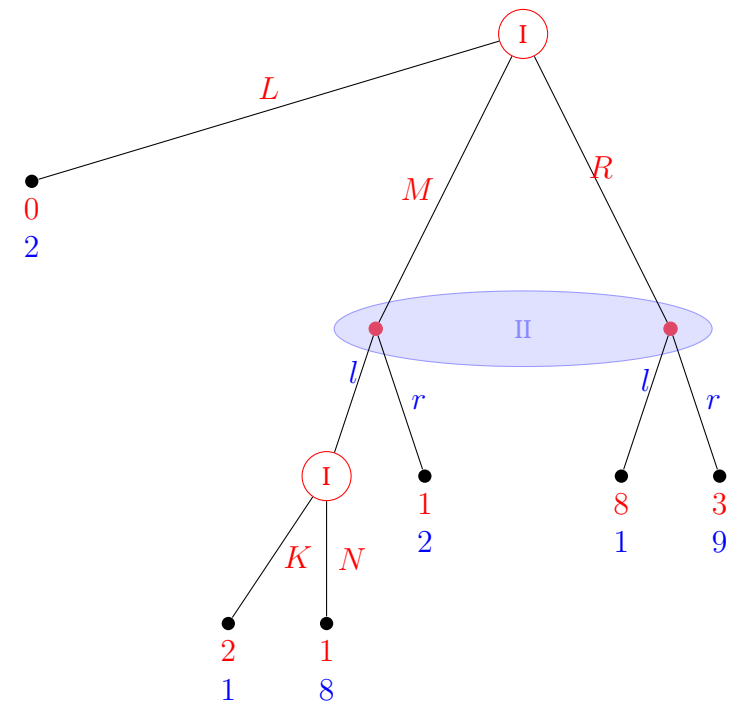
| 1 \ 2 | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $a$ | $2,1$ | $0,0$ | $1,2$ |
| $b$ | $0,3$ | $2,2$ | $3,1$ |
| $c$ | $1,1$ | $3,2$ | $2,2$ |

לכן ווקטור אסטרטגיות של שיווי משקל נאש הינו

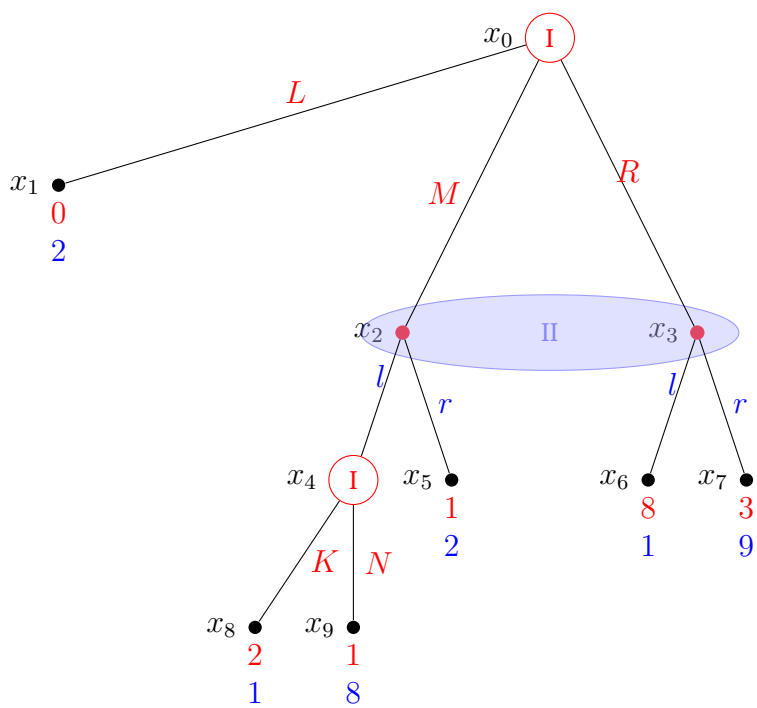
$$\left(s_1^*,s_2^*\right)=(c,y)\ .$$

■

**דוגמה 2.7 (שיווי משקל משחק 2 שחקנים)**




**פתרון:**




קבוצת אסטרטגיות של שחקן $I$:

