Producto escalar, rectas y planos

- (1) Calcular los vectores $A+B$, $A-B$, $3A$, $-2B$, y representarlos gráficamente.
  - (a) $A=(2,-1)$, $B=(-1,1)$
  - (b) $A=(0,3,-1)$, $B=(2,-3,7)$
- (2) (a) Calcular el producto escalar o interno $A \cdot B$:
  - (i) $A=(-1,3)$, $B=(0,4)$
  - (ii) $A=(-1,-1,3)$, $B=(-1,3,-4)$.
  - (b) ¿Cuáles de los siguientes pares de vectores son perpendiculares ($A \cdot B = 0$) entre si?
    - (i) $A=(1,-1,1)$, $B=(2,3,1)$
    - (ii) $A=(-5,2,7)$, $B=(3,-1,2)$.
  - (c) Obtener la longitud o norma ($\sqrt{X \cdot X}$) de cada uno de los siguientes vectores:
    - $A=(2,-1)$, $B=(2,3,1)$, $C=(-t/2,2,7)$.

1)a) $A=(2,-1)$, $B=(-1,1)$

- $A+B=(2,-1)+(-1,1)=(2+(-1),-1+1)=(1,0)$
- $A-B=(2,-1)-(-1,1)=(2-(-1),-1-1)=(3,-2)$
- $3B=3(-1,1)=(-3,3)$
- $-2B=-2(-1,1)=(2,-2)$.

b) $A=(0,3,-1)$, $B=(2,-3,7)$

- $A+B=(0,3,-1)+(2,-3,7)=(2,3+(-3),-1+7)=(2,0,6)$
- $A-B=(0,3,-1)-(2,-3,7)=(-2,3-(-3),-1-7)=(-2,6,-8)$
- $3B=3(2,-3,7)=(6,-9,21)$
- $-2B=-2(2,-3,7)=(-4,6,-14)$

2)a) i) $A=(-1,3)$ $B=(0,4)$ $\Rightarrow \langle A,B\rangle = 0+12=\boxed{12}$

ii) $A=(-1,-1,3)$, $B=(-1,3,-4) \Rightarrow \langle A,B\rangle = 1+(-3)+(-12)=\boxed{-14}$

b) i) $A=(1,-1,1)$, $B=(2,3,1) \Rightarrow \langle A,B\rangle = 2-3+1=\boxed{0}$ $\therefore$ Son ortogonales (Perpendiculares).

ii) $A=(-5,2,7)$, $B=(3,-1,2) \Rightarrow \langle A,B\rangle = -15-2+14=\boxed{-3}$ $\therefore$ No es ortogonal.

c) $A=(2,-1)$, $B=(2,3,1)$, $C=(-t/2,2,7)$

- $\|A\|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\boxed{\sqrt{5}}$
- $\|B\|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\sqrt{4+9+1}=\boxed{\sqrt{14}}$
- $\|C\|=\sqrt{\left(\frac{-t}{2}\right)^2+2^2+7^2}=\sqrt{t^2/4+4+49}=\frac{\sqrt{t^2+212}}{2}$

(3) Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

- (a) L pasa por $(-3,2)$ y es paralela a $(1,-2)$.
- (b) L está definida por $x=3t+1$; $y=5t-2$; $z=2t+1$.
- (c) L pasa por $(2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$.

a) $P=(-3,2)$ ∧ Paralela a $(1,-2) \Rightarrow (-3,2)+t(1,-2)$.

$\Rightarrow \boxed{(x,y)=(-3,2)+t(1,-2)}$, con $t\in\mathbb{R}$

b) $\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t-2 \\ z=2t+1 \end{cases} \Rightarrow$ Para obtener P_0 debo de igualar $t=0$

$\Rightarrow \begin{rcases} x=1 \\ y=-2 \\ z=1 \end{rcases} \Rightarrow \boxed{(1,-2,1)=P_0} \Rightarrow (x,y,z)=\boxed{(1,-2,1)+t(3,5,2)}$ $t\in\mathbb{R}$

c) si es ortogonal a $n=(3,1) \Rightarrow d\cdot n=0$

digo $d=(d_1,d_2)$

$\Rightarrow \langle d,n\rangle = d_1+d_2 3=0$.

$\Rightarrow \boxed{d_1=-3d_2}$ $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{d=(-3,1)}$

$\Rightarrow \boxed{(x,y)=(2,0)+t(-3,1)}$

(4)_ (a) Dar la ecuación vectorial del plano S generado por $(-2,1,\frac{1}{2})$ y $(4,-\frac{1}{5},-1)$ y contiene al punto $(0,-1,4)$

- ¿Pasa este plano por el origen?
- ¿Contiene a los puntos $(1,-1,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$?

