

LÓGICA PROPOSICIONAL

SISTEMA DE INFERENCIA DIFUSA – MAMDANI

Gustavo Javier Meschino

LÓGICA PROPOSICIONAL

Gustavo Javier Meschino

Escala de multas por diferentes criterios

Exceso en el límite de velocidad:

$$\text{Valor de la multa} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq 50 \\ 120 & \text{si } 50 < v < 60 \\ 366 & \text{si } 60 \leq v < 70 \\ 720 & \text{si } v \geq 70 \end{cases}$$

¿Tiene sentido pagar lo mismo si se ha excedido 1km/h o si se ha excedido 10 km/h?



Alcoholemia:

$$\text{Valor de la multa} = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{indice} \leq 0.22 \\ 120 & \text{si } 0.22 < \text{indice} < 0.30 \\ 366 & \text{si } 0.30 \leq \text{indice} < 0.40 \\ 720 & \text{si } \text{indice} \geq 0.40 \end{cases}$$

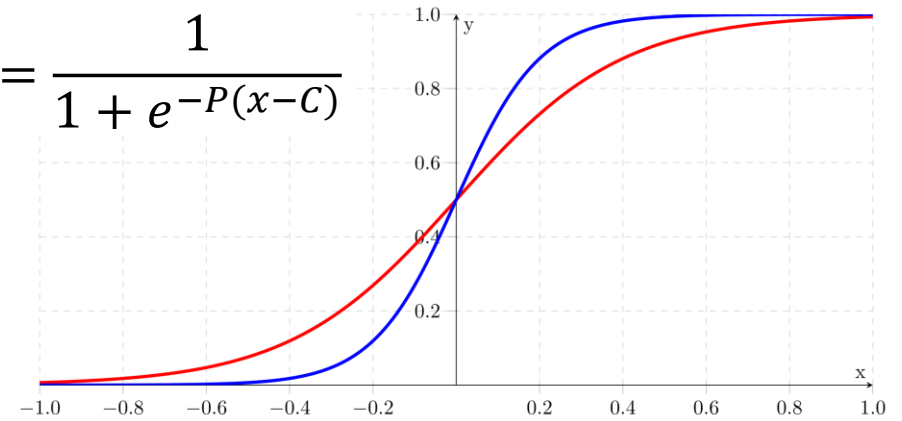
¿Es justo pagar lo mismo si se ha excedido 0.01 o si se ha excedido en 0.07?

De valores por rangos a valores difusos

Exceso en el límite de velocidad:

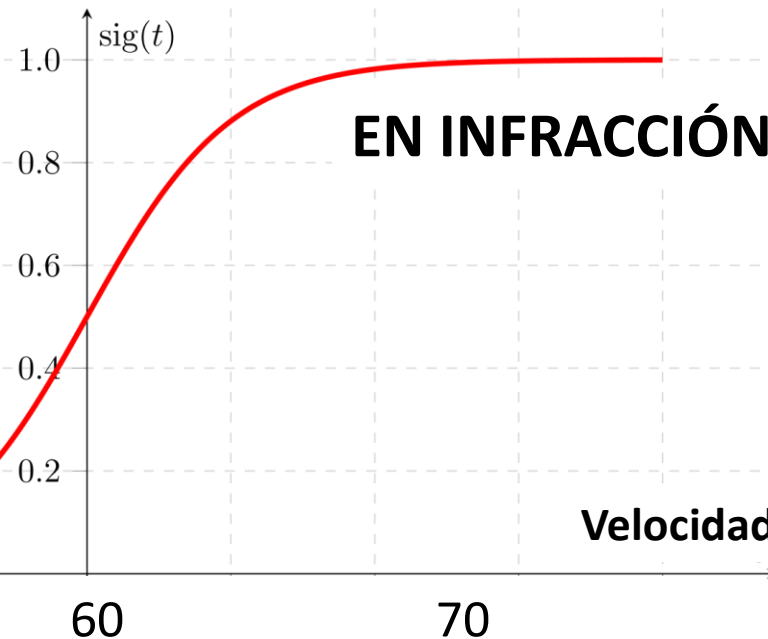
$$\text{Valor de la multa} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \leq 50 \\ 120 & \text{si } 50 < v < 60 \\ 360 & \text{si } 60 \leq v < 70 \\ 720 & \text{si } v \geq 70 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-P(x-C)}}$$



