inferencia_bayesiana

February 27, 2022

Rodríguez Fitta José Emanuel

En una empresa de manufactura hay 5 máquinas para fabricar artículos en serie. Existe una probabilidad p de que una máquina opere hasta fabricar un artículo defectuoso. Dado el valor p, los artículos son independientes entre si.
Las máquinas se ponen a prueba contando el número de artículos fabricados antes de que se produzca un artículo defectuoso.

1. Establece una distribución a priori apropiada para el parámetro p.

   Proponemos una distribución a priori Beta para p

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$$

2. Dado el contexto ¿Cuál es tu propuesta para la verosimilitud de los datos?
   Dado el contexto notamos que cada x_i tiene una distribución geométrica, esto es $x_i \sim Geo(p)$ por lo que la función de densidad es

$$f(x_i|p) = p(1-p)^{x_i-1}$$

   con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. La muestra de observaciones $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)'$ tiene una distribución conjunta i.e verosimilitud

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}|\mathbf{p}) &= \prod_{i=1}^{5} f(x_i|p) = \prod_{i=1}^{5} p(1-p)^{x_i-1} \\ &= p^5(1-p)^{\sum_{i=1}^{5}(x_i-1)} = p^5(1-p)^{5\bar{x}-5} \end{aligned}$$

3. Realiza una inferencia bayesiana para encontrar teóricamente la distribución posterior de la probabilidad p

$$\begin{aligned} p(\mathbf{p}|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|\mathbf{p})\pi(p) &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} [p(1-p)^{\bar{x}-1}]^5 p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} \propto p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} \end{aligned}$$

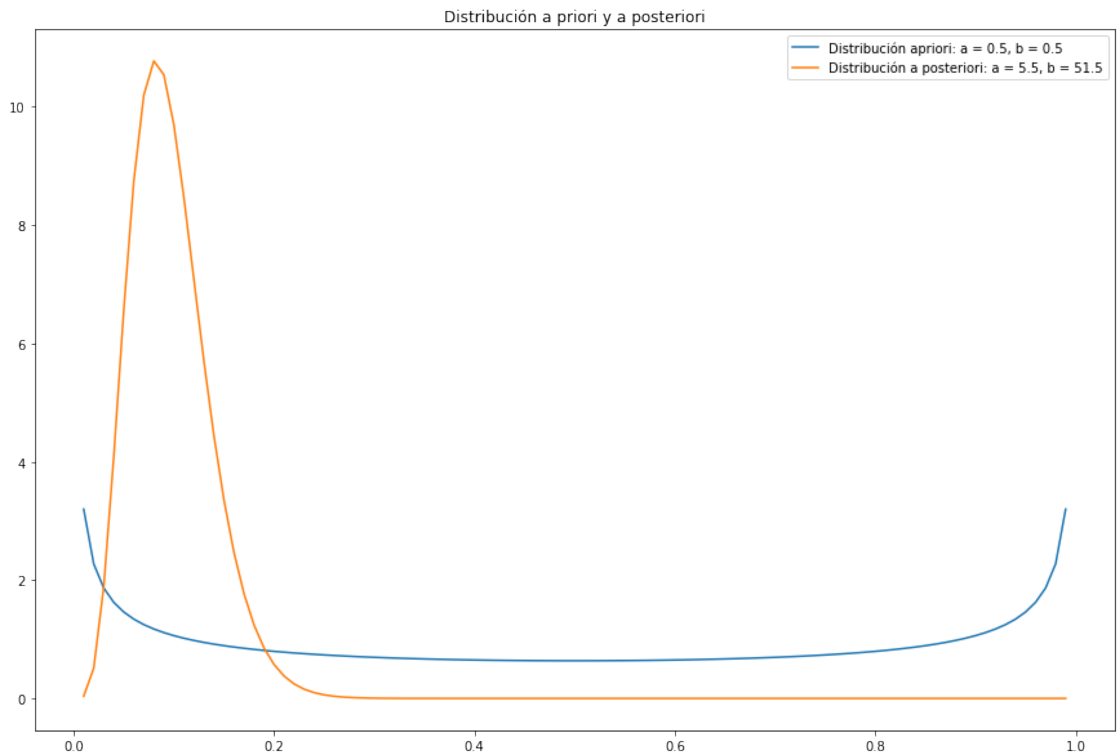
   Por lo tanto $p|\mathbf{x} \sim Beta(\alpha+5, 5\bar{x}+\beta-5)$.

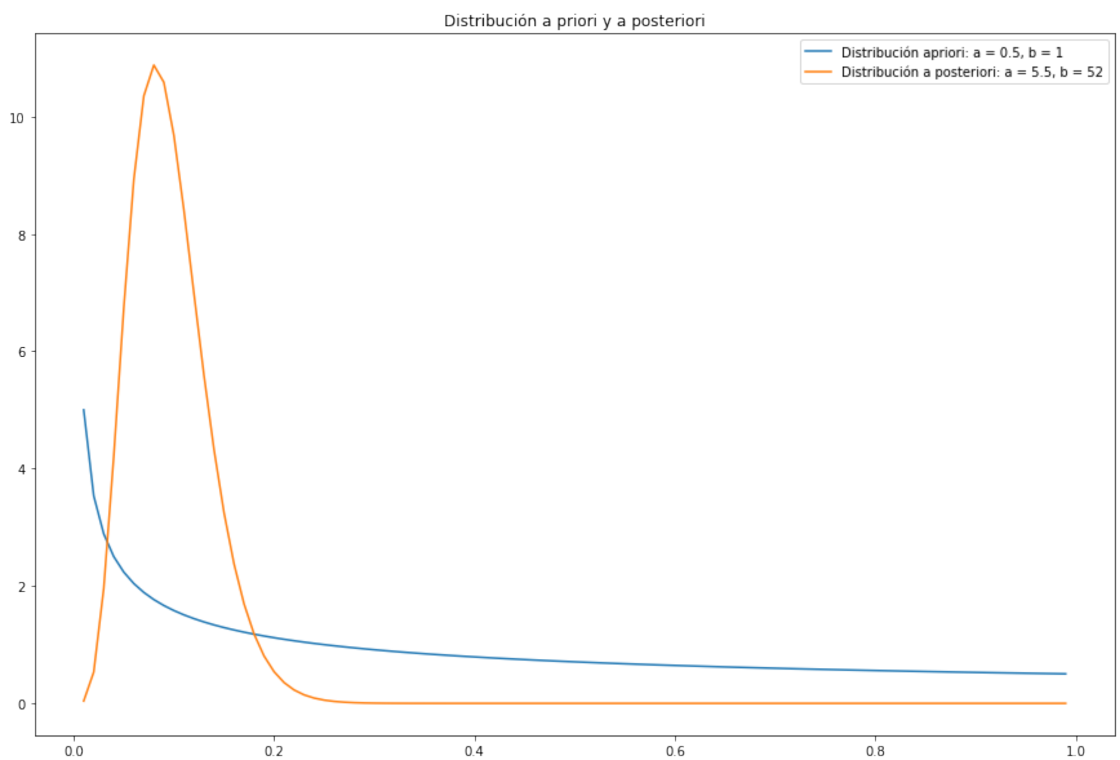
4. Dado que el primer artículo defectuoso fue el número: $10, 13, 9, 11, 13$ respectivamente, en cada una de las 5 máquinas. Escribe explícitamente (con sus parámetros) la distribución posterior y de ser posible realiza una gráfica de esta.
   En este caso $\mathbf{x} = (10, 13, 9, 11, 13)$ por lo que $\bar{x} = 11.2$ y la distribución posterior es

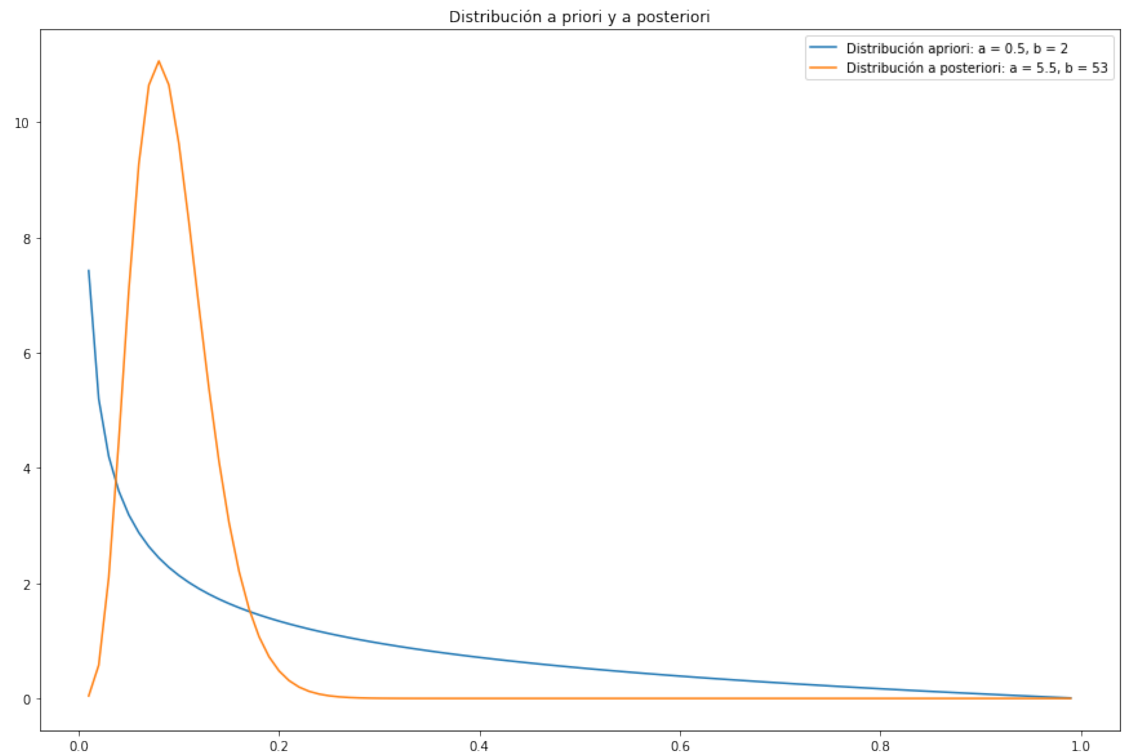
$$p(\mathbf{p}|\mathbf{x}) \propto p^{\alpha+4}(1-p)^{5\bar{x}+\beta-6} = p^{\alpha+4}(1-p)^{\beta+50}$$