$$S_I = \{(L,K)\ ,\ (M,K)\ ,\ (R,K)\ ,\ (L,N)\ ,\ (M,N)\ ,\ (R,N)\ \}\ .$$

קבוצת אסטרטגיות של שחקן $II$:

$$S_{II} = \{l, r\} \ .$$

מכאן הצורה אסטרטגית של המשחק היא:

| $I \backslash II$ | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $(L,K)$ | $0,2$ | $0,2$ |
| $(M,K)$ | $2,1$ | $1,2$ |
| $(R,K)$ | $8,1$ | $3,9$ |
| $(L,N)$ | $0,2$ | $0,2$ |
| $(M,N)$ | $1,8$ | $1,2$ |
| $(R,N)$ | $8,1$ | $3,9$ |

נשתמש בשיטת תשובה טובה ביותר כדי למצוא את השיווי משקל של המשחק:

| $I \backslash II$ | $l$ | $r$ |
|---|---|---|
| $(L,K)$ | $0,2$ | $0,2$ |
| $(M,K)$ | $2,1$ | $1,2$ |
| $(R,K)$ | $8,1$ | $3,9$ |
| $(L,N)$ | $0,2$ | $0,2$ |
| $(M,N)$ | $1,8$ | $1,2$ |
| $(R,N)$ | $8,1$ | $3,9$ |

לכן הווקטורי האסטרטגיות הבאים הם השיווי המשקל של המשחק:

$$(s_1^*, s_2^*) = ((R,N), r) \ ,$$
$$(s_1^*, s_2^*) = ((R,K), r) \ .$$

■

## דוגמה 2.8 (מלחמת המינים)

המשחק המשחק הבא נקרא "מלחמת המינים" (battle of the sexes). שמו של המשחק בא מהתיאור הבא. זוג מתכנן בילוי למוצא שבת. האפשרויות העומדות לרשותם הן קונצרט $(C)$ או צפייה במשחק כדורגל $(F)$. הגבר (שחקן $I$) מעדיף צפייה במשחק הכדורגל, בעוד האישה (שחקן $II$) מעדיפה את הקונצרט, אך שניהם מעדיפים להיות יחד גם אם הבילוי המשותף הוא הפחות עדיף בעיניהם. השמחק בצורה אסטרטגית מתואר למטה. מצאו את כל שיווי משקל.

| $I \backslash II$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|
| $C$ | $1,2$ | $0,0$ |
| $F$ | $0,0$ | $2,1$ |

**פתרון:**

| $I \backslash II$ | $C$ | $F$ |
|---|---|---|
| $C$ | $\underline{1}, \underline{2}$ | $0,0$ |
| $F$ | $0,0$ | $\underline{2}, \underline{1}$ |

■

### דוגמה 2.9 (משחק תיאום)

המשחק המתואר בטבלה למטה שייך למשפחה של משחקים הנקראים "משחקי תיאום" (coordination games).

| $I \backslash II$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $A$ | $\underline{1}, \underline{1}$ | $0,0$ |
| $B$ | $0,0$ | $\underline{3}, \underline{3}$ |

מצאו את כל שיווי משקל במשחק.