Diferentes valores del Parámetro de la función sigmoidea

Definimos un criterio para:
Velocidad EN INFRACCIÓN



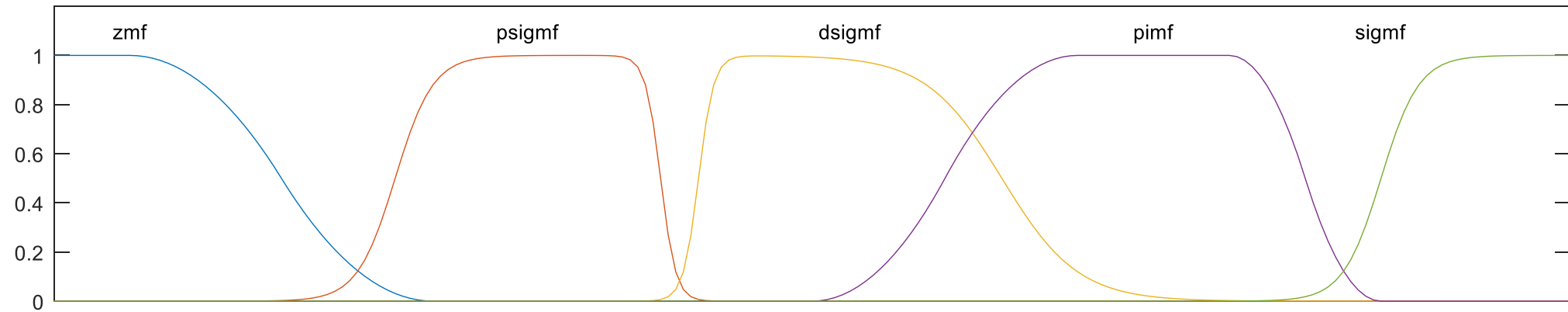
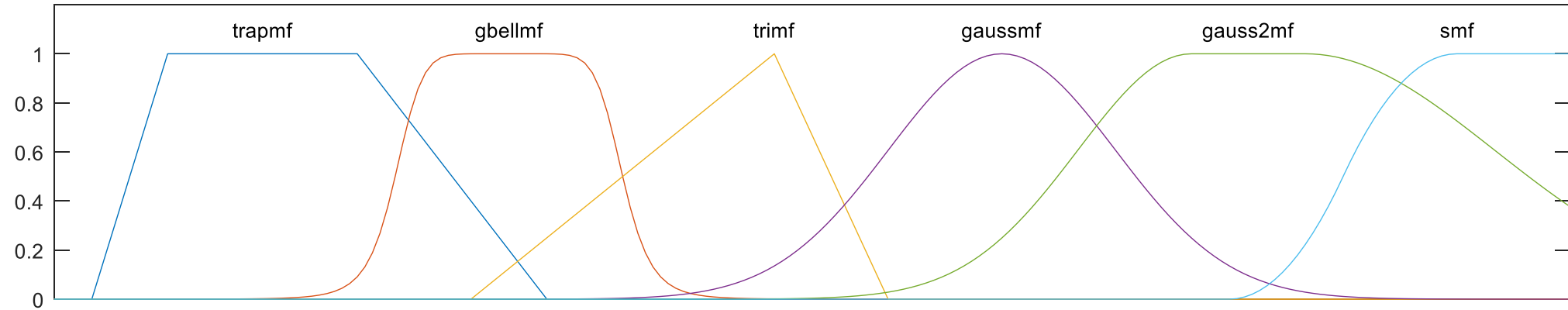
Posible solución

Multa: proporcional a cuán
cierto es que “la velocidad es alta”

p = “La velocidad es alta”

$$\text{multa} = 720 \times \mu_p$$

Posibles funciones de pertenencia



Dualidad conjunto \leftrightarrow proposición

$p(x) \equiv$ “El píxel x es GRIS-OSCURO”



