Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática
LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría II 2023

PRÁCTICA 5: Geometría Analítica del Plano

1. Marcar en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:

$$A(2,3);\ B(0,4);\ C(-2,3);\ D(3,-3);\ E\left(-\frac{1}{2},1\right);\ F(-1,1);\ G(3,-2);\ H\left(-\frac{3}{2},0\right).$$

2. A partir del gráfico anterior, hallar las coordenadas de los puntos:
   a) simétricos de A, B C y D respecto al eje y.
   b) simétricos de B, D, E y H respecto al eje x.
   c) simétricos de A, B C y D respecto al origen.

3. En cada uno de los siguientes items, realizar un gráfico de la situación y razonar geométricamente sobre el mismo para encontrar las coordenadas de todos los puntos que verifican:
   a) están en el segundo o tercer cuadrante, a distancia 3 del eje x y distancia 2 del eje y.
   b) están a distancia 7 del eje x y 4 del eje y.
   c) están en el tercer cuadrante, a distancia 5 del origen y a distancia 3 del eje x.
   d) están a distancia 13 del punto $(1,0)$ y a distancia 5 del eje x.

4. En este ejercicio se describen distintos lugares geométricos del plano. Hallar en cada caso una o más condiciones algebraicas que solo cumplen las coordenadas (x,y) de sus puntos.
   a) Recta paralela al eje x que contiene al punto $(3,6)$.
   b) Recta paralela al eje y que contiene al punto $(10,-3)$.
   c) El eje y.
   d) El semiplano que determina la unión del primero y el cuarto cuadrante.
   e) El semiplano que determina la unión del primero y el segundo cuadrante.
   f) La recta r que determinan los puntos $P(2,1)$ y $Q(2,1000)$.
   g) El semiplano que tiene como frontera la recta r del item anterior y contiene al punto $R(3,200)$.
   h) Un cuadrado de lado 6 con centro en el origen.
   i) Circunferencia con centro en $P(7,-1)$ y radio 5.
   j) Círculo con centro en el origen y radio 1.
   k) Puntos que distan del origen más que 5.

5. Determinar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

   a) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(0,0)$ y el radio es $a = \sqrt{3}$.

   b) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(-2,3)$ y el radio es $a = 2$.

   c) El centro de $\mathcal{C}$ es el punto $C(1,1)$ y $P(4,5) \in \mathcal{C}$.

   d) $\mathcal{C}$ pasa por $P(1,1)$ y por $Q(3,3)$ y el centro C de $\mathcal{C}$ pertenece al segmento $\overline{PQ}$.

   e) $\mathcal{C}$ pasa por los puntos $P(5,2)$, $Q(-3,4)$ y $R(1,2)$.

   f) $\mathcal{C}$ es la circunferencia circunscripta a $\overset{\triangle}{ABC}$, con $A(1,-1)$, $B(0,1)$ y $C(-3,-3)$.

   g) $\mathcal{C}$ tiene su centro sobre la recta de ecuación $3x - 3y - 8 = 0$ y para por $P(5,-2)$ y $Q(2,3)$.

6. *a*) Dada la circunferencia $\mathcal{C}$ de ecuación $x^2+y^2 = 4$, determinar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ por el punto P dado en cada caso:

   1) $P(0,-2)$, 2) $P(2,0)$, 3) $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$

   b) Hallar la ecuación de la circunferencia $\mathcal{C}$ con centro en $C(1,1)$ tangente a los ejes coordenados.

   c) Hallar la ecuación de las circunferencias de radio 2 que la recta $t)$ $x+y-2 = 0$ es tangente a cada una de ellas en el punto $P(1,1)$.

7. Hallar la intersección de la circunferencia de ecuación $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ con la recta r de ecuación indicada en cada caso.

   a) $y = -x + 3$; *b*) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$; *c*) $x - y + 7 = 0$.

