ANÁLISIS MATEMÁTICO 2
Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 5. Aproximación por Polinomios

1. Introducción

Como se ha visto en cursos anteriores, los polinomios figuran entre las funciones más sencillas estudiadas ya que son adecuadas para realizar cálculos numéricos, debido a que sus valores se obtienen efectuando un número finito de sumas y multiplicaciones. Motivado por ello, surge el interés de analizar métodos para aproximar funciones complejas por polinomios, y estudiar los errores cometidos en tales aproximaciones, esto es, cerca de un punto dado y para funciones adecuadas, resulta de interés arribar a expresiones de la forma

$$f(x) \approx p(x)\,, \quad \text{o bien} \quad f(x) = p(x)+E(x)\,, \ \text{con} \ |E(x)| \leqq M\,.$$

Antes de continuar, debe notarse que cuando se habla de aproximar una función por un polinomio, tal aproximación será necesariamente alrededor de un punto previamente fijado, ya que en general no puede esperarse que un polinomio dado aproxime todos los valores de una función f cualquiera. Por ejemplo, siendo que los polinomios crecen o decrecen hacia $\pm\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$, ningún polinomio servirá para aproximar globalmente una función que no tenga este comportamiento.

No existe un único criterio para la búsqueda de tales polinomios. Por ejemplo, pueden buscarse polinomios que coincidan en valor con los de una función en una cantidad finita de puntos, como lo hacen los Métodos de Interpolación. Otra forma, como la que interesa en esta unidad, es construir polinomios tales que, en un punto dado, coincidan con una función en su valor y en el de una cantidad determinada de primeras derivadas.

Sin trabajar con el error cometido, esto se ha hecho al definir el concepto de continuidad, que permite aproximar los valores de una función continua en un punto por el valor de la función allí, en cercanías del mismo, si se considera a tal valor como un polinomio de grado 0, y mejorando la aproximación cuando en el punto era además la función derivable, al considerar los valores de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto en cuestión, lugar geométrico de un polinomio de grado 1.

Por ejemplo, para la función de ley $f(x) = \exp x$, la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $a = 0$, queda, siendo $f(0) = f'(0) = 1$, de la forma $p(x) = 1 + x$ verificando

$$p(0) = f(0) = 1 \quad \text{y} \quad p'(0) = f'(0) = 1\,.$$

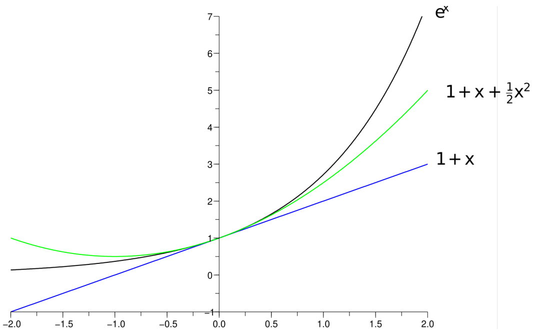


Figura 1: Aproximaciones para $\exp x$, cerca de $a = 0$

Si a continuación se busca aproximar a f por un polinomio q de grado 2, que coincida con f y sus dos derivadas primeras en $a = 0$, puede esperarse una mejor aproximación de f que con la función lineal p, por lo menos cerca del punto $(0,1)$. Puede observarse que el polinomio $q(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, verifica las condiciones

$$q(0) = f(0) = 1 \qquad q'(0) = f'(0) = 1 \qquad \text{y} \qquad q''(0) = f''(0) = 1 \ ,$$

y de la Figura 1 que éste aproxima mejor a f que p, al menos cerca del punto $(0,1)$.

Estando convencidos de lo anterior, es de esperar que las aproximaciones vayan mejorando aún más utilizando polinomios que, en el punto dado, coincidan con f y sus derivadas hasta el orden tres, o hasta el orden cuatro, o hasta órdenes superiores.