**פתרון:**

הווקטורי אסטרטגיות אשר שיווי משקל הינם: $s^* = (A, a)$ ו- $s^* = (B, b)$. ■

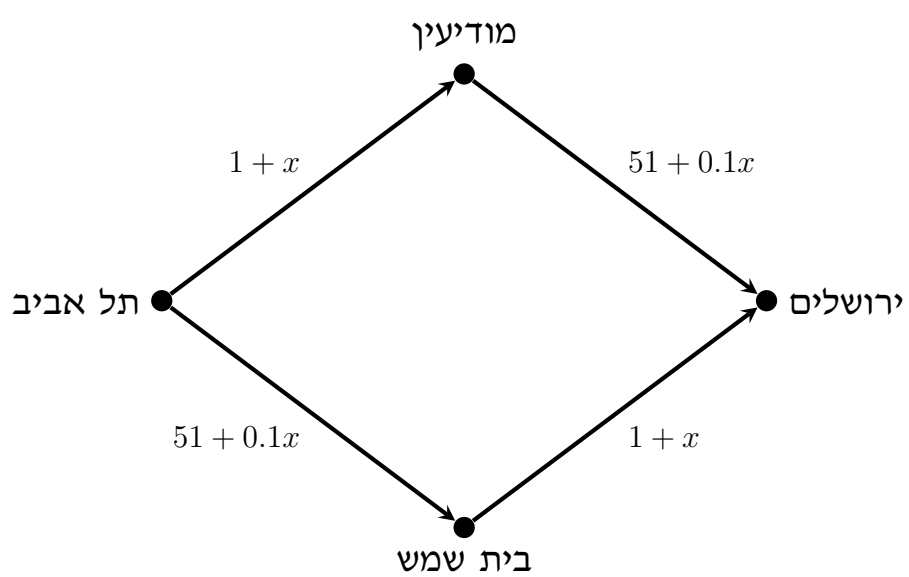
### דוגמה 2.10 (נתיב אופטימלי)

מתל אביב לירושלים מוליכים שני כבישים:

**1)** כביש צפוני דרך מודיעין

**2)** כביש דרומי דרך בית שמש.

זמן הנסיעה בכל כביש תלוי במספר $x$ של הכמוניות הנוסעות בדקה באותו הכביש, והוא נתון בתרשים הבא.



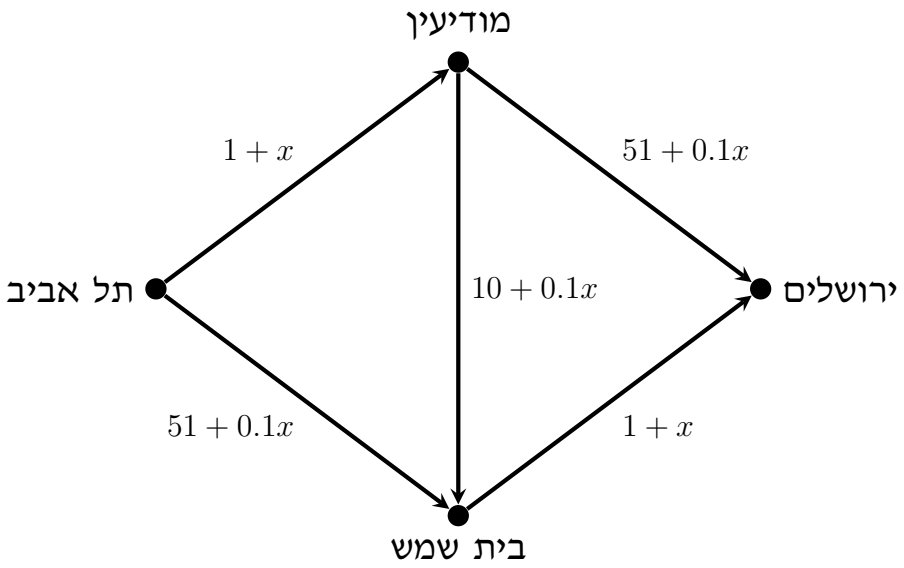

כך, זמן הנסיעה מתל אביב למודיעין הוא $1+x$, כאשר $x$ הוא מספר המכונות לדקה הנסועות בכביש, וזמן הנסיעה ממודיעין לירושלים הוא $51+0.1x$,

כאשר $x$ הוא מספר המכונות לדקה הנסועות בכביש. כל נהג בוחר באיזה כביש לנסוע לירושלים, ומטרתו הנהג היא למזער את משך הזמן הנסיעה. השכם בבוקר יוצאות $60$ מבוניות לדקה מתל אביב לירושלים (הנוסעים מתל אביב לירושלים משכימי קום, כך שרק הם נוסעים בכביש בשעה זו).

