

EQUATIONS DIOPHANTIENNES

entier relatif (+ ou -)

EG. D
RCM

DEFINITION

$ax + by = c$ (E) avec $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$

on cherche des solutions entières

avec $a \neq 0$ & $b \neq 0 \rightarrow$ sinon sans intérêt..

\rightarrow ce ne sont pas des réels ce sont des entières.

\rightarrow tout ces nombres sont des entières.

a et b sont les paramètres appelés en math les COEFFICIENTS

x et y sont les variables appelés en math les INCONNUES

(E) \rightarrow on dit l'équation (E)

EXISTENCE DE SOLUTIONS

(E) admet des solutions \iff PGCD(a, b)
divise c

SIGNIFIE SI ET SEULEMENT SI

\Downarrow
Si le PGCD ne divise pas c
 \rightarrow c'est qu'il n'y a pas de solution

Ex: $4x - 2y = 1$

$\text{PGCD}(4, 2) = 2$

$4 = 2 \times 2 + 0$
 \uparrow
dernier reste
entier non
nul

et 2 ne divise pas 1, c-à-d 1

\rightarrow on a contredit l'existence de solutions il n'y en a pas.

\rightarrow on ne va pas plus loin, $S = \emptyset$

\uparrow
ensemble vide.

ON A RECHERCHER DES COUPLES DE SOLUTIONS diophantiennes x, y

\rightarrow soit il n'y en a pas.

\rightarrow soit il y en a une infinité.

Exercices EQUATIONS DIOPHANTIENNES.

EQU
RO2

$$41x - 27y = 1 \quad (E) \quad \text{dans } \mathbb{Z}^2 \leftarrow (41; 27) = 2 \text{ TERMES}$$

ETAPE ① cherchons PGCD de 41 et 27, puis VÉRIFIONS QUE CA VÉRIFIE $\leq \begin{pmatrix} \text{PGCD}(a, b) \\ \text{divise } c \end{pmatrix}$

$$41 = 1 \cdot 27 + 14$$

$$27 = 1 \cdot 14 + 13$$

$$14 = 1 \cdot 13 + 1 \rightarrow \text{DERNIER RESTE NON NULL} = \text{PGCD} = 1$$

$$1 = 1 \cdot 1 + 0$$

$$\text{Ainsi } \text{PGCD}(41; 27) = 1$$

REMARQUE : COMME PGCD = 1
41 et 27 sont premiers entre eux

$$c = 1$$

1 divise bien 1. \rightarrow l'équation (E) admet des solutions.
(PGCD) (c)

ETAPE ② cherchons une solution PARTICULIÈRE.
VIA REMONTEE DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE (voir figure N°02)

$$41 = 27 \times 1 + 14$$

$$27 = 14 \times 1 + 13$$

$$14 = 13 \times 1 + 1$$

\rightarrow ce 13 la vaut $14 - 1$ ($13 = 14 - 1$) \leftarrow j'ai posé les termes de l'autre côté.

$$41 = 27 \times 1 + 14$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

$$27 = 14 \times 1 + 14 - 1$$

DU COUP, POUR REECRIRE CETTE LIGNE, JE VAIS AVOIR BESOIN NON PAS DE 1×14 MAIS DE 2×14

JE MULTIPLIE DONC LA TOTALISE DE LA LIGNE PAR 2.

ILS SONT EGAL X!

JE REMPLACE DANS LA LIGNE $27 = 2 \times 14 - 1$

$$27 \text{ par } 27 + 1 = 2 \times 14$$

PASSE A GAUCHE

$$2 \times 41 = 27 \times 2 + 27 + 1$$

$$2 \times 41 = 27 \times 3 + 1 \leftarrow \text{JE REGROUPE LES } 27$$

$$2 \times 41 - 3 \times 27 = 1 \leftarrow \text{JE PASSE LES } 3 \times 27 \text{ A GAUCHE ...}$$