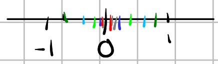
(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

- (a) $a_n = \dfrac{5-2n}{3n-7}$
- (b) $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$
- (c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$
- (d) $a_n = n\,\mathrm{sen}(6/n)$
- (e) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n$
- (f) $a_n = \dfrac{\mathrm{sen}^2(n)}{4^n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-2n}{3n-7} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cancel{n}(\overbrace{5/n}^{\to 0}-2)}{\cancel{n}(3-\underbrace{7/n}_{\to 0})} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-2}{5} = \boxed{\dfrac{-2}{5}}$ ∴ Por lo tanto la serie converge.

Aplico L'Hopital

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln(n+1)}$ = Def la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x+1)}$ $\Rightarrow x+1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} x+1 = \boxed{\infty}$ ∴ Por teorema $a_n = \dfrac{n}{\ln(n+1)}$ también converge.



c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{1}{3^n} = 0$ ∴ Por lo tanto la sucesión converge.

d) $a_n = n\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{6}{n}\right)$ = Defino a_n como $f(x) = x\,\mathrm{sen}(6/x)$

$\Rightarrow \quad -x \le x\,\mathrm{Sen}(6/x) \le x \quad \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} -x = \boxed{-\infty}$

$a_n = n\,\mathrm{sen}(6/n)$.

$\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^n = e^a$

∴ Por teo sandwich, la sucesión diverge.

• $\lim\limits_{x\to\infty} x = \boxed{\infty}$

e) $a_n = \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{5}{n}\right)^n \Rightarrow e^{\lim\limits_{n\to\infty} \cancel{n}(\cancel{1}-5/\cancel{n}\cancel{-1})} = \boxed{e^{-5}}$

F) $a_n = \dfrac{\mathrm{Sen}^2(n)}{4^n} = f(x) = \dfrac{\mathrm{sen}^2(x)}{4^x} = \quad 0 \le \mathrm{sen}^2(x) \le 1$

$0 \le \mathrm{Sen}^2(x) \le \dfrac{1}{4^x} =$

• $\lim\limits_{x\to\infty} 0 = \boxed{0}$ //

• $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{4^x} = \boxed{0}$ //

∴ Por lo tanto, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\mathrm{Sen}^2(x)}{4^x} = 0$

∴ El $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mathrm{sen}^2(n)}{4^n} = \boxed{0}$ //

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

- ✓ (a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$
- (b) $a_n = \mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- (c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$
- (d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$
- (e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$
- (f) $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$

(i) dado que $n \in \mathbb{N}$ y, en el numerador y denominador $n \ge 1$ ∴ tiene cota inferior $a_n > 0$ y es Positiva

(ii) $a_n \ge a_{n+1}$?

$\dfrac{2n}{n^2+1} \ge \dfrac{2n+2}{n^2+2n+2} \qquad (2n+2)(n^2+1) = 2n^3+2n+2n^2+2$

$\cancel{2n^3} + 4n^2 + 4n \ge \cancel{2n^3} + \cancel{2n} + \cancel{2n^2} + 2$

$\boxed{2n^2+2n \ge 2} \Rightarrow a_n$ es decreciente ∴ Posee cota superior

(iv) Si $\{a_n\}$ es decreciente y es acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell = \mathrm{Inf}(\{a_n\})$

b) $a_n = \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

i) ii) dado que $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ∴ Posee cota inferior igual a cero y una cota superior igual a 1.

y sup.

iii) $a_n \leq a_{n+1}$?

$\cancel{\operatorname{sen}}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \cancel{\operatorname{sen}}\left(\frac{1}{n+1}\right)$

$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$

$\boxed{n+1 \leq n}$ ∴ la sucesión decrece

iv) $\lim_{n \to \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \boxed{0}$ ∴ dado que es acotada Inferiormente y decreciente, la sucesión converge a cero.

iv)

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{n}{e^n} = \boxed{0}$ ∴ Por teorema, si a_n converge, entonces es acotada.

iii) $\frac{n}{e^n} > \frac{n+1}{e^{n+1}}$

$\cancel{e^n} e \cdot n > \cancel{e^n}(n+1)$

$e \cdot n > n+1$ ∴ es decreciente.

c) i) no es positiva ni negativa, $\forall a_n$ siempre alterna.

$-1 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow \frac{n}{e^n} \leq \frac{1}{e}$

d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$

i) ii) dado que $2^n > 0 \wedge n! > 0 \Rightarrow$ es ⊕

es acotada inferiormente en cero y sup en 2.

iv) $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{n!} = \boxed{0}$ ∴ converge a cero

iii) $a_n > a_{n+1}$ ∴

$\frac{2^n}{n!} > \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$

$\cancel{n!}(n+1)\cancel{2^n} > \cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{n!}$

$\boxed{n > 1}$ ∴ Por lo tanto es decreciente y es acotada inferiormente ⇒ Converge.

e) $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$ iii) $\cancel{\ln}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > \cancel{\ln}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$

$(n+2)^2 > (n+3)(n+1)$

$\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1 > \cancel{n^2} + 4n + 3$

$-1 > n$ ∴ la sucesión es decreciente

$\therefore$ la Sucesión a_n es Positiva..

