(0) Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (33-2x)^{\frac{4}{3}}$
b) $f(x) = e^{2x}$
c) $f(x) = 2^x$
d) $f(x) = \ln(7-x)$
e) $f(x) = \ln(x^2+3x+4)$
f) $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
g) $f(x) = \ln(\cos(x) + \operatorname{sen}(x))$
h) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$

$\frac{4}{3} - 1 =$

a) $f(x) = u^x \Rightarrow$

$u = -2x + 33 \qquad u' = -2$

$x = u^{\frac{4}{3}} \Rightarrow x' = \frac{4}{3} u^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(x)' = \frac{4}{3}(-2)^{\frac{1}{3}}$ ✓

d) $\ln(7-x) \Rightarrow \ln(u)$

$u = 7 - x \Rightarrow u' = -1$

$f = \ln(u) \Rightarrow \frac{1}{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{-2}$

e) $\ln(x^2 + 3x + 4)$

$f(x) \ln(x) \qquad f' = \frac{1}{x}$

$g = x^2 + 3x + 4 \qquad g' = 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2x+3}$ ✓

h) $\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \Rightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \dfrac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$ ✓

$f(x) = \cos(x), \qquad f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$

$g(x) = \operatorname{sen}(x) - \qquad g'(x) = \cos(x)$

$\Rightarrow \dfrac{-\operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$

(3) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int e^{2x}\, dx$
b) $\int 2^x\, dx$
c) $\int \sqrt[3]{33-2x}\, dx$
d) $\int \dfrac{dx}{7-x}$
e) $\int \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}\, dx$
f) $\int \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx$
g) $\int \dfrac{\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{\cos(x) + \operatorname{sen}(x)}\, dx$
h) $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\, dx$

$e^{2x} = \frac{1}{2} \cdot e^{2x}$

Definición: Dado $I \subseteq \mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama integral indefinida (3) de f al conjunto de todas las primitivas de f y se denota

$\int f(x)\, dx$.

Observaciones:

1) El símbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x). Además, denotamos por diferencial de una función F a $d(F(x)) = F'(x)\, dx$.

2) En la definición de integral indef. podríamos usar otra letra. Por ejemplo, $\int f(y)\, dy$, $\int f(t)\, dt$, etc.

a) $\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + c$

$= \dfrac{e^{2x}}{2} + c$ ✓

D) $\int \dfrac{1}{7-x} \cdot dx \qquad u = 7 - x$

$\dfrac{du}{dx} = 7 - x \Rightarrow du = -dx$

$\int \frac{1}{u} \cdot (-du)$

$-1 \int \frac{1}{u}\, du = -1 + \ln(|u|) + c$

$-1 + \ln(|7-x|) + c$ ✓

e) $\int \dfrac{2x+3}{x^2+3x+4}\, dx$

$u = x^2 + 3x + 4$

$du = 2x + 3 dx$

$\int \dfrac{1}{x^2+3x+4} \cdot (2x+3)\, dx = \int \dfrac{2x+3}{u}\, du \Rightarrow \ln(|x^2+3x+4|) + c$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{u} \cdot 2\cos(x)\,dx$$

$u = \operatorname{sen}^2(x)$

$\frac{du}{dx} = \operatorname{sen}^2(x)$

$du = 2\cos(x)\,dv$

$$2\int \frac{1}{u}\cdot \cos(x)\,dx = 2\cdot \ln(|u|) + \operatorname{sen}(x) + c$$

$$2\ln(|\operatorname{sen}^2(x)|) + \operatorname{sen}(u) + c$$

a) $\int_1^2 2^x\,dx$ c) $\int_1^5 \frac{dx}{7-x}$ e) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$

b) $\int_3^5 \sqrt[3]{33-2x}\,dx$ d) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$ f) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\operatorname{sen}(x)}\,dx$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x\in[a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x\in(a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a) \doteq G(x)\big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

a) $$\frac{2^x}{\ln(2)}\Big|_1^2 = \frac{2^2}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} = \frac{2}{\ln(2)}$$ ✓

$u = 33-2x$

b) $$\int_3^5 \sqrt[3]{(u)}\,dx$$

$\frac{du}{dx} = 33-2x$

$du = -2\,dx$

$$\int_3^5 \sqrt[3]{u}\,-2dx = -2\cdot\left(\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right)\Bigg|_3^5 = \frac{-2(33-2(5))^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{2(33-6)^{\frac{4}{3}}}{4}$$ ✓

$$\frac{-2(23)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{2(27)^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{-2\sqrt[3]{23}^4}{4} + \frac{2\sqrt[3]{27}^4}{4}$$

$$\int_1^5 \frac{1}{7-x}\,dx = \int_2^6 \frac{1}{u}\,-dx = -1\ln(|7-x|)\Big|_2^6$$

$$-\ln(|2|)+\ln(|5|) = \ln(|3|)$$

$u = 7-x$

$\frac{du}{dx} = 7-x$

$du = -dx$

$x=5 \to u = 7-5 = 2$

$x = 1 \to u = 7-1 = 6$

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx$$

(Por integral anterior)