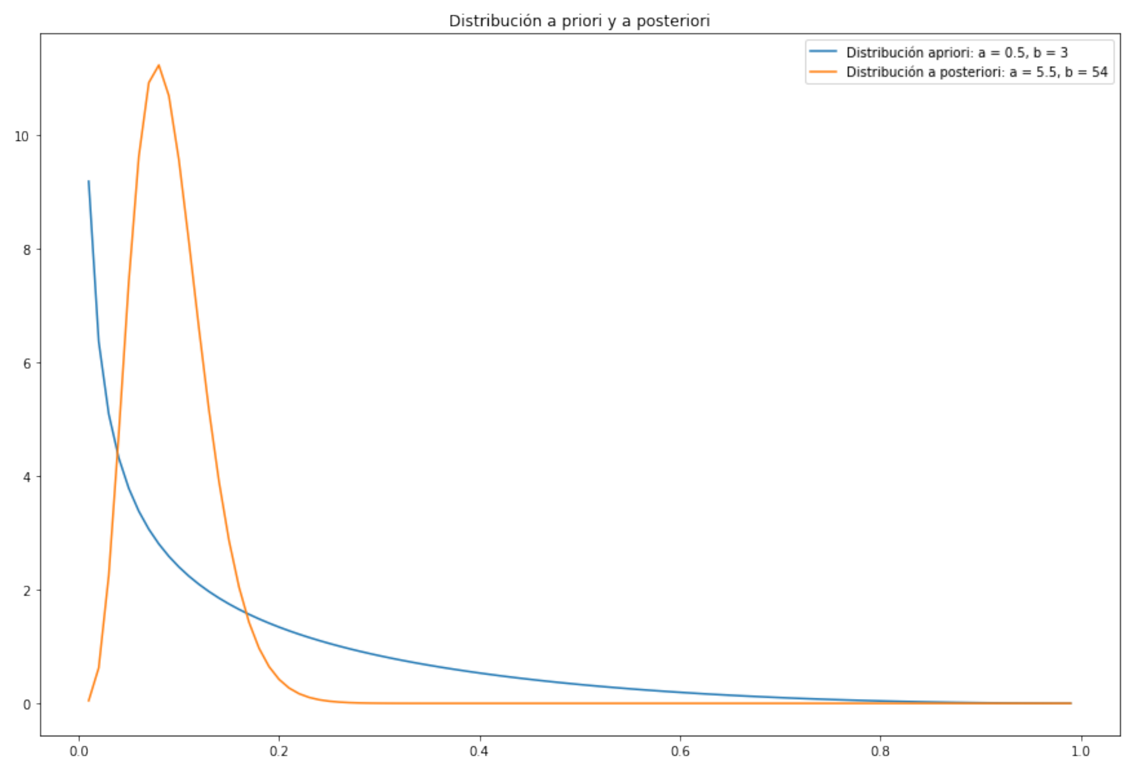
   Por lo tanto $p|\mathbf{x} \sim Beta(\alpha+5, \beta+51)$.

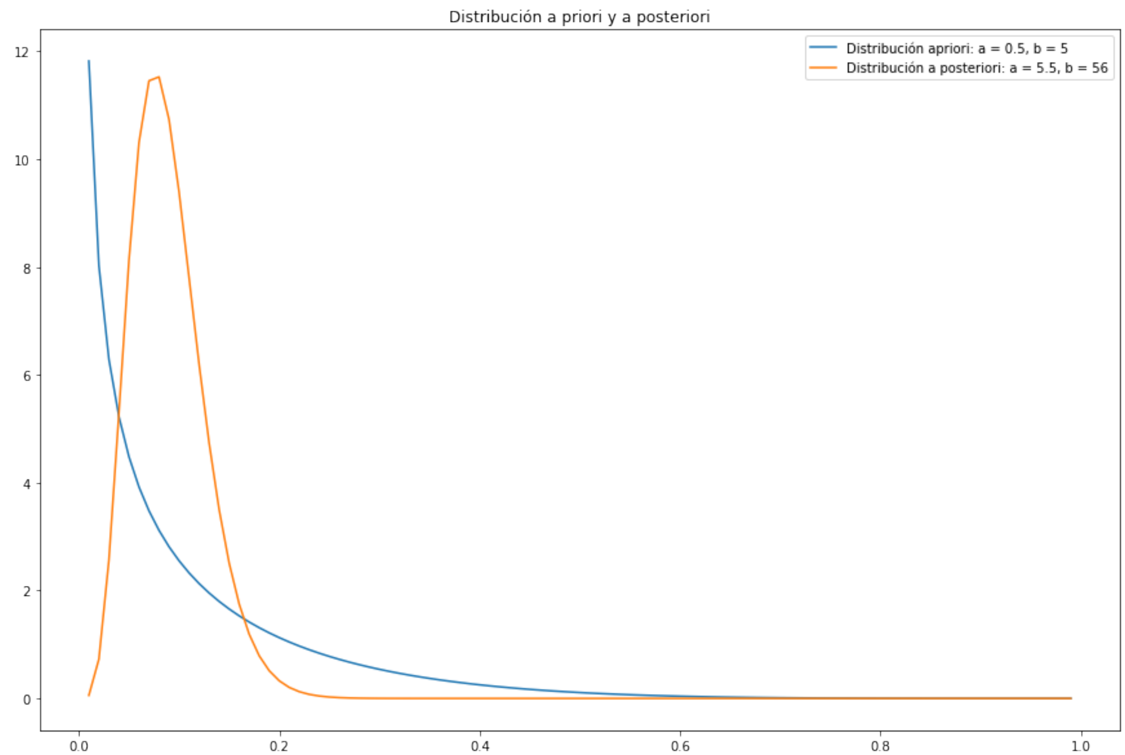
[9]:
```
from scipy.stats import beta
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

values = [0.5, 1, 2, 3, 5]
for a in values:
  for b in values:
    x = np.arange (0.01, 1, 0.01)
    y_apriori = beta.pdf(x,a,b)

    y_posterior = beta.pdf(x, 5 + a, 51 + b )

    plt.figure(figsize = (15, 10))
    plt.plot(x,y_apriori, label = 'Distribución apriori: a = {}, b = {}'.
 ↪format(a, b))
    plt.plot(x, y_posterior, label = 'Distribución a posteriori: a = {}, b = {}'.
 ↪format(5+ a, 51 + b))
    plt.title('Distribución a priori y a posteriori')
    plt.legend()
    plt.show()
```

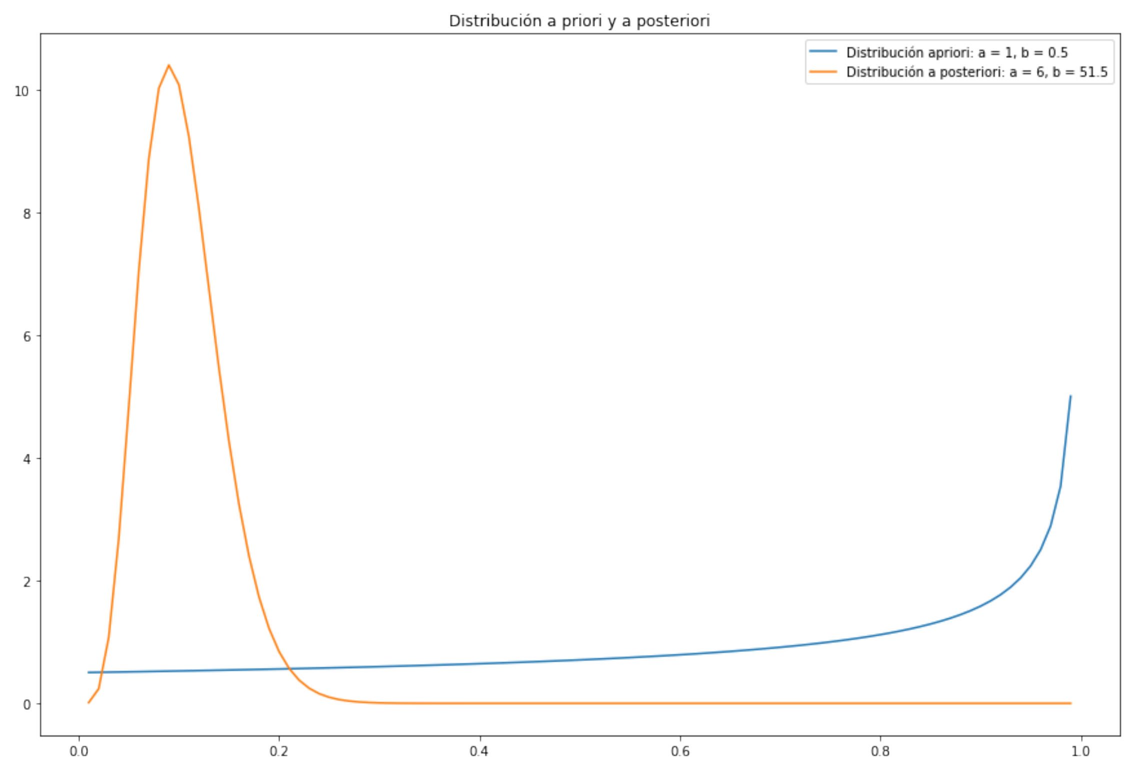

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 0.5, b = 0.5
Distribución a posteriori: a = 5.5, b = 51.5
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