2. Polinomios de Taylor

Si f tiene derivadas hasta el orden n en el punto $a = 0$ y se busca un polinomio p que coincida con f y sus n primeras derivadas en 0, deben plantearse las $n+1$ condiciones

$$p(0) \ = \ f(0) \ , \ \ p'(0) \ = \ f'(0) \ , \ \ \ldots \ , \ \ p^{(n)}(0) \ = \ f^{(n)}(0) \ .$$

Es simple concluir que, en general, tal polinomio, no puede ser de grado menor o igual a $n-1$, ya que en ese caso sería $p^{(n)}(0) = 0$, y éste tendría posibilidades de ser útil sólo para funciones en las que sea $f^{(n)}(0) = 0$. Luego, intentando tener éxito buscando polinomios de grado menor o igual a n, observando en primer lugar la forma de las derivadas sucesivas de tal p evaluadas en el punto $a = 0$, se arriba a las identidades

$$\begin{cases} p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n & \to \quad p(0) = 0! \cdot c_0 \\ p'(x) = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 x + 3 \cdot c_3 x^2 + \cdots + n \cdot c_n x^{n-1} & \to \quad p'(0) = 1! \cdot c_1 \\ p''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 x^2 + \cdots + n(n-1) \cdot c_n x^{n-2} & \to \quad p''(0) = 2! \cdot c_2 \\ p'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2) c_n x^{n-3} & \to \quad p'''(0) = 3! \cdot c_3 \\ \ \vdots & \ \vdots \\ p^{(k)}(x) = k! c_k + \frac{(k+1)!}{1!} c_{k+1} x + \frac{(k+2)!}{2!} c_{k+2} x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!} c_n x^{n-k} & \to \quad p^{(k)}(0) = k! \cdot c_k \end{cases} .$$

Las condiciones $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, implicarán entonces, para $0 \leqq k \leqq n$, los coeficientes

$$c_k \ = \ \frac{p^{(k)}(0)}{k!} \ = \ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ .$$

La expresión general anterior provee la fórmula para los coeficientes en función de los valores de f y de sus derivadas en el punto $a = 0$, mostrando que existe un único polinomio p de grado menor o igual a n que verifica las propiedades deseadas. El grado de p será n si $f^{(n)}(0) \neq 0$, y será menor, si no, quedando mostrado el siguiente resultado, que garantiza la buena definición de los polinomios aproximantes.

Proposición 1. *Si f es una función con derivadas hasta el orden n en el punto $a = 0$, existe un único polinomio p de grado a lo sumo n que satisface las $n+1$ condiciones*

$$p^{(k)}(0) \;=\; f^{(k)}(0)\;, \;\text{ para todo } 0 \leqq k \leqq n\;, \;\text{ y su ley es }\; p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;.$$

Definición 1. *Si f es una función con derivadas hasta el orden n en el punto $a = 0$, llamaremos polinomio de Taylor de orden n de la función f alrededor de $a = 0$, al (único) polinomio de ley*

$$T_n(f,0)(x) = T_n(f(x),0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \;.$$

De manera análoga, si f es una función con derivadas hasta el orden n en el punto a, llamaremos polinomio de Taylor de orden n de la función f alrededor de a, al (único) polinomio en potencias de $(x-a)$ de ley

$$T_n(f,a)(x) = T_n(f(x),a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \;.$$

Ejemplo 1. *Si q es un polinomio de grado n, a coeficientes reales de ley $q(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, los coeficientes de $T_n(q(x),0)(x)$ serán, para $0 \leqq k \leqq n$,*

$$c_k \;=\; \frac{q^{(k)}(0)}{k!} \;=\; \frac{k!a_k}{k!} \;=\; a_k \;,$$

y siendo $c_n = a_n \neq 0$, resulta $\mathrm{gr}(T_n(q,0)) = n$, y la ley, para todo x,

$$T_n(q(x),0)(x) \;=\; q(x)\;.$$

Ejemplo 2. *Para la función exponencial, de ley $f(x) = \exp x$, quedan, para todo x, las derivadas sucesivas $f^{(k)}(x) = e^x$, y en consecuencia los valores $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, concluyendo, para n fijo, el polinomio de Taylor*

$$T_n(\exp x, 0)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\;,$$

adelantado en la sección introductoria, donde se observó la aproximación, cerca de $a = 0$,

$$\exp x \;\approx\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\;.$$

Así, para calcular un valor aproximado del número e, puede calcularse, por ejemplo, el polinomio de grado 5, (calculado alrededor del punto $a = 0$) en el punto $x = 1$, y obtener el valor

$$e \;=\; \exp 1 \;\approx\; 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \;=\; \frac{163}{60} \;=\; 2,71\widehat{6}\;.$$