$\therefore$ dado que decrece y además es acotada $\Rightarrow$ la sucesión es convergente.

Su cota inferior es cero y la cota sup es $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

f) $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

-es Positiva siempre $\therefore$ está acotada inferiormente $\therefore$ converge a cero.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = 0 \ ??$$

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

- (a) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \ldots$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
- (e) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{e^{k-3}}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$

a) $4 + \frac{8}{5} + \frac{16}{25} + \frac{32}{125} + \ldots = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n \Rightarrow$ dado que $r = \frac{2}{5} \wedge |r| < 1 \therefore$ Por definición de la serie geométrica Podemos decir que la serie converge

$\Rightarrow$ calculamos la suma. $= \dfrac{4}{1-\frac{2}{5}} = 4 \cdot \dfrac{5}{3} = \boxed{\dfrac{20}{3}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} 3\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} =$ • observo que $r = -\frac{1}{4} = |r| < 1 = \frac{1}{4} < 1$ lo cual es cierto para la serie geom.

$\Rightarrow \therefore$ Podemos asegurar que la serie converge

• Calculamos su suma. $\Rightarrow 3 \cdot \left(\dfrac{-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}\right) = 3 \cdot \dfrac{4}{5} = \boxed{\dfrac{12}{5}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{10^{3n}} = \sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{10^3}\right)^n \Rightarrow$ Por serie geométrica $\left|\frac{1}{10^3}\right| < 1 \Rightarrow$ la serie converge.

$\Rightarrow$ Calculamos su suma. $= \dfrac{5}{1-\frac{1}{1000}} = \dfrac{5 \cdot 1000}{999} = \boxed{\dfrac{5000}{999}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{A}{2n-1} + \dfrac{B}{2n+1} \Rightarrow \dfrac{A(2n+1)+B(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{2An+A+2Bn-B}{(2n-1)(2n+1)}$

$= \dfrac{n(2A+2B)+(A-B)}{(2n-1)(2n+1)} =$
$\begin{cases} \cdot\, 2A+2B=0 & (1) \\ \cdot\, A-B=1 & (2) \end{cases}$

(2) $\boxed{A} = 1+B \Rightarrow 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

(1) $2+2B+2B=0$

$\boxed{B = -\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right) =$

$\therefore$ dado que es una serie telescópica, sabemos que al sumar sus términos nos queda el 1er término y el último.

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1} = \boxed{\frac{1}{2}}$ ∴ Por lo tanto la serie converge y su suma es $\frac{1}{2}$.

e) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^{k+3}}{e^{k-3}} = \frac{2^k\cdot 2^3}{e^k\cdot e^{-3}} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} 8e^3\cdot\left(\frac{2}{e}\right)^k \Rightarrow$ ∴ Por serie geométrica $r=\frac{2}{e}$, $|r|<1$, concluimos que converge

$\Rightarrow$ Calculamos su suma

$$8e^3\left(\frac{\frac{2}{e}}{1-\frac{2}{e}}\right)=\boxed{\frac{16e^3}{e-2}}$$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n+3}+\frac{B}{n+4} = \frac{An+4A+Bn+3B}{(n+3)(n+4)} = \frac{n(A+B)+(4A+3B)}{(n+3)(n+4)}$

$\begin{cases} A+B=0 \quad ① \\ 4A+3B=1 \quad ② \end{cases}$ ① $A=-B \Rightarrow \boxed{A=1}$ ② $-B=1$ $\boxed{B=-1}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)=$ (serie telescópica)

∴ Sabemos que es lo mismo que escribir el 1ro y último término.

$\Rightarrow \frac{1}{4}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+4} = \boxed{\frac{1}{4}}$ ∴ Por lo tanto converge y su suma es $\frac{1}{4}$

(4) Usar los tests de convergencia para determinar si las siguientes series convergen o divergen.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+n+1}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2e^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^4-2} \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ $\Rightarrow$ Por serie $P=3$ $\wedge$ cumple que $P\geq 2$ y por criterio de comparación de series

si b_n converge $\Rightarrow a_n$ converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{(n+1)^2} \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ ∴ Por criterio de comparación de series y por serie P, a_n converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^4}{(n+1)!}}{\frac{n^4}{n!}}\right| = \left|\frac{(n+1)^{\cancel{4}}}{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{n^4}\right| = \frac{(n+1)^3}{n^4} = \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{\cancel{n^4}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n} = \boxed{0}$