(b) Dar la ecuación vectorial del plano que determina la ecuación $3x+3y+z=1$.

(c) Dar la ecuación normal de los siguientes planos:

(i) el plano que contiene a los puntos $(1,-1,1)$, $(-2,0,1)$ y $(-1,1,1)$.

(ii) $X=s(1,2,0)+t(2,0,1)+(1,0,0)$ para todo $s,t\in\mathbb{R}$.

a) Sea $\vec{v_1}=(-2,1,\frac{1}{2})$, $\vec{v_2}=(4,-\frac{1}{5},-1)$

$\Rightarrow$ Sabemos que la ec. vectorial es de la forma: $\boxed{\underline{X}=P_0+sv_1+tv_2}$ $s,t\in\mathbb{R}$

c) Pasa por el origen?

$\Rightarrow (0,0,0)=(0,-1,4)+(-2s,s,\frac{1}{2}s)+(4t,-\frac{1}{5}t,-t)$

$\Rightarrow$ Calculo el sist. ecuaciones.

$\begin{cases} -2s+4t=0 & ① \\ -1+s-\frac{1}{5}t=0 & ② \\ 4+\frac{1}{2}s-t=0 & ③ \end{cases}$

① $\boxed{s=2t} \Rightarrow \boxed{s=\frac{3}{2}}$

② $-1+2t-\frac{1}{2}=0$

$-\frac{3}{2}+2t=0$

$\boxed{t=\frac{3}{4}}$

③ $4+\cancel{\frac{3}{4}}-\cancel{\frac{3}{4}}=0$

$\boxed{4\neq0}$ ∴ el origen no pertenece al plano.

ii) • $(1,-1,\frac{1}{2})=(0,-1,4)+(-2s,s,\frac{1}{2}s)+(4t,-\frac{1}{5}t,-t)$

$$\begin{cases} -2s+4t=2 & (1) \\ s-\frac{1}{5}t=0 & (2) \\ -\frac{1}{2}s-t=\frac{7}{2} & (3) \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/5 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{F_2+2F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 19/5 & 1 \\ -1/2 & -1 & -7/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+\frac{1}{2}F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & 19/5 & 1 \\ 0 & -11/10 & -7/2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} s-\frac{1}{5}t=0 & (1) \\ \frac{19}{5}t=1 & (2) \\ -\frac{11}{10}t=-\frac{7}{2} & (3) \end{cases}$$

(1) $\boxed{s=\frac{1}{5}t}$

(2) $\frac{19}{25} \neq 1$ $\therefore$ el Punto $(1,-1,\frac{1}{2})$ no Pertenece.

- $(0,\frac{-1}{10},\frac{7}{2}) = (0,-1,4) + (-2s, s, \frac{1}{2}s) + (4t, -\frac{1}{5}t, -t)$

$$\begin{cases} -2s+4t=0 & (1) \\ s-\frac{1}{5}t=\frac{-1}{10} & (2) \\ -\frac{1}{2}s-t=\frac{7}{2} & (3) \end{cases}$$

(1) $-\frac{1}{5}t+4t=0 \Rightarrow \boxed{t=-\frac{19}{5}}$

(2) $\boxed{s=\frac{1}{10}t}$ $\boxed{s=-\frac{19}{50}}$

(3) $\frac{19}{100}+\frac{19}{5} \neq \frac{7}{2}$ $\therefore$ no Pertenece el Punto $(0,\frac{-1}{10},\frac{7}{2})$.

- $(0,\frac{3}{2},1) = (0,-1,4) + (-2s, s, \frac{1}{2}s) + (4t, -\frac{1}{5}t, -t)$

$$\begin{cases} -2s+4t=0 & (1) \\ s-\frac{1}{5}t=\frac{3}{2} & (2) \\ -\frac{1}{2}s-t=1 & (3) \end{cases}$$

(1) $\boxed{s=2t} \Rightarrow \boxed{s=\frac{3}{5}}$

(2) $2t-\frac{1}{5}t=\frac{3}{2}$

$t=\frac{3}{2}-\frac{9}{5}$

$\boxed{t=\frac{3}{10}}$

(3) $\frac{-3}{10}+\frac{3}{10}=1$

$0 \neq 1$ $\therefore$ este Punto tamPoco Pertenece al Plano

b) (b) Dar la ecuación vectorial del plano que determina la ecuación $3x + 3y + z = 1$.