El píxel pertenece al conjunto GRIS-OSCURO

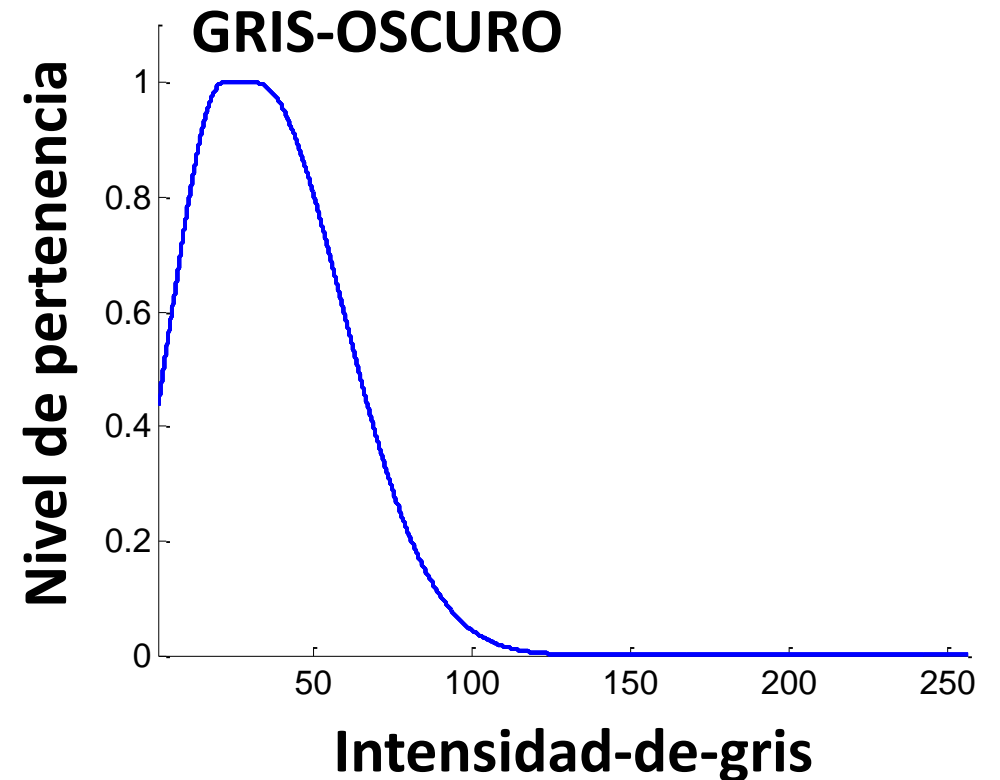
Conjunto NO difuso:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si y sólo si } x \in A \\ 0 & \text{si y sólo si } x \notin A \end{cases}$$

Conjunto difuso:

$$A = \{[x, \mu_A(x)] \text{ con } x \in X\}$$

$$\mu_A(x) \in [0, 1]$$



Operadores booleanos y difusos

CONJUNCIÓN

| p | q | $p \wedge q$ |
|-----|-----|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

DISYUNCIÓN

| p | q | $p \vee q$ |
|-----|-----|------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

IMPLICACIÓN

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|-----|-----|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg p \wedge (p \vee q)$$

NEGACIÓN

| p | $\neg p$ |
|-----|----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

¿Cómo trabajaríamos si consideramos el 0 y 1 como valores de verdad, que operen numéricamente?

Operadores como valores de verdad

CONJUNCIÓN

| μ_p | μ_q | $c(\mu_p, \mu_q)$ |
|---------|---------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

DISYUNCIÓN

| μ_p | μ_q | $d(\mu_p, \mu_q)$ |
|---------|---------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

IMPLICACIÓN

| μ_p | μ_q | $d(1 - \mu_p, \mu_q)$ |
|---------|---------|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

NEGACIÓN

| μ_p | $1 - \mu_p$ |
|---------|-------------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Las operaciones con los valores de verdad son **ARITMÉTICAS**, no lógicas.

Extensión difusa de AND y OR

CONJUNCIÓN

| μ_p | μ_q | $c(\mu_p, \mu_q)$ |
|---------|---------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0,1 | 0,5 | |
| 0,1 | 0,2 | |
| 0,1 | 0,9 | |
| 0,8 | 0,1 | |

$$c(\mu_p, \mu_q) = \min(\mu_p, \mu_q)$$

$$c(\mu_p, \mu_q) = \mu_p \mu_q$$

$$c(\mu_p, \mu_q) = \sqrt{\mu_p \mu_q}$$

DISYUNCIÓN

| μ_p | μ_q | $d(\mu_p, \mu_q)$ |
|---------|---------|-------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| 0,1 | 0,5 | |
| 0,1 | 0,2 | |
| 0,1 | 0,9 | |
| 0,8 | 0,1 | |

$$c(\mu_p, \mu_q) = \max(\mu_p, \mu_q)$$

$$c(\mu_p, \mu_q) = \mu_p + \mu_q - \mu_p \mu_q$$

$$c(\mu_p, \mu_q) = 1 - \sqrt{(1 - \mu_p)(1 - \mu_q)}$$

Extensión difusa de AND y OR

AND

T -Norm $T(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Minimum

$\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Algebraic product

$\mu_A(x)\mu_B(x)$

Drastic product

$\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 1$
0 otherwise

Lukasiewicz AND (Bounded Difference)

