Series de potencias

(1) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 x^n}{2^n}$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}(4-x)^n$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ (Por criterio del cociente)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^{n+1}}}{\sqrt{(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\cancel{x^n}} \right| = |x| \lim \underbrace{\sqrt{\frac{n}{n+1}}}_{\to 1} = |x| \Rightarrow |x| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < x < 1$$

Analizo sus extremos

$\Rightarrow$ • $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ∴ Por criterio de las series alternantes, si la serie es decreciente y el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ converge $\wedge$ $a_n > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. esto es cierto.

$\Updownarrow$

$\cancel{\sqrt{n+1}} > \cancel{\sqrt{n}}$

$1 > 0$

• $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \boxed{0}$. ∴ Converge.

• $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow$ Por serie P si $0 < P \leq 1$ la serie diverge ∴ diverge.

∴ el intervalo de convergencia está definido como $I = \{x \in [-1, 1) / \text{la serie converge}\}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\sqrt{n}\, x^n|} = \left| n^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}} \cdot x^{\cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}} \right| = \underbrace{n^{\frac{1}{2n}}}_{\to 0}\, |x| = |x|$

$\Rightarrow$ Converge si $|x| < 1 \Rightarrow$ analizo sus extremos.

• $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^n$ = Por criterio de las series alternantes

$= \sqrt{n} > \sqrt{n+1}$ X $\Rightarrow$ diverge.

• $x = 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}$ = tiende a infinito ∴ diverge

$\Rightarrow I = \{(-1, 1)\}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{x^{n+1}}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1}\right| = 0\cdot|x| = 0 \quad \forall x \Rightarrow R = \boxed{\infty}$

Intervalo

d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n n^n|} = \left|x^{\cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}}} n^{\cancel{n}\frac{1}{\cancel{n}}}\right| = |x|n = \boxed{\infty} \Rightarrow \boxed{R=0}$

$\Rightarrow$ converge solo cuando $\boxed{x=0}$

n^2+2n+1

$\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{\cancel{n}}+\frac{1}{\cancel{n^2}}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\,\cancel{x^{n+1}}\,(n+1)^2}{\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{x^n}\, n^2} \right| = |x| \lim \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{R=2}$

$(-2<x<2)$

$\Rightarrow$ verifico

- $x=-2$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} \frac{\cancel{(2)^n} n^2}{\cancel{2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} n^2 =$ Por criterio de series alternantes.

$a_n > a_{n+1} \Rightarrow \cancel{n^2} > \cancel{n^2}+2n+1$

$0 > 2n+1$ X Falso

$\therefore$ diverge

- $x=2$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{2^n} n^2}{\cancel{2^n}} =$ tambien diverge ; tambien $\lim_{n\to\infty} n^2 = \boxed{+\infty}$ $\therefore$ diverge

$\Rightarrow I = \{(-2,2)\}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{4^n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\,\cancel{x^{n+1}}}{\cancel{4^{n+1}} \ln(n+1)} \cdot \frac{\cancel{4^n}\cdot \ln(n)}{\cancel{(-1)^n}\,\cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{4} \left| \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \right| =$

$\Rightarrow$ defino $f(x) = \frac{\ln(x)}{4\ln(x+1)} \overset{L'H}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{4x+1}{1} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{1x} = \boxed{4} \Rightarrow \boxed{R=4}$ $\quad \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ • $x=-4$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cancel{4^n}}{\cancel{4^n}\ln(n)} =$ Por criterio de series alternantes

La sucesión de la serie decrece y el $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$\therefore$ Converge

- $x=4$ ocurre lo mismo $\therefore$ converge $\quad I = \{[-4,4]\}$

g) (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\left(\frac{x+2}{2}\right)^n\right| \cdot \left|\frac{1}{n+1}\left(\cancel{\frac{x+2}{2}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n\,\cancel{2^n}}{\cancel{(x+2)^n}}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)n}{2(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x+2}{2}\right| \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \boxed{1} \Rightarrow \left|\frac{x+2}{2}\right| < 1 \Rightarrow |x+2| < 2$

$\Rightarrow -2 < x+2 < 2$

$\boxed{-4 < x < 0}$

• $x = -4$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n$ = criterio de las series alternantes

$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ ✓ $\wedge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ Por criterio de leibnz.