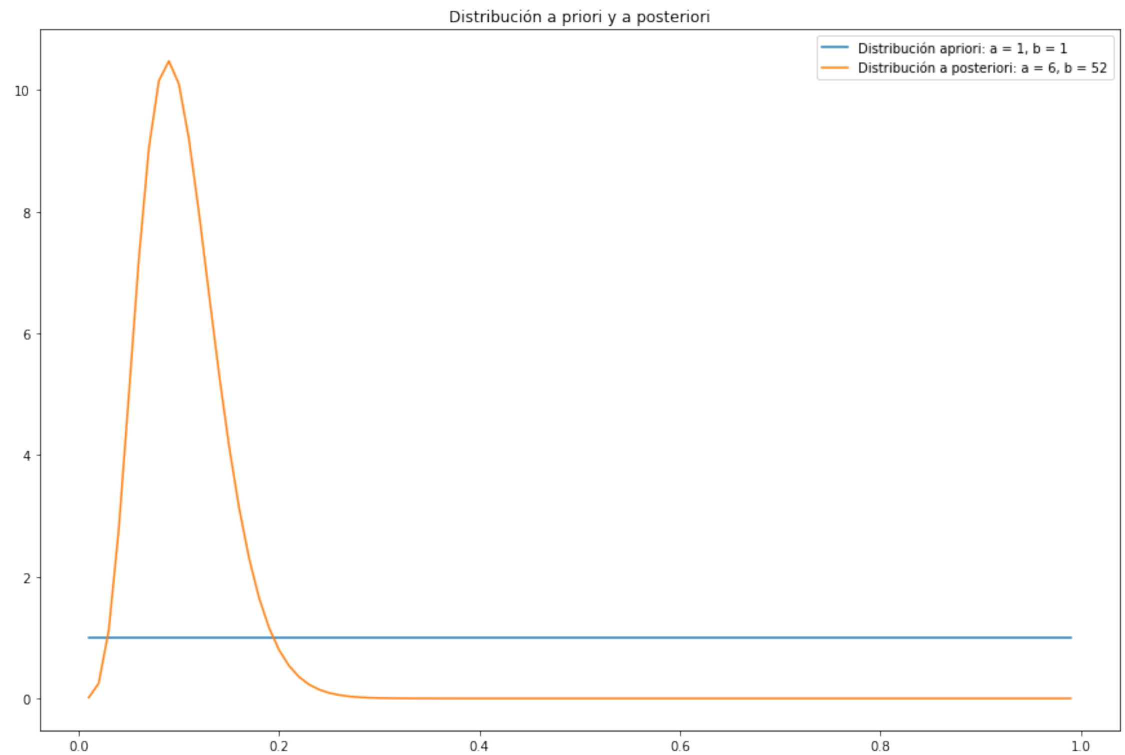

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 0.5, b = 1
Distribución a posteriori: a = 5.5, b = 52
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

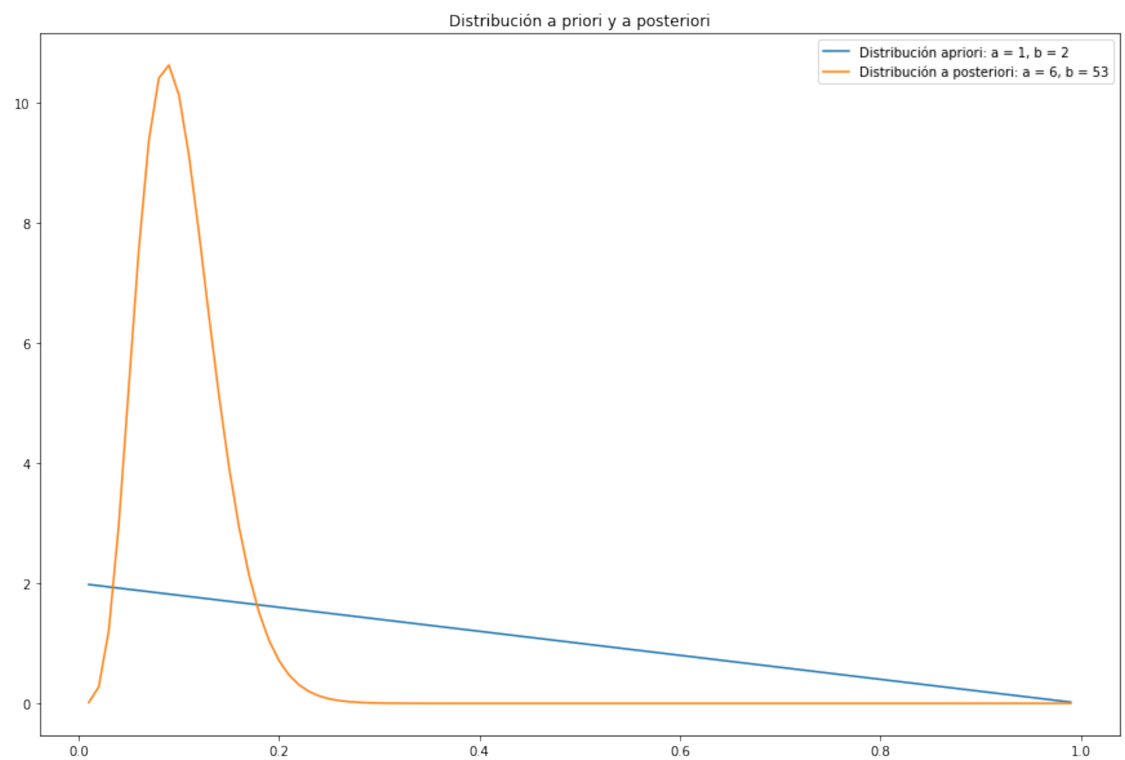

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 0.5, b = 2
Distribución a posteriori: a = 5.5, b = 53
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

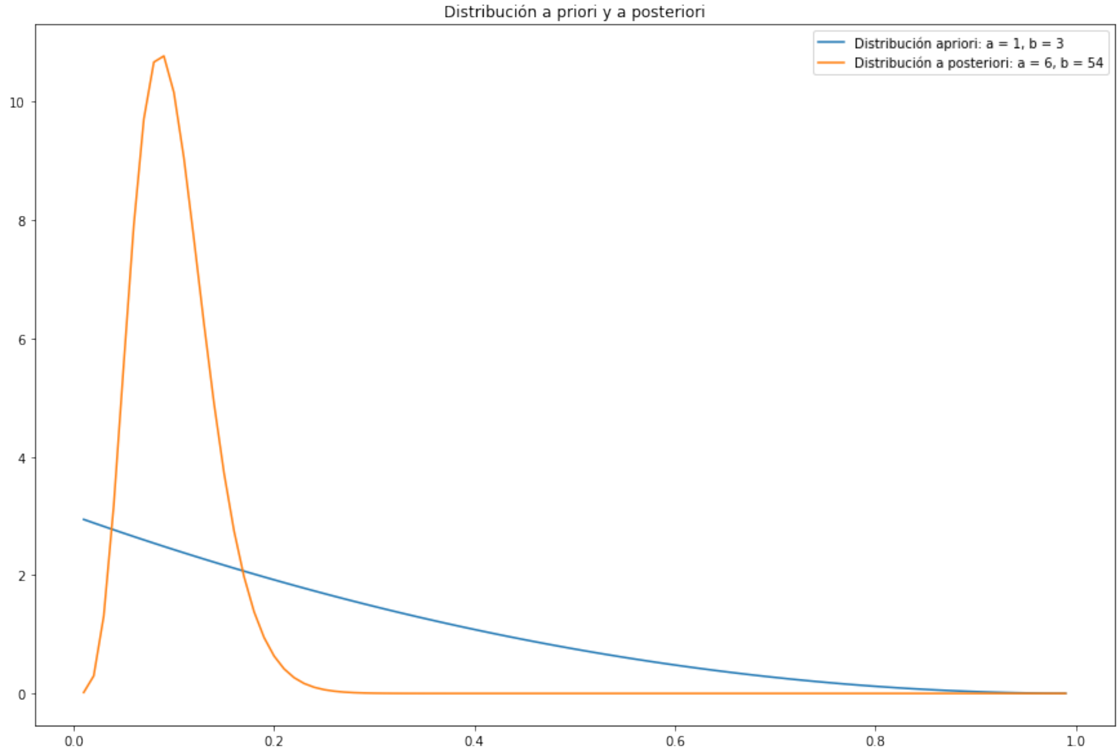

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 0.5, b = 3
Distribución a posteriori: a = 5.5, b = 54
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

