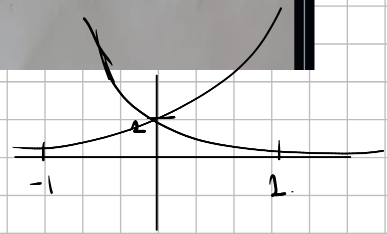
Ejercicio 1 *(25 Pts.)*

(a) *(12 Pts.)* Esbozar la gráfica y calcular el área de la región limitada por las curvas:
$y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = -1, \quad x = 1.$

(b) *(13 Pts.)* Determinar si la siguiente integral converge o no. Si converge calcular a qué valor lo hace. Si no converge, explicar por qué.

$$\int_0^\infty (x+2)e^{-x}\,dx$$



a) $y = e^x \quad , y = e^{-x} \quad , x = -1 \quad , x = 1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (e^x - e^{-x})\,dx = e^x + e^{-x} \Big|_{-1}^{1} = \left(e + \frac{1}{e}\right) - \left(\frac{1}{e} + e\right) = \boxed{0}$$

b) $$\int_0^\infty (x+2)e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t (xe^{-x} + 2e^{-x})\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x}\,dx + 2\int_0^t e^{-x}\,dx$$

① $$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} -xe^{-x} + \int_0^t e^{-x}\,dx + 2\int_0^t e^{-x}\,dx$$

$u = x$ | $dv = e^{-x}$
$du = dx$ | $v = -e^{-x}dx$

$$\lim_{t\to\infty} -xe^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x}$$

Ejercicio 2 *(26 Pts.)*

✓(a) *(13 Pts.)* Hallar el radio e intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n}(x-1)^n.$$

(b) *(13 Pts.)* Hallar el polinomio de Taylor $T_{2,2}(x)$ de grado 2 de $f(x) = \ln(x-1)$ alrededor de $a = 2$. Luego, estimar el error cometido al aproximar el valor $\ln(2)$ por $T_{2,2}(3)$.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n}(x-1)^n =$$ crict. cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)^2 4^{n+1}} \cdot \frac{n^2 4^n}{(x-1)^n} \right| = \frac{|x-1|}{4} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2}_{\to 1} = \boxed{L = \frac{1}{4}} \Rightarrow \boxed{R = 4}$$

$$\Rightarrow -4 < x-1 < 4 \Rightarrow \boxed{-3 < x < 5}$$

- $x = -3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cancel{4^n}}{n^2 \cancel{4^n}}$ = Por criterio de serie alternante el $\lim a_n = 0$ y $a_n \geq a_{n+1}$

∴ Converge.

- $x = 5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{4^n}}{n^2 \cancel{4^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ = Por serie $P = 2$ y $P > 1 \Rightarrow$ Converge.

b) $f(x) = \ln(x-1) \longrightarrow T_{2,2}(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2}(x-2)^2$

- $f(2) = \ln(1) = 0$
- $f'(x) = (x-1)^{-1} \longrightarrow f'(2) = \boxed{1}$
- $f''(x) = -(x-1)^{-2} \longrightarrow f''(2) = \boxed{-1}$

$T_{2,2}(x) = (x-2) - \frac{(x-2)^2}{2}$

$\Rightarrow \ln(2) \approx T_{2,2}(3) = 1 - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}} \approx \ln(2)$

$\Rightarrow$ Estimo el error.

- $f'''(x) = \boxed{2(x-1)^{-3}} \longrightarrow f'''(2) = \boxed{2}$

$\Rightarrow |R_{2,2}(x)| \leq \frac{f'''(t)}{3!}(x-2)^3$ $\quad t \in (2,3)$

$|R_{2,2}(x)| \leq \left| \frac{(t-1)^{-3}}{3} \right| = \frac{1}{3(t-1)^3} = |R_{2,2}(3)| \leq \boxed{\frac{1}{3}}$

Ejercicio 3 *(25 Pts.)* Sea $f(x,y) = x^4 + y^2 - 2x^2 - 2y$.