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+4}\,2x+3\,dx = \ln(|x^2+3x+4|)\Big|_0^1 = \ln(|8|) - \ln(|4|) = \ln(|4|)$$ ✓

¿ $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$?

$$\int_{\ln(2)}^{\ln(3)} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \ln(e^x+e^{-x})\Big|_{\ln(2)}^{\ln(3)}$$

$$= \ln(3+\tfrac{1}{3}) - \ln(2+\tfrac{1}{2}) = \ln(\tfrac{10}{3}) - \ln(\tfrac{5}{2})$$

$$= \ln(\tfrac{4}{3})$$

(7) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x\,e^x\,dx$ d) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$ g) $\int_0^2 x\ln(x^2+4)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 (1-2x)\,e^{-2x}\,dx$ e) $\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$ h) $\int e^{-x}\operatorname{sen}(2x)\,dx$

c) $\int x^2\cos(x)\,dx$ f) $\int \ln(x^2+1)\,dx$ i) $\int_0^{2\pi} \cos^4(x)\,dx$

Teorema (Método de integración por partes). Si f' y g' son continuas, entonces

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx \qquad (\star)$$

Teorema (Método de Sustitución). Sean $f:(d,e)\to\mathbb{R}$ y $g:(a,b)\to(d,e)$ derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e) $H(x) = (F\circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c, \quad \text{con } c\in\mathbb{R} \text{ y } \forall x\in(a,b).$$

a) $\int x\,e^x\,dx \Leftarrow$ Por partes

$F(x) = e^x$ $F'(x) = e^x$

$g'(x) = x$ $g(x) = 1$

$$= e^x\cdot x - \int e^x\,dx$$

$$= x e^x - e^x$$ ✓

b) $\int_{-1}^{1} \underbrace{(1-2x)}_{F} \underbrace{e^{-2x}}_{g} \, dx$

$e^{2x} = \frac{e^{(-2x)}}{2}$

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo)

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ cont. y $F(x) \doteq \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

(i) F es derivable y $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. O sea, F es primitiva de f.

(ii) Si G es una primitiva de f en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \doteq G(x)\Big|_a^b$

(La parte (ii) se conoce como Regla de Barrow)

Teorema (Mét. de Sust.): Sean $f:[c,d] \to \mathbb{R}$ y $g:[a,b] \to [c,d]$ tq f y g' son continuas en sus respectivos dominios. Entonces, si $u = g(x)$ vale que

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

En particular, si F es primitiva de f tenemos que $\int^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a))$.

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{g'(x)\,dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u}\underbrace{g(x)}_{v}\Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{g(x)}_{v} \underbrace{f'(x)\,dx}_{du}$$

$F(x) = (1-2x) \to F'(x) = -2$

$g(x) = e^{-2x} \to g'(x) = -2e^{-2x}$

$$(1-2x) \cdot e^{-2x}\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^{-2x} - 2\,dx$$

$$(+3)e^{+2} + 1 \cdot e^{-2} - 2 \cdot e^{-2} - e^{+2}$$

$$3e^{2} + e^{-2} - 2 = e^{2} + e^{-2} \checkmark$$

c)

$\int x^2 \cos(x)\, dx$

$F(x) = x^2 \to F'(x) = 2x$

$g'(x) = \cos(x) \to g(x) = \operatorname{Sen}(x)$

$$x^2 \cdot \operatorname{Sen}(x) - \int \underbrace{2x}_{F} \underbrace{\operatorname{Sen}(x)}_{g'}\, dx$$

$F(x) = 2x \qquad F'(x) = 2$

$g'(x) = \operatorname{Sen}(x) \to g(x) = \operatorname{Cos}(x)$

$$x^2 \cdot \operatorname{Sen} - 2x \cdot \operatorname{Cos}(x) - \int 2\cos(x)\,dx$$

$$x^2 - \operatorname{sen} + 2x \cdot \operatorname{Cos}(x) - 2 + \operatorname{Sen}(x) + C \checkmark$$

$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\, dx}{\operatorname{sen}^2(x)}$

$\boxed{\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x}$ ◁- Usar

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{Sen}^2(x)} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{Sen}^2(x)} \cdot x\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\csc^2(x)\,dx$$