**1)** הציגו את המשחק בצורה אסטרטגית, שבו הבחירה של כל נהג היא המסלול שאותו יבחר.

**2)** מה הם כל שיווי המשקל נאש? בשיווי משקל אלה, כמה זמן אורכת הנסיעה מתל אביב לירושלים בשעת בוקר מוקדמת?

**3)** כחלק מפרויקט כביש חוצה ישראל ממודעיען לבית שמש, שזמן הנסיעה בו הוא $10+0.1x$ , (ראו תשים למטה).




ככיש זה הוא חד סטרי,והתנועה בו היא ממודיעין לבית שמש ולא בכיוון הפוך. מצאו שיווי משקל נאש במשחק המתאים למצב זה. בשיווי משקל שמצאתם, כמה זמן לוקחת הנסיעה מתל אביב לירושלים בשעות הבקור המוקדמות?

**4)** האם בניית כביש נוסף מבית שמש למודיעין שזמן הנסיעה בו בוא $10+0.1x$ תשנה את המצב?

## פתרון:

**סעיף 1)** יהי $G=\left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$ המשחק בצורה אסטרטגית. אזי:

- $N=\{1,\quad \ldots,60\}$. כלומר כל אחד של ה- $60$ נהגים שחקן במשחק $G$.
- לכל שחקן $i\in N$, הקבוצת אסטרטגיות היא $S_i=\{B,M\}$ כאשר:
  - $B=$ נסע דרך בית שמש
  - $M=$ נסע דרך מודיעין.
- לכל וקטור אסטרטגיות $s=(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_{60})$ של המשחק נגדיר הפונקצית התשלום של שחקן $i$ להיות מינוס הזמן הנסיעה מתל אביב לירושלים כפונקציה של הוקטור אסטרטגיות הזו:

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_{60}\right)=-\left(\text{זמן שארך בנסיעה של שחקן } i \text{ מתל אביב לירושלים}\right)$$

הסיבה לסימן מינוס היא שאנחנו רוצים לכמת ע"י הפונקצית התשלום הזמן שעולה לשחקן $i$ לסוע מתל אביב לירושלים. הפונקצית התשלום נותנת את "הרווח לשחקו $i$", אז מכיוון שהזמן שארך בנסיעה

הוא בעצם הפסד זמן, אז במקרה כזה הפונקצית השתלום מוגדר כמינוס הזמן שארך, כלומר ה"הפסד זמן" לשחקן $i$.

אם $k$ מספר המכוניות הנוסעות דרך מודיעין אזי:

$$u_i\left(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_{60}\right)=\begin{cases}-\left(52+1.1k\right) & :s_i=M\ ,\\ -\left(52+1.1(60-k)\right) & :s_i=B\ .\end{cases}$$

**סעיף 2)** ראשית נרשום את הפונקצית התשלום של שחקן $i$ ($1\le i\le 60$) באופן הבא:

$$u_i\left(k\right)=\begin{cases}T_1(k) & :s_i=M\ ,\\ T_2(k) & :s_i=B\ .\end{cases}$$

כאשר

- $T_1(k)=-\left(52+1.1k\right)$
- $T_2(k)=-\left(52+1.1(60-k)\right)$

יהי הוקטור אסטרטגיות $s^*=\left(s_1^*,\ldots,s_i^*,\ldots,s_{60}^*\right)$ שיווי משקל נאש של המשחק. יהי $k^*$ מספר המכונויות הנוסעות דרך מודיעין עבור הוקטור אסטרטגיות $s^*$ הזה. ניתן להוכיח כי:

$$T_1(k^*)=T_2(k^*)\ .$$

ראשית נוכיח שקיים פתרון לשוויון:

$$T_1(k^*)=T_2(k^*)\quad\Longrightarrow\quad-\left(52+1.1k^*\right)=-\left(52+1.1(60-k^*)\right)\quad\Longrightarrow\quad k^*=30\ .$$

