1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

(a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$.

(b) *(17 Pts.)* Decida si la siguiente integral impropia converge o diverge $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx$.

a) $\int \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = x^{\frac{1}{2}}$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}$

$$= \frac{2\ln(x)\,x^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}\int \frac{x^{3/2}}{x}\,dx = \boxed{\frac{2\ln(x)\,x^{3/2}}{3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C}$$

b) $$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^4}dx = \lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t}\frac{1}{x^4}dx + \lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1}\frac{1}{x^4}dx$$

① $$\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t} x^{-4}\,dx = \lim_{t\to 0^-} \left.\frac{-x^{-3}}{3}\right|_{-1}^{t} = \left(-\frac{1}{t^3} - \frac{1}{3}\right) = \boxed{+\infty}$$

② $$\lim_{t\to 0^+}\int_{t}^{1} x^{-4}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \left.\frac{-x^{-3}}{3}\right|_{t}^{1} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{t^{-3}}{3}\right) = \boxed{\infty}$$

∴ la integral diverge.

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)*

(a) *(16 Pts.)* Determine si la siguiente sucesión tiene límite: $a_n = \frac{\cos(n+1)}{n^2+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) *(16 Pts.)* Determine si la sucesión $b_n = \frac{n}{e^n}$, $n \in \mathbb{N}$ es: (i) creciente, decreciente o ninguna de las dos; (ii) acotada superior y/o inferiormente; (iii) convergente o divergente.

-1 a 1

$n \in \mathbb{N}$

$a_n \leq b_n \leq c_n$

a) $$a_n = \frac{\cos(n+1)}{n^2+1} = \qquad \frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\cos(n+1)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1}$$

• $$\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2+1} = \frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \boxed{0}$$

• $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = \boxed{0}$$

∴ Por teorema, podes asegurar a_n tiene límite y es igual a cero.

b) $b_n = \frac{n}{e^n}$

i) $\boxed{a_n > a_{n+1}} \Rightarrow \frac{n}{e^n} > \frac{n+1}{e^{n+1}} = n\cancel{e^n}\cdot e > \cancel{e^n}(n+1)$

$\boxed{ne > n+1}$ ✓

$\Rightarrow$ la sucesión decrece.

ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n} = e^n \to$ crece más rápido que n

$= \boxed{0}$

$n = 1 \Rightarrow \operatorname{Sup}\{b_n\} = \boxed{\frac{1}{e}}$

$\Rightarrow b_n =$ posee cota inferior $\operatorname{Inf}\{b_n\} = 0$

iii) Por teorema, dado que b_n es decreciente y está acotada inferiormente, el $\lim_{n\to\infty} b_n = \operatorname{Inf}\{b_n\}$

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Dadas las siguientes series, calcule su suma o demuestre que divergen.

✓ (a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{8^{2n}}$

✗ (b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{8^{2n}} = \frac{-3^n}{64^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{64}\right)^n$. $r = \frac{-3}{64}$, $|r| < 1$ Por serie geométrica.

$$\Rightarrow \frac{\frac{-3}{64}}{1 + \frac{3}{64}} = \frac{-3}{64} \cdot \frac{64}{67} = \boxed{\frac{-3}{67}}$$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^n} = \boxed{+\infty}$ ∴ la serie diverge

c) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$ $= \lim_{t\to 3^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-3)^{2/3}} + \lim_{t\to 3^+} \int_t^4 \frac{dx}{(x-3)^{2/3}}$ ① ②

