Rodríguez Fitta José Emanuel

En una empresa de manufactura hay 5 máquinas para fabricar artículos en serie. Existe una probabilidad p de que una máquina opere hasta fabricar un artículo defectuoso. Dado el valor p, los artículos son independientes entre si. Las máquinas se ponen a prueba contando el número de artículos fabricados antes de que se produzca un artículo defectuoso.

1. Establece una distribución a priori apropiada para el parámetro p.

   Proponemos una distribución a priori Beta para p

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

2. Dado el contexto ¿Cuál es tu propuesta para la verosimilitud de los datos? Dado el contexto notamos que cada x_i tiene una distribución geométrica, esto es $x_i \sim Geo(p)$ por lo que la función de densidad es

$$f(x_i|p) = p(1-p)^{x_i-1}$$

   con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La muestra de observaciones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)'$ tiene una distribución conjunta i.e verosimilitud

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\mathbf{p}) &= \prod_{i=1}^{5} f(x_i|p) = \prod_{i=1}^{5} p(1-p)^{x_i-1} \\ &= p^5(1-p)^{\sum_{i=1}^{5}(x_i-1)} = p^5(1-p)^{5\bar{x}-5} \end{aligned}$$

3. Realiza una inferencia bayesiana para encontrar teóricamente la distribución posterior de la probabilidad p

$$\begin{aligned} p(\mathbf{p}|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\mathbf{p})\pi(p) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[p(1-p)^{\bar{x}-1}]^5 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} \propto p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} \end{aligned}$$

   Por lo tanto $p|\mathbf{x} \sim Beta(\alpha+5, 5\bar{x}+\beta-5)$.

4. Dado que el primer artículo defectuoso fue el número: $10, 13, 9, 11, 13$ respectivamente, en cada una de las 5 máquinas. Escribe explícitamente (con sus parámetros) la distribución posterior y de ser posible realiza una gráfica de esta.
   En este caso $\mathbf{x} = (10, 13, 9, 11, 13)$ por lo que $\bar{x} = 11.2$ y la distribución posterior es

$$p(\mathbf{p}|\mathbf{x}) \propto p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} = p^{\alpha+4}(1-p)^{\beta+50}$$

   Por lo tanto $p|\mathbf{x} \sim Beta(\alpha+5, \beta+51)$.