כעת נוכיח דרך השלילה שאם $k^*$ הוא הערך של $k$ בשיווי משקל אז בהכרח $T_1(k^*)=T_2(k^*)$.
נוכיח בשלילה כי $T_1(k^*)\neq T_2(k^*)$.

- אם $T_1(k^*)<T_2(k^*)$ אז:

$$-\left(52+1.1k^*\right)<-\left(52+1.1(60-k^*)\right)\quad\Longrightarrow\quad k^*>30\quad\Longrightarrow\quad k^*\ge 31\ .$$

- מכאן נובע ש-

$$T_2\left(k^*-1\right)-T_1\left(k^*\right)=-\left(52+1.1(61-k^*)\right)+52+1.1k^*=1.1(2k^*-61)\ge 1.1>0$$

- ז"א $T_2\left(k^*-1\right)>T_1\left(k^*\right)$
- קיים שחקן $i$ עבורו: $u_i\left(s_i',s_{-i}^*\right)>u_i\left(s^*\right)$.
- הגענו לסתריה לכך ש- $s^*$ שיווי משקל של המשחק.

- אם $T_1(k^*)>T_2(k^*)$ אז:

$$-\left(52+1.1k^*\right)>-\left(52+1.1(60-k^*)\right)\quad\Longrightarrow\quad k^*<30\quad\Longrightarrow\quad k^*\le 29\ .$$

- מכאן נובע ש-

$$T_1\left(k^*+1\right)-T_2\left(k^*\right)=-\left(52+1.1(k^*+1)\right)+\left(52+1.1(60-k^*)\right)=1.1(-2k^*+61)\ge 3.3>0$$

- ז"א $T_1\left(k^*+1\right)>T_2\left(k^*\right)$
- לכן קיים שחקן $i$ עבורו: $u_i\left(s_i',s_{-i}^*\right)>u_i\left(s^*\right)$.

- הגענו לסתריה לכך ש- $s^*$ שיווי משקל של המשחק.

לפיכך בכל ווקטור אסטרטגיה של המשחק שהוא שיווי משקל נאש מתקיים:

$$k^* = 30 \ .$$

התוצאה מכך היא ש:

$$u_i(s^*) = -85$$

כלומר בשיווי משקל, הזמן של הנסיעה בשני המסלולים הוא $85$ דקות.

**סעיף 3)** מאותה סיבה לסעיף הקודם, בשיווי משקל נאש הזמן של הנסיעה בכל אחד של השלוש מסלולים שווה, כי אחרת קיים שחקן עם סטיעה כדאית, בסתירה להגדרה של שיווי משקל נאש.

נסמן:

$M =$ נוסע דרך מודיעין,

$BM =$ נוסע דרך מודיעין ובית שמש בכביש החדש,

$B =$ נוסע דרך בית שמש.

יהי

- $y =$ מספר מכוניות הנוסעות דרך מודיעין ולא בכביש החדש.
- $z =$ מספר מכוניות הנוסעות דרך מודיעין וגם דרך בית שמש בכביש החדש.
- המספר המכוניות הנוסעות דרך בית שמש במסלול השלישי הוא $60 - y - z$.