8. Hallar en cada caso la intersección de las circunferencias dadas.

   a) $\mathcal{C}_1)(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3$, $\mathcal{C}_2)$ $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;

   b) $\mathcal{C}_1)x^2 + y^2 - 6x - 2y - 8 = 0$, $\mathcal{C}_2)$ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$;

9. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes indicadas en cada caso:

   a) a la circunferencia de ecuación $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ que pasa(n) por el punto $P(-5,4)$;

   b) a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$, paralelas a la recta de ecuación $2x + y - 7 = 0$.

10. Determinar la ecuación de la elipse $\mathcal{E}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

   a) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(0,3)$ y $F_2(0,-3)$ y $2a = 10$.

   b) Los focos de $\mathcal{E}$ son $F_1(1,4)$ y $F_2(1,-3)$ y $b = 4$.

   c) Los vértices de $\mathcal{E}$ son $V_1(-5,1)$, $V_2(5,2)$, $V_3(0,4)$ y $V_4(0,-2)$.

   d) El centro es $C(1,2)$, uno de sus vértices es $V(1+\sqrt{5},2)$ y uno de sus focos es $F(1,-1)$.

11. Determinar los lugares geométricos que representan las siguientes ecuaciones y graficarlos. Determinar sus ecuaciones paramétricas y en caso que sean elipses, determinar los puntos que describen los parámetros $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi/4$ y $\theta = \frac{5}{3}\pi$.

   a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

   b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{25} = 1$

   c) $3x^2 - 6x = -4y^2 - 9$

   d) $2x^2 - 4x + y^2 - 2y + 3 = 0$

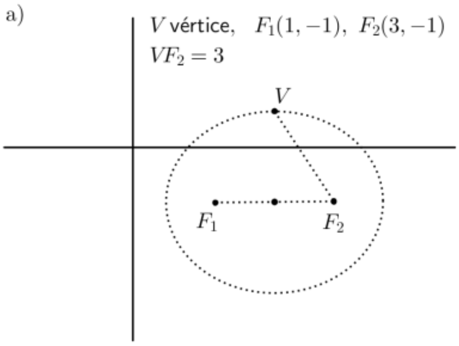
   e) $4x^2+y^2+8x-2y-11 = 0$.

   f) $x^2+2x+52 = 20y-2y^2-1$

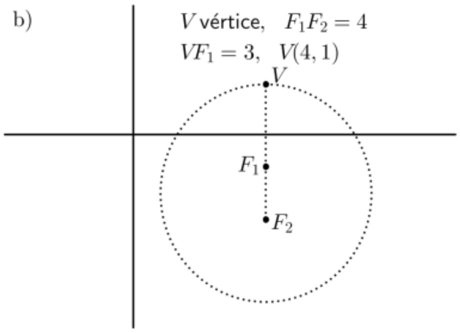
12. Determinar el área del cuadrilátero que tiene dos vértices en los focos de la elipse $x^2 + 5y^2 = 20$ y los otros dos coinciden con los vértices sobre su eje menor.

13. Determinar las ecuaciones cartesianas y paramétricas de las elipses de las siguientes figuras. Determinar las coordenadas de los focos y vértices.

a)



b)



14. Determinar todos los ejes de simetría de una elipse. Determinar si una elipse tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

15. Determinar la ecuación de la hipérbola $\mathcal{H}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

    a) Sus focos son $F_1(8,0)$, $F_2(-6,0)$ y $2a = 10$.

    b) El eje focal es la recta $x = 2$, el centro es $C(2,1)$, $c = 5$ y $a = 4$.

    c) Las asíntotas de la hipérbola son $r_1)$ $y = x + 1$, $r_2)$ $y = -x + 1$ y uno de sus vértices es $V(\frac{1}{2}, 1)$.

    d) Sus vértices son $V_1(1,0)$ y $V_2(1,2)$ y una de sus asíntotas es $r)$ $y = 2x - 1$.