→ integro Por Partes

$F(x) = x, \quad F'(x) = 1 \quad (du = dx)$

$g(x) = \csc^2(x) \quad g'(x) = -\cot$

$$\to x \cdot -\cot(x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int(-\cot(x))dx = \frac{\pi}{2} - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) - \ln(|\operatorname{Sen}(x)|)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\pi}{2} - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{4} - \cot\left(\frac{\pi}{4} - \ln\left(\left|\operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\right) - \ln\left(\left|\operatorname{Sen}\frac{\pi}{4}\right|\right)\right.$$

e) $\int_3^9 x\ln(x-1)\,dx$ Por Partes

$$\int F(x)\,g'(x)\,dx$$

Teorema (Int. por Partes). Sean f y g derivables en (a,b) y tq f' y g' tienen a lo sumo un número finito de dis cont. en $[a,b]$ y son acotadas. Entonces

$$\int_a^b \underset{u}{f(x)}\,\underset{dv}{g'(x)}\,dx = \underset{u}{f(x)}\,\underset{v}{g(x)}\Big|_a^b - \int_a^b \underset{v}{g(x)}\,\underset{du}{f'(x)}\,dx$$

$$\int_a^b \quad F^P(x)\cdot g'(x) - \int F^P(x)\cdot g^P(x)\,dx$$

→ tenemos que:

$F(x) = x \quad \rightarrow F^P(x) = \frac{x^2}{2}$

$g'(x) = \ln(x-1) \quad g^P(x) = \frac{1}{x-1}$

quedando:

$$\underbrace{\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x-1)\Big|_3^9}_{\text{Evaluo ya.}} - \int_3^9 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x-1}\,dx = \frac{81}{2}\cdot\ln(8) - \frac{9}{2}\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}\int_3^9 x^2\cdot\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$\frac{72}{2}\cdot\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 \underbrace{\frac{x^2}{x-1}}_{\text{división de Polinomios:}}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x-1 \\ \hline -x^2+x & x-1 \\ +x+1 & \\ 1 & \end{array}$$

→ o: → $x^2 = \frac{(x+1)(x-1)+1}{\cancel{x-1}}$ *

→

$$36\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)\,dx}{\cancel{x+1}} + \int_3^9 \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$36\ln(6) - \frac{1}{2}\int_3^9 x-1\,dx + \int_3^9 \frac{1}{x+1}\,dx \rightarrow \begin{array}{l} u = x+1 \\ \frac{du}{dx} = x+1 \rightarrow du = dx \\ x = 9 \rightarrow 9+1 = 10 \\ 3+1 = 4 \end{array}$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\int_3^9 x\,dx + \int_4^{10} \frac{1}{u}\,du$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_3^9\right) + \ln(|u|)\Big|_4^{10}$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{81}{2} - \frac{9}{2}\right) + \ln(|10+1|) - \ln(|4+1|)$$

$$36\ln(6) - \frac{3}{2}\left(\frac{72}{2}\right) + \ln(|11|) - \ln(|3|) = 36\ln(6) - 3\cdot 18 + \ln(|8|)$$

$$36\ln(6) - 54 + \ln(|8|) \;✓$$

(10) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int_2^4 \frac{x^2+4x+24}{x^2-4x+8}\,dx$ b) $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ c) $\int_2^4 \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx$

a) $$\int_2^4 \frac{x^2-4x+8+8x+16}{x^2-4x+8} = \int_2^4 dx + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= x\Big|_2^4 + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$= 2 + \int_2^4 \frac{8x+16}{x^2-4x+8}\,dx \quad *$$

Observación: para integrar términos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$, debemos hallar constantes K_1 y K_2 tq

$$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = K_1\underbrace{\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}}_{\substack{\text{Fácil de integrar usando} \\ \text{la sust. } u = x^2+\alpha x+\beta}} + K_2\underbrace{\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}}_{(\star)}.$$

$F(x)'$

Igualando los coef. de los numeradores se obtiene $K_1 = B/2$, $K_2 = C - K_1\alpha$

$$* \;\frac{8x+16}{x^2-4x+8} \underset{*}{=} K_1\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+8} + K_2\,\frac{1}{x^2-4x+8}$$

Se igualan los coeficientes según grad

* es una igualdad.

$$= \frac{2xK_1 - 4K_1 + K_2}{x^2-4x+8} \Rightarrow \begin{cases} 2K_1 = 8 & \rightarrow K_1 = 4 \\ -4K_1 + K_2 = 16 & \rightarrow K_2 = 32 \end{cases}$$

$$2+4\int_2^4 \frac{x-4}{x^2-4x+8}\,dx+32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$*\ u=x^2-4x+8 \qquad x=4 \to 4^2-4(4)+8=8$

$\frac{du}{dx}=x^2-4x+8 \qquad y\ \ x=2\to 2^2-4\cdot 2+8=4$

$du=2x-4dx$

$\frac{du}{2x-4}=dx$

$$2+4\int_4^8 \frac{x-4}{u}\cdot\frac{du}{2x-4}+32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

Relaciono

$$2+4\int_4^8 \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{u}\cdot\frac{du}{2x-4}+32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$*\ u=x-2 \qquad x=4\to 4-2=2$

