1. Dado un arreglo A, considere el problema especificado de la siguiente manera:

Const $N : Int, A : array[0, N)$ *of* Int;
Var ~~r~~ m: $Bool$;
$\{P : N \geq 0\}$
S
$\{Q : r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq N : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A.j \rangle = i! \rangle\}$

a) Calcular el resultado para $A = [2, 5, -1, 4]$ **usando la especificación**. Justificar, enumerando todos los elementos del rango.

✓ b) Derivar un programa imperativo que resuelva este problema. **Usar fortalecimiento (o sea, con un solo ciclo).** No puede usarse la función factorial en el programa, será necesario mantener un invariante adecuado.

c) Optimizar el ciclo fortaleciendo la guarda para que el programa termine si se hace True ~~Verd.~~ el resultado. Demostrar que el invariante y la nueva guarda negada implican la postcondición.

b) • Técnica cambio de constante por variable : $N \leftarrow n$

• fortalezco Q agregando $N \leftarrow n$ y limites:

$\{Q' : r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge n = N\}$

• Invariante candidato: $I \wedge \neg B \Rightarrow Q'$ $\quad \therefore I = r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N$

$\neg B := n = N$

• Cota candidata : se debe cumplir $I \wedge B \Rightarrow t \geq 0$

• En I se cumple que $N - n \geq 0$, como n comienza en 0 y finaliza en $N = n$

$\therefore$ Elijo $t = N - n$

• Cuerpo del bucle

$\rightarrow$ t debe disminuir $(N-n)$ $\therefore$ n debe aumentar.

$\rightarrow$ Pruebo $\{I \wedge B\}\ r, n := E, n+1\ \{I\}$

Derivación:

$wp.(r, n := E, n+1)(r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N)$

$\equiv \{$Definición wp$\}$

$E = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge \underline{0 \leq n+1 \leq N}$

$\equiv \{$Por proposición $n \neq B$ y $0 \leq n \leq N$, neutro del $\wedge\}$

$E = \langle \exists i : \underline{0 \leq i \leq n+1} : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle$

$\equiv \{$Partición de rango$\}$

$E = \underline{\langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle} \vee \langle \exists i : \underline{i = n} : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle$

$\equiv \{$sup. en I, rango unitario$\}$

$E = r \vee \underline{\langle \sum j : 0 \leq j < n : A_j \rangle = n!}$

No puedo seguir, no es programable.

Fortalezco el invariante:

$I': r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A_j \rangle \wedge fac = n!$

Inicialización $\{P\}\ r, s, fac, n := E, F, G, H\ \{I'\}$, supongo $P: N \geq 0$

Derivación:

$wp(r, s, fac, n := E, F, G, H)(r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A_j \rangle \wedge fac = n!)$

$\equiv$ {Definición wp}

$E = \langle \exists i : 0 \leq i \leq H : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq H \leq N \wedge F = \langle \sum j : 0 \leq j < H : A_j \rangle \wedge G = n!$

$\equiv$ {Eligo $H \leftarrow 0$}

$E = \langle \exists i : \underline{0 \leq i \leq 0} : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge \underline{0 \leq 0 \leq N} \wedge F = \underline{\langle \sum j : 0 \leq j < 0 : A_j \rangle} \wedge G = \underline{0!}$

$\equiv$ {rango unitario, suposición P y rango vacío, Def factorial}

$E = \langle \sum j : \underline{0 \leq j < 0} : A_j \rangle = 1 \rangle \wedge F = 0 \wedge G = 1$

$\equiv$ {Def rango vacío de la suma}

$E = \text{false} \wedge \underline{F = 0} \wedge \underline{G = 1}$

$\equiv$ {Asigno $E \leftarrow$ false, $F \leftarrow 0$, $G \leftarrow 1$ y neutro del $\wedge$}

True //

- Finalización:

$I' \wedge \neg B \Rightarrow Q$, Supongo el $I' \wedge \neg B$

$r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A_j \rangle \wedge fac = n! \wedge n = N$

Derivación:

- Nuevo cuerpo del ciclo $\{I' \wedge B\}\ r, s, fac, n := E, F, G, n+1\ \{I'\}$

Derivación: Supongo $I' \wedge B$

$wp.(r, s, fac, n := E, F, G, n+1)(r = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge 0 \leq n \leq N \wedge s = \langle \sum j : 0 \leq j < n : A_j \rangle \wedge fac = n!)$

$\equiv$ {Def wp}

$E = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge \underline{0 \leq n+1 \leq N} \wedge F = \langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : A_j \rangle \wedge G = \underline{(n+1)!}$

$\equiv$ {Sup y neutro del $\wedge$, Def de factorial}

$E = \langle \exists i : 0 \leq i \leq n+1 : \langle \sum j : 0 \leq j < i : A_j \rangle = i! \rangle \wedge F = \underline{\langle \sum j : 0 \leq j < n+1 : A_j \rangle} \wedge G = \underline{(n+1) n!}$

$\equiv$ {Por SUP y Partición de rango}

$E = \langle \exists i : 0 \le i \le n+1 : \langle \Sigma j : 0 \le j < i : A j \rangle = i! \rangle \wedge F = (\langle \Sigma j : 0 \le j < n : A j \rangle + \langle \Sigma j : j = n : A j \rangle) \wedge G = (n+1) \cdot fac$

$\equiv$ {Por HI, rango unitario}

$E = \langle \exists i : 0 \le i \le n+1 : \langle \Sigma j : 0 \le j < i : A j \rangle = i! \rangle \wedge f = (s + A.n) \wedge G = (n+1) \cdot fac$

$\equiv$ {Partición de rango

$E = \langle \exists i : 0 \le i \le n : \langle \Sigma j : 0 \le j < i : A j \rangle = i! \rangle \vee \langle \exists i : i = n \langle \Sigma j : 0 \le j < i : A j \rangle = i! \rangle \wedge f = (s + A.n) \wedge G = (n+1) \cdot fac$

$\equiv$ {SUP en I, rango unitario}

$E = r \vee \langle \Sigma j : 0 \le j < n : A j \rangle = n! \wedge f = (s + A.n) \wedge G = (n+1) \cdot fac$

$\equiv$ {Por SUP}

$E = r \vee (s = fac) \wedge f = (s + A.n) \wedge G = (n+1) \cdot fac$

{ Asignaciones Correspondientes, y neutro $\wedge$ }

True //

- Cota Positiva $I' \wedge B \Rightarrow t \ge 0$, Supongo $I' \wedge B$

Derivación:

$N - n \ge 0$

$\equiv$ {SUP $N \ne n$ y $0 \le n \le N$}

True //

- Cota disminuye $\{\underbrace{I' \wedge B \wedge t = T}_{SUP}\} S \{t < T\}$

Derivación:

$wp.(r, s, fac, n := r \vee (s = fac), s + A.n, (n+1) fac, n+1)(N - n < T)$

$\equiv$ {Def wp}

$N - (n+1) < T$

$\equiv$ {Aritmetica

$N - n - 1 < n - 1$

$\equiv$ { aritmetica}

True //

Programa final

```
Const N: Int, A: array [0, N) of Int;
Var r: Bool;
    s, fac, n: Int;
{P}
  r, s, fac, n := False, 0, 1, 0;
{I'}
do n ≠ N ∧ r ⟶
  r, s, fac, n := r ∨ (s = fac), s + A.n, (n+1).fac, n+1;
od
{Q}
```