$u = x-3$
$du = dx$

① $\lim_{t\to 3^-} \int_0^t u^{-2/3}\, du = 3\sqrt[3]{x-3}\,\Big|_0^t = 3\sqrt[3]{t-3} - 3\sqrt[3]{-3} = \boxed{-3\sqrt[3]{-3}}$

$$\Rightarrow \boxed{-3\sqrt[3]{-3} + 3 = A}$$ ∴ Converge,

② $\lim_{t\to 3^+} u^{\frac{1}{3}}\,\Big|_t^4 = 3\sqrt[3]{x-3}\,\Big|_t^4 = \boxed{3}$

c) $\int_{-\infty}^0 x\, e^{-x^2}\, dx$

$0 \leftarrow t$

$u = -x^2$
$du = -2x\,dx$

$$\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 x e^{-x^2} dx = \lim_{t\to-\infty} -\frac{1}{2}\int_t^0 e^u\, du = \lim_{t\to-\infty} -\frac{e^{-x^2}}{2}\Big|_t^0 = \frac{-1}{2} + \frac{-e^{-t^2}}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

$1 + \cancel{x}$

e) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1\,dx}{x^2 - x - 2}$

$\dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2}$ $\boxed{x_1 = 2}$ $\boxed{x_2 = -1}$

$\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)(x+1)} dx \quad \int_0^4 \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}\right) dx =$

$\dfrac{A(x+1) + B(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{Ax + A + Bx - 2B}{(x-2)(x+1)} = \dfrac{x(A+B) + (A-2B)}{(x-2)(x+1)}$

$\begin{cases} A+B=0 & ① \\ A-2B=1 & ② \end{cases}$ ① $A = -B = \boxed{A = \frac{1}{3}}$ ② $-3B = 1$ $\boxed{B = -\frac{1}{3}}$

$\Rightarrow \cancel{\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{3(x-2)} dx} - \int_0^4 \frac{1}{3x+3} dx$

$u = 3x - 6$
$du = 3dx$

① $\displaystyle\frac{1}{3}\int_0^4 \frac{1}{(3x-6)} = \frac{\ln(|3x-6|)}{3}\Big|_0^4$

$= \cancel{\dfrac{\ln(6)}{3} - \dfrac{\ln(|6|)}{3}}$

② $\displaystyle -\frac{1}{3}\ln(|3x+3|)\Big|_0^4 = \boxed{-\frac{\ln(|15|)}{3} + \frac{1}{3}\ln(|3|)}$

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

(a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+7}} dx$.

(b) *(17 Pts.)* Dibuje y calcule el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = (x^2-1)^2$ y $g(x) = 1 - x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.

a) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+7}} dx = \frac{1}{4}\int u^{-1/2} du = \boxed{\frac{\sqrt{2x^2+7}}{2} + C}$

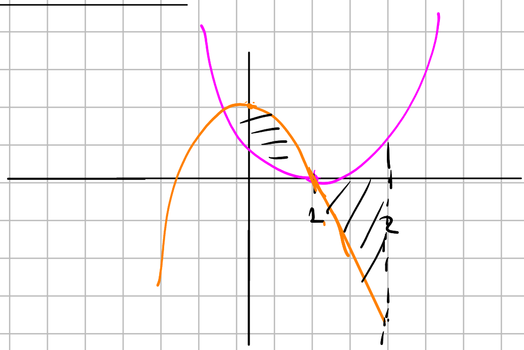
$u = 2x^2 + 7$
$du = 4x\,dx$

b) $x^4 - 2x^2 \cancel{+1} = \cancel{1} - \cancel{x^2}$

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x+1)(x-1) = 0$

$x_1 = 0, \ x_2 = 1, \ \cancel{x_3 = -1}$



$\displaystyle\int_0^1 \left(-x^4 + x^2 \right) dx + \int_1^2 \left((x^2-1)^2 - (1-x^2)\right) dx = x^4 - x^2$

$\begin{array}{r} 2 \\ 48 \\ -3 \\ \hline 44 \end{array}$

① $-\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{-3+5}{15}=\boxed{\frac{2}{15}}$

$A=\frac{60}{15}=\boxed{4}$

② $\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{31}{5}-\frac{7}{3}=\frac{93-35}{15}=\boxed{\frac{58}{15}}$

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)* Determine si las siguientes sucesiones tienen límite.