16. Determinar los siguientes lugares geométricos y graficarlos. Si se trata de una hipérbola, determinar los vértices y las asíntotas y dar las ecuaciones paramétricas de las dos ramas.

    a) $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{24} = 1$

    b) $\dfrac{(y-1)^2}{48} - \dfrac{(x-2)^2}{27} = 3$

    c) $16x^2 - 32x - 9y^2 = 560$

    d) $x^2 + 4x - 24y = 4y^2 - 40$

    e) $y^2 - 9x^2 + 2y + 54x - 89 = 0$

    f) $2y^2 - x^2 - 2x + 8y + 8y + 7 = 0$

17. Calcular la distancia de un foco de la hipérbola de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a sus asíntotas.

18. Encontrar las intersecciones de la recta de ecuación $5x - 6y - 3\sqrt{5} = 0$ con la hipérbola de ecuación $\dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{1}{5}y^2 = 1$.

19. Determinar todos los ejes de simetría de una hipérbola. Determinar si una hipérbola tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

20. Determinar la ecuación de la parábola $\mathcal{P}$ que se pide en cada caso y representarla gráficamente.

    a) La directriz es el eje x y el foco es $F(3,3)$.

    b) La directriz es el eje y y el foco es $F(-1,-1)$.

    c) El vrtice es $P(1,1)$ y el foco es $F(3,1)$.

21. Determinar qué lugar geométrico representan las siguientes ecuaciones y graficarlos. En caso de ser una parábola, determinar el foco, la directriz y el vértice.

    a) $x^2 + 4y + 4 = 0$

    b) $5y^2 - 20y - 3x + 20 = 0$

    c) $2y^2 - 2y + x + 2 = x + 2$

    d) $x^2 - 8x - 8y + 24 = 0$

e) $3y^2 + 6y + x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 - 8$ *f*) $4y^2 + 100 = 40y$.

22. Hallar la intersección de la parábola $y^2 = 16x$ con cada una de las siguientes rectas:

    a) r_1) $x - y + 1 = 0$; *b*) r_2) $x - y + 4 = 0$; *c*) r_3) $x - y + 6 = 0$.

23. Hallar la intersección entre los lugares geométricos de ecuaciones $x^2 + y^2 = 4$ y $\sqrt{2}y = \sqrt{3}x^2$. Interpretar geométricamente.

24. Determinar todos los ejes de simetría de una parábola. Determinar si una parábola tiene centro de simetría y en ese caso decir cuál es.

25. Determinar qué lugar geométrico representan las siguientes ecuaciones. En caso de ser una cónica determinar sus elementos característicos (centro, radio, focos, vértices, asíntotas o directiz, según corresponda), representarlas gráficamente y dar sus ecuaciones paramétricas. Dar los ejes y centro de simetría en caso de tenerlos.

    a) $2x^2 + 3y^2 + 4x - 30y + 71 = 0$

    b) $2x^2 + 10y^2 + 4x - 20y + 12 = 0$

    c) $4y^2 + 3x - 8y + 4 = 0$

    d) $2x^2 - y^2 - 4x - 10y - 23 = 0$

    e) $2x^2 - 8y^2 + 4x + 16y + 2 = 0$

    f) $x^2 + 2y^2 - 2x - 12y + 20 = 0$

    g) $2x^2 + 2y^2 - 20x + 4y + 44 = 0$

    h) $y^2 - 4y + 6 = 0$

    i) $x^2 + 4x - 1 = 0$

    j) $y^2 + 2y + 1 = 0$.

26. Determinar qué curvas determinan las siguientes ecuaciones paramétricas y en cada caso dar sus elementos característicos.

    a) $\begin{cases} x = -1 + \cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ *b*) $\begin{cases} x = \sinh t \\ y = 1 - 2\cosh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ *c*) $\begin{cases} x = 1 + t^3 \\ y = 2 - \frac{1}{2}t^6 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}$

27. Sea f una transformación rígida del plano. Demostrar que f transforma:

    a) la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ en la elipse $\mathcal{E}(f(F_1), f(F_2), a)$;

    b) la hipérbola $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ en la hipérbola $\mathcal{H}(f(F_1), f(F_2), a)$

    c) la parábola $\mathcal{P}(F, r)$ en la parábola $\mathcal{P}(f(F), f(r))$.