1. Ejercicio 1 *(32 Pts.)*

• (a) *(17 Pts.)* Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 y centrado en $a = 3$ de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$.

(b) *(15 Pts.)* Utilice el polinomio calculado para dar un valor aproximado de $\sqrt{1.5}$ (*basta con dejar expresada la fórmula*). Estime el error que se comete en dicha aproximación.

$f(x) = \sqrt{x-2}$.

$$c_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

$f(3) = \boxed{1}$

• $f'(x) = \frac{(x-2)^{-\frac{1}{2}}}{2} \rightarrow f'(3) = \boxed{\frac{1}{2}}$

• $f''(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{3}{2}} \rightarrow f''(3) = \boxed{-\frac{1}{4}}$

$\Rightarrow T_{2,3} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$ $\Rightarrow \boxed{T_{2,3} = 1 + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{8}(x-3)^2}$

b) Para escribir $\sqrt{1.5}$ en función del punto anterior.

$\Rightarrow \sqrt{1.5} = \sqrt{3.5-2} = f(3.5)$.

Utilizo el polinomio obtenido para aproximarlo.

$\Rightarrow T_{2,3}(3.5) = 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} = \frac{32+8-1}{32} = \boxed{\frac{39}{32}}$

• Calculo el error estimado. $\Rightarrow$

• $f'''(c) = \frac{3}{8}(c-2)^{-5/2} \rightarrow f'''(3) = \boxed{\frac{3}{8}}$

$\Rightarrow |R_{2,3}(3.5)| \leq \frac{3}{48} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{128}}$ $\therefore \frac{1}{128}$ es la cota superior.

Ejercicio 1 *(32 Pts.)*

• (a) *(17 Pts.)* Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 y centrado en $a = \frac{3\pi}{2}$ de la función $f(x) = \text{sen}(x) + x^4$.

• (b) *(15 Pts.)* Estimar el error que se comete si se usa dicho polinomio para aproximar los valores de la función f para $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.

a) Sabemos que si $f(x)$ se puede representar como una serie de potencias, entonces $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

$F(x) = \text{sen}(x) + x^4 \longrightarrow f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1 + \left(\frac{3}{2}\pi\right)^4 = \boxed{-1 + \frac{81}{16}\pi^4}$

$\Rightarrow$ Calculo las derivadas hasta $n=2$

• $f'(x) = \cos(x) + 4x^3 \longrightarrow f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 4\left(\frac{27}{8}\right) = \boxed{\frac{27}{2}\pi^3}$

• $f''(x) = -\operatorname{Sen}(x) + 12x^2 \longrightarrow f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + \frac{\cancel{12}^{3} \cdot 9\pi^2}{\cancel{4}} = \boxed{1 + 27\pi^2}$

$\Rightarrow$ El Polinomio de taylor queda definido como $T_{2,\frac{3}{2}\pi}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}$

• $T_{2,\frac{3}{2}\pi}(x) = \left(-1 + \frac{81}{27}\pi^4\right) + \frac{27\pi^3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) + \frac{(1+27\pi^2)\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^2}{2}$ ∴ Polinomio de taylor.

b) El error (utilizando el resto de lagrange) viene dado por:

$R_{2,\frac{3}{2}\pi}(x) = \frac{f'''(t)}{3!}\left(x - \frac{3}{2}\pi\right)^3$ donde $t \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$, $a = \frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow f'''(x) = -\operatorname{Cos}(x) + 24x$

$\Rightarrow$ Para acotar el error, entonces evaluo en π y $\frac{3}{2}\pi$ para saber cual es su cota máxima.

• $c = \pi$ $\quad f'''(\pi) = \boxed{1 + 24\pi}$

• $c = \frac{3}{2}\pi$ $\quad f'''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \boxed{36\pi}$

dado que c es creciente $\Rightarrow |f'''(c)| \leq 36\pi$

$\Rightarrow \left|R_{2,\frac{3}{2}\pi}(x)\right| \leq 6\pi \left|\pi - \frac{3}{2}\right|^3 = 6\pi \cdot \frac{\pi^3}{8} = \boxed{\frac{3\pi^4}{4}}$ $\quad \boxed{\therefore \left|R_{2,\frac{3}{2}\pi}(x)\right| \leq \frac{3}{4}\pi^4}$

✓**1.** Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de la función

$$f(x) = xe^x.$$

✓¿Para qué valores de x vale la representación?