Siendo redundantes, este número aún no tiene demasiado sentido, ya que no se dice en qué cantidad, como mucho, éste difiere del valor real, asunto que se tratará en general en secciones posteriores. Por otro lado, el polinomio de Taylor de orden n alrededor del punto $a = 2$, resulta

$$T_n(\exp x, 2)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2}{k!}(x-2)^k\;,$$

pero siendo que aún no se tienen demasiadas precisiones siquiera de cuánto vale el número e, este polinomio no es muy práctico en este punto.

Ejemplo 3. *Si se considera la función de ley $f(x) = \operatorname{sen} x$, quedan las derivadas sucesivas, para cada x,*

$$f(x) = \operatorname{sen} x\,,\ \ f'(x) = \cos x\,,\ \ f''(x) = -\operatorname{sen} x\,,\ \ f'''(x) = -\cos x\,,\ \ f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x\,,\ \ \cdots$$

y en particular evaluando en $a = 0$,

$$f(0) = 0\,,\ f'(0) = 1\,,\ f''(0) = 0\,,\ f'''(0) = -1\,,\ f^{(4)}(0) = 0\,,\ \cdots\ \Rightarrow\ f^{(2k)}(0) = 0 \text{ y } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k\,,$$

lo cual permite construir los polinomios

$$T_{2n+1}(\operatorname{sen} x, 0)(x) = T_{2n+2}(\operatorname{sen} x, 0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}\,.$$

De modo parecido, para la función de ley $g(x) = \cos x$, se tienen coeficientes no nulos sólo en las potencias pares, dados éstos por la forma genérica $g^{(2k)}(0) = (-1)^k$, resultando el polinomio de Taylor de grado $2n$,

$$T_{2n}(\cos x, 0)(x) = T_{2n+1}(\cos x, 0)(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\,.$$

Por lo anterior entonces, al menos cerca de cero, y con error a determinar, serán válidas las aproximaciones

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{y} \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,.$$

En la Figura 2, se muestran aproximaciones en los primeros grados de las funciones anteriores. Notar en este punto la igualdad de los polinomios $T_{2n+1}(\operatorname{sen}, 0) = T_{2n+2}(\operatorname{sen}, 0)$ y $T_{2n}(\cos, 0) = T_{2n+1}(\cos, 0)$, mostrada en la Sección 3 en general, en la forma $T_{2n+1}(\operatorname{sen} x, 0)' = T_{2n}(\cos x, 0)$.

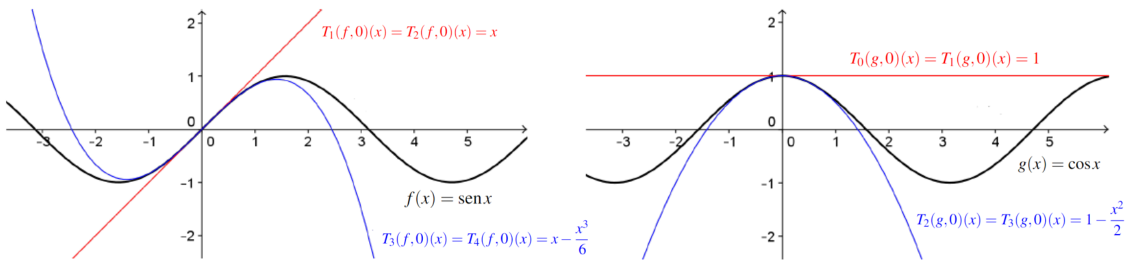


Figura 2: Aproximaciones para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, cerca de $a = 0$

Ejemplo 4. *Para hallar el polinomio de Taylor de grado n de la función de ley $f(x) = \ln(1+x)$, definida para $x > -1$, se calculan las derivadas (queda como ejercicio demostrar la fórmula genérica por inducción),*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\,,\ \ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,,\ \ f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}\,,\ \cdots\,,\ \ f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}\,,$$

y con estas leyes, evaluando en $a = 0$, se arriba al polinomio

$$T_n(\ln(1+x), 0)(x) \;=\; f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}\,,$$

y la consecuente aproximación, en cercanías del punto $a = 0$,

$$\ln(1+x) \;\approx\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{x^n}{n}\ .$$