✓(a) *(15 Pts.)* Encontrar todos los puntos críticos de la función f y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

(b) *(10 Pts.)* Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $p = (-1, 0, -1)$, y encontrar la ecuación de la recta perpendicular al gráfico de f que pasa por p.

a) $f(x,y) = x^4 + y^2 - 2x^2 - 2y$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$

$\begin{cases} x^3 - x = 0 & ① \quad x(x+1)(x-1) = 0 \\ y - 1 = 0 & ② \quad \boxed{y = 1} \end{cases}$ $\Rightarrow$ P.C $\cdot P_1(0,1) \cdot P_2(-1,0)$ $P_3(1,0)$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

① $P_1 = (0,1) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -8 < 0 \Rightarrow$ Punto silla

② $P_2 = (-1,0) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 > 0$ y $\frac{\partial f}{\partial x} > 0 \Rightarrow$ mínimo local

③ $P_3 = (1,0) \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 16 > 0$

(b) *(10 Pts.)* Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en el punto $p = (-1, 0, -1)$, y encontrar la ecuación de la recta perpendicular al gráfico de f que pasa por p.

$f(x,y) = x^4 + y^2 - 2x^2 - 2y \longrightarrow f(-1,0) = \boxed{-1}$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x \longrightarrow f'(-1,0) = \boxed{0}$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2 \longrightarrow f'(-1,0) = \boxed{-2}$

$\boxed{z = -2y - 1}$ Plano tangente $\quad z + 2y = -1 \Rightarrow \bar{N} = (0,2,1)$.

$\boxed{X = (-1,0,-1) + t\overbrace{(0,2,1)}^{\bar{n}}}$

Ejercicio 4 *(24 Pts.)* Considerar la función $f(x, y) = 3y^2 - 2yx^2$.

(a) *(12 Pts.)* Determinar en qué direcciones v y w hay que moverse, partiendo del punto $p = (1, 0)$, para lograr la más alta tasa y la más baja tasa de crecimiento de f, respectivamente. Luego, calcular las derivadas direccionales $D_v f(p)$ y $D_w f(p)$.

(b) *(12 Pts.)* $h(t) = f(3t^2u_1, 2 + tu_2)$, donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario. Usar la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. ¿Cuál es la dirección u que maximiza este valor hallado?

a) $f(x,y) = 3y^2 - 2yx^2$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -4yx \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \boxed{0}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6y - 2x^2 \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \boxed{-2}$

$\nabla f(1,0) = (0,-2)$.

$\bar{v} = \nabla f(1,0)$

$\vec{w} = -\nabla f(1,0)$

$D_{\bar{v}} f(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \bar{v} \rangle$

- $\bar{v} = (0,-2) \Rightarrow \|\bar{v}\| = \boxed{2} \Rightarrow \bar{v} = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = (0,-1)$.

- $D_{\bar{v}} f(1,0) = \langle (0,-2), (0,-2) \rangle = \boxed{2}$

- $D_{\bar{w}} f(1,0) = \langle (0,2), (0,1) \rangle = \boxed{-2}$

(b) *(12 Pts.)* $h(t) = f(3t^2u_1, 2 + tu_2)$, donde $u = (u_1, u_2)$ es un vector unitario. Usar la regla de la cadena para calcular $h'(0)$. ¿Cuál es la dirección u que maximiza este valor hallado?

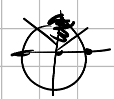
$h(t) =$

Ejercicio 5 (Solo para estudiantes libres) *(10 Pts.)* Considerar la función vectorial

$$r(t) = (\text{sen}(t), \cos(t), 1)$$

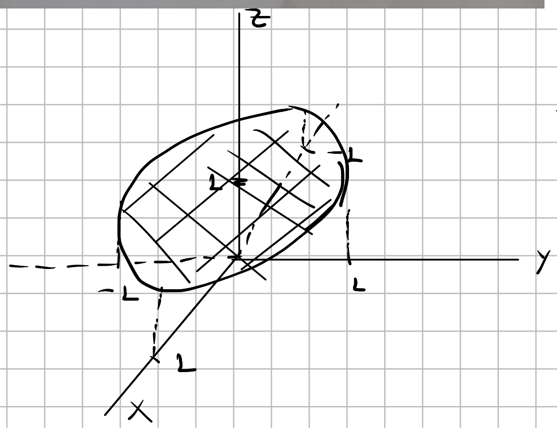
(a) Bosquejar su imagen.

