Rodríguez Fitta José Emanuel

1. En una encuesta realizada a 100 personas, se consultó sobre el medio de comunicación que usan para leer un diario de noticias. En la respuesta, 60 mencionaron que lo hacen a través de la publicación impresa, 30 en su versión digital. Se tiene registrado que 20 lo hacen en ambas, es decir, en el formato impreso y también en digital.

   ¿Cuál es la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente lea el diario (exclusivamente) en la versión impresa o en la versión digial?

   - La probabilidad de que el medio mediante el cual se lea un diario de noticias sea una publicación impresa es $P(I) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
   - Mientras que la probabilidad de sea a través de un medio digital es $P(D) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$.
   - Y la probabilidad de que se haga en ambos medios es $P(D \bigcap I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

   Por lo cual la probabilidad de que una persona elegida al azar lea el diario en la version impresa o en la versión digital es
   $P(D \bigcup I) = P(D) + P(I) - P(D \bigcap I) = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$

2. De 10 juegos disputados de un equipo deportivo, 5 lo hace como local, 3 como visitante y 2 en una cancha neutral. Se sabe que, dado que es local, su probabilidad de ganar un juego es de 80%, si es visitante, esta disminuye a 20% y en una cancha neutral su probabilidad (condicional) de victoria es 50%.

   Determina la probabilidad total de ganar un partido para este equipo. Luego, dado que ganó, calcula la probabilidad condicional de que esta victoria haya sido como local.

   - La probabilidad de jugar un juego como local es $P(L) = \frac{5}{10} = 0.5$
   - La probabilidad de jugar un juego como visitante es $P(V) = \frac{3}{10} = 0.3$
   - La probabilidad de jugar en una cancha neutral es $P(N) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$
   - La probabilidad de ganar un juego dado que es local es $P(G|L) = 0.80$
   - La probabilidad de ganar un juego dado que es visitante es $P(G|V) = 0.20$
   - La probabilidad de ganar un juego dado que es en una cancha neutral es $P(G|N) = 0.50$

Entonces la probabilidad total de ganar es

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G|L)P(L) + P(G|V)P(V) + P(G|N)P(N) \\ &= (0.80)(0.5) + (0.20)(0.3) + (0.5)(0.2) = 0.4 + 0.06 + 0.1 = 0.56 \end{aligned}$$

Y la probabilidad condicional de que la victoria sea como local es

$$P(L|G) = \frac{P(G|L)P(L)}{P(G)} = \frac{(0.80)(0.5)}{0.56} = 0.71$$

3. Si X toma los valores $0, 1$ y 2 con probabilidad $\frac{1}{3}$ cada uno. Determina su media (esperanza) y varianza.
La función de probabilidad es

$$P(X = j) = \frac{1}{3},$$

para $j = 1, 2, 3$. La media (esperanza) es

$$E[X] = x_0 P(X = x_1) + x_1 P(X = x_2) + x_2 P(X = x_3) = 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) = 1.$$

La varianza es

$$\begin{aligned} \mu_2 = Var(X) = E[(X-\mu)^2] &= (0-1)^2 P(X = x_1) + (1-1)^2 P(X = x_2) + (2-1)^2 P(X = x_3) \\ &= 1\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. Para la función $f(x) = c$, $0 < x < 3$, halla la constante c que le permita ser una función de densidad. Escribe su función de distribución. Calcula su media y variana.

Para ser función de densidad se debe cumplir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

entonces

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^3 c dx = cx|_0^3 = 3c$$

por lo que $c = \frac{1}{3}$. Luego la función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}x$$

Es claro que se cumple $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$. La esperanza o media es

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}xdx = \frac{1}{6}x^2|_0^3 = \frac{1}{6}(9) = \frac{3}{2}$$

La varianza es

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_0^3 \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{9} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x\right)\Big|_0^3$$
$$= 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

5. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias con función de distribución continua, dada por

$$F(x_1, x_2) = \begin{cases} (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2}) & si \quad x_1 > 0, x_2 > 0, \\ 0 & \text{en otro caso} \quad . \end{cases}$$

A partir de esta, determina la función de densidad conjunta. Encuentra las densidades marginales y verifica si las variables aleatorias son independientes. Finalmente, calcula la distribución condicional de X_1 dada X_2.

La función de densidad conjunta es

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2)$$

Entonces

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_1} e^{-x_2}(1-e^{-x_1}) = e^{-x_1}e^{-x_2}$$

si $x_1 > 0, x_2 > 0$ y 0 en otro caso. Las densidad marginales serán

$$f(x_1) = f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 = \int_0^{\infty} e^{-x_1}e^{-x_2}dx_2 = -e^{-x_1}e^{-x_2}|_0^{\infty} = e^{-x_1}$$
$$f(x_2) = f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 = \int_0^{\infty} e^{-x_1}e^{-x_2}dx_1 = -e^{-x_2}e^{-x_1}|_0^{\infty} = e^{-x_2}$$

dado que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ entonces son variables aleatorias independientes. Por último la distribución condicional de X_1 dada X_2 es

$$F(x_1|x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \frac{f(u,y)}{f(y)}du = \int_0^{x_1} \frac{e^{-u}e^{-y}}{e^{-y}}du = -e^{-u}|_0^{x_1} = 1 - e^{-x_1}$$