$3x+3y+z=1$

Sabemos que el Vector normal al Plano es $n=(a,b,c) \Rightarrow \boxed{n=(3,3,1)}$

$\Rightarrow$ nesecito un Punto P_0 / se cumpla la ecuación

$\Rightarrow \boxed{P_0=(-1,1,1)}=1 \Rightarrow 3(-1)+3+1=1$

$\boxed{1=1}$

- Ahora necesito 2 vectores v_1 y v_2 / $n \cdot v_1=0$ $\wedge$ $n \cdot v_2=0$. Son vectores PerPendiculares

$\Rightarrow \langle (3,3,1) \cdot v \rangle \overset{?}{=} 0$ $v=(x,y,z)$

$\underline{X} = P_0 + \alpha v_1 + \beta v_2$

$3x+3y+z=0$

$\Rightarrow \boxed{\underline{X} = (-1,1,1) + \alpha(-1,1,0) + \beta(-\frac{1}{3},0,1)}$

$\Rightarrow \boxed{x=\frac{-z}{3}-y}$

$= (\frac{-z}{3}-y, y, z) \Rightarrow \overset{\to\alpha}{y}(-1,1,0) + \overset{\to\beta}{z}(-\frac{1}{3},0,1).$

c) (c) Dar la ecuación normal de los siguientes planos:
- (i) el plano que contiene a los puntos $(1,-1,1)$, $(-2,0,1)$ y $(-1,1,1)$.
- (ii) $X = s(1,2,0) + t(2,0,1) + (1,0,0)$ para todo $s,t \in \mathbb{R}$.

i) $\overline{X} = P_0 + \alpha(P_1 - P_0) + \beta(P_2 - P_0)$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{\overline{X} = (1,-1,1) + \alpha(-3,1,0) + \beta(-2,2,0)}$

$\Rightarrow$ sean $v_1 = (-3,1,0)$, $v_2 = (-2,2,0)$ $\quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $\vec{n}\ (a,b,c)$

$\Rightarrow \vec{n}\cdot v_1 = 0 \wedge \vec{n}\cdot v_2 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 0 \ ① \quad \boxed{b = 3a} \Rightarrow \boxed{b=0} \\ -2a + 2b = 0 \ ② \Rightarrow 4a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0} \end{cases}$

∴ No sabemos nada de $c \Rightarrow$ (tomo $c=1$)
Podemos decir que $\vec{N} = (0,0,1)$

$\Rightarrow$ La ecuación normal $\langle \overline{X} - P_0, \vec{N} \rangle = 0$ (completar? o puede quedar así).

$s,t \in \mathbb{R}$

ii) $\vec{X} = s(\underset{v_1}{1,2,0}) + t(\underset{v_2}{2,0,1}) + (\underset{P_0}{1,0,0})$ $\quad \vec{n} = (a,b,c)$

$\Rightarrow v_1 \vec{n} = 0 \wedge v_2 \vec{n} = 0$

$\begin{cases} a + 2b = 0 & ① \\ 2a + c = 0 & ② \end{cases}$ $\quad ①\ \boxed{a = -2b} \Rightarrow \boxed{a = \frac{-c}{2}}$

② $-4b + c = 0$
$\boxed{b = \frac{c}{4}}$ $\quad \Rightarrow \vec{N} = \left(-\frac{c}{2}, \frac{c}{4}, c\right)$

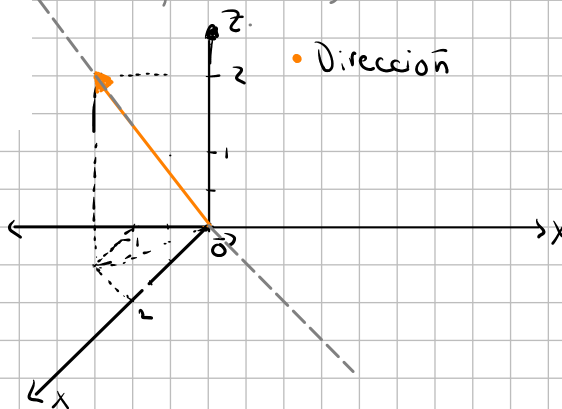
$\Rightarrow (x,y,z) \Rightarrow \langle \vec{X} - P_0, \vec{N} \rangle = 0$

Funciones vectoriales

(5) Bosquejar la imagen de la curva descripta por las siguientes funciones vectoriales. Indicar con una flecha la dirección en la que t aumenta.