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_{60}\right) = u_i\left(x, y\right) = \begin{cases} T_1(y,z) & : s_i = M \\ T_2(y,z) & : s_i = MB \\ T_3(y,z) & : s_i = B \end{cases}$$

- $T_1(y,z) = -\left(1 + y + z + 51 + 0.1y\right)$
- $T_2(y,z) = -\left(1 + y + z + 10 + 0.1z + 1 + 60 - y\right)$
- $T_3(y,z) = -\left(51 + 0.1(60 - y - z) + 1 + 60 - y\right)$

ניתן להוכיח כי בשיווי משקל:

$$T_1(y^*, z^*) = T_2(y^*, z^*) = T_3(y^*, z^*) \ .$$

ראשית נוכיח כי קיים פתרון לשוויון הזה:

$$\begin{aligned} &-\left(1 + y^* + z^* + 51 + 0.1y^*\right) \\ =&-\left(1 + y^* + z^* + 10 + 0.1z^* + 1 + 60 - y^*\right) \\ =&-\left(51 + 0.1(60 - y^* - z^*) + 1 + 60 - y^*\right) \ . \end{aligned}$$

הפתרון הוא

$$y^* = 20 \ , \qquad z^* = 20 \ .$$

אפשר להוכיח, דרך השלילה כי $T_1(y^*, z^*) = T_2(y^*, z^*) = T_3(y^*, z^*)$ באופן דומה לסעיף הקודם. למשל, נוכיח בשלילה כי $T_1(y^*, z^*) \neq T_2(y^*, z^*)$.

- אם $T_1(y^*,z^*) < T_2(y^*,z^*)$ אז:

$$-(1+y^*+z^*+51+0.1y^*) < -(1+y^*+z^*+10+0.1z^*+1+60-y^*) \quad \Longrightarrow \quad 1.1y^*-0.1z^* > 20 \geq 19 \ .$$

- מכאן נובע ש-

$$T_2\left(y^*+1,z^*-1\right) - T_1\left(y^*,z^*\right) = -18.9 - 0.1z^* + 1.1y^* \geq 0.1 > 0$$

- ז"א $T_2\left(y^*+1,z^*-1\right) > T_1\left(y^*,z^*\right)$
- קיים שחקן $i$ עבורו: $u_i\left(s_i',s_{-i}^*\right) > u_i\left(s^*\right)$.
- הגענו לסתריה לכך ש- $s^*$ שיווי משקל של המשחק.

לכן בשיווי משקל, בכל אחד של השלוש מסלולים, המספר המכוניות שווה, ושווה ל- 20.

**סעיף 4)** במשחק החדש עם הנתיב הנוסף:

$$u_i(s^*) = -94 \ .$$

ז"א בשיווי משקל, הזמן של הנסיעה בשלוש המסלולים הוא 94 דקות.

המסקנה היא הוספת הכביש החדש לא משפר את הזמן הנסיעה המינימלי.

■

# 2.7 יחסים בין אסטרטגיות שולטות ושיווי משקל נאש

**משפט 2.2 שיווי משקל הוא תשובה טובה ביותר לכל שחקן**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G = \left(N,(S_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\right)$. אם לכל שחקן $i \in N$ האסטרטגיה $s_i^* \in S_i$ היא תשובה טובה ביותר לוקטור אסטרטגיות $s_{-i}^* = \left(s_1^*,s_2^*,\ldots,s_{i-1}^*,s_{i+1}^*,\ldots,s_n^*\right)$ אז הווקטור אסטרטגיות $s^* = \left(s_1^*,\ldots,s_n^*\right)$ הוא **שיווי משקל** של המשחק $G$.

**הוכחה:** תרגיל בית. ■

**דוגמה 2.11 ()**

נתון המשחק הבא:

| $I \backslash II$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | $1,1$ | $0,1$ | $5,6$ |
| $B$ | $7,3$ | $2,8$ | $9,-9$ |
| $C$ | $3,2$ | $1,8$ | $17,1$ |