✓**2.** Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(x-2)^n$$

~~**3.** Calcular la ecuación normal del plano tangente al gráfico de la función $f(x, y) = x^3 + xy + 2y^2$ en el punto $p = (1, -1, 2)$.~~

1) Sabemos que e^x centrada en cero es una serie de potencias conocida.

$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow$ multiplico por $x \Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

• Dado que la serie de e^x converge en todos los reales, entonces vale para todos $\mathbb{R}$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}(x-2)^n =$

Calculo el lim utilizando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\,\cancel{(x-2)}^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{\cancel{(-1)^n}\,\cancel{(x-2)^n}}\right| = |x-2|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+\cancel{1}}{n^2+2n+\cancel{2}}\right| = L=1$$

$\therefore \boxed{R=1}$

$\Rightarrow$ Para que la serie converja, queremos que $|x-2|<1 = -1<x-2<1$ $\boxed{1<x<3}$

• Ahora sabemos que el intervalo es $(1,3)$ $x\in$

queremos saber si los extremos pertenecen al intervalo. $I=\{[1,3]\}$

• $x=1$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cancel{(-1)^{2n}}}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}\approx\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ $\therefore$ Por serie $P=2$ y $P>1$ $\Rightarrow$ la serie converge.

• $x=3$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1} =$ Por criterio de las series alternantes para que converga debe de

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_n \geq a_{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1} = \boxed{0}$ ✓ $\wedge$ $\frac{1}{n^2+1}\geq\frac{1}{(n+1)^2+1}$ ✓ $\therefore$ Converge

Ejercicio 1. Sean $A=(1,-1,1)$, $B=(2,2,2)$, $C=(1,1,1)$ y sea π el plano de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los puntos A, B y C.

✓ a) Encontrar una ecuación vectorial del plano π.
✓ b) Encontrar una ecuación normal del plano π.
c) Decidir cuales de los siguiente puntos pertenecen a π: $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$.

a) tomo un punto que lo asigno como punto y con los demás genero el plano.

$\Rightarrow \underline{X} = A + \alpha(B-A) + \beta(C-A)$

$\Rightarrow v_1 \cdot B-A = (2,2,2)-(1,-1,1) = (1,3,1)$
$v_2 \cdot C-A = (1,1,1)-(1,-1,1) = (0,2,0)$

$\Rightarrow \underline{X} = (1,-1,1)+\alpha(1,3,1)+\beta(0,2,0)$. Con $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$\therefore$ ecuación vectorial del plano π.

• compruebo que los vectores $\vec{v_1}$ y $\vec{v_2}$ sean LI

$(\alpha, 3\alpha+2\beta, \alpha) = 0$

$\Rightarrow$ $\alpha = 0$ (Por consecuencia β es cero)
$3\alpha+2\beta=0$

$\alpha=0 \wedge \beta=0$

$\therefore$ son LI $\therefore$ generan el plano.

b) dado que ya tenemos la ecuación vectorial del plano. Con $\vec{n}=(a,b,c)$

Con • $\vec{v_1}\cdot\vec{n}=0$; $(1,3,1)\cdot(a,b,c)=0$ $\Rightarrow$ $a+3b+c=0$ ① $\boxed{c=-a}$
• $\vec{v_2}\cdot\vec{n}=0$; $(0,2,0)\cdot(a,b,c)=0$; $2b=0$ ② $b=0$

$\therefore \vec{N}=(1,0,-1)$. elijo el 1 ya que el vector $\vec{n}$ es perpendicular a todo escalar

$\Rightarrow$ la ecuación del plano queda definida como $\langle\underline{X}-A,\vec{N}\rangle=0$

$$\Rightarrow \langle (1,-1,1) + \alpha(1,3,1) + \beta(0,2,0) - (1,-1,1) \,,\; (1,0,-1) \rangle = 0$$

Falta

Ejercicio 2 *(26 Pts.)*

(a) *(13 Pts.)* Hallar el radio e intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n}(x-1)^n.$$

(b) *(13 Pts.)* Hallar el polinomio de Taylor $T_{2,2}(x)$ de grado 2 de $f(x) = \ln(x-1)$ alrededor de $a = 2$. Luego, estimar el error cometido al aproximar el valor $\ln(2)$ por $T_{2,2}(3)$.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 4^n}(x-1)^n$ = utilizo el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{(x-1)}^{n+1}}{(n+1)^2 \cancel{4^{n+1}}}\cdot\frac{n^2\cancel{4^n}}{\cancel{(x-1)^n}}\right| = \frac{|x-1|}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = L = 1 \Rightarrow \underbrace{\boxed{\frac{|x-1|}{4}} < 1}_{\text{Limite}} = |x-1|<4$$

$$\boxed{R=4}$$

el intervalo $-4 < x-1 < 4 = -3 < x < 5 \Rightarrow$ ahora queremos saber si pertenecen los extremos.