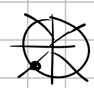
(b) Calcular su vector posición y vector tangente en $t = 3\pi/2$.



$r(t) = (\text{sen}(t), \cos(t), 1)$

a)





b) $r'(t) = (\cos(t), -\text{sen}(t), 0) \rightarrow r'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)$ vect tang.

$r\left(\frac{3}{2}\pi\right) = (-1, 0, 1)$

(b) $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$.

$$\int_4^\infty \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \lim_{t\to\infty} \int_4^t \frac{1}{(x-2)(x-3)}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\int_4^t \frac{A}{(x-2)}dx + \int_4^t \frac{B}{(x-3)}dx\right] = \lim_{t\to\infty}\int_4^t \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}\int_4^t \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{cases} \cdot\ A + B = 0 \\ \cdot\ -3A - 2B = 1 \end{cases} \quad \text{①}\ A = -B \Rightarrow \boxed{A = -1} \quad \text{②}\ \boxed{B = 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} -\int_4^t \frac{1}{(x-2)}dx + \int_4^t \frac{1}{(x-3)}dx = \lim_{t\to\infty} -\ln(|x-2|) + \ln(|x-3|)\Big|_4^t$$

$$\lim_{t\to\infty} -\ln(|x-2|) + \ln(|x-3|)\Big|_4^t = \lim_{t\to\infty} -\ln(|t-2|) + \ln(|t-3|) + \ln(2) = \ln\left(\frac{t-2}{t-3}\right) + \ln(2)$$

$$= \boxed{\ln(2)}$$

Ejercicio 6:

a) (14 ptos.) Decida si las siguientes series son convergentes, absolutamente convergentes o divergentes:

(i) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{n^2-1}$ (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

i) crit cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n+1}{(n+1)^2-1} \cdot \frac{n^2-1}{n} \right| = \text{Por serie alternante } \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n-1)}{(n^2+2n)n} = \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} = 1$$

$a_n \geq a_{n+1}$

$$\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+2n^2}$$

$\Rightarrow$ absolutamente convergente

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \right| = \left| \frac{((n+1)\cdot \cancel{n!})^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(n!)^2}} \right| = \frac{(n+1)^2}{\cancel{(n+1)}}$$

$\lim_{n\to\infty} (n+1) \Rightarrow$ diverge ambsolutamente

4. (*10 puntos*) Aplique la regla de la cadena para hallar dz/dt de

$$z = 2y^3 + xy + x^2 + 2, \quad x(t) = \cos(t), \quad y(t) = \operatorname{sen}(2t).$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

- $\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = y + 2x$
- $\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = 6y^2 + x$
- $\frac{\partial x}{\partial t}(t) = -\operatorname{sen}(t)$
- $\frac{\partial y}{\partial t} = 2\cos(t)$

- $\frac{\partial z}{\partial t}(x,y) = -(y-2x)\operatorname{sen}(t) + 2(6y^2+x)\cos(t)$
- $\boxed{\frac{\partial z}{\partial t}(x,y) = -(\operatorname{sen}(2t) - 2\cos(t))\operatorname{sen}(t) + 2(6\operatorname{sen}^2(2t) + \cos(t))\cos(t)}$

- **Ejercicio 1** (30 puntos)

a) Calcular la siguiente integral:

$$\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x-3}$$

b) Calcular el área encerrada por las curvas $y = 3x^2+1$, $y = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ y el eje vertical $x = 1$.

a) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int_1^4 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

$\frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \to \boxed{x_1 = 1}$, $\boxed{x_2 = -3}$

$\int_1^4 \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}\right) dx \Rightarrow \frac{A(x+3) + B(x-1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-B)}{(x-1)(x+3)}$

$\Rightarrow \cdot\, A+B = 0$ ① $A = -B \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{4}}$

$\cdot\, 3A - B = 1$ ② $\boxed{B = -\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{dx}{x-1}$ ① $- \frac{1}{4}\int_1^4 \frac{dx}{x+3}$ ② $=$

① $\lim_{t \to 1^+} \int_t^4 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t \to 1^+} \ln(|x-1|)\Big|_t^4 = \ln(3) - \underbrace{\ln(|t-1|)}_{\to -\infty} = -\infty$ ∴ la integral diverge

y dado que ② es parte de la integral, también diverge.

b) b) Calcular el área encerrada por las curvas $y = 3x^2 + 1$, $y = \cos(\frac{\pi}{2}x)$ y el eje vertical $x = 1$.