• $x=0$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ = Por serie armonica, la serie diverge $\therefore I = \{[-4,0)\}$

h) (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{n^{1/4}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n x^n}{n^{\frac{1}{4}}}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n\cdot\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}n}}{n^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}|x| \cdot \left|\frac{2}{n^{\frac{1}{4n}}}\right|$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} 2|x| = \boxed{2|x|} \Rightarrow 2|x| < 1$

$|x| < \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}}$

• $x = -\frac{1}{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\cancel{2})^n \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)^n}{n^{\frac{1}{4}}} =$ $I = \{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$

$\rightarrow$ Serie $P<1$ $\therefore$ diverge

• $x = \frac{1}{2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\cancel{2})^n\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)^n}{n^{1/4}} = \frac{1}{n^{1/4}}$ Por criterio de serie alternante, $a_n > a_{n+1}$ $\wedge \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

i) (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^3}(4-x)^n = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{e^{n+1}}(4-x)^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{\cancel{e^n}\,\cancel{(4-x)^n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e(4-x)}{(n+1)^3} \cdot n^3\right|$

$\boxed{R = \frac{1}{e}}$

$\lim_{n\to\infty} |e(4-x)| \cdot \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^3\right|$ $\rightarrow 1$ $= \lim = e$ $\Rightarrow$ converge si $|e(4-x)| < 1$

$-1 < e4 - ex < 1$

$-1 - 4e < -ex < 1 - 4e$

$\frac{(-1-4e)}{-e} < x < \frac{(1-4e)}{-e}$

$\boxed{\frac{1}{e} + 4 > x > -\frac{1}{e} + 4}$

• $x = -\frac{1}{e} + 4$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{e^n}}{n^3}\left(\frac{1}{\cancel{e}}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ Por serie $P>1$

$\therefore$ la serie converge

• $x = \frac{1}{e} + 4$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{e^n}}{n^3}\frac{(-1)^n}{\cancel{e^n}} =$ Por criterio de las series alternantes

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 0 \wedge \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3}$ $\therefore$ Converge

$I = \{[-\frac{1}{e}+4, \frac{1}{e}+4]\}$

(2) Suponga que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ es convergente cuando $x = -4$ y diverge cuando $x = 6$. ¿Qué puede decir con respecto a la convergencia o divergencia de las series siguientes?

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n$
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(-3)^n$
- (d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n$

$[-4, 6)$

a) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot 1^n =$ Como $x = 1 \Rightarrow |x| < 1$. Sabemos que $|x| < R \Rightarrow -4 \leq x < 6$.
y pertenece al radio proporcionado $\therefore$ Converge

b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 8^n =$ dado $x = 8$, es más grande que el intervalo proporcionado $\therefore$ diverge

c) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-3)^n = x = -3$ ^ $|x| < 3$ está en el rango $\therefore$ Converge.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n 9^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-9)^n c_n =$ fuera de rango $\therefore$ diverge.

(3) Usar la expansión $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, válida en el rango $-1 < x < 1$, para representar las siguientes funciones:

- (a) $f(x) = \frac{1}{1+x}$, en potencias de x.
- (b) $f(x) = \frac{3}{1-x^4}$, en potencias de x.
- (c) $f(x) = \ln x$, en potencias de $(x-4)$.
- (d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, en potencias de $(x+2)$.
- (e) $f(x) = x\ln(1-x)$, en potencias de x.

$|-x| < 1$

a) $f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n}$

b) $f(x) = \frac{3}{1-x^4} = \boxed{3\sum_{n=0}^{\infty} (x^4)^n} \Longleftrightarrow |x^4| < 1$

c) $f(x) = \ln(x)$

$t = x - 4 \Rightarrow$ Como $x = 4 + t \Rightarrow \ln(4+t) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4+t} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{t}{4}\right)}$

$\Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{4^{n+1}} \Rightarrow$ Ahora la integro para obtener $\ln(4+t)$.