(a) *(16 Pts.)* $a_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}=$

(b) *(16 Pts.)* $b_n=\sqrt{n^2+2n}+n=$

$n^2 \cdot n^{\frac{1}{2}}=n^{2-\frac{1}{2}}$

a) $a_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}\right|=\frac{1}{n^{2-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}=\boxed{0}$

$\Rightarrow \boxed{\lim a_n=0}$

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

b) $b_n=\sqrt{n^2+2n}-n=\sqrt{n^2+2n}-n\cdot\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{\cancel{n^2}+2n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\lim_{n\to\infty}b_n=\boxed{1}$

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Utilice algún ~~criterio de convergencia y determine si las siguientes series~~ convergen o divergen:

(a) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\frac{(-1)^n8n!}{(n+1)!}}^{a_n}$

(b) *(17 Pts.)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 8n!}{(n+1)!}=8\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|=\frac{\frac{8}{n}}{1\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}+\frac{1}{n}}=\boxed{0}$ ∴ Converge

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{n^n}=\boxed{0}$

1. Ejercicio 1 *(34 Pts.)*

(a) *(17 Pts.)* Calcule la siguiente integral indefinida $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$.

(b) *(17 Pts.)* Decida si la siguiente integral impropia converge o diverge $\int_0^1 \frac{x}{x^2-1}\,dx$.

a) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

$u = \ln(x)$ $\quad dv = \frac{1}{x^2}dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ $\quad v = -\frac{1}{x}$

$$\frac{-\ln(x)}{x} + \int x^{-2}\,dx = \boxed{\frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C}$$

b) $u = x^2-1$

$du = 2x$

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2-1} = \lim_{t\to 1^-}\int_0^t \frac{du}{2u} = \lim_{t\to 1^-} \left.\frac{\ln(|x^2-1|)}{2}\right|_0^t = \lim_{t\to 1^-}\frac{(\ln(|t^2-1|)}{2} = \boxed{-\infty}$$

∴ la integral diverge.

2. Ejercicio 2 *(32 Pts.)* Determine si las siguientes sucesiones tienen límite:

(a) *(16 Pts.)* $a_n = \frac{\text{sen}(2n)}{n^2+1}$

(b) *(16 Pts.)* $b_n = \frac{n}{e^n}$

a) $a_n = \frac{\text{Sen}(2n)}{n^2+1}$ $\Rightarrow$ Por teo. Sandwich

$$-1 \leq \text{Sen}(2n) \leq 1 \Rightarrow \underset{1}{\frac{-1}{n^2+1}} \leq \frac{\text{Sen}(2n)}{n^2+1} \leq \underset{2}{\frac{1}{n^2+1}}$$

1 $\lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \boxed{0}$

2 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \boxed{0}$

∴ Podemos asegurar que an Tiene límite y es igual a $\boxed{0}$

b) $b_n = \frac{n}{e^n}$ = Defino $f(x) = \frac{x}{e^x}$ $\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = \boxed{0}$

3. Ejercicio 3. *(34 Pts.)* Utilice algún criterio de convergencia y determine si las siguientes serie[redacted] convergen o divergen:

(a) *(17 Pts.)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3+\cancel{3n}}$

(b) *(17 Pts.)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3+3n} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1/3}}{n^3} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{3-\frac{1}{3}}} = \frac{1}{n^{\frac{8}{3}}} = \boxed{0}$ ∴ Por lo tanto converge.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

$\ln(n+1)$ $\qquad$ (f) $a_n = \dots 4^n$

(2) Determinar si cada una de las siguientes sucesiones es: (i) acotada superior y/o inferiormente; (ii) positiva o negativa (a partir de cierto n_0); (iii) creciente, decreciente o alternante; (iv) convergente, divergente, divergente a ∞ o $-\infty$.

