Demostrar que 2 traslaciones en coordenadas homogeneas

definicion conmutativa ~~(f o g)(x)~~ $F(x,y) = z$ es

lo mismo que $F(y,x) = z$

consideramos 2 translaciones

$$t(dx1, dy1) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & dx1 \\ 0, & 1, & dy1 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \quad t(dx2, dy2) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & dx_2 \\ 0, & 1, & dy_2 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

$$t(dx1, dy1) \cdot t(dx2, dy2) =$$

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & dx1 \\ 0, & 1, & dy1 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & 0, & dx2 \\ 0, & 1, & dy2 \\ 0, & 0, & 1 \end{vmatrix} =$$

Primera columna

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + dx1 \cdot 0 = 1$

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + dy1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

$\therefore$ =

segunda columna

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + dx1 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + dy1 \cdot 0 = 1$

$0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$

tercera columna

$1 \cdot dx2 + 0 \cdot dy2 + dx1 \cdot 1 = dx1 + dx2$

$0 \cdot dx2 + 1 \cdot dy2 + dy1 \cdot 1 = dy1 + dx2$

$0 \cdot dx2 + 0 \cdot dy2 + 1 \cdot 1 = 1$

= ...

$= \begin{matrix} 1, & 0, & dx1 + dx2 \\ 0, & 1, & dy1 + dy2 \\ 0, & 0, & 1 \end{matrix}$

la suma es comutativa por eso cambia $dx2 + dx1$ por $dxy2 + dy2$ por...

$dx1 + dx2$

$dy1 + dy2$

ahora los mutiplico en el otro orden

$T(dx2, dy2) \cdot T(dx1, dy1) =$

$\begin{matrix} 1 & 0 & dx2 \\ 0 & 1 & dy2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & dx1 \\ 0 & 1 & dx2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} =$

Primera columna

$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + dx2 \cdot 0 = 1$

$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + dy2 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

segunda columna

$1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + dx2 \cdot 0 = 0$

$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + dy2 \cdot 0 = 1$

$0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$

tercera columna

$1 \cdot dx1 + 0 \cdot dy1 + dx2 \cdot 1 = dx1 + dx2$

$0 \cdot dx1 + 1 \cdot dy1 + dy2 \cdot 1 = dy1 + dy2$

$0 \cdot dx1 + 0 \cdot dy1 + 1 \cdot 1 = 1$

$= \begin{matrix} 1 & 0 & dx1 + dx2 \\ 0 & 1 & dy1 + dy2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$

Vemos que ambas matrices son iguales ~~con esto~~ al mutiplicarlas en diferentes orden

con esto demostramos esta comutatividad.