$\Rightarrow \ln(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{t^n}{4^{n+1}} = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, t^{n+1}}{(n+1)\, 4^{n+1}} \Rightarrow$ Para obtener c, evalúo $t = 0 \Rightarrow x = 4$

$\boxed{c = \ln(4)}$

$\Rightarrow \boxed{\ln(4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 4^n} (x-4)^n}$ y su intervalo de convergencia es

$\left|\frac{(-x+4)}{4}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{-x+4}{4} < 1$

$-4 < -x + 4 < 4$

$-8 < -x < 0$

$\boxed{8 > x > 0}$

$I = \{(0, 8)\}$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $(x+2)$ $x=-2$ $t = \frac{x+2}{2}$

$\Rightarrow x = ((x+2)-2) \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{((x+2)-2)^2}$ $\frac{1}{4\left(1-\frac{(x+2)}{2}\right)^2} \xrightarrow{f'(x)} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(x+2)^n}{4\cdot 2^n}}$$

$R = \left|\frac{x+2}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \left|\frac{x+2}{2}\right| < 1$

$-2 < x+2 < 2$

$\boxed{-4 < x < 0}$

e) $f(x) = x\ln(1-x)$ en x.

vemos que $-\ln(1-x) = x\int F(x)dx$ con $F(x) = \frac{1}{1-x}$

luego $-\ln(1-x) = x\int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = c - \sum_{n=0} \frac{x^{n+1}}{n} \Rightarrow x=0 \Rightarrow c=0$

$$\Rightarrow^{m=n+1} \boxed{c - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m-1}}$$

(4) Expresar las siguientes integrales como una serie de potencias en x.

- (a) $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$
- (b) $\int \frac{x}{1+x^5}\,dx$
- (c) $\int \frac{x}{1-x^8}\,dx$
- (d) $\int \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$

en x.

a) $\int \frac{1}{1+x^4}dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-x^4)^n dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n} dx = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{4n+1} + c}$ y $c=0$

b) $\int \frac{x}{1+x^5}dx = \int x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^5)^n dx = \int \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{5n+1} dx = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{5n+2}}{5n+2} + c}$ $c=0$

c) $\int \frac{x}{1-x^8}dx = \int x\sum_{n=0}^{\infty}(x^8)^n dx = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{8n+2}}{8n+2} + c}$

d) $\int \underbrace{\ln(1-x)}_{\text{Conocida}} x^{-1} = \int -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \boxed{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} + c}$

Series de Taylor

✓(5) Encontrar la representación en serie de Taylor, centrada en $a = 0$, de las siguientes funciones. ¿Para qué valores de x vale la representación?

- (a) $f(x) = \cos(x)$
- (b) $f(x) = \ln(1+x)$
- (c) $f(x) = \text{sen}(5x^2)$
- (d) $f(x) = xe^x$

Serie de taylor centrada en $a=0$

a) $f(x) = \cos(x)$

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!} \quad (\text{Mclaurin})$$

• Calculo sus derivadas $\Rightarrow$ $f(x) = \cos(x) = 1$ ... $f(0)$

• $f'(x) = -\operatorname{sen}(x) = 0$

• $f''(x) = -\cos(x) = -1$

• $f'''(x) = \operatorname{sen}(x) = 0$

• $f^{IV}(x) = \cos(x) = 1$

$f^{(2n+1)}(0) = 0$ n $f^{(2n)}(0) = (-1)^n$

Periodo de 4 $\Rightarrow$ $1 - \cancel{\operatorname{sen}(0)\, x^0} - 1 +$

Podemos obviar los términos impares

$$\Rightarrow \boxed{\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

b) $f(x) = \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, x^n}{n!}$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = 1$

• $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f''(0) = -1$.

• $f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

• $f^{IV}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \Rightarrow f^{IV}(0) = -6$.

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n} \Rightarrow \boxed{f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cancel{n!}\, x^n}{(n+1)\cancel{!}} = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

c) $f(x) = 5x^2$. Sabemos que $\sin(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$\Rightarrow u = 5x^2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{4n+2}}{(2n+1)!}}$$

d) $f(x) = xe^x$. Sabemos que $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow$ $(k = n+1)$

$$x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(k-1)!}}$$

(6) Determinar el orden de los polinomios de Taylor que deberían usarse para aproximar los siguientes valores con un error menor que $5 \cdot 10^{-5}$.

