

1. (22 pts.) Calcular las siguientes integrales e indicar el método utilizado.

✓ (a)  $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) \sin(2x) dx$

✓ (b)  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

a)  $\int_0^{\pi/4} \cos(2x) \sin(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{\sin(2x)}^{\sin(2x)} u du =$

$\left| \begin{array}{l} u = \sin(2x) \\ du = 2 \cos(2x) dx \end{array} \right|$

$\Rightarrow \frac{\sin^2(2x)}{4} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\sin^2(\pi/2)}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

b)  $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int x^{-2} dx = \boxed{-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C}$   $\left| \begin{array}{l} u = \ln(x) \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{x^2} dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{array} \right|$

2. (22 pts.) Determinar si las siguientes integrales convergen y en tal caso calcularlas.

✓ (a)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$

✓ (b)  $\int_{\pi}^{\infty} \sin(x) dx$

a)  $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = - \int_{u(0)}^{u(3)} u^{-1/2} du = -2\sqrt{3-x} \Big|_0^3 = \boxed{2\sqrt{3}}$   $\left| \begin{array}{l} u = 3-x \\ du = -dx \end{array} \right|$   
 ∴ Por lo tanto converge

b)  $\int_{\pi}^{\infty} \sin(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\pi}^t \sin(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -\cos(x) \Big|_{\pi}^t = \lim_{t \rightarrow \infty} (-\cos(t) - (-1)) = \text{no existe límite}$   
 por su oscilación.

3. (18 pts.) Dar un ejemplo de:

- ✓ a) Una sucesión  $(a_n)$  estrictamente creciente y convergente. Explicar el límite.
- ✓ b) Una sucesión  $(b_n)$  alternante.  $(-1)^n$

a)  $a_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow a_n < a_{n+1}$ , analizo  $2 - \frac{1}{n} < 2 - \frac{1}{n+1}$  ∴ es creciente y  
 So  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{n} = \boxed{2}$  //

b)  $b_n = \frac{(-1)^n 3^n}{2^{3^n}}$   $\frac{3^{n-1}}{n} < \frac{3^n}{n+1}$   
 $\boxed{n^2 - 1 < n^2}$