- (a) $r(t) = (t, -t, 2t)$
- (b) $r(t) = (\operatorname{sen} t, 3, \cos t)$

- $r(t) = (t, -t, 2t)$
- Dirección



a) $r(t) = (t, -t, 2t)$
$r(t) = (0,0,0) + t(1,-1,2)$

- $\mathrm{Dom}(r) = \mathbb{R}$ ya que no hay restricciones.

- $\mathrm{Im}(r) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / (y_1, y_2, y_3) = (0,0,0) + t(1,-1,2),\ t \in \mathbb{R}\}$

b) $r(t) = (\mathrm{Sen}(t), 3, \mathrm{Cos}(t))$

- $\mathrm{Dom}(r) = \mathbb{R}$

6) • (6) Calcular los siguientes límites:

• (a) $\lim_{t\to 0}\,(t, \cos^2 t, 5)$ • (b) $\lim_{t\to 0}\,(t, \ln(t+1), e^{-1/t^2})$

a) tenemos que $\lim_{t\to 0}(t, \cos^2(t), 5) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim_{t\to 0} \cos^2(t), \lim_{t\to 0} 5\right) = \boxed{(0,1,5)} = f(0)$

b) $\lim_{t\to 0}(t, \ln(t+1), e^{-1/t^2}) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim_{t\to 0} \ln(t+1), \lim_{t\to 0} e^{-1/t^2}\right) = \boxed{(0,0,0)}$

7) (7) Determinar el dominio y la derivada de las siguientes funciones vectoriales:

• (a) $r(t) = \big(\ln(4-t^2), t^3, \arctan(t)\big)$ • (b) $r(t) = t\mathbf{a} + \langle \mathbf{b}, t\mathbf{c}\rangle\, \mathbf{d}$, donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores.

a) $r(t) = \left(\ln(4-t^2), t^3, \arctan(t)\right)$.

$\mathrm{Dom}(r) \Rightarrow (-2,2),\ \mathbb{R},\ \mathbb{R} \Rightarrow (-2,2) \cap \mathbb{R} = \boxed{(-2,2)}$

• $r'(t) = \left(\dfrac{-2t}{4-t^2}, 3t^2, \dfrac{1}{1+t^2}\right)$

$t \in \mathbb{R}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores.

b) $r(t) = ta + \langle b, tc\rangle d$

• Dom $= \mathbb{R}$ es lineal.

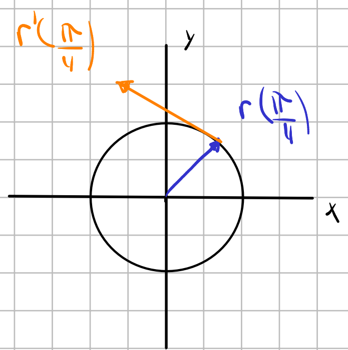
constante

$r(t) = t(a + \langle b, c\rangle d)$

• $r'(t) = (a + \langle b, c\rangle d)$

(8) Para cada una de las siguientes funciones vectoriales bosquejar su imagen y obtener $r'(t)$. Además, dar el vector posición y el vector tangente para el valor de t indicado.

• (a) $r(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t)),\ t = \pi/4$.
• (b) $r(t) = (1+t, t^2),\ t = 1$.
(c) $r(t) = (t^3, t^2),\ t = 1$.



a) $r(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$ $t = \pi/4$

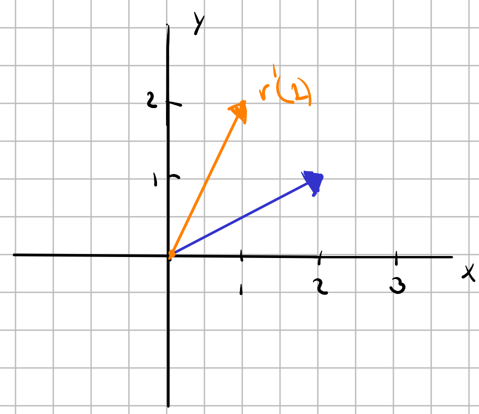
• vector Posición $r(\pi/4) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$.

$r'(t) = (-\mathrm{sen}(t), \cos(t)) \Rightarrow$ vector tangente $= \boxed{r'(\tfrac{\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

$t = 1$

b) $r(t) = (1+t, t^2)$

- vector Posición $r(1) = \boxed{(2, 1)}$
- $r'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \vec{v}$ tangente $= r'(1) = \boxed{(1, 2)}$



c) $r(t) = (t^3, t^2)$ $\quad t = 1$

- vector Posición $r(1) = (1, 1)$
- $r'(t) = (3t^2, 2t) \Rightarrow$ vector tangente $= r'(1) = (3, 2)$