**1.** Considerá la siguiente especificación formal: $h.n = \langle \exists k : 0 \leqslant k < n : n = k! \rangle$

**a.** Derivá el caso inductivo indicando claramente la HI antes de comenzar la derivación.

**b.** Indicá cuál es la función generalizada ($h\_gen$) indicando su tipo y su especificación.

**c.** Definí $h$ usando $h\_gen$.

**d.** Derivá el caso inductivo de la función generalizada.

$h.n \doteq \langle \exists k : 0 \leq k < n : n = k! \rangle$ (H)

a) Derivo la especificación:

(CB) $h.0 \doteq \langle \exists k : \underline{0 \leq k < 0} : n = 0! \rangle$

$= \{$ logica, Rango vacio $\}$

$\boxed{\text{False}}$

(CR) $h.(n+1) \doteq \langle \exists k : \underline{0 \leq k < n+1} : n+1 = k! \rangle$

$= \{$ logica, Particion de rango $\}$

$\langle \exists k : \underline{k = n+1} : n+1 = k! \rangle \lor \langle \exists k : 0 \leq k < n : n+1 = k! \rangle$

$= \{$ Rango unitario $\}$

$(n+1) = (n+1)! \lor \langle \exists k : 0 \leq k < n : \underline{n+1} = k! \rangle$

$= \{$ generalizo $\}$

$h.n.m \doteq \langle \exists k : 0 \leq k < n : n+m = k! \rangle$ (H)

(CB) $h.0.m \doteq \langle \exists k : \underline{0 \leq k < 0} : m = k! \rangle$

$= \{$ Logica, Rango vacio $\}$

$\boxed{\text{False}}$

(CR) $h.(n+1).m \doteq \langle \exists k : \underline{0 \leq k < n+1} : n+1+m = k! \rangle$

$= \{$ logica, Particion de rango $\}$

$\langle \exists k : \underline{k = n+1} : n+1+m = k! \rangle \lor \langle \exists k : 0 \leq k < n : n+1+m = k! \rangle$

$= \{$ Rango unitario $\}$

$n+1+m = (n+1)! \lor \langle \exists k : 0 \leq k < n : \underline{n+1+m} = k! \rangle$

$= \{$ Asociatividad, $m := m+1$, HI $\}$

$n+1+m = \underline{(n+1)!} \lor h.n.(m+1)$

$= \{$ Defino función factorial $\}$ (Modularización)

$f.n \doteq \langle \prod i : 1 \leq i \leq n : i \rangle$ (H)

(CB) $f.0 \doteq \langle \prod i : \underline{1 \leq i \leq 0} : i \rangle$

$= \{$ logica, Rango vacio $\}$

(CR) $f.(n+1) \doteq \langle \prod i : \underline{1 \leq i \leq n+1} : i \rangle$

$= \{$ logica, Partición de rango $\}$

$\boxed{1}$ $\langle \prod i : i = n+1 : i \rangle \cdot \langle \prod i : 1 \leq i \leq n : i \rangle$

$= \{$Rango unitario$\}$

$(n+1) \cdot \underline{\langle \prod i : 1 \leq i \leq n : i \rangle}$

$= \{HI\}$

$(n+1) \cdot f.n$

· Remplazo $(n+1)!$ por la función que la representa$\}$

- $n+1+m = (n+1)! \vee h.n.(m+1)$

$= \{$Def Factorial$\}$

$n+1+m = f.n \vee h.n(m+1)$

$h : Num \to Num \to Bool$

$h.0.m \doteq False$

$h.(n+1).m \doteq n+1+m = f.n \vee h.n.(m+1)$

$f : Num \to Num$

$f.0 \doteq 1$

$f.1 \doteq 1$

$f.(n+1) \doteq (n+1) \cdot f.n$

la función h.n es un caso de h.n.0 ..