Por otro lado, una traslación del polinomio anterior permite obtener el polinomio de Taylor alrededor del punto $a = 1$ de la función logatitmo natural, junto a la aproximación, en cercanía del punto mencionado (ver en la Figura 3, los polinomios aproximantes de grado 1, 2 y 3, donde se usó la notación $\log x$),

$$T_n(\ln x, 1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k\ , \quad \ln x \;\approx\; (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\,\frac{(x-1)^n}{n}\ .$$

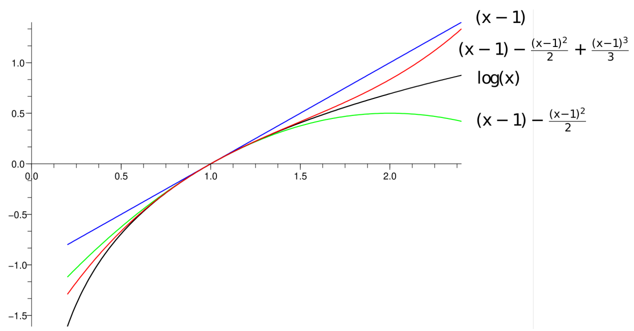


Figura 3: Polinomios de aproximación de $\ln x$ cerca de $x = 1$

3. Propiedades de los Polinomios de Taylor

En general, calcular el polinomio T_n asociado a una función, alrededor de un punto dado, requiere calcular derivadas sucesivas, mostrando por inducción una expresión, cerrada o por recurrencia, alcanzada, lo cual puede resultar tedioso para algunas funciones. El resultado siguiente relaciona polinomios de Taylor de funciones que pueden obtenerse a partir de otras, con desarrollos conocidos.

Proposición 2. *Si f y g son dos funciones derivables hasta el orden n en el punto a entonces son válidas las siguientes propiedades para el operador de Taylor, T_n.*

a) Si α y β son constantes reales, entonces $T_n(\alpha f + \beta g, a)(x) = \alpha T_n(f,a)(x) + \beta T_n(g,a)(x)$.

b) Si $c \in \mathbb{R}$ y $g(x) = f(cx)$ entonces si $ca \in \mathrm{Dom} f$, vale $T_n(g,a)(x) = T_n(f,ca)(cx)$.

c) La derivada del polinomio de Taylor de f es el polinomio de Taylor de f', es decir

$$(T_n(f,a))'(x) \;=\; T_{n-1}\left(f',a\right)(x)\ .$$

d) Una integral indefinida del polinomio de Taylor de f es el polinomio de Taylor de una integral indefinida de f, es decir si $g(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ vale

$$T_{n+1}(g,a)(x) \;=\; \int_a^x T_n(f,a)(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

Demostración. Dado que cada ecuación en *a*), *c*) y *d*), vincula a dos polinomios del mismo grado, la demostración de ellas consiste en observar que tales polinomios tienen el mismo valor y las mismas derivadas en el punto a, y obtener las conclusiones del caracter de unicidad de los polinomios de Taylor.

Para el apartado *b*), se observa que la aplicación sucesiva de la Regla de la Cadena a la composición de ley $g(x) = f(cx)$, conduce a las identidades

$$g'(x) \;=\; cf'(cx)\ ,\ \ g''(x) \;=\; c^2 f''(cx)\ ,\ \ \cdots\ ,\ \ g^{(k)}(x) \;=\; c^k f^{(k)}(cx)\ ,$$

de donde en particular resulta $g^{(k)}(a) = c^k f^{(k)}(ca)$ para cada k, y el consecuente polinomio

$$T_n(g,a)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k f^{(k)}(ca)}{k!}(x-a)^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(ca)}{k!}(cx-ca)^k = T_n(f,ca)(cx)\ .$$

Q.E.D.