$\text{MAX}(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$

Einstein product

$\mu_A(x)\mu_B(x) / (2 - (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)))$

Hamacher product

$\mu_A(x)\mu_B(x) / (\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x))$

Yager operator

$1 - \text{MIN}(1, ((1 - \mu_A(x))^b + (1 - \mu_B(x))^b)^{1/b})$

OR

S -Norm $S(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Maximum

$\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Algebraic sum

$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)$

Drastic sum

$\text{MAX}(\mu_A(x), \mu_B(x))$ if $\text{MIN}(\mu_A(x), \mu_B(x)) = 0$
1 otherwise

Lukasiewicz OR (Bounded Sum)

$\text{MIN}(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$

Einstein sum

$(\mu_A(x) + \mu_B(x)) / (1 + \mu_A(x)\mu_B(x))$

Hamacher sum

$(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 2\mu_A(x)\mu_B(x)) / (1 - \mu_A(x)\mu_B(x))$

Yager operator

$\text{MIN}(1, (\mu_A(x)^b + \mu_B(x)^b)^{1/b})$

Valor de verdad de una proposición

Por medio de una función de pertenencia

Requiere variable lingüística.

Por medio de opciones

Como la escala de Likert. $p(x) \equiv$ “El servicio x es bueno.”

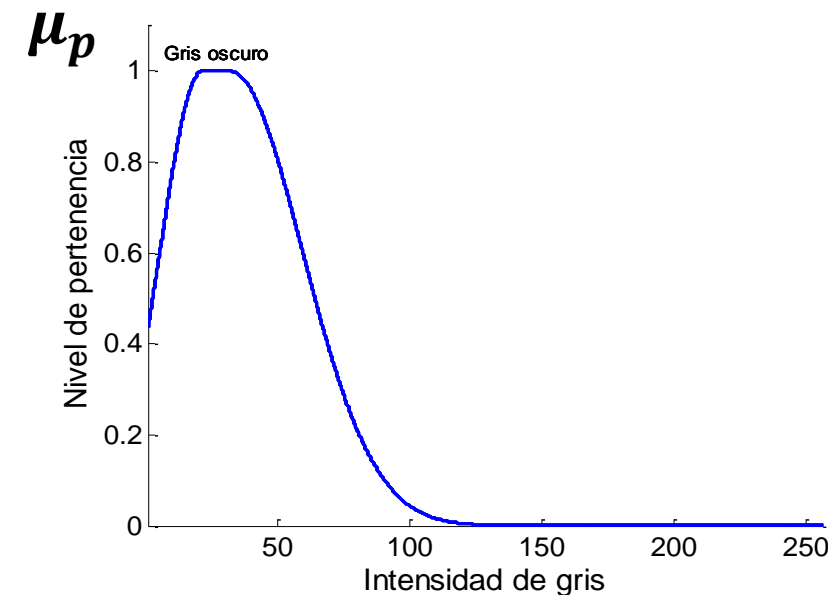
| | | | | |
|----------------------------------|--------------------|---|-----------------|-------------------------------|
| Totalmente en desacuerdo ○ | En desacuerdo ○ | Ni de acuerdo, ni en desacuerdo ○ | De acuerdo ○ | Totalmente de acuerdo ○ |
| $\mu_p = 0$ | $\mu_p = 0,25$ | $\mu_p = 0,5$ | $\mu_p = 0,75$ | $\mu_p = 1$ |

Subjetivamente

Un experto asigna cuán cierta es una proposición.

$p(x) \equiv$ “El sistema es apropiado.”

$p(x) \equiv$ “El píxel x es gris oscuro”



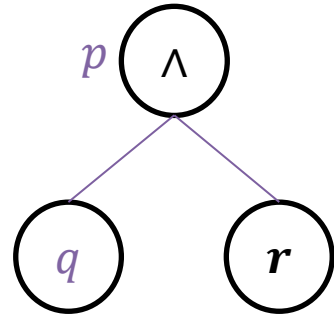
Proposiciones compuestas

Expresión lingüística: $p(x) \equiv$ “El candidato x es joven y tiene experiencia.”