(a) $e^{0.1}$ (b) $\ln 1.4$

a) Sabemos que $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$ con $0 \le t \le x$

queremos encontrar $|R_{n,a}(x)| < 5 \cdot 10^{-5}$

$\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow |R_{n,}(0.1)| = \left| \frac{e^t}{(n+1)!} (0.1)^{n+1} \right| < \frac{e^{0.1}}{(n+1)!} (0.1)^{n+1}$

donde $t \in (0, 0.1)$ $e^{(0.1)} = 1.1052$

$\frac{1.1052 \, (0.1)^{n+1}}{(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-5}$.

$\Rightarrow n = 3$ $\frac{1.1052 \, (0.1)^4}{24} < 5 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \boxed{4.6 \times 10^{-6} < 5 \cdot 10^{-5}}$

$\boxed{n \geq 3}$

b) $\ln(1.4) = \ln(1 + 0.4)$ $\boxed{x = 0.4}$

$\ln(x+1) \rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}}$

$\Rightarrow |R_{n,}(0.4)| < \left| \frac{(0.4)^{n+1}}{n+1} \right| < 5 \cdot 10^{-5}$

Evaluar en n Para saber des de que término vale.

(7) Estimar el error cometido al aproximar la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ por su polinomio de Taylor de orden 2, centrado en $a = 8$, para $7 \le x \le 9$.

$f(8) \longrightarrow$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = \boxed{2}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{12}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} = \boxed{-\frac{1}{144}}$

$t_{2,8}(x) = f(8) + f'(8)(x-8) + \frac{f''(8)(x-8)^2}{2!}$

$\Rightarrow t_{2,8}(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$

$\Rightarrow$ Para calcular el error : $\frac{f'''(c)}{3!}(x-8)^3 \Rightarrow \frac{10}{27} x^{-8/3}$

$\Rightarrow |R_{3,8}(x)| = \left| \frac{5}{81} \cdot \frac{|x-8|^3}{c^{8/3}}$

Ejercicios adicionales

(1) Determinar el radio de convergencia y el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3}$
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} x^n$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n^3}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 2^{2n}} x^n$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{n^n}$

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 (2x-3)^n$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$

$\boxed{L=10}$

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{10^{n+1}}\cancel{x^{n+1}}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{\cancel{10^n}\cancel{x^n}} \right| = |x| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| 10 \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \right| = 10|x| < 1$

$\Rightarrow |x| < \frac{1}{10}$

$\Rightarrow R = -\frac{1}{10} < x < \frac{1}{10}$, $I = \left\{\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]\right\}$

- $x = -\frac{1}{10}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} =$ Por criterio de series alternantes si $a_n < a_{n+1}$ ^ $\lim a_n = 0$ ∴ Converge

∴ converge,

- $x = \frac{1}{10}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cancel{10^n} \cdot \frac{1^n}{\cancel{10^n}}}{n^3}$ = ∴ Por serie $P = 3$ ^ $P > 1 \Rightarrow$ la serie converge.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+5^n}{n!} \cdot x^n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1+5^{n+1})\cancel{x^{n+1}}}{(n+1)\cancel{!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{(1+5^n)\cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+5^{n+1}}{(n+1)(1+5^n)} \right| =$

$|x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{5^{n+1}}(5^{-(n+1)}+1)}{\cancel{5^n}(n5^{-n}+n+5^{-n}+1)} \right| = \boxed{0}$ $L=0$ ^ $\boxed{R=\infty}$ $I = (-\infty, \infty)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n+1}}\cancel{x^{n+1}}}{n+2} \cdot \frac{(n+1)}{\cancel{(-1)^n}\cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = \boxed{1} \Rightarrow |x| < 1$

$I = \{(-1, 1]\}$

$R = -1 < x < 1$

- $x = -1$ $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{1}{n+1} =$ Por serie armonica.

$a_n < a_{n+1}$ ^ $\lim a_n = 0$ ∴ diverge

- $x = 1$ $\sum_{n\to\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ = Por criterio serie alternante. ∴ converge

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} x^n = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\cancel{(-1)^{n}} \cancel{x^{n+1}}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{\cancel{(-1)^{n-1}} \cancel{x^n}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \right| \overset{(L=1)}{=} |x| < 1$

$\Rightarrow \boxed{R=1}$