∴ Por criterio del cociente, la serie converge.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2e^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cancel{n!}}{(n+1)^2\cancel{e^{n+1}}}\cdot\frac{n^2\cancel{e^n}}{\cancel{n!}}\right| = \left|\frac{\cancel{(n+1)}n^2}{(n+1)^{\cancel{2}}\cdot e}\right| = \frac{n^2}{en+e} = \left|\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}\left(e+\frac{e}{n}\right)}\right| = \frac{n}{e+\frac{e}{n}} = \boxed{\infty}$

∴ Por criterio del cociente la serie diverge.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+\cancel{1}}}{\cancel{(n+1)}n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right| = \left|\frac{(n+1)^n}{n^n}\right| = \frac{\cancel{n^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\cancel{n^n}} = \boxed{\infty}$

∴ Por criterio del cociente la serie diverge.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2n+1}\right| = \boxed{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow$ dado que $r<1$ $\therefore$ Por criterio de la raiz la serie converge.

(5) Determinar si las siguientes series convergen absolutamente, convergen condicionalmente, o divergen.

✓ (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$ ✓ (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ ✓ (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)}$

✓ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{2^n}$ ✓ (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1}$

1

Cuando $n\geq 1$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^2+\ln(n)}\right| \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ Por serie P, dado que $P>1$, aseguramos que converge absolutamente

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{2n}}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\Rightarrow$ Por serie geométrica $r=\frac{1}{2}$, $|r|<1$ la serie converge absolutamente

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100\cos(n\pi)}{2n+3}$ $\to (-1)^n$ $= \left|\frac{(-1)^n 100}{2n+3}\right| = \frac{100}{2n+3}$, Por (serie armonica) no converge absolutamente

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{100}{2n+3} = 0$ $\therefore$ converge condicionalmente.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{n^{1/2}}$ Por serie $P<1$ $\Rightarrow$ no converge absolutamente.

$\Rightarrow -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} =$ Por criterio de las series alternantes.

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\therefore$ la serie converge condicionalmente., (tambien es decreciente).

si $f'(x)\leq 0 \Rightarrow$ decrece

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{(n+1)\ln(n+1)} = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}\right| \Rightarrow \int_1^{\infty}\overbrace{\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}}^{f(x)}\,dx$

entonces, dado que es decreciente

$u=\ln(x)$
$du=\frac{1}{x}dx$

$\lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x\ln(x)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\frac{du}{u} = \ln(\ln(x))\Big|_1^t = \lim_{t\to\infty}(\ln(\ln(t))) \cdot$ diverge

$\therefore$ no converge absolutamente

$\Rightarrow$ Por criterio de las series alternantes,

la serie es decreciente y el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ $\therefore$ Converge condicionalmente.

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-1)}{n^2+1} =$

Ejercicios adicionales

(1) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es convergente o no. Si la sucesión converge, calcular su límite.

/(a) $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n}$ /(b) $a_n = 20\,(-1)^{n+1}$ /(c) $a_n = n^3\,e^{-n}$ ✓(d) $a_n = \cos(n\pi)$ ✓(e) $a_n = \pi/4 - \arctan(n)$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

a) $a_n = n - \sqrt{n^2 - 4n} = \lim_{n \to \infty} n - \sqrt{n^2 - 4n} \cdot \frac{n + \sqrt{n^2+4n}}{n + \sqrt{n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2} - \cancel{n^2} + 4n}{n + \sqrt{n^2+4n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{n + \sqrt{n^2(1-\frac{4}{n})}}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{n}}} \underset{\to 0}{} = \frac{4}{2} = \boxed{2}$ $\therefore \exists$ límite que tiende a dos y la sucesión converge.

b) $a_n = 20(-1)^{n+1} \Rightarrow$ Por teorema si a_n es una sucesión, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| -20(-1)^n \right| = \nexists$, entonces la sucesión diverge,

c) $a_n = n^3 \frac{1}{e^n} = a_n = n^3 \left(\frac{1}{e}\right)^n \Rightarrow$ sea $f(x) = \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x}$ L'Hopital ① $= \frac{3x^2}{e^x}$ ② $= \frac{6x}{e^x}$ ③ $= \boxed{\frac{6}{e^x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} \underset{\to 0}{} = 0$ $\therefore$ Por teorema $\lim_{n\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0$, entonces la sucesión converge, y su $\lim_{n\to\infty} = 0$

d) $a_n = \cos(n\pi) \Rightarrow -1 \leq \cos(n\pi) \leq 1 \Rightarrow b_n = -1$ y $c_n = 1 \Rightarrow b_n \leq a_n \leq c_n$