Expresión lógica: $p(x) \equiv q(x) \wedge r(x)$

Valor de verdad: $\mu_p \equiv \max(\mu_q, \mu_r)$ \circ $\mu_p \equiv \sqrt{\mu_q \mu_r}$ \circ ...

Como árbol:



Operando con los grados de verdad de las
PROPOSICIONES SIMPLES
se calcula el grado de verdad de las
PROPOSICIONES COMPUESTAS.

Proposición compuesta más compleja

$p(x) \equiv$ “El candidato x es apropiado cuando es joven, tiene buena formación o tiene experiencia en el tema, y se expresa correctamente.”

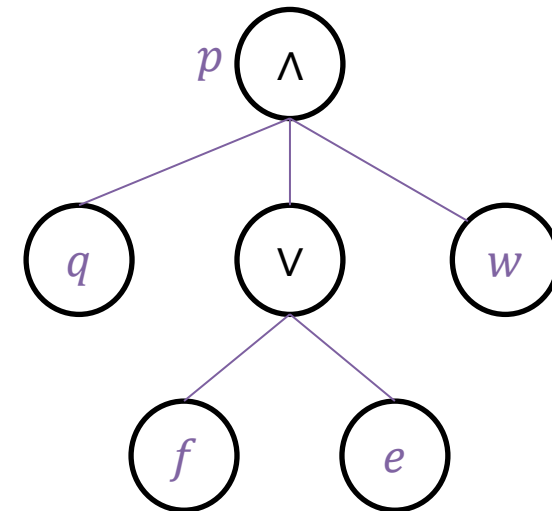
Proposiciones simples:

$p(x) \equiv$ “El candidato x es apropiado”
 $q(x) \equiv$ “El candidato x es joven”
 $f(x) \equiv$ “El candidato x tiene buena formación”
 $e(x) \equiv$ “El candidato x tiene experiencia en el tema”
 $w(x) \equiv$ “El candidato x se expresa correctamente.”

Expresión lógica:

$$p(x) \equiv j(x) \wedge [f(x) \vee e(x)] \wedge w(x)$$

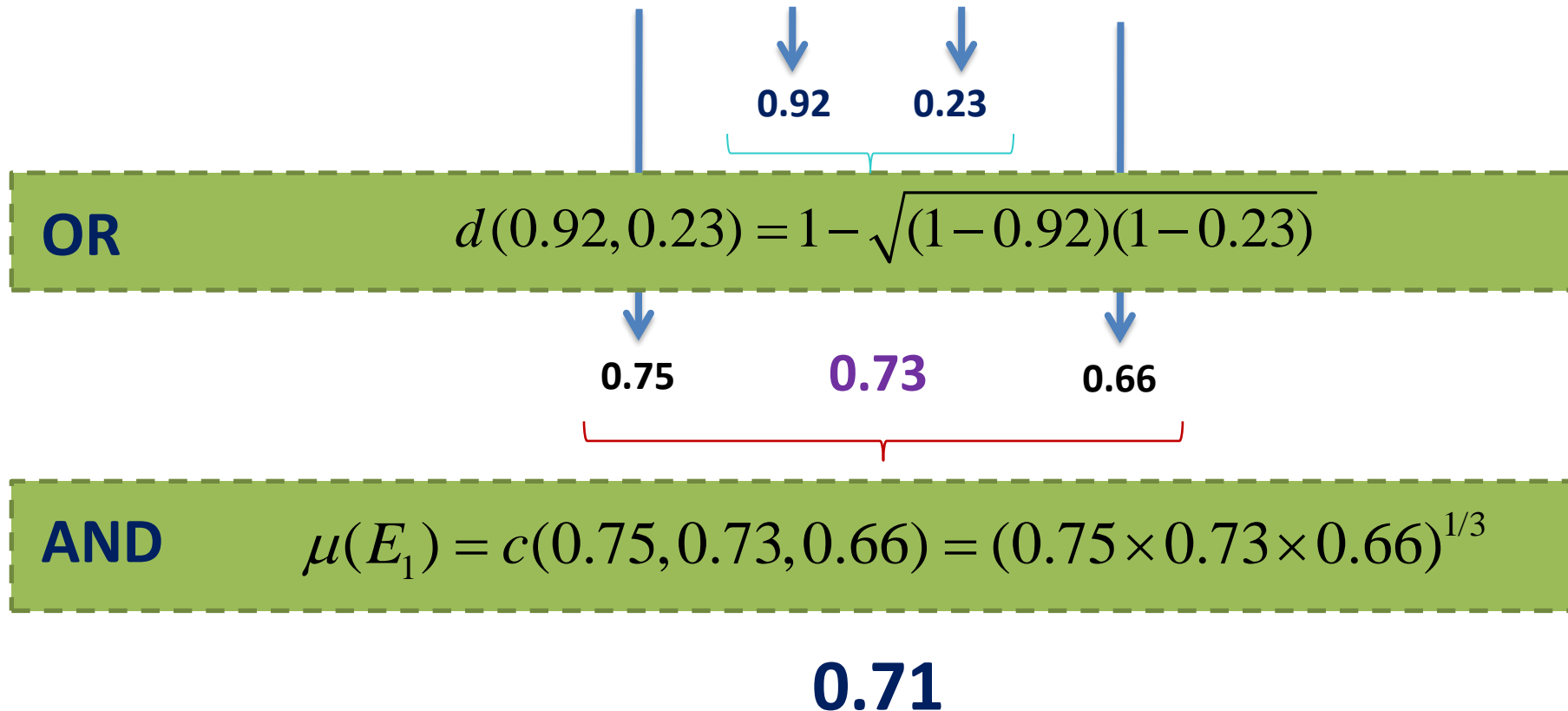
Como árbol:



