6.3 Rodriguez T. Hla José Emanuel

1) $f: \{1, 2, 3, \ldots\} \to \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ $f(x) = \frac{1}{x}$

Si consideramos la topologia discreta cada conjunto formado por un solo elemento es un abierto.

Sea $Y = \{\frac{1}{n}\}$ un abierto arbitrario del contradominio. Es claro que la imagen inversa de Y bajo f es $f^{-1}(Y) = f^{-1}(\{\frac{1}{n}\}) = \{n\}$ que es un abierto del dominio.

$\therefore$ la imagen inversa de cada abierto del contradominio es un abierto del dominio $\therefore$ f es continua

Sea $\frac{1}{n} \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{n}$ $\therefore$ f es sobreyectiva

Sean n_1 & $n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n_1) = f(n_2)$

$\Rightarrow \frac{1}{n_1} = \frac{1}{n_2} \Rightarrow n_1 = n_2$ $\therefore$ f es inyectiva

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x-1}$

Sea $0 \in \mathbb{R}$ Si f fuera sobreyectiva debería existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow 1 = 0$

lo que es una contradicción. Como la contradicción surge de suponer f sobreyectiva $\therefore$ f no puede ser sobreyectiva ni un homeomorfismo

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x-1$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ para probar que f es continua debemos probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |x-1-(a-1)| = |x-a|$

si $\delta = \varepsilon$ tendremos que $|f(x) - f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon$

$\therefore \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Sea $y \in \mathbb{R}$ si f es sobreyectiva debe existir $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ i.e. $x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$ dado que si existe f es sobreyectiva

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f es inyectiva

FIRST CLASS

4: $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

Probemos que f es continua. Sea $a\in(-1,1)$ debemos probar que $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

Sea $\varepsilon>0 \Rightarrow \left|f(x)-f(a)\right| = \left|\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{a}{1-a^2}\right|$

$$= \left|\frac{x-\cancel{xa^2}-a+\cancel{xa^2}}{(1-x^2)(1-a^2)}\right| = \frac{|x-a|}{|(1-x^2)(1-a^2)|} \quad \text{------} \quad (1)$$

pero si $|x-a|<\delta_1$

$\Rightarrow$ $|x|<\delta_1+|a|$

$\Rightarrow$ $|x|^2<(\delta_1+|a|)^2$

$-|x|^2>(\delta_1+|a|)^2$

$1-|x|^2>1+(\delta_1+|a|)^2>0$

$$c_1 := \frac{1}{1+(\delta_1+|a|)^2} > \frac{1}{|1-x^2|}$$

$\Rightarrow (1) \ldots\ldots < |x-a|\dfrac{c_1}{|1-a^2|}$

$\therefore$ si $\delta=\min\left\{\delta_1, \dfrac{|1-a^2|\,\varepsilon}{c_1}\right\}$

$\Rightarrow |f(x)-f(a)|<|x-a|\dfrac{c_1}{|1-a^2|} < \dfrac{|1-a^2|}{c_1}\dfrac{c_1}{|1-a^2|}\varepsilon=\varepsilon$

$\therefore$ f es continua

- Sea $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow y=\dfrac{x}{1-x^2} \Rightarrow y-yx^2=x \Rightarrow yx^2+x-y=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4y^2}}{2y}$ pero $x\in(-1,1)$ cuando

$x=\dfrac{-1+\sqrt{1+4y^2}}{2y}$ $\quad\therefore$ f es sobreyectiva

- cuando $y=0$, $x=0$

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$

$$\frac{x_1}{1-x_1^2} = \frac{x_2}{1-x_2^2} \Rightarrow x_1 - x_1 x_2^2 = x_2 - x_1^2 x_2$$

$$x_1 + x_1^2 x_2 = x_2 + x_1 x_2^2$$

$$x_1(1 + x_1 x_2) = x_2(1 + x_1 x_2)$$

$$(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2) = 0 \quad \text{———} \quad (2)$$

Si $1 + x_1 x_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -1$

Pero $x_2, x_1 \in (-1, 1) \Rightarrow x_1 x_2 \in (-1, 1)$
por lo tanto $x_1 x_2 \neq -1$ así que $1 + x_1 x_2 \neq 0$

De (2) la única posibilidad es que $x_1 = x_2$
por lo que f es inyectiva.