Notas de clase

Este material está sujeto a correcciones, comentarios y demostraciones adicionales durante el dictado de las clases, no se recomienda su uso a aquellos alumnos que no concurran a las mismas

Material elaborado por Mgs. Nora Arnesi y adaptado por Lic. Maite San Martín

Procesos estocásticos

En campos muy diversos tiene interés el estudio de fenómenos en los que una o más características aleatorias fluctúan a lo largo del tiempo o del espacio. Por ejemplo:

- ✓ En el análisis de un sistema informático, la carga del sistema, los tiempos de espera y los tiempos de respuesta fluctúan a lo largo del día.
- ✓ En una compañía eléctrica la demanda de potencia fluctúa a lo largo de las horas del día.
- ✓ En una persona la presión arterial fluctúa a lo largo del día y de las actividades que ésta realiza.
- ✓ En una casa, el estado del servicio de internet (disponible o no) puede ir cambiando durante la jornada.

Ejemplo de proceso estocástico

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana 1 $ cada vez que sale cara (C), y pierde 1 $ cada vez que sale cruz (F).

- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*-ésima jugada

- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2, \ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

Por lo tanto...

- Necesitamos una herramienta que modele procesos aleatorios en el tiempo (o espacio), y para ello usaremos los *procesos estocásticos*
- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias parametrizadas por el tiempo*.

*por simplicidad en la nomenclatura se sigue sólo en referencia al tiempo, pero los resultados son válidos para parametrizaciones en el espacio.

Procesos estocásticos

- Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias definida sobre un espacio muestral Ω . Es decir:

$$\left\{ X_t : \Omega \rightarrow \Re, \quad t \in T \right\}$$

$$\omega \rightarrow X_t(\omega) = X(\omega, t)$$

Procesos estocásticos

- Tendremos que *X* es una función de dos argumentos. Fijado $\omega=\omega_0$, obtenemos una función determinista (no aleatoria):

$$X(\cdot,\omega_0):T \to \Re$$

$$t \to X(t,\omega_0)$$

Procesos estocásticos

- Asimismo, fijado $t=t_0$, obtenemos una de las variables aleatorias de la familia:

$$X(t_0,\cdot):\Omega \to \Re$$

$$\omega \to X(t_0,\omega)$$

Procesos estocásticos

- El espacio de estados E de un proceso estocástico es el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar dicho proceso:

$$E = \left\{ X_t\left(\omega\right) \mid t \in T \wedge \omega \in \Omega \right\}$$

Ejemplo de proceso estocástico

- Lanzamos una moneda al aire 6 veces. El jugador gana 1 $ cada vez que sale cara (C), y pierde 1 $ cada vez que sale cruz (F).

- X_i = estado de cuentas del jugador después de la *i*-ésima jugada

- La familia de variables aleatorias $\{X_1, X_2,\ldots, X_6\}$ constituye un proceso estocástico

Ejemplo de proceso estocástico

- $\Omega=\{CCCCCC,CCCCCF,\ldots\}$
- $\#(\Omega) = 2^6 = 64$
- $P(\omega)=1/64 \quad \forall\ \omega\in\Omega$
- $T=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $E=\{-6, -5, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 5, 6\}$
- $X_1(\Omega)=\{-1, 1\}$
- $X_2(\Omega)=\{-2, 0, 2\}$

Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo ω, por ejemplo ω_0=CCFFFC, obtengo una secuencia de valores completamente determinista:
- $X_1(\omega_0)=1$, $X_2(\omega_0)=2$, $X_3(\omega_0)=1$, $X_4(\omega_0)=0$, $X_5(\omega_0)=-1$, $X_6(\omega_0)=0$
- Puedo dibujar con estos valores la *trayectoria del proceso*

Ejemplo de proceso estocástico

- Si fijo t, por ejemplo t_0=3, obtengo una de las variables aleatorias del proceso:

$$X_3 : \Omega \to \Re$$

$$\omega \to X_3(\omega)$$

- Los posibles valores que puede tomar el proceso en t_0=3 son: $X_3(\Omega)=\{-3, -1, 1, 3\}$

Ejemplo de proceso estocástico

- Podemos hallar la probabilidad de que el proceso tome uno de estos valores:

$$P[X_3(\omega)=1]=P[CFC]+P[CCF]+P[FCC]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=3]=P[CCC]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-1]=P[FCF]+P[FFC]+P[CFF]=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

$$P[X_3(\omega)=-3]=P[FFF]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

Procesos estocásticos

Existen distintos tipos de procesos estocásticos según en función de…

- … distintos espacios parametrales,
- … distintos espacios de estado,
- … distintas relaciones de dependencia estocástica entre las variables aleatorias que conforman el proceso.

Durante este curso vamos a ver algunas familias particulares de procesos estocásticos.