Cálculo del valor de verdad (compensatoria)

$p(x) \equiv$ “El candidato x es apropiado cuando es joven, tiene buena formación o tiene experiencia en el tema, y se expresa correctamente.”

$$p(x) \equiv j(x) \wedge [f(x) \vee e(x)] \wedge w(x)$$



Vulnerabilidad - Fuzzy Tree Studio

General Preferencias

Nuevo proyecto Abrir proyecto Guardar Guardar todos Cerrar proyecto

Agregar elemento Elemento seleccionado Exportar Imprimir elemento

Agregar predicado Borrar predicado Propiedades Edición de diagramas

Diagrama Restaurar Visualización Evaluar diagrama Resolución

Expresión lingüística

$\{ \{ \{ (Rareza1), (Criticidad1) \circ (Irreemplazabilidad1) \} \circ \{ (Rareza2), (Criticidad2) \circ (Irreemplazabilidad2) \} \} \vee \{ (Intensidad\ del\ disturbio), (Duración\ del\ disturbio) \circ (Extensión\ del\ disturbio) \} \} \vee (Ineficacia\ de\ la\ Gestión\ Ambiental)$

Herramientas

Puntero Selección

Predicados Co... Y (And) O (Or) No (Not) Implicación

Predicados Si... Variable difusa

Diagrama1 *

Rareza1 Criticidad1 Irreemplazabilidad1 Vce1 Valor conservativo relativo al área Rareza2 Criticidad2 Irreemplazabilidad2 Vce2 Conflictividad Vulnerabilidad del área Intensidad del disturbio Duración del disturbio Extensión del disturbio Presión

Explorador del proyecto

Vulnerabilidad Datos2 Diagrama1

Propiedades

Unidad de m Valor mínimo 0 Valor máximo 100 Tipo de func Forma Z Parámetros

Tipo de función

Tipo de función de pertenencia ...

Función de pertenencia

Grado de Pertenencia

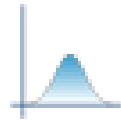
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

Lista de errores

✓ Listo

Peso 16 Simples 10 Compuestos 6 Altura 5 Grado 3

Predicados Simples



Variable difusa



Etiqueta



Numérico continuo

Predicados Compuestos



Y (And)



O (Or)



No (Not)



Barra de herramientas de evaluación de diagramas:




- Proyecto:** Cerrar proyecto, Guardar, Guardar todos, Agregar elemento, Elemento seleccionado, Exportar, Imprimir elemento.
- Edición de diagramas:** Agregar predicado, Borrar predicado, Propiedades.
- Visualización:** Diagrama (menú desplegable), Restaurar.
- Resolución:** Evaluar diagrama.

Evaluar diagrama (F5)
Permite seleccionar un conjunto de datos y evaluar la estructura diseñada. Los resultados serán mostrados en una grilla y representados visualmente a través de diagramas.