Por teo del Sandwitch

• $\lim_{n\to\infty} -1 = \boxed{-1}$ • $\lim_{n\to\infty} 1 = \boxed{1}$ $\therefore$ dado que los límites son $\neq$ la sucesión diverge

e) $a_n = \frac{\pi}{4} - \arctan(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{4} - \lim_{n\to\infty} \arctan(n) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2\pi}{4} = \boxed{\frac{-\pi}{4}}$

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

✓(a) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ /(b) $a_n = \dfrac{\ln(n+3)}{n+3}$ (c) $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots$

a) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

i) dado que $n!$ e $n^n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

Cota inferior: 0

Cota superior: 1

• dado que $n!$ crece más lento que n^n, Podemos asegurar que la cota superior es igual a 1

ii) la sucesión es Positiva $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_n > a_{n+1}$

$\frac{n!}{n^n} > \frac{(n+1)!}{n^n \cdot n} = \cancel{n!} \cdot \cancel{n^n}\, n > (n+1)\cancel{!}\, \cancel{n^n} \Rightarrow \boxed{n > n+1}$ $\therefore$ dado que $n > n+1$ la sucesión decrece.

iv) Podemos asegurar, por teorema que si una sucesión es decreciente y está acotada inferiormente $\Rightarrow$ la sucesión converge y el límite es igual a la $\inf(\{a_n\})$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \boxed{0}$, lo cual es cierto, converge.

b) $a_n = \frac{\ln(n+3)}{n+3}$

i) es $\forall n \in \mathbb{N} > 0$, por lo tanto posee cota inferior.

• Se puede observar claramente que $\ln(n+3) < n+3$ $\forall n \in \mathbb{N}$, por lo que el cociente siempre es < 1

• Cota inferior: 0

• Cota superior: 1

ii) es positiva $\forall n > 0 \in \mathbb{N}$

$\ln(n+3) \sim \ln(n)$

iii) dado que $\ln(n+3)$ decrece y $n+3$ crece, la sucesión decrece

$n+3 \sim n$

iv) Por teorema la sucesión decrece y posee cota inferior $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+3)}{n+3} = 0$

$\hookrightarrow$ Converge

c) $\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3}}, \sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}, \ldots = 3^{\frac{1}{2^n}} = a_n$

i) Dado que $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ posee cota inferior $= 0$ y superiormente por $\sqrt{3}$ dado que es el 1er termino

$\boxed{2^n > n+1}$

ii) Positivia $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_n > a_{n+1} \Rightarrow \frac{1}{3^{2n}} > \frac{1}{3^{2n+2}}$ $\therefore$ es decreciente

iv) Por teorema, la sucesión es convergente.

(3) Dadas las siguientes series, calcular su suma o demostrar que divergen.

✓(a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \ldots$

✓(b) $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}\cos(j\pi)$

✓(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}}$

/(d) $\sum_{n=1}^{\infty} (10^{-n} + 9^{-n})$

/(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3} + 3^n}{6^n}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{4^n}$

Por serie geométrica $r = \frac{-1}{3}$ $\Rightarrow |r| < 1$, podemos asegurar que la serie converge

a) $\frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{27} - \frac{2}{81} + \ldots = \frac{(-1)^{n+1} 2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n =$

$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right) = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $\sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}\cos(j\pi) =$

• $\cos(j\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ par} \\ -1 & \text{si } j \text{ impar} \end{cases} \Rightarrow \cos(j\pi) = (-1)^j$

$= \sum_{j=1}^{\infty} \pi^{j/2}(-1)^j = \lim_{j\to\infty} \pi^{j/2} = \infty$ $\therefore$ por lo tanto la serie diverge.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-5)^n}{8^{2n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{-5}{64}\right)^n$ $\Rightarrow$ Por teorema de las series geométricas, $r = \frac{-5}{64}$, $|r|<1$

$\therefore$ la serie converge

$\boxed{\frac{ar^{k} \text{ v.no}}{1-r}}$

$= \frac{\frac{25}{4096}}{1+\frac{5}{64}} = \frac{25}{\cancel{4096}_{64}} \cdot \frac{\cancel{64}}{69} = \boxed{\frac{25}{4416}}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n}$ = Por serie geometrica, a_n, b_n convergen.

1 $= \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{9} = \boxed{\frac{1}{9}}$

2 $\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{9}}{8} = \boxed{\frac{1}{8}}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{8+9}{72} = \boxed{\frac{17}{72}}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+3}+3^n}{6^n} = 8\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n =$

1 $8 \cdot \left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = \boxed{4}$

2 $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \boxed{1}$ $\Rightarrow$ $4+1 = \boxed{5}$

$\therefore$ la serie Por serie geometrica converge y la suma es igual a 5.

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ $\Rightarrow$ $\therefore$ Por serie geometrica la serie converge.

1 $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \boxed{1}$

2 $\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{3} = \boxed{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ $1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ ✓