Ejemplo 5. *El polinomio de Taylor de la función de ley $f(x) = \exp(-x)$, alrededor del punto $a = 0$ resulta, por el apartado b) de la proposición anterior, reemplazando x por $-x$ (siendo $-a = 0$), igual a*

$$T_n(\exp(-x),0)(x) \;=\; T_n(\exp,0)(-x) \;=\; 1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\,\frac{x^n}{n!}\ ,$$

Ejemplo 6. *Conocido del Ejemplo 4 el polinomio de Taylor de grado n de la función de ley $f(x) = \ln(x+1)$, pueden construirse, por ejemplo, los polinomios*

$$T_n(-\ln(1-x),0)(x) \;=-T_n(\ln(1+x),0)(-x) \;=\; x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\ ,$$

$$T_n\left(\frac{1}{1+x},0\right)(x) \;=\; (T_{n+1}(f,0))'(x) \;=\; 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\ ,$$

y

$$T_n\left(\frac{1}{1-x},0\right)(x) \;=\; (T_{n+1}(f,0))'(-x) \;=\; T_n\left(\frac{1}{1+x},0\right)(-x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} x^k\ .$$

El resultado a continuación, generaliza el demostrado en su momento, que establece que si f es derivable en el punto a, vale la aproximación de primer orden

$$f(x) \;=\; f(a)+f'(a)(x-a)+E(x)(x-a)\ ,\quad \text{con}\quad \lim_{x\to a} E(x) \;=\; 0\ .$$

Proposición 3. *Si f tiene derivadas hasta el orden n en el punto a, entonces*

$$f(x) \;=\; T_n(f,a)(x)+E(x)(x-a)^n\ ,\quad \text{con}\quad \lim_{x\to a} E(x) \;=\; 0\ ,$$

o de manera equivalente,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} \;=\; 0\ .$$

Demostración. Procediendo utilizando el Método de Inducción, la observación anterior asegura la validez de la tesis para el caso $n = 1$. Por otro lado, se asume válida la tesis para los polinomios de grado n asociados a funciones n veces derivables, y se considera una función f derivable hasta el orden $n+1$ en el punto a, aplicando la Regla de L'Hôpital a las funciones de leyes $\varphi(x) = f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)$ y $\psi(x) = (x-a)^{n+1}$, ambas con límite 0 en el punto a, resulta, observando previamente que

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{f'(x) - (T_{n+1}(f,a))'(x)}{(n+1)(x-a)^n} = \frac{1}{n+1}\frac{f'(x) - T_n(f',a)(x)}{(x-a)^n} ,$$

queda el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \underset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{1}{n+1} \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - T_n(f',a)(x)}{(x-a)^n} = 0 ,$$

usando en la última igualdad la hipótesis inductiva, siendo $T_n(f',a)$ el polinomio de grado n asociado a la función f', derivable hasta el orden n en el punto a.

Q.E.D.

Definición 2. *Dos funciones f y g se dicen iguales hasta (al menos) el orden $n \in \mathbb{N}$ en el punto a si se tiene*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0 .$$

Luego, la Proposición puede parafrasearse y afirmar que, si f es n veces derivable en el punto a, entonces f y $T_n(f,a)$, son iguales hasta el orden n.
El siguiente teorema es de utilidad en la simplificación de cálculos con polinomios de Taylor.

Proposición 4. *Si p es un polinomio de grado $n \geqq 1$, y f y g son dos funciones derivables hasta el orden n en el punto a, tales que para cada x es $f(x) = p(x) + g(x)(x-a)^n$, y donde además se tiene $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, entonces, necesariamente, resulta $p \equiv T_n(f,a)$.*

<u>**Demostración**</u>. Primero, debe notarse que si p y q son polinomios de grado n, iguales hasta el orden n en el punto $x = a$ entonces son iguales. En efecto, y si $r(x) = p(x) - q(x)$ entonces r es igual al polinomio nulo hasta el orden n, y luego es r es igual al polinomio nulo hasta el orden k para cada $k \leq n$, pues

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^k} = \lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^k}\frac{(x-a)^{n-k}}{(x-a)^{n-k}} = 0 , \quad \text{para todo } 0 \leqq k \leqq n .$$