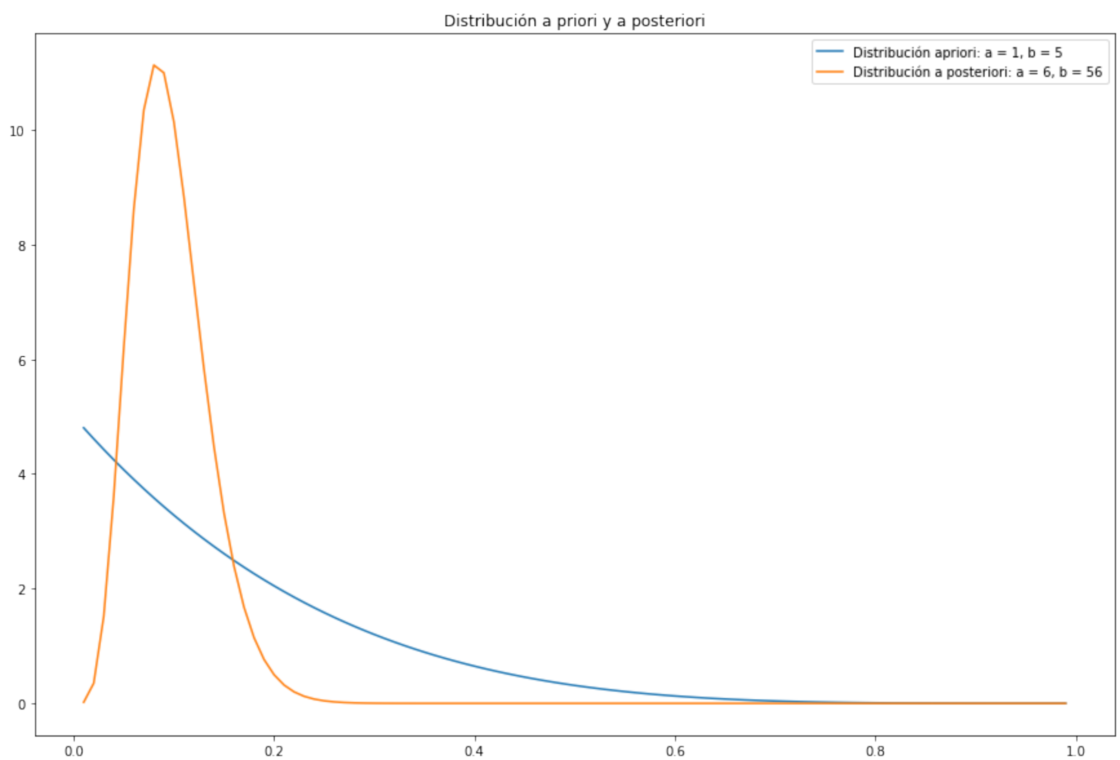

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 0.5, b = 5
Distribución a posteriori: a = 5.5, b = 56
12
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

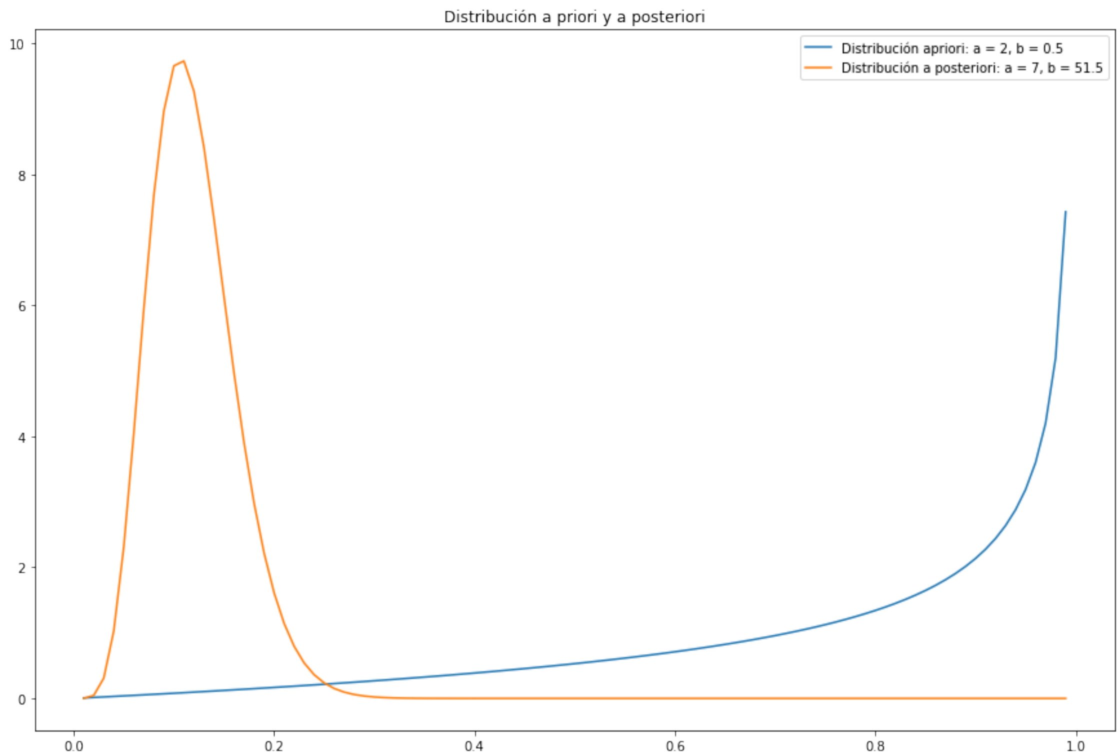

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 1, b = 0.5
Distribución a posteriori: a = 6, b = 51.5
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

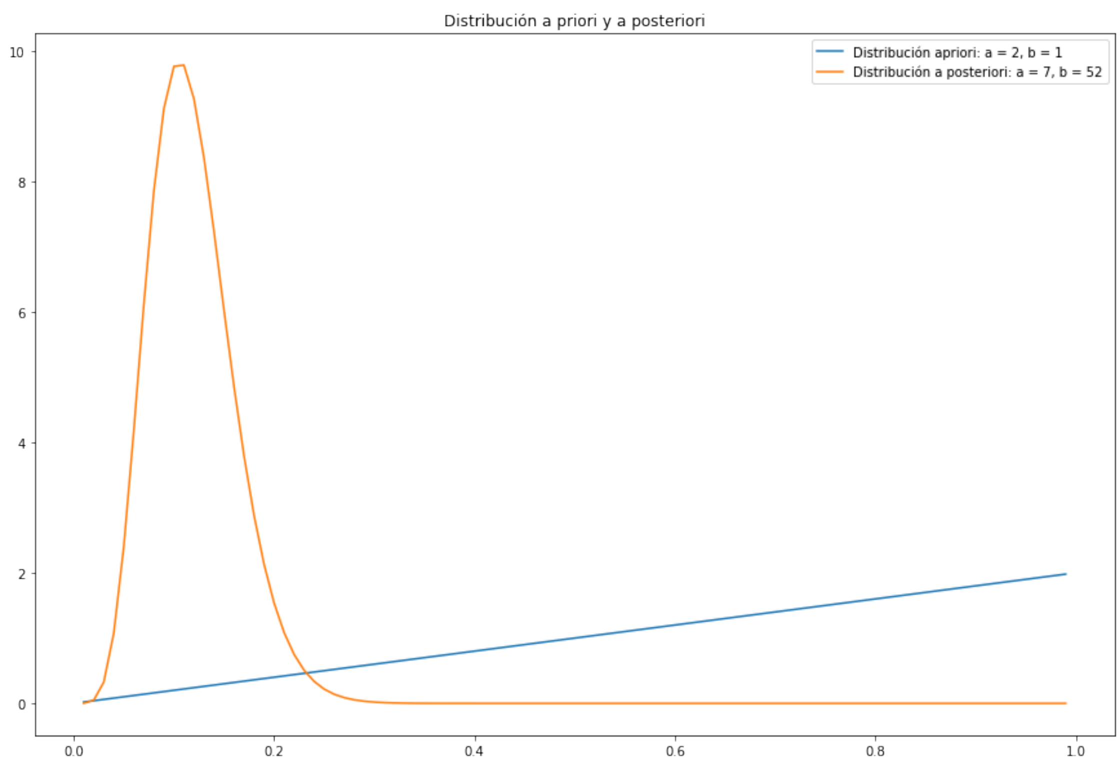

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 1, b = 1
Distribución a posteriori: a = 6, b = 52
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