Evaluación



Seleccione y configure los modelos a evaluar

| | Modelo para operadores | Y (And) | O (Or) |
|--------------------------|---|-------------------------|------------------------------|
| <input type="checkbox"/> |  Estándar / Máx-Mín | Mínimo | Máximo |
| <input type="checkbox"/> |  Probabilístico / Algebraico | Producto | Disyunción probabilística |
| <input type="checkbox"/> |  GMBCL (Geometric Mean Based Compensatory Logic) | Media geométrica | Dual de la media geométrica |
| <input type="checkbox"/> |  AMBCL (Arithmetic Mean Based Compensatory Logic) | Conjunción basada en... | Disyunción basada en media a |
| <input type="checkbox"/> |  Personalizado | Mínimo | Máximo |



Siguiente >

Cancelar

Resultados de la evaluación



Exportar / Imprimir Cerrar



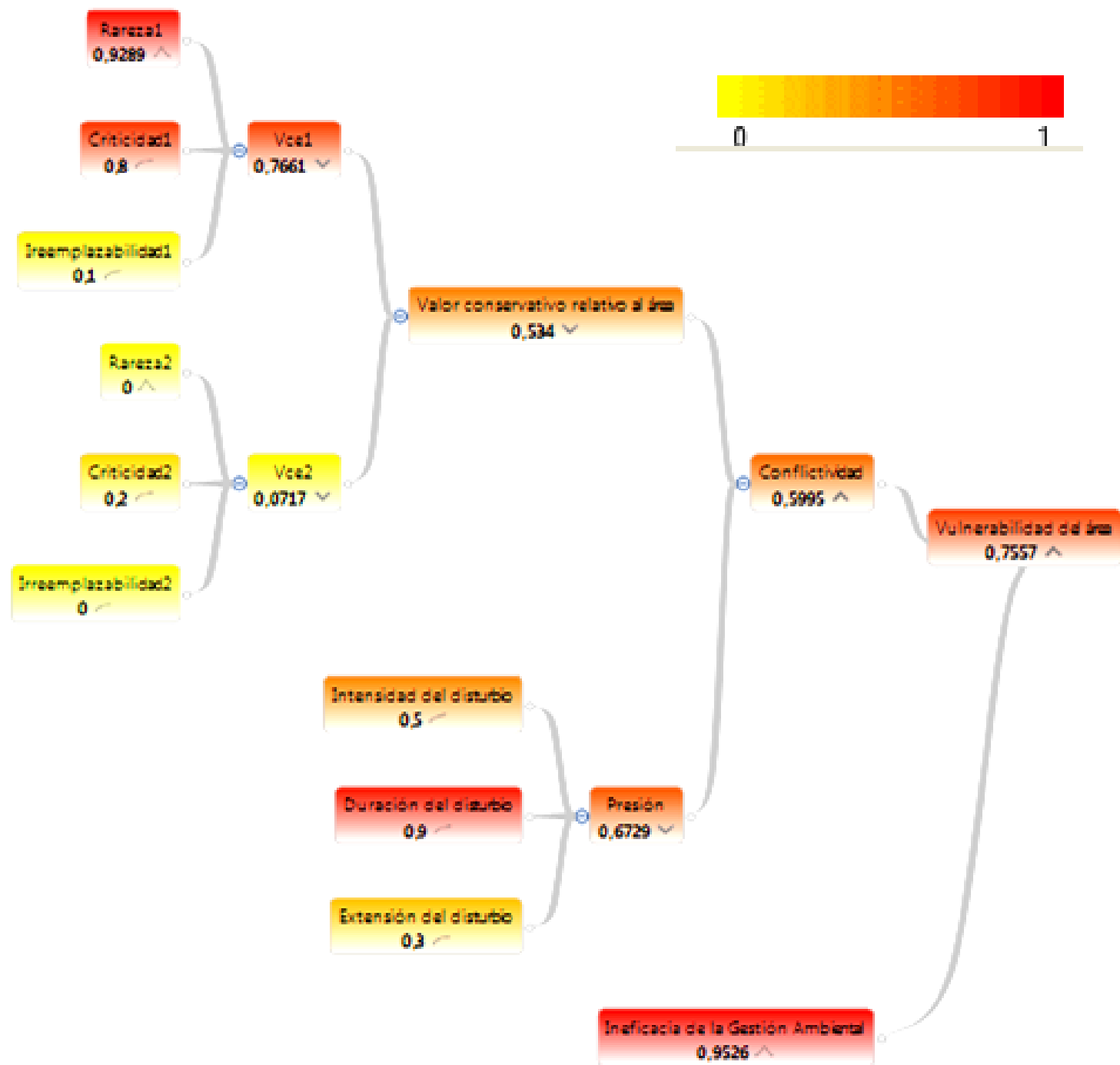
(Haga click sobre una celda de resultado para obtener el diagrama detallado de la evaluación de ese registro)