• $x=-3$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n \cancel{4^n}}{n^2\cancel{4^n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ∴ Por serie $P=2 \wedge P>1 \Rightarrow$ Converge absolutamente

• $x=5$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n \cancel{4^n}}{n^2\cancel{4^n}}\right| = \sum\frac{1}{n^2}$ ∴ Por serie $P=2 \wedge P>1 \Rightarrow$ Converge absolutamente

∴ El intervalo de convergencia $I = \{x \in [-3,5]\}$

b)

(b) *(13 Pts.)* Hallar el polinomio de Taylor $T_{2,2}(x)$ de grado 2 de $f(x) = \ln(x-1)$ alrededor de $a = 2$. Luego, estimar el error cometido al aproximar el valor $\ln(2)$ por $T_{2,2}(3)$.

Dado el Polinomio de taylor de orden 2, sabemos que es de la forma.

$$T_{2,2}(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2.$$

• Calculamos sus derivadas.

sea $f(x) = \ln(x-1) \longrightarrow f(2) = \ln(1) = \boxed{0}$

• $f'(x) = (x-1)^{-1} \longrightarrow f'(2) = \boxed{1}$

• $f''(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \longrightarrow f''(2) = \boxed{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{T_{2,2}(2) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2}$$

• Estimamos el error $\Rightarrow$ utilizando el teorema del resto de lagrange

$R_{2,2}(x) = \frac{f'''(t)}{3!}(x-\ )^3$ $\Rightarrow$ Calculamos su derivada tercera $f'''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$

$t \in (2,3)$

1. (20 pts.) Calcular la serie de Taylor de la función $f(x) = x \operatorname{sen}(x^3)$ alrededor de $a = 0$.

(RESUELTO EN ÚLTIMA PÁGINA)

• calculo la serie de sen(x) Sabemos que: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$

$\Rightarrow f(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f(0) = \boxed{0}$

calculo algunas de sus derivadas para ver si existe algún patron.

• $f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = \boxed{1}$

• $f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f''(0) = \boxed{0}$

• $f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = \boxed{-1}$

• $f^{IV}(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f^{IV}(0) = \boxed{0}$

Posee un Periodo 4,

se observa claramente que si $f^{(2n)}(0) \Rightarrow \boxed{0}$, $f^{(2n+1)}(0) \Rightarrow (-1)^n$ $\forall n \geq 0$

$\Rightarrow \cancel{f(0)} + f'(0)x + \cancel{\frac{f''(0)x^2}{2!}} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \operatorname{sen}(x)}$$

• Ahora, $f(x) = x \operatorname{sen}(x^3)$. $\Rightarrow x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^{3(2n+1)}}{(2n+1)!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(6n+4)}}{(2n+1)!}}$

✓ 4. Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de la siguiente serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,(x+1)^n}{2^{n+1}}.$$

utilizando el criterio del cociente $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{(x+1)^{n+1}}}{\cancel{2^n}\cdot\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{2^n}\cdot\cancel{2}}{n\,\cancel{(x+1)^n}} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = L = 1$

$\boxed{|x+1| < 2}$

$\Rightarrow \boxed{R = 2}$ $-2 < x+1 < 2 \Rightarrow$ los extremos quedan definidos por $(-3, 1)$.

• $x = -3$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n \cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2} =$ Por criterio de las series alternantes $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_n \geq a_{n+1}$

• $\lim_{n\to} \frac{n}{2} \neq 0$ ∴ diverge en este extremo.

• $x=1$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,\cancel{2^n}}{\cancel{2^n}\cdot 2}$ = análogo al punto anterior ∴ diverge

∴ el intervalo queda definido como $I=\{x\in(-3,1)\}$

2. (*24 puntos*)
   a) Calcule la serie de Taylor de la función $f(x)=\ln(1+2x)$ centrada en 0.
   b) Determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia
   c) Utilice lo anterior a fin de calcular $\ln(1{,}2)$ con 3 posiciones decimales correctas.

a) Sea $f(x)=\ln(1+2x)$ $a=0$ Sabemos que es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}}{n!}x^n$

Calculo la de $\ln(1+x)$ primeramente.

$f(x)=\ln(1+x) \longrightarrow f(0)=\ln(1)=0$

Calculo sus derivadas.