✓**2.** Considerá la siguiente especificación formal: $h.xs = \langle \exists as, bs : xs = as ++ bs : \; prod.as < prod.bs \rangle$

**a.** Derivá el caso inductivo indicando claramente la HI antes de comenzar la derivación.

**b.** Indicá cuál es la función generalizada ($h\_gen$) indicando su tipo y su especificación.

**c.** Definí $h$ usando $h\_gen$.

**d.** Derivá el caso inductivo de la función generalizada.

(H)

$h.xs \doteq \langle \exists as, bs : xs = as ++ bs : Prod.as < Prod.bs \rangle$

CR $h.(x \triangleright xs) \doteq \langle \exists as, bs : \underline{(x \triangleright xs) = as ++ bs} : Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$logica, Distributiva, Partición de rango$\}$

$\langle \exists as, bs : \underline{(x \triangleright xs) = as ++ bs \wedge as = []} : Prod.as < Prod.bs \rangle \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq as ++ bs \wedge as \neq [] : Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$eliminación de variable, Definición de concatenar$\}$

$\langle \exists bs : (x \triangleright xs) = bs : \underline{Prod\,[]} < Prod.bs \rangle \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq as ++ bs \wedge as \neq [] : Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$Definición de Prod, Rango unitario$\}$

$1 < x \cdot Prod.xs \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq \underline{as ++ bs \wedge as \neq []} : Prod\,\underline{as} < Prod.bs \rangle$

$= \{$Cambio de variable $as \leftarrow (a \triangleright as)$, Definición de Concatenar, Definición Constructor$\}$

$1 < x \cdot Prod.xs \vee \langle \exists as, bs : \underline{x = a} \wedge xs = as ++ bs : Prod.(a \triangleright as) < Prod.bs \rangle$

$= \{$eliminación de variable, Def Prod$\}$

$1 < x \cdot Prod.xs \vee \underline{\langle \exists as, bs : xs = as ++ bs : x \cdot Prod.as < Prod.bs \rangle}$

- $= \{$generalizo$\}$

(H)

$h.xs.m \doteq \langle \exists as, bs : xs = as ++ bs : m \cdot Prod.as < Prod.bs \rangle$

(CB) $h.[\,].m \doteq \langle \exists as, bs : [\,] = as{+}{+}bs : m.Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$ Propiedad de concat, eliminación de variable $\}$

$\boxed{m<1}$

(CR) $h.(x \triangleright xs).m \doteq \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) = as{+}{+}bs : m.Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$ lógica, Distributiva, Partición de rango $\}$

$\langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) = as{+}{+}bs \wedge as = [\,] : m.Prod.as < Prod.bs \rangle \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq as{+}{+}bs \wedge as \neq [\,] : m.Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$ eliminación de variable, Definición de concatenar $\}$

$\langle \exists bs : (x \triangleright xs) = bs : m.Prod.[\,] < Prod.bs \rangle \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq as{+}{+}bs \wedge as \neq [\,] : m.Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$ Eliminación de variable, Definición Prod $\}$

$m < x.Prod.xs \vee \langle \exists as, bs : (x \triangleright xs) \doteq as{+}{+}bs \wedge as \neq [\,] : m.Prod.as < Prod.bs \rangle$

$= \{$ Cambio de variable $as \leftarrow (a \triangleright as)$, Def concatenar, Propiedad del constructor $\}$

$m < x.Prod.xs \vee \langle \exists as, bs : x = a \wedge xs = as{+}{+}bs : m.Prod(a \triangleright as) < Prod.bs \rangle$

$= \{$ eliminación de variable, Definición de Prod, asociatividad $\}$

$m < x.Prod.xs \vee \langle \exists as, bs : xs = as{+}{+}bs : (m.x).Prod.xs < Prod.bs \rangle$

$= \{$ HI $\}$

$(m < x.Prod.xs) \vee h.xs.(m.x)$

Donde $h.xs.m = h.xs.1$

$h : [Num] \rightarrow Num \rightarrow Bool$
$h.[\,].m \doteq m<1$
$h.(x \triangleright xs).m \doteq (m < x.Prod.xs) \vee h.xs.(m.x)$

$Prod : [Num] \rightarrow Num$
$Prod.[\,] \doteq 1$
$Prod.(x \triangleright xs) \doteq x.Prod.xs$

**3.** Considerá la siguiente especificación formal: $h.xs = \langle \text{Max } as, bs : xs = as{+}{+}bs \wedge pares.as : sum.as \rangle$ donde $pares.us = \langle \forall i : 0 \leqslant i < \#us : par.(us!i) \rangle$ y pueden usar la propiedad $pares.(a \triangleright as) \equiv par.a \wedge pares.as$.

**a.** Derivá el caso inductivo indicando claramente la HI antes de comenzar la derivación.
**b.** Indicá cuál es la función generalizada ($h\_gen$) indicando su tipo y su especificación.
**c.** Definí $h$ usando $h\_gen$.
**d.** Derivá el caso inductivo de la función generalizada.