$\Rightarrow \int_0^1 \left((3x^2+1) - \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) dx$

$= 3\int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 dx - \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = x^3 + x - \frac{2}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_0^1 =$

$u = \frac{\pi}{2}x$

$du = \frac{\pi}{2}dx$

$\Rightarrow \left(1 + 1 - \frac{2}{\pi}\right) = \boxed{2 - \frac{2}{\pi}}$

- **Ejercicio 2** (20 puntos) Calcular la siguiente integral indefinida:

✓

$$\int (x^2 + 3x - 1)\sin x\,dx$$

$\int (x^2+3x-1)\sin(x)\,dx =$

$\Rightarrow \int x^2 \operatorname{sen}(x)\,dx$ ① $+ 3\int x\sin(x)\,dx$ ② $- \int \sin(x)\,dx$ ③ $=$

① $\int x^2 \sin(x)\,dx =$

$u = x^2$	$dv = \sin(x)\,dx$	$u = x$	$dv = \cos(x)$
$du = 2x\,dx$	$v = -\cos(x)$	$du = dx$	$v = \operatorname{sen}(x)$

$$-x^2\cos(x)+2\int x\cos(x) = -x^2\cos(x)+2\left(x\,\mathrm{sen}(x)-\int \mathrm{sen}(x)\,dx\right)$$
$$= \boxed{-x^2\cos(x)+2x\,\mathrm{sen}(x)+2\cos(x)+c}$$

$u=x \quad dv=\sin(x)$
$du=dx \quad v=-\cos(x)$

② $$3\int x\sin(x)\,dx = -x\cos(x)+\int\cos(x)\,dx = -3x\cos(x)+3\,\mathrm{sen}(x)+c$$

③ $$-\int \sin(x)\,dx = \boxed{\cos(x)+c}$$

$$\Rightarrow \boxed{-x^2\cos(x)+2x\,\mathrm{sen}(x)+3\cos(x)-3x\cos(x)+3\,\mathrm{sen}(x)+c}$$

- **Ejercicio 3** (20 puntos) Explique por qué están mal realizados los siguientes cálculos.

a)
$$\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{-2}^{3}\left(\frac{-1}{x}\right)'\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_{x=-2}^{x=3}=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{6}.$$

b) Sea la serie $1-1+1-1+1-1+1-1+\ldots$, es decir, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Tomando los dos primeros términos juntos, notamos que su suma da cero, y sucede lo mismo al sumar el 3ero y el 4to término, y así sucesivamente, al ir haciendo estas sumas notamos que van dando cero, por lo que podemos afirmar que la serie converge a cero.

a) $$\int_{-2}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx=\int_{-2}^{3}\left(\frac{-1}{x}\right)'dx = \text{-- -- --}$$

Podemos observar que en la resolución no se tiene en cuenta, cuando $x=0$, en ese punto la función no $\nexists$ $\therefore$ no es posible resolverla sin integrar la función utilizando el límite.

b) No es un argumento válido agrupar los terminos de es manera en todo caso podriamos decir que $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = S_n = a_1+a_2+\ldots a_n+\ldots$

$$S_n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ par}\\ (-1) & \text{si } n \text{ impar}\end{cases}$$ si calculamos su límite son distintos $\therefore$ Estan mal.

Ejercicio 4 (30 puntos) Determinar si las siguientes sucesiones y series son convergentes y cuando se pueda calcular su límite:

a)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\log n}{n!}$$

b) $\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right)\frac{n^3+1}{n+1}$.

c) La serie numérica $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$, es decir,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}.$$

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\log(n)}{n!}$$ = se observa claramente que el denominador crece mucho mas rapido $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0$ Converge

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right)\frac{n^3+1}{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^3-1}{n+1} = \boxed{0}$ } Converge.

$\cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n+1} = 0$

c) La serie numérica $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots$, es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

si la Serie converge $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = \boxed{0}$ $\therefore$ Converge.