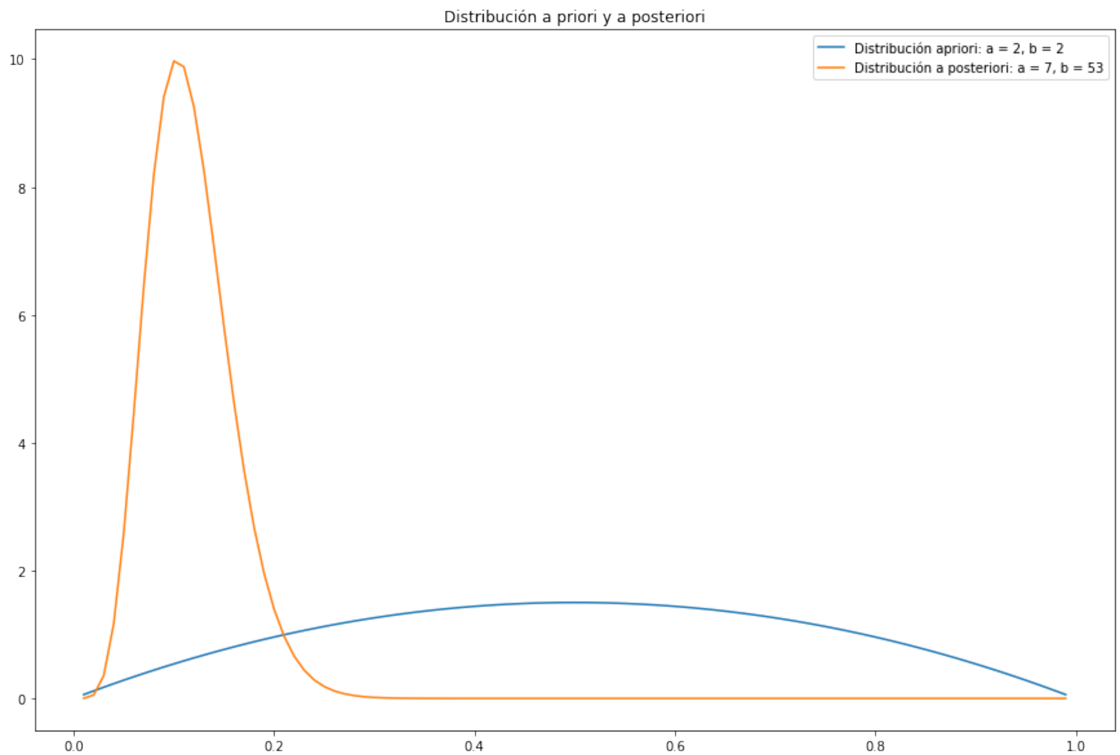

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 1, b = 2
Distribución a posteriori: a = 6, b = 53
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

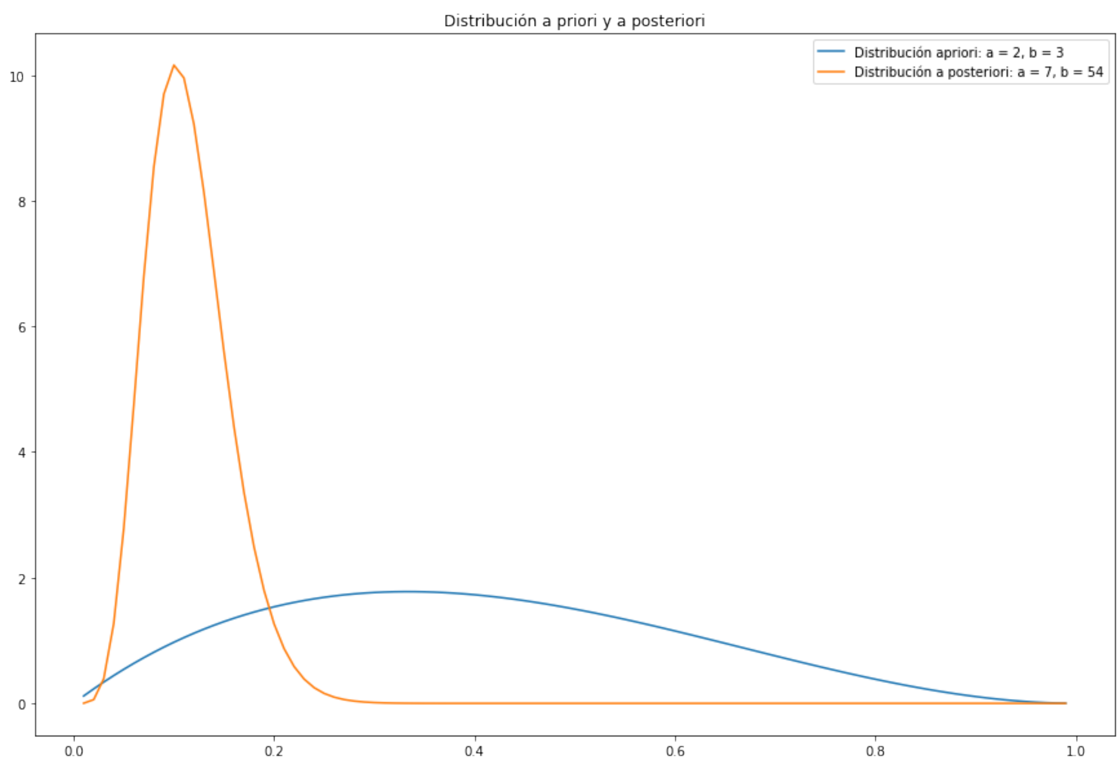

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 1, b = 3
Distribución a posteriori: a = 6, b = 54
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

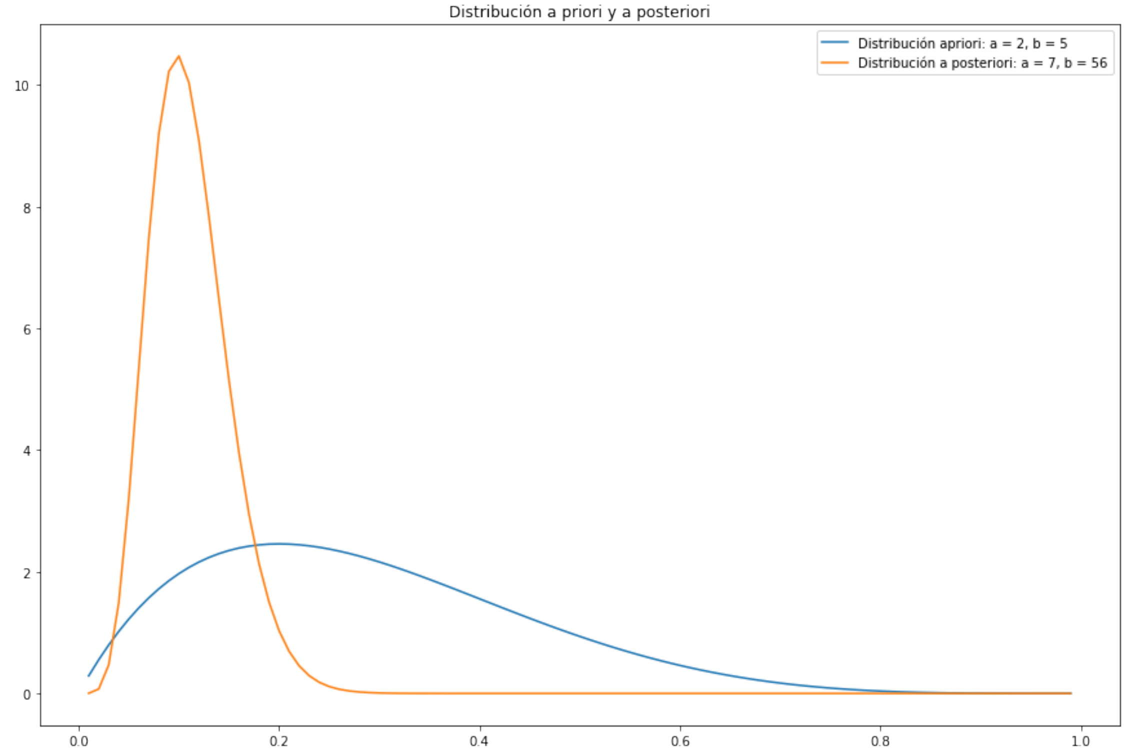

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 1, b = 5
Distribución a posteriori: a = 6, b = 56
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