• $f'(x)=(1+x)^{-1} \longrightarrow f'(0)=\boxed{1}$

• $f''(x)=-(1+x)^{-2} \longrightarrow f''(0)=\boxed{-1}$

• $f'''(x)=2(1+x)^{-3} \longrightarrow f'''(0)=\boxed{2}$

• $f^{IV}(x)=-6(1+x)^{-4} \longrightarrow f^{IV}(0)=\boxed{-6}$

Podemos observar que $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!\,x^n}{n}x^n = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}} = f(x)=\ln(1+x)$

(Se puede hacer con la serie geométrica)

entonces para $f(x)=\ln(1+2x)$ $=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n x^n}{n}}$

b) utilizando el criterio del cociente

$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cancel{(-1)^{n+2}}\cancel{2^{n+1}}\cancel{x^{n+1}}}{n+1}\cdot\frac{n}{\cancel{(-1)^{n+1}}\cancel{2^n}\cancel{x^n}}\right| = 2|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{n+1}\right| = L=1 \Rightarrow 2|x|<1 = \boxed{|x|<\frac{1}{2}=R}$

• $x=-\frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cancel{2^n}\cdot\frac{-1^n}{\cancel{2^n}}}{n} = \frac{-1}{n}$ Por serie armónica diverge

• $x=\frac{1}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cancel{2^n}\frac{1}{\cancel{2^n}}}{n}$ = Por serie alternante converge

$\Rightarrow I=\{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\}$

c) queremos que $1+2x=1.2 \Rightarrow x=\frac{0.2}{2}=\boxed{0.1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{10}}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ = Desde acá calcular los 3 decimales

(4) Sea $f(x) = (1+x)^{1/2}$. Usando el polinomio de Taylor de orden 3 de f, centrado en $a = 0$, calcular el valor aproximado de $\sqrt{2}$ que da dicho polinomio, y estimar el error en esta aproximación.

$f(x) = (1+x)^{1/2}$

utilizando Polinomio de taylor $T_{3,0}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!}$

$\Rightarrow$ calculo sus derivadas

- $f(x) = (1+x)^{1/2} \longrightarrow f(0) = \boxed{1}$
- $f'(x) = \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{2} \longrightarrow f'(0) = \boxed{\frac{1}{2}}$
- $f''(x) = \frac{-(1+x)^{-\frac{3}{2}}}{4} \longrightarrow f''(0) = \boxed{-\frac{1}{4}}$
- $f'''(x) = \frac{3(1+x)^{-5/2}}{8} \longrightarrow f'''(0) = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \boxed{T_{3,0}(0) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3}$

Ahora queremos aproxima $\sqrt{2}$ que es lo mismo que $f(1) = (1+1)^{1/2}$

utilizo el de taylor $T_{3,1}(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{16+8-2+1}{16} = \boxed{\frac{23}{16}}$

$\Rightarrow \sqrt{2} \approx \frac{23}{16}$

Ahora estimo el error que se comete, Para eso, utilizo el teorema del resto utilizando el resto de lagrange.

$R_3(x) = \frac{f^{IV}(c)}{4!}$ con $c \in (0,1)$

- $|f^{IV}(c)| = -\frac{15}{16}(1+c)^{-7/2} \Rightarrow$ como es decreciente $\Rightarrow$ su valor maximo es $c=0$

$\Rightarrow f^{IV}(0) = \boxed{\frac{-15}{16}} \Rightarrow |f^{IV}(c)| = \frac{15}{16}(1+c)^{-7/2} \leq \frac{15}{16} \quad c \in [0,1]$

$$\boxed{|R_3(1)| \leq \frac{15}{384}}$$

(2) Si $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre la serie de Maclaurin para f y su radio de convergencia.

Sabemos que la serie de Mclaurin es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\,x^n}{n!}$

Como $f^{(n)}(0) = (n+1)!$, entonces reemplazo y obtengo que la serie es de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{n!}} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, Para su radio de convergencia utilizando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+2)\cancel{x^{n+1}}}{(n+1)\cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+1} \right| \Rightarrow L = 1 \ \text{y} \ R = 1 \ \therefore \ |x| < 1$$

• $x = -1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(-1)^n$ Por criterio de las series alternantes si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge a_n \geq a_{n+1}$

$\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty \ \therefore$ diverge

• $x = 1$ $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) = \therefore$ Claramente diverge $\Rightarrow$ $I = \{ x \in (-1,1) \}$

(3) Encuentre la serie de Taylor para f con centro en 4 si

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$

$$f^{(n)}(4) = \frac{(-1)^n n!}{3^n(n+1)}$$