$\frac{du}{dx}=x-2 \qquad x=2\to 2-2=0$

$du=-2dx$

$-\frac{du}{2}=dx$

$$2+4\int_4^8 \frac{du}{u}+32\int_2^4 \frac{1}{x^2-4x+8}\,dx$$

$$2+4\cdot\left(\ln C|u|\right)\Big|_4^8+32\int_2 \frac{1}{x^2-4x+4+4}$$

$$2+4\cdot\left(\ln(|8^2-4(8)+8|)-\ln(|4^2-4(4)+8|)\right)+32\int_2^4 \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)+32\int_0^2 \frac{1}{u^2+2^2}\cdot\left(-\frac{du}{2}\right)$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)+32\cdot-\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{u^2+2^2}\,du$$

$$2+4(\ln(|40|)-4\ln(|8|)+\frac{63}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot \text{Arctg}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\Big|_0^2$$

$$2+\ln(|32|)+\frac{63}{2}\cdot\left(\frac{\text{Arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right)}{2}\right)\Big|_0^2$$

$$2+\ln(|32|)+\frac{63}{2}\cdot\left(\frac{\text{Arctg}(0)}{2}-\frac{\text{Arctg}(-1)}{2}\right)$$

$$2+\ln(|32|)+\frac{63\,\text{Arctg}(0)}{4}-\frac{63\,\text{Arctg}(-1)}{4}$$

b) $\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$ Notemos que $\frac{P(x)}{q(x)}$ y que $P(x)<q(x)$

$$\int_0^2 \frac{x-1}{x^2+4}\,dx=\int_0^2 \frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\,dx \to \frac{A_1}{(x+2)}+\frac{A_2}{(x-2)}$$

Siendo:

$$\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x-2}=\frac{A_1(x-2)+A_2(x+2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\frac{xA_1-2A_1+xA_2+2A_2}{(x+2)(x-2)} \qquad X$$

Notiene X

$$\frac{1x-1}{\cancel{(x+2)(x-2)}}=\frac{A_1x+A_2x-2A_1+2A_2}{\cancel{(x+2)(x-2)}}=2A_1-2A_2$$

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1 & \to A_1 = 1 - A_2 \qquad A_1 = 1 - \frac{1}{4} \quad A_1 = \frac{3}{4} \\ -2A_1 + 2A_2 = -1 & -2(1-A_2) + 2A_2 = -1 \to -2 + 2A_2 + 2A_2 = -1 \end{cases}$$

$$4A_2 = 1$$

$$A_2 = \frac{1}{4}$$

Nos queda que:

$$\frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2} = \int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{x+2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\, dx$$

$$\int_0^2 \frac{\frac{3}{4}}{x+2}\, dx \; * + \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\, dx \; *$$

$* \; u = x+2$

$*$

$$\frac{du}{dx} = x+2$$

$$du = dx$$

$x = 2 \to 2-2 = 0$

$x = 0 \to 0-2 = -2$

$x = 2 \to 2+2 = 4$

$x = 0 \to 2 = 2$

$$\frac{3}{4}\int_2^4 \frac{1}{u}\, du + \frac{1}{4}\int_{-2}^0 \frac{1}{u}\, du$$

$$\frac{3}{4} \cdot \ln(|u|) + \frac{1}{4} \ln(|u|) \Big|_{-2}^{0}$$

$$\frac{3 \cdot \ln(|u|)}{4}\Big|_2^4 + \frac{\ln(|u|)}{4}\Big|_{-2}^{0}$$

$$3\frac{\ln(|6|)}{4} - \frac{3\ln(|4|)}{4} + \frac{\ln(|2|)}{4} - \frac{\ln(|0|)}{4}$$?

Converge = L

diverge = ∞

(13) Determinar si las siguientes integrales impropias convergen y en tal caso calcularlas

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}}\, ds$ b) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{1}{(1-y)^{2/3}}\, dy$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\, e^{-x^2}\, dx$

<u>Integrales Impropias de tipo I</u>: funciones continuas y al menos uno de los límites de integración no es finito.

<u>Definición</u>: Sea $a \in \mathbb{R}$.

1 • Si f es continua en $[a, \infty)$, definimos $\int_a^{\infty} f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$, si este límite existe y es finito. En tal caso decimos que $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge; si no decimos que $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

2 • Si f es continua en $(-\infty, a]$, definimos $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \doteq \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$; y decimos que converge o diverge según corresponda.

3 • Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \doteq \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$, siempre que estos últimos <u>dos</u> integrales converjan. y en tal caso decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

$$a)\; \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{x+1}}\, dx$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \int_1^{t+1} u^{-\frac{1}{2}}\, du \,.$$

$$\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^{t+1} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^{t+1}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{(t+1)+1}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\infty+1+1}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

Diverge.