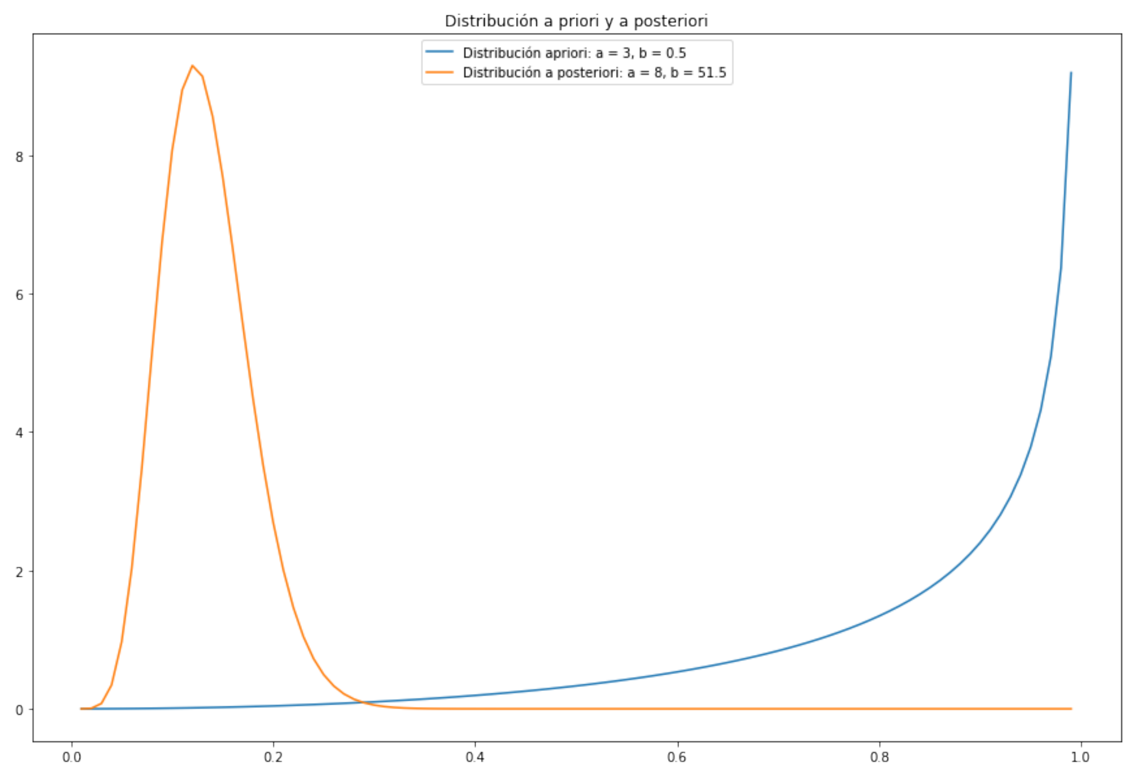

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 2, b = 0.5
Distribución a posteriori: a = 7, b = 51.5
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

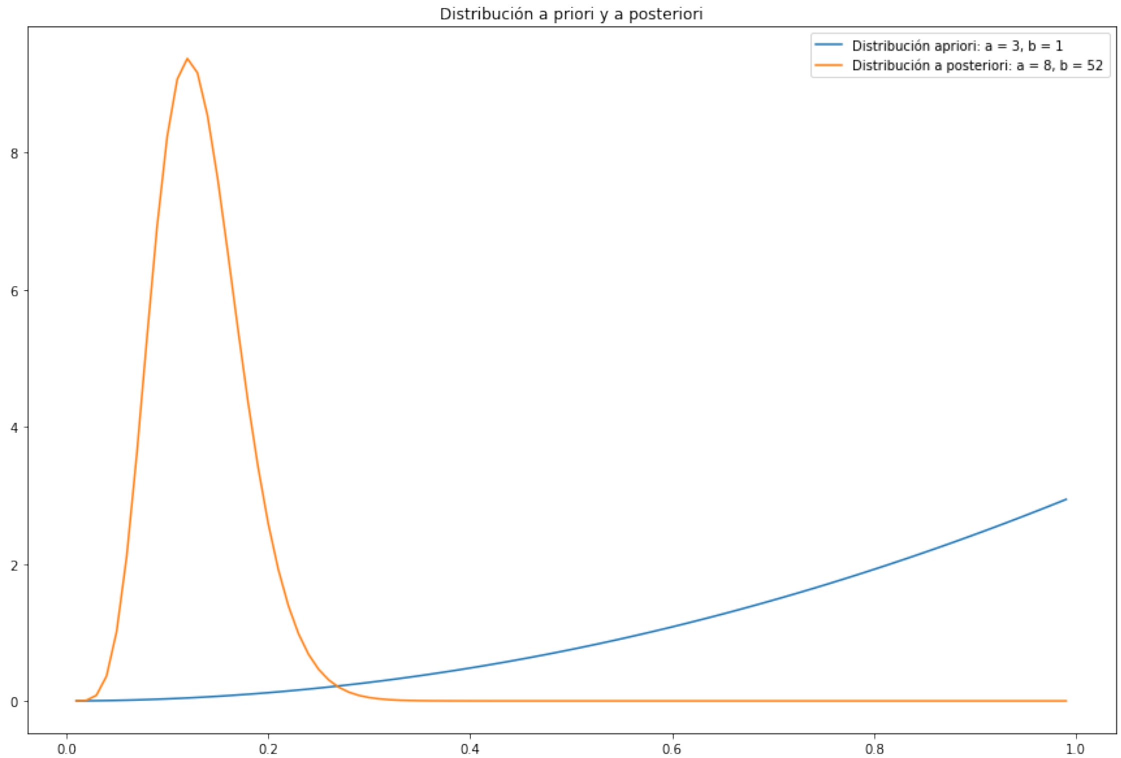

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 2, b = 1
Distribución a posteriori: a = 7, b = 52
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

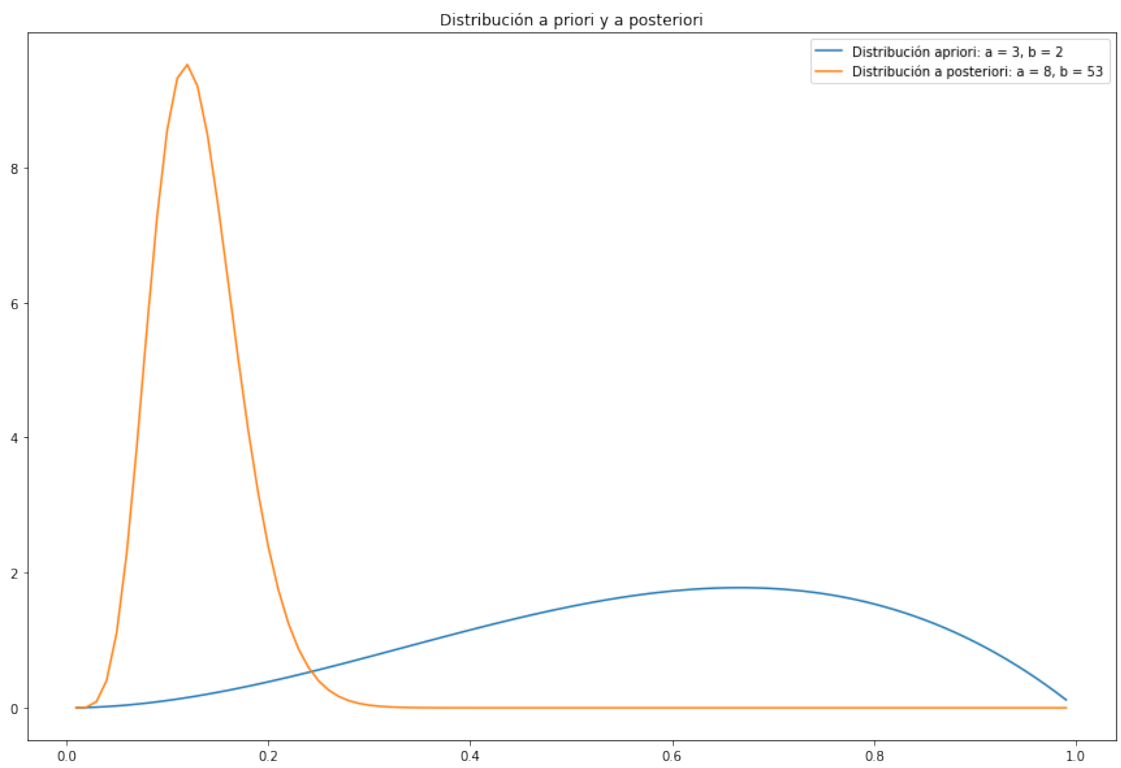

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 2, b = 2
Distribución a posteriori: a = 7, b = 53
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

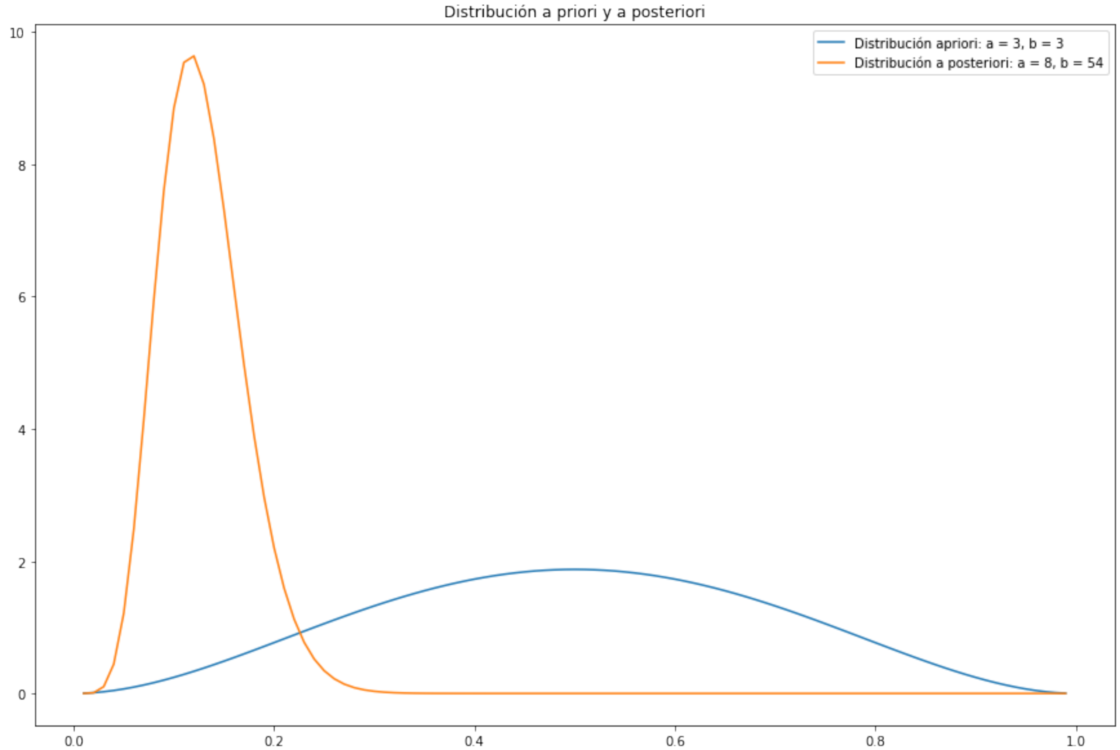

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 2, b = 3
Distribución a posteriori: a = 7, b = 54
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

