1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

(a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$.

(b) *(17 Pts.)* Trace la región limitada por las curvas dadas y calcule su área: $y = \cos(x)$, $y = 2 - \cos(x)$, $x = 0$ y $x = 2\pi$.

a) $\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{-1}{2}\int e^{u} du = \frac{-1}{3} \cdot e^{-x^3} = \boxed{\frac{-e^{-x^3}}{3} + c}$

$\left| \begin{array}{l} u = -x^3 \\ du = -3x^2 dx \end{array} \right|$

b) igualamos las curvas $\cos(x) = 2 - \cos(x)$

$\boxed{\cos(x) = 1} \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\Rightarrow \int_0^{2\pi} (2 - 2\cos(x))\,dx = 2x - 2\operatorname{sen}(x) \Big|_0^{2\pi} = \boxed{4\pi}$ // $\therefore$ Por lo tanto, el área entre las curvas es $\boxed{4\pi}$

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)*

(a) *(16 Pts.)* Determine si la siguiente sucesión tiene límite: $a_n = \frac{(-1)^n \sqrt[3]{n}}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(16 Pts.)* Determine si la sucesión $b_n = \frac{n}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$ es: (i) creciente, decreciente o ninguna de las dos; (ii) acotada superior y/o inferiormente; (iii) convergente o divergente.

a) $a_n = \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$

Por teorema si $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Rightarrow$ también $\exists \lim_{n\to\infty} |a_n| = \ell$

• entonces $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n n^{\frac{1}{3}}}{n^3} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}}}{n^3} = \boxed{0}$ dado que n^3 crece mucho más rápido que $n^{\frac{1}{3}}$.

b) $b_n = \frac{n}{n^2+1}$

i) si es creciente entonces $a_n < a_{n+1} \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} < \frac{n+1}{n^2+2n+2}$

$= \cancel{n^3} + 2n^2 + 2n < \cancel{n^3} + \cancel{n} + \cancel{n^2} + 1 = \boxed{n^2 + n < 1}$

• Concluimos con que es decreciente

ii) Calculo su límite

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = \frac{\frac{\cancel{n}}{n^{\cancel{2}}}}{\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{n^2}} + \frac{1}{n^2}} = \boxed{0}$ ($\frac{1}{n^2} \to 0$)

Por lo tanto su cota inferior es $M=0$ $\wedge$ $a_n > 0$ $\wedge$

• evaluo en el 1er $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ la $\sup(a_n) = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\left\{ \begin{array}{l} \sup(a_n) = \frac{1}{2} \\ \operatorname{Inf}(a_n) = 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ Posee cota inferior y superior

iii) Por teorema, si a_n es acotada Inf y es decreciente podemos asegurar que la sucesión converge y su $\lim_{n\to\infty} a_n = \text{Inf}\{a_n\}$, lo cual nuestra sucesión cumple

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Dadas las siguientes series, calcule su suma o demuestre que divergen.

(a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{6^n}$

(b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^{n+1}}$

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{6^n} \Rightarrow \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{①} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n}_{②}$$

∴ dado que ambas series son geométricas

① $r = \frac{1}{3}$ y $|r| < 1$

② $r = \frac{1}{6}$ y $|r| < 1$

calculamos su suma

$\Rightarrow$ ① $$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5-2}{10} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

② $$\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^{n+1}} = \text{si el } \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{4^{n+1}} \neq 0 \Rightarrow \text{diverge}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{4^{n+1}} = \boxed{\infty}$$ ∴ no podemos calcular su suma.