Si b_k son los coeficientes del polinomio $r = p - q$ en potencias de $x - a$, en particular para $k = 0$ será $\lim\limits_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^0} = b_0 = 0$, entonces, si de manera inductiva se asume que $b_k = 0$, para $0 \leqq k \leqq j$, deberá ser para el índice siguiente,

$$b_{j+1} = \lim_{x\to a} \frac{b_{j+1}(x-a)^{j+1} + b_{j+2}(x-a)^{j+2} + \ldots + b_n(x-a)^n}{(x-a)^{j+1}} = 0 ,$$

permitiendo afirmar que necesariamente $r \equiv 0$, de lo cual $p \equiv q$. La conclusión de la tesis es ahora inmediata, siendo, los polinomios $T_n(f,a)$ y p, ambos de grado n e iguales hasta el orden n a f, el primero por la Proposición 3, y el segundo por la hipótesis de la presente.

Q.E.D.

Lema 1. *Para $x \neq 1$, vale la igualdad $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$.*

<u>**Demostración**</u>. Notando $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$, queda $xS_n = x + x^3 + \cdots + x^{n+1}$, y la diferencia entre ambas expresiones, $(1-x)S_n = 1 - x^{n+1}$, que permite concluir, para $x \neq 1$,

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} .$$

Q.E.D.

Corolario 1. *Si* $f(x) = \frac{1}{1-x}$ *entonces* $T_n(f,0)(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$.

<u>**Demostración**</u> Por lema anterior vale la igualdad, para $x \neq 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{x}{1-x}x^n$$

y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$, luego por proposición 4, es $T_n(\frac{1}{1-x},0)(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$.

Q.E.D.

Ejemplo 7. *Si en la igualdad del lema anterior se reemplaza x por* $-x^2$*, se obtiene la identidad*

$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \quad \Rightarrow \quad T_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2},0\right)(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}$$

conclusión obtenida a partir de la Proposición 4, siendo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-1)^{n+1}x^2}{1+x^2} = 0$. *Con este desarrollo, la aplicación de la parte d) de la Proposición 2, permite además concluir la forma del polinomio*

$$T_{2n+1}(\arctan x,0)(x) \;=\; \int_0^x T_{2n}(\tfrac{1}{1+t^2},0)(t)\ \mathrm{d}t \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\ .$$

4. La Fórmula de Taylor con Resto

Hasta este punto, se ha trabajado con polinomios de Taylor generados por funciones, y dado aproximaciones de varias, posponiendo hasta esta sección, el análisis de los errores cometidos, definidos éstos puntualmente, como la diferencia entre el valor real de la función y el de su polinomio de grando n,

$$E_n(x) \;=\; R_n(f,a)(x) \;=\; f(x)-T_n(f,a)(x)\ ,$$

expresión de la cual se obtiene la llamada Fórmula de Taylor con Resto,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(f,a)(x)\ .$$

De AM1, se sabe que, para f derivable en a, el caso $n=1$ de la expresión anterior es la fórmula con resto para la aproximación de primer orden, por la cual, hasta el momento se sabe que $\lim\limits_{x\to a}\frac{R_1(f,a)(x)}{x-a} = 0$. En este punto, conociendo más sobre integración, puede trabajarse el error,

$$R_1(f,a)(x) \;=\; f(x)-f(a)-f'(a)(x-a) \;=\; \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t - f'(a)\int_a^x \mathrm{d}t \;=\; \int_a^x (f'(t)-f'(a))\ \mathrm{d}t\ .$$

En ella, si además se supone que f tiene derivada segunda continua en un entorno de a, se tiene, integrando por partes tomando $u = f'(t)-f'(a)$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$, de lo cual $v = t-x$ es una primitiva, el cálculo

$$\int_a^x u\ \mathrm{d}v \;=\; uv\,\Big|_a^x - \int_a^x v\ \mathrm{d}u = \big(f'(t)-f'(a)\big)(t-x)\,\Big|_a^x - \int_a^x (t-x)f''(t)\ \mathrm{d}t \;=\; 0+\int_a^x (x-t)f''(t)\ \mathrm{d}t\ .$$

La expresión integral del resto anterior, además de útil para el caso $n=1$, sirve como paso inicial en la demostración inductiva del resultado general a continuación.