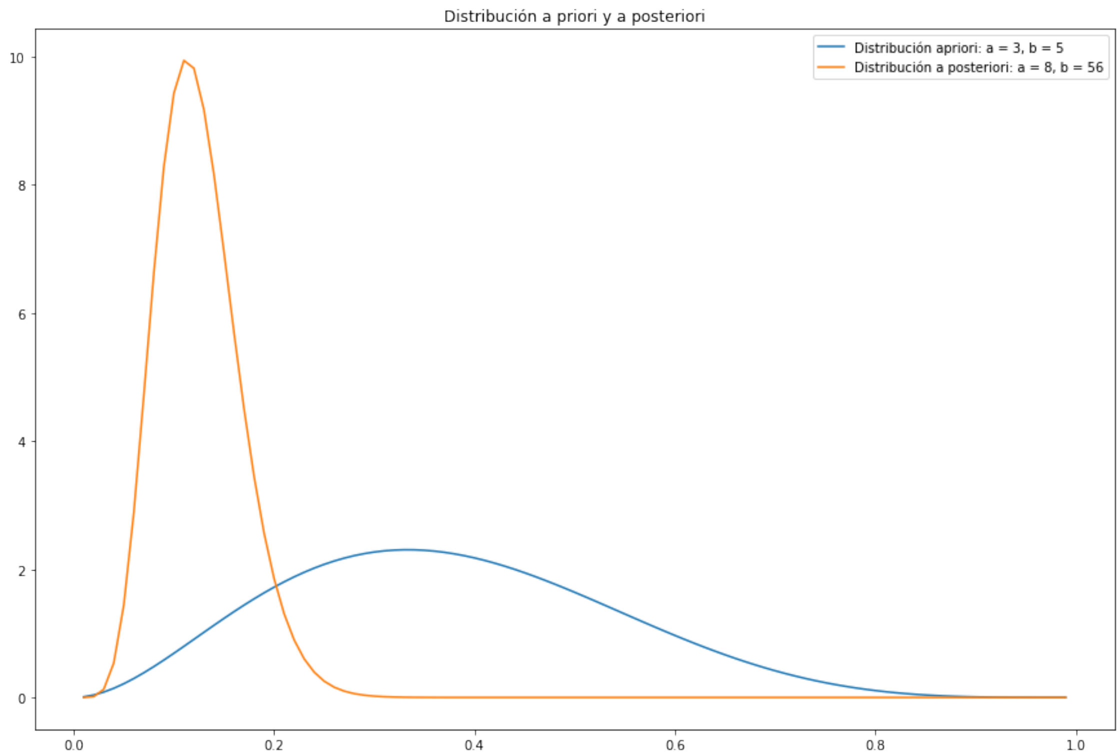

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 2, b = 5
Distribución a posteriori: a = 7, b = 56
0
2
4
6
8
10
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

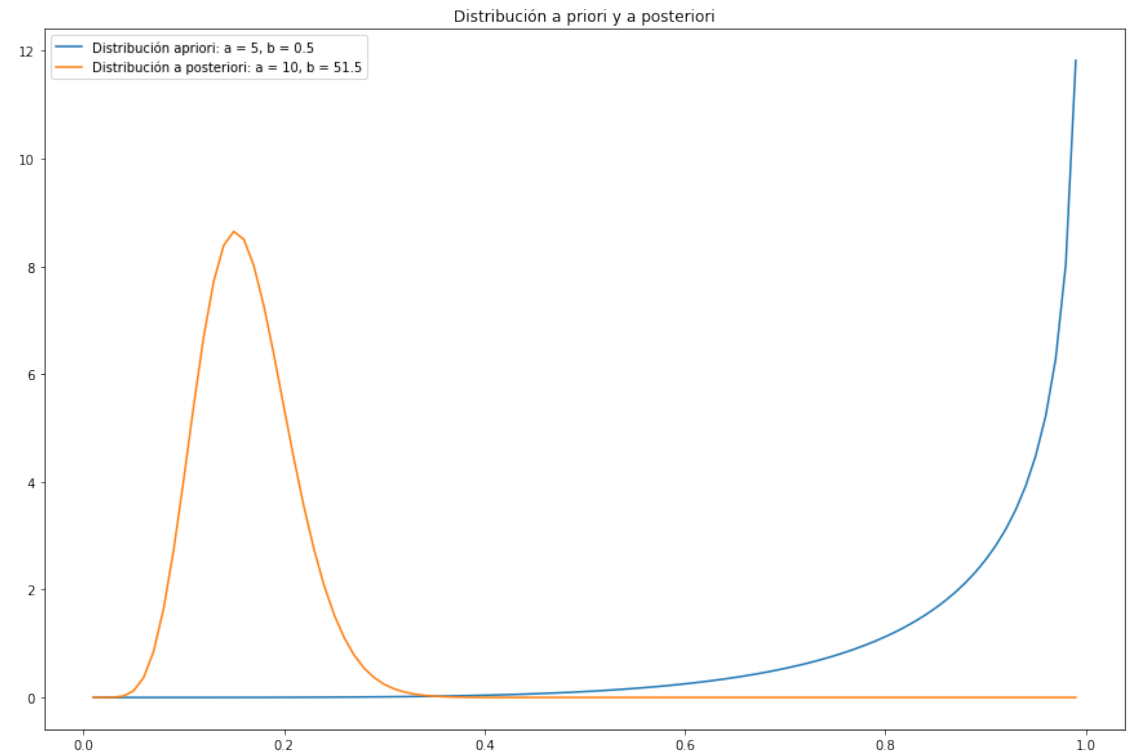

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 3, b = 0.5
Distribución a posteriori: a = 8, b = 51.5
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

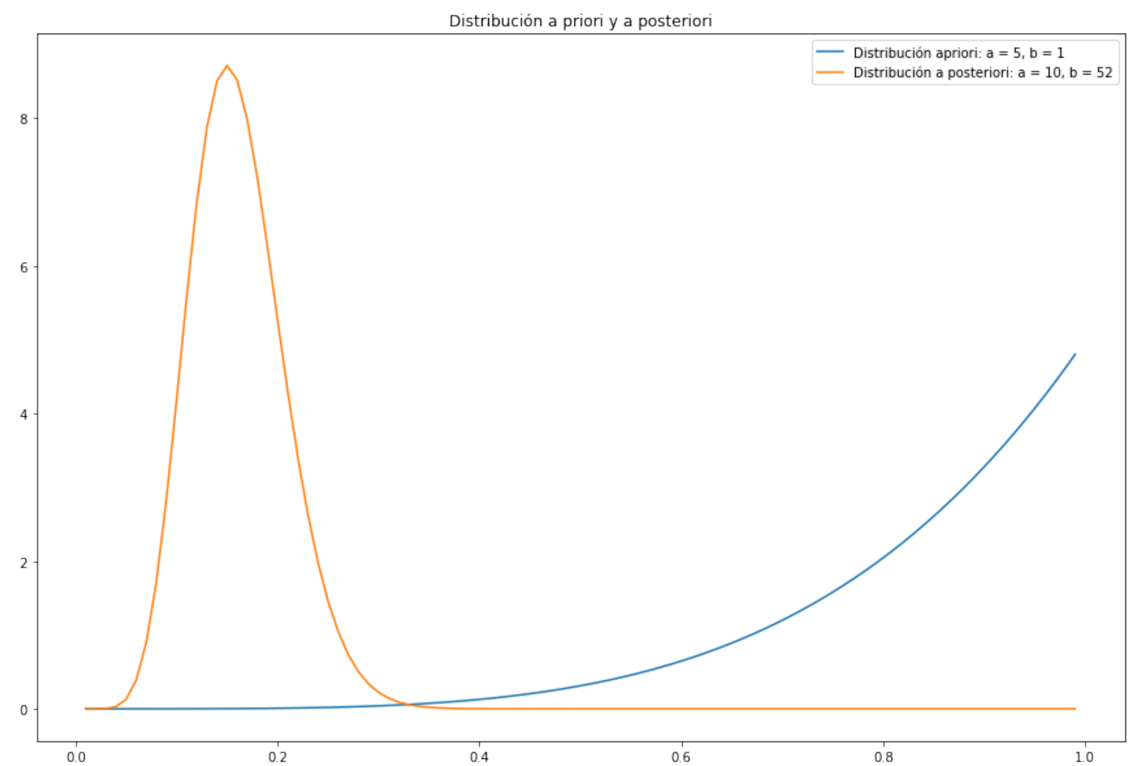

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 3, b = 1
Distribución a posteriori: a = 8, b = 52
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