(a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ $\qquad$ (c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{e^n}$ $\qquad$ (e) $a_n = \ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$

(b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $\qquad$ (d) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ $\qquad$ (f) $a_n = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}$

a) $a_n = \dfrac{2n}{n^2+1}$ $\qquad$ i) $n=1$ el mayor valor posible

$\Rightarrow \dfrac{2}{2} = \boxed{1}$ ∴ Cota Sup$(\{a_n\}) = 1$, dado que n^2+1 crece más rapido

$\Rightarrow$ Cota Inf$(\{a_n\}) = 0$

ii) dado $2n > 0$ y $n^2+1 > 0$, siempre es positiva

$a_n > a_{n+1}$

$\dfrac{2n}{n^2+1} > \dfrac{2n+2}{(n+1)^2+1} = 2n(n^2+2n+2) > (2n+2)(n^2+1)$

$\cancel{2n^3} + 4n^2 + \cancel{4n} > \cancel{2n^3} + \cancel{2n} + 2n^2 + 2$

$2n^2 + 2n > 2$

$\boxed{n^2+n > 1}$

iv) Por teorema, como la sucesión es decreciente y posee cota inferior $\Rightarrow$ podemo asegurar que la sucesión converge.

b) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) =$ $\qquad$ i) Posee cota inferior Inf$(\{a_n\}) = 0$ y cota Sup$(\{a_n\}) = 1$

ii) dado que a_n es ⊕, a partir de $n > 0 \Rightarrow$ es positiva

iii) $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) > \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ ∴ esto es cierto por la tendencia de seno a medida que crece

iv) dado que decrece y posee cota inferior, por teorema la sucesión converge.

c) $a_n = \frac{(-1)^n n}{e^n} =$ i) $\frac{-1}{e} = \operatorname{Inf}(\{a_n\}), \operatorname{Sup}(\{a_n\}) = \frac{1}{e}$

$$-\frac{1}{e^n} < a_n < \frac{1}{e^n}$$

ii) no es positiva ni negativa dad su alternancia.

iii) $\frac{(-1)^n n}{e^n} > \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{e^{n+1}}$

$$\cancel{(-1)^n} n \cdot \cancel{e^n} \cdot e > \cancel{(-1)^n} (-1)(n+1) \cdot \cancel{e^n}$$ ∴ decrece

$$\boxed{ne > -n-1}$$

iv) Por teorema, posee cota inf y es decreciente $\Rightarrow$ converge y su $\lim = \operatorname{Inf}(\{a_n\})$

d) $a_n = \frac{2^n}{n!}$ i) $\operatorname{Inf}(\{a_n\}) = 0$, $\operatorname{Sup}(\{a_n\}) = 2$

ii) el numerador siempre positivo y el denominador cumple lo mismo ∴ positiva

iii) $\frac{2^n}{n!} > \frac{2^n \cdot 2}{(n+1)!} = \cancel{2^n} \cdot (n+1)\cancel{!} > \cancel{2^n} \cdot 2 \cdot \cancel{n!}$

$\boxed{n+1 \geq 2}$ ∴ la función decrece

iv) Por teorema, decrece y posee cota inferior. $\Rightarrow$ converge y tiene $\lim = \operatorname{Inf}(\{a_n\})$.

e) $a_n = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$ i) $\operatorname{Inf}(\{a_n\}) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

ii) siempre positiva a partir $n=1$

iii) $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) > \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) < \boxed{\frac{5}{3}} > \frac{3}{2}$ ∴ por lo tanto crece

iv) $\lim_{n \to \infty} \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \boxed{\infty}$ diverge

f) $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} =$ i) $\operatorname{Inf}(\{a_n\}) = 2$

• no posee cota superior.

ii) siempre positivo.

iii) $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n)!} < \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}$

$\cancel{4^n} (n!)^2 \cancel{(2n+2)!} < \cancel{4^n} \cdot 4((n+1)!)^2 \cdot \cancel{(2n)!}$

$n(2n+2) < (4n+4)(2n)$

$\cancel{2n^2} + \cancel{2n} < 8n^2 + 8n$

$\boxed{0 < 6n^2 + 6n}$

$\therefore$ creciente.

$① - \frac{1}{n} \to 0$

iv) Dado que es creciente y no posee cota superior, podemos asegurar que diverge.

12. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \tan^2(x)\ dx$ c) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$ e) $\int \dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

a)