**א)** מצאו את השיווי משקל נאש של המשחק.

**ב)** מצאו את הפתרון באסטרטגיות שולטות.

**פתרון:**

**סעיף א)** השיווי משקל הוא: $(s_1^*, s_2^*) = (B, \beta)$.

**סעיף ב)** הפתרון באסטרטגיות שולטות הוא $(s_1^*, s_2^*) = (B, \beta)$.

■

**משפט 2.3**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש, אז $s^*$ הוא פתרון למשחק $G$ באסטרטגיות השולטות חזק.

**הוכחה:**
נוכיח את הטענה דרך השלילה.

נניח בשלילה כי $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש של המשחק $G$ אבל הוא לא פתרון באסטרטגיות שולטות חזק.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה ראשונה $s_i^*$ מבין האסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_n^*$ של $s^*$ שמסולקת בתהליך סילוק חוזר.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ ששולטת על $s_i^* \in S_i$.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i \in S_i$ כך שלכל אסטרטגיות $s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n \in S_{-i}$ אשר עדיין נשארות בתהליך:

$$u_i\left(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n\right) < u_i\left(s_1, \ldots, t_i, \ldots, s_n\right) \quad . \tag{\#1}$$

$\Leftarrow$ בפרט, מכיוון שהאסטרטגיות $s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*$ עדיין נשארות בתהליך אחרי סילוק של האסטרטגיה $s_i^*$, אז לפי (#1) מתקיים

$$u_i\left(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right) < u_i\left(s_1^*, \ldots, t_i, \ldots, s_n^*\right) \quad . \tag{\#2}$$

$\Leftarrow$ סתירה לכך ש $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא שיווי משקל נאש של המשחק $G$.

■

**משפט 2.4**

נתון משחק $n$ שחקנים: $G = \left(N, (S_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\right)$. אם הווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ הוא **הפתרון היחיד** למשחק $G$ באסטרטגיות שולטות חזק, אז $s^*$ הוא השיווי משקל של המשחק.

**הוכחה:**
נוכיח את הטענה בדרך השלילה באופן הבא.

אם קיים ווקטור אסטרטגיות $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ שהוא השורד היחיד של תהליך סילוק חוזר של אסטרטגיות נשלטות חזק, אך **אינו** שיווי משקל נאש.

$\Leftarrow$ קיים שחקן $i$ שיש לו סטייה כדאית.

$\Leftarrow$ קיימת לשחקן $i$ אסטרטגיה טובה יותר מ- $s_i^*$ נגד $s_{-i}^*$.

$\Leftarrow$ בגלל שקבוצת האסטרטגיות $S_i$ היא סופית, קיימת לשחקן $i$ אסטרטגיה שהיא "תשובה טובה ביותר" מוחלטת נגד $s_{-i}^*$.

נסמן אסטרטגיה זו ב- $\bar{s}_i$.

$\Leftarrow$ לכל אסטרטגיה אחרת $t_i \in S_i$ מתקיים:

$$u_i(\bar{s}_i, s^*_{-i}) \geq u_i(t_i, s^*_{-i}) \qquad (*)$$

מצד שני מכיוון ש- $s^*_i$ היא האסטרטגיה היחידה ששורדת סילוק חוזר, וגם $\bar{s}_i \neq s^*_i$, אזי $\bar{s}_i$ מסולקת בשלב מסויים בסילוק חוזר.

נניח שהיא מסולקת בשלב $k$.

$\Leftarrow$ קיימת אסטרטגיה $t_i$ ששולטת חזק על $\bar{s}_i$, כלומר:

$$\exists t_i \in S_i : \quad \forall s_{-i} \in S_{-i} : \quad u_i\left(t_i, s_{-i}\right) > u_i\left(\bar{s}_i, s_{-i}\right) \ .$$

$\Leftarrow$ בפרט מכיוון שהוקטור אסטרטגיות $s^*_{-i}$ שורד סילוק חוזר:

$$\exists t_i \in S_i : \quad u_i(t_i, s^*_{-i}) > u_i(\bar{s}_i, s^*_{-i})$$

$\Leftarrow$ סתירה לשמוואה (*).

■