(H)

$h.xs \doteq \langle \text{Max } as, bs : xs = as{+}{+}bs \wedge Pares.as : sum.as \rangle$

(CB) $h.(x \triangleright xs) \doteq \langle \text{Max } as, bs : (x \triangleright xs) = as{+}{+}bs \wedge Pares.as : sum.as \rangle$

$= \{$ lógica, Distributividad del $\wedge$ con el $\vee$, Partición de rango $\}$

$\langle \text{Max } as, bs : (x \triangleright xs) \doteq (as{+}{+}bs \wedge as = [\,]) \wedge Pares.as : Sum.as \rangle \max \langle \text{Max } as, bs : (x \triangleright xs) \doteq (as{+}{+}bs \wedge as \neq [\,]) \wedge Pares.as : Sum.as \rangle$

$= \{$ eliminación de variable, Def concat $\}$

$\langle \text{Max } bs : (x \triangleright xs) = bs \wedge Pares.[\,] : Sum.[\,] \rangle \max \langle \text{Max } as, bs : (x \triangleright xs) \doteq (as{+}{+}bs \wedge as \neq [\,]) \wedge Pares.as : Sum.as \rangle$

$= \{$ Def Suma, Término Constante $\}$

$0 \max \langle \text{Max } as, bs : (x \triangleright xs) = (as \mathbin{++} bs \wedge as \neq [\,]) \wedge Pares.as : Sum.as \rangle$

$= \{$ Cambio de variable $as \leftarrow (a \triangleright as)$, Def Concatenar, Prop. del Constructor $\}$

$0 \max \langle \text{Max } as, bs : x = a \wedge xs = as \mathbin{++} bs \wedge Pares.(a \triangleright as) : Sum.(a \triangleright as) \rangle$

$= \{$ Def de Pares, Def sum $\}$

$0 \max \langle \text{Max } as, bs : x = a \wedge xs = as \mathbin{++} bs \wedge Pares.a \wedge Pares.as : x + Sum.as \rangle$

$= \{$ generalización, eliminación de variable $\}$

$gh.xs.n.m \doteq \langle \text{Max } as, n, bs ; xs = as \mathbin{++} bs \wedge n \wedge Pares.as : m + sum.as \rangle$ (H)

(CB) $gh.[\,].n.m \doteq \langle \text{Max } as, n, bs ; [\,] = as \mathbin{++} bs \wedge n \wedge Pares.as : m + sum.as \rangle$

$= \{$ PropConcatenar, eliminación de variable $\}$

$\langle \text{Max } n : n \wedge Pares.[\,] : m + sum.[\,] \rangle$

$= \{$ Def sum, termino Constante $\}$

$\boxed{m}$

(CR) $gh.(x \triangleright xs).n.m \doteq \langle \text{Max } as, n, bs : (x \triangleright xs) = as \mathbin{++} bs \wedge n \wedge Pares.as : m + Sum.as \rangle$

$= \{$ lógica, Distributividad del $\wedge$ con el $\vee$, Partición de rango $\}$

$\langle \text{Max } as, n, bs : ((x \triangleright xs) = as \mathbin{++} bs \wedge as = [\,]) \wedge n \wedge Pares.as : m + sum.as \rangle \max \langle \text{Max } as, n, bs : ((x \triangleright xs) = as \mathbin{++} bs \wedge as = [\,]) \wedge n \wedge Pares.as : m + sum.as \rangle$

$= \{$ eliminación de variable, Def Concat, Def Pares, Def Sum $\}$

$\langle \text{Max } n, bs : (x \triangleright xs) = bs \wedge n : m \rangle$

$= \{$ termino Constante $\}$

$m \max \langle \text{Max } as, n, bs : ((x \triangleright xs) = as \mathbin{++} bs \wedge as = [\,]) \wedge n \wedge Pares.as : m + sum.as \rangle$

$= \{$ Cambio de variable $as \leftarrow (a \triangleright as)$, Prop concatenar, Prop constructor, Def Pares, Def suma $\}$

$m \max \langle \text{Max } as, n, bs : x = a \wedge xs = as \mathbin{++} bs \wedge n \wedge Pares.a \wedge Pares.as : m + a + sum.as \rangle$

$= \{$ eliminación de variable, asociatividad del $\wedge$, asociatividad de la suma $\}$

$m \max \langle \text{Max } as, n, bs : xs = as \mathbin{++} bs \wedge (n \wedge Pares.x) \wedge Pares.as : (m + x) + Sum.as \rangle$