| | icid ▾ ▹ | Iree ▾ ▹ | Rareza2 ▾ ▹ | Criticid ▾ ▹ | Irre ▾ ▹ | In ▾ ▹ | Duración ▾ ▹ | Exte ▾ ▹ | Inefi ▾ ▹ | Estándar / Máx-M ▾ ▹ | Probabilístico / ▾ ▹ ▹ ▹ | GMBCL (Geometri ▾ ▹ | AMBCL (Arithmeti ▾ ▹ |
|---|----------|----------|-------------|--------------|----------|--------|--------------|----------|-----------|----------------------|--------------------------|---------------------|----------------------|
| 1 | ▶ | 0,1 | 75 | 0,2 | 0 | 0,5 | 0,9 | 0,3 | 0,8 | 0,9 | 0,9098 | 0,7557 | 0,7821 |
| 2 | | 0,2 | 25 | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,6 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,8792 | 0,7257 | 0,7438 |
| 3 | | 0,3 | 3 | 0,4 | 0,5 | 0,7 | 0,6 | 0,1 | 0,9 | 0,7 | 0,8755 | 0,7756 | 0,7353 |
| 4 | | 0,7 | 10 | 0,9 | 0 | 0,8 | 0,2 | 0,01 | 0,8 | 0,8 | 0,7965 | 0,6975 | 0,7285 |
| 5 | | 0,9 | 18 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,8 | 0,5 | 0,5 | 0,4185 | 0,4862 | 0,5366 |
| 6 | | 1 | 5 | 0,7 | 1 | 0,5 | 0,8 | 0,5 | 0,2 | 0,0474 | 0,0451 | 0,1941 | 0,1405 |
| 7 | | 0,9 | 87 | 0,1 | 0,9 | 0,8 | 0,6 | 0,2 | 0,2 | 0,0474 | 0,0444 | 0,181 | 0,1371 |
| 8 | 5 | 0,2 | 10 | 0,8 | 0,8 | 0,8 | 0,2 | 0 | 0,1 | 0,018 | 0,0151 | 0,0983 | 0,0779 |

Operadores cuantificadores

| | | | |
|-------------------|-----------------|--------------------|--------------------|
| Existe = 0,9 | Existe = 0,9999 | Existe = 0,5605 | Existe = 0,6651 |
| Para todo = 0,018 | Para todo = 0 | Para todo = 0,3865 | Para todo = 0,1944 |





Ejemplo sencillo de aplicación



+38°

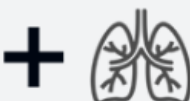
Fiebre



con tos



con dolor de garganta



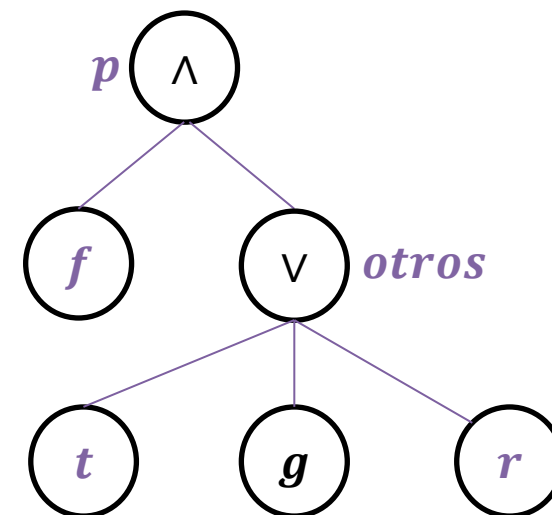
con dificultades para respirar

$pr(x) \equiv$ “El paciente x debe llamar a emergencias cuando tiene fiebre alta y además tiene alguno de los siguientes síntomas: tos, dolor de garganta, dificultad para respirar.”

Expresión lógica:

$$p(x) \equiv f(x) \wedge [t(x) \vee g(x) \vee r(x)]$$

Como árbol:



Proposiciones simples:

$p(x) \equiv$ “ El paciente x debe llamar a emergencias”

$f(x) \equiv$ “El paciente x tiene fiebre ”

$t(x) \equiv$ “El paciente x tiene tos”

$g(x) \equiv$ “El paciente x tiene dolor de garganta”

$r(x) \equiv$ “El paciente x tiene dificultad para respirar”

Gustavo Javier Meschino
gustavo.meschino@gmail.com