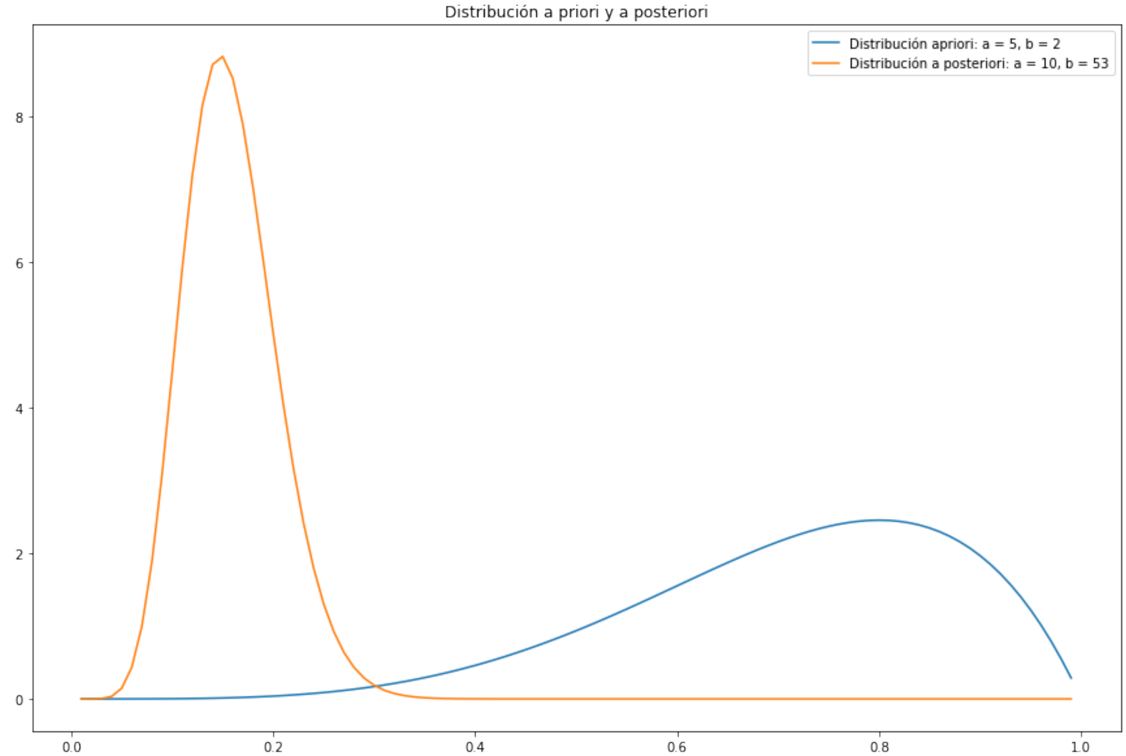

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 3, b = 2
Distribución a posteriori: a = 8, b = 53
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

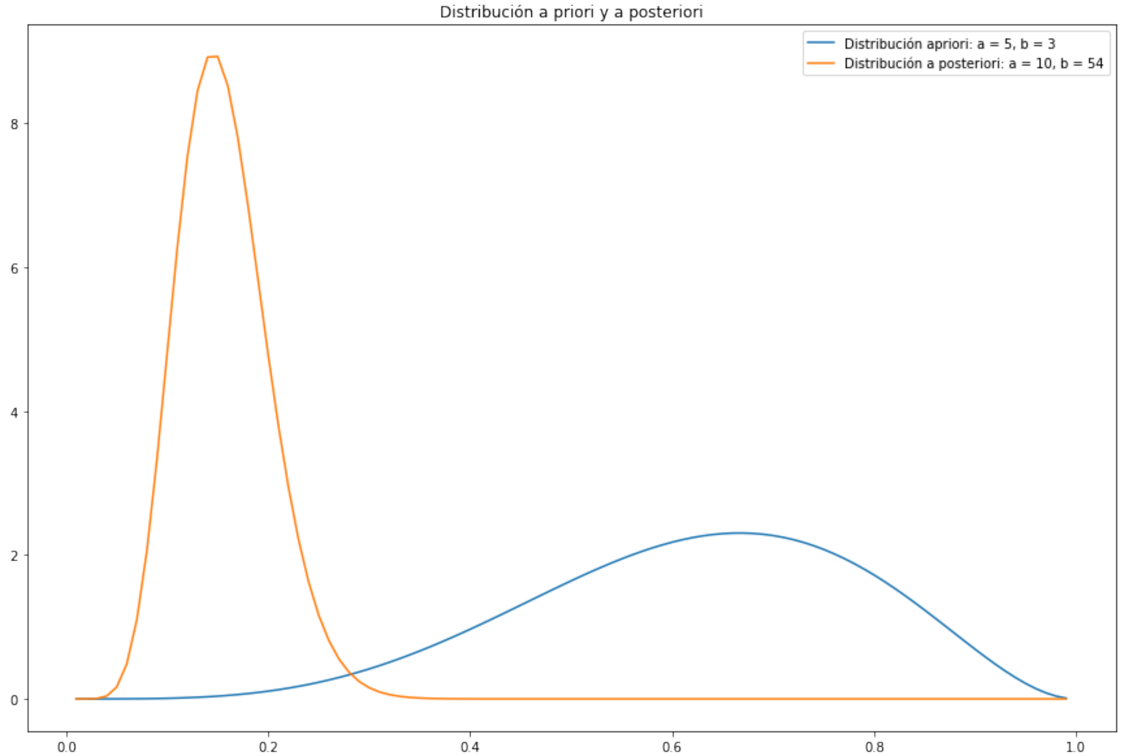

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 3, b = 3
Distribución a posteriori: a = 8, b = 54
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

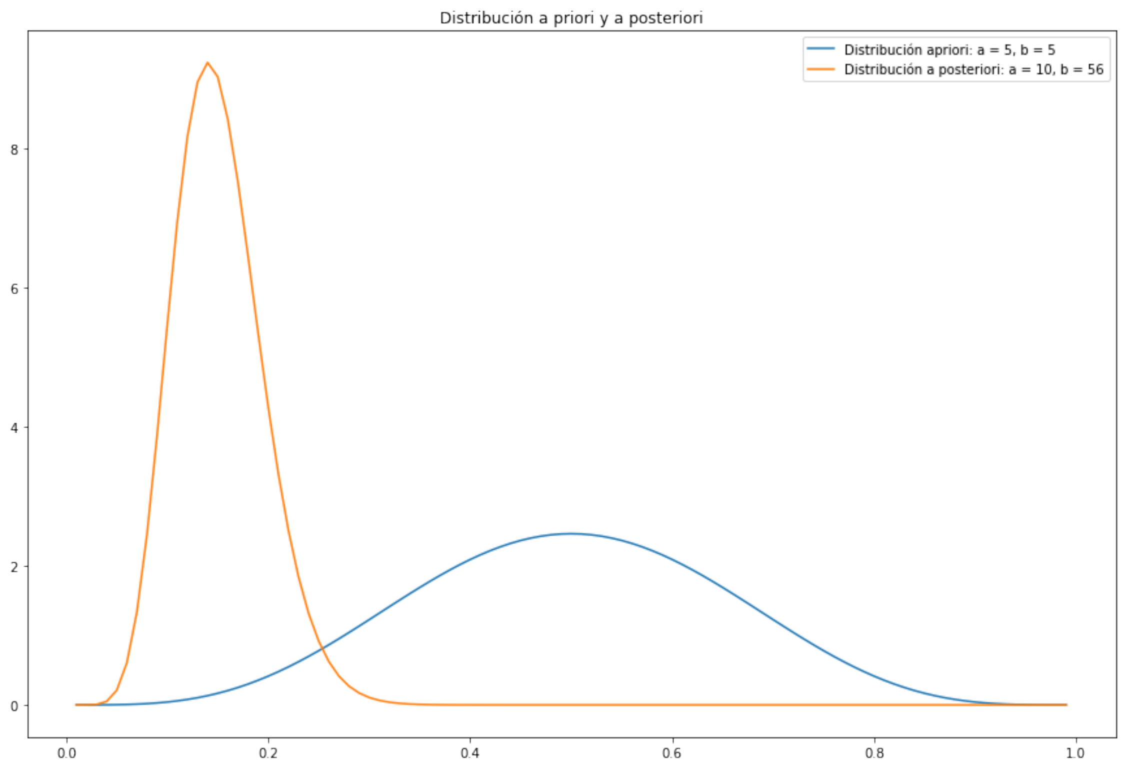

Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 3, b = 5
Distribución a posteriori: a = 8, b = 56
10
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 5, b = 0.5
Distribución a posteriori: a = 10, b = 51.5
0
2
4
6
8
10
12
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 5, b = 1
Distribución a posteriori: a = 10, b = 52
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 5, b = 2
Distribución a posteriori: a = 10, b = 53
8
6
4
2
0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 5, b = 3
Distribución a posteriori: a = 10, b = 54
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


Distribución a priori y a posteriori
Distribución apriori: a = 5, b = 5
Distribución a posteriori: a = 10, b = 56
0
2
4
6
8
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0