$= \{$ HI $\}$

$m \max gh.xs.(n \wedge Pares.x).(m + x)$

$gh : [Num] \to Num \to Num \to Num$

$gh.[\,].n.m \doteq m$

$gh.(x \triangleright xs).n.m \doteq m \max gh.xs.(n \wedge Pares.x).(m + x)$

$\langle \forall i : 0 \leqslant i < \#us : par.(us!i) \rangle$

(H) $Pares.us \doteq \langle \forall i ; 0 \leq i < \#us : Par.(us!i) \rangle$

(CB) $Pares.[\,] \doteq \langle \forall i : 0 \leq i < \#[\,] : Par.([\,]!i) \rangle$

$= \{$ Def length, lógica, Rango vacío $\}$

$Pares : [Num] \to Bool$

$Pares.[\,] \doteq true$

$Pares.(n \triangleright ns) \doteq Par.n \wedge Pares.ns$

$\boxed{\text{True}}$

(CR) $Pares.(n \triangleright ns) \doteq \langle \forall i : 0 \leq i < \#(n \triangleright ns) . Par.((n \triangleright ns)!i) \rangle$

$= \{$logica, Particion de rango$\}$

$\langle \forall i : i = 0 : Par.((n \triangleright ns)!i) \rangle \wedge \langle \forall i : 1 \leq i < \#(n \triangleright ns) : Par.((n \triangleright ns)!i) \rangle$

$= \{$Rango unitario, Def index$\}$

$Par.n \wedge \langle \forall i : 1 \leq i < \#(n \triangleright ns) : Par.((n \triangleright ns)!i) \rangle$

$= \{$ Def length, Cambio de variable $i \leftarrow i+1$, aritmetica, Def index$\}$

$Par.n \wedge \langle \forall i : 0 \leq i < \#ns : Par.(ns!i) \rangle$

$= \{HI\}$ $Par.n \wedge Pares.ns$

4. Considerá la siguiente especificación formal: $h.xs.ys \doteq \left(\#xs = \#ys \wedge \langle \forall i : 0 \leqslant i < \#xs : ys!i = i + (xs!i) \rangle\right)$

**a.** Derivá el caso inductivo indicando claramente la HI antes de comenzar la derivación.

**b.** Indicá cuál es la función generalizada ($h\_gen$) indicando su tipo y su especificación.

**c.** Definí $h$ usando $h\_gen$.

**d.** Derivá el caso inductivo de la función generalizada.

$h.xs.ys \doteq \#xs = \#ys \wedge \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : ys!i = i + (xs!i) \rangle$

$h.xs.ys = \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : ys!i = i + (xs!i) \rangle$ (H)

(CR) $h.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys) = \langle \forall i : 0 \leq i < \#(x \triangleright xs) : (y \triangleright ys)!i = i + ((x \triangleright xs)!i) \rangle$

$= \{$logica, Particion de rango$\}$

$\langle \forall i : i = 0 : (y \triangleright ys)!i = i + ((x \triangleright xs)!i) \rangle \wedge \langle \forall i : 1 \leq i < \#(x \triangleright xs) : (y \triangleright ys)!i = i + ((x \triangleright xs)!i) \rangle$

$= \{$Def length, Cambio de variable $i \leftarrow i+1$, aritmetica, Def index$\}$

$\langle \forall i : i = 0 : (y \triangleright ys)!i = i + ((x \triangleright xs)!i) \rangle \wedge \langle \forall i : 0 \leq i < \#xs : ys!i = i + xs!i \rangle$

$= \{HI\}$

$\langle \forall i : i = 0 : (y \triangleright ys)!i = i + ((x \triangleright xs)!i) \rangle \wedge h.xs.ys$

$= \{$Rango unitario, Def index$\}$

$y = x \wedge h.xs.ys$

$h : [Num] \to [Num] \to Bool$

$h.[\,].ys \doteq true$

$h.xs.[\,] \doteq true$

$h.(x \triangleright xs).(y \triangleright ys) \doteq (x = y) \wedge h.xs.ys$

(CB) $h.[\,].ys = \langle \forall i : 0 \leq i < \#[\,] : ys!i = i + ([\,]!i) \rangle$

$= \{$ Def length, logica, Rango vacio$\}$

$\boxed{\text{True}}$

(CB) $h.xs.[\,] = \langle \forall i : 0 \leq i < \#[\,] : [\,]!i = i + ([\,]!i) \rangle$

$= \{$ Def length, logica, Rango vacio$\}$

$\boxed{\text{True}}$