Proposición 5. *Si f tiene derivada continua de orden $n+1$ en un entorno de un punto a, entonces allí,*

$$f(x) \;=\; T_n(f,a)(x)+R_n(f,a)(x)\;, \quad \text{donde} \quad R_n(f,a)(x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\;\mathrm{d}t\;.$$

<u>**Demostración**</u>. Conocido el resultado para el caso inicial, se prosigue asumiéndolo válido para un natural genérico n. En tal caso, escribiendo la fórmula para n y $n+1$ y restando, se obtiene

$$f(x)-f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n+1}(f,a)(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - R_n(f,a)(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} + R_{n+1}(f,a)(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - R_n(f,a)(x)$$

de donde quedará la relación entre los restos consecutivos igual a

$$R_{n+1}(f,a)(x) \;=\; R_n(f,a)(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\;.$$

En este punto, usando la forma integral del resto $R_n(f,a)(x)$ aceptada por la hipótesis de inducción en el primer término a continuación, y la igualdad $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \int_a^x (x-t)^n\;\mathrm{d}t$ en el segundo, resulta

$$R_{n+1}(f,a)(x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x (x-t)^n\;\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n!}\int_a^x \underbrace{\left(f^{(n+1)}(t)-f^{(n+1)}(a)\right)}_{u}\;\underbrace{(x-t)^n\;\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}v}$$

e integrando por partes con los elementos marcados, y los restantes $\mathrm{d}u = f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$ y $v = -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}$, notando que $u=0$ cuando $t=a$ y que $v=0$ cuando $t=x$, se llega a

$$R_{n+1}(f,a)(x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_a^x u\;\mathrm{d}v \;=\; \frac{1}{n!}uv\Big|_a^x - \frac{1}{n!}\int_a^x v\;\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)\;\mathrm{d}t\;,$$

forma del resto de la tesis para $n+1$, y luego probada ésta para todo número natural. *Q.E.D.*

Si se aplica el Teorema del Valor Medio Generalizado, [Unidad 1, Proposición 10[1]] a la expresión integral del resto recién demostrada, se llega a la expresión del **resto de Lagrange para la fórmula de Taylor**, enunciada a continuación.

Proposición 6. *Bajo las hipótesis de la Proposición 5, existe ξ entre a y x, tal que*

$$R_n(f,a)(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\;.$$

Luego, si $m \leqq f^{(n+1)}(t) \leqq M$ para todo t entre a y x, valen, para $x>a$ y $x<a$, respectivamente, las acotaciones

$$\frac{m\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leqq R_n(f,a)(x) \leqq \frac{M\,(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{y} \quad \frac{m\,(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leqq (-1)^{n+1}R_n(f,a)(x) \leqq \frac{M\,(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}\;.$$

[1] Si f y g son dos funciones definidas en $[a,b]$, tales que f es continua y g es integrable y no cambia de signo, entonces, existe $\xi \in [a,b]$, tal que $\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$.

Demostración. Aplicando el Teorema del Valor Medio citado, considerando las funciones $f^{(n+1)}(t)$, continua en un entorno del punto a, y $g(t) = (x-t)^n$ integrable, la forma integral del resto obtenida en la Proposición 5, queda

$$R_n(f,a)(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \ = \ f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t$$
$$= \ f^{(n+1)}(\xi)\ \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Bigg|_a^x \ = \ f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

Observar que para x fijo, si t está entre a y x, la función de ley $g(x) = (x-t)^n$ no cambia de signo, como es requerido en las hipótesis del Teorema del Valor Medio usado. Por su parte, las cotas siguen multiplicando por $\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ si $x > a$ y por $\frac{[(-1)(x-a)]^{\ n+1}}{(n+1)!} = \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} > 0$ si $x < a$, la desigualdad $m \leqq f^{(n+1)}(\xi) \leqq M$.

Q.E.D.

Ejemplo 8. *Queda pendiente de la Unidad 2, determinar el valor del número e, para el cual* $\ln e = 1$*, y en consecuencia tal que* $e = \exp 1$*, del cual hasta este momento se sabe que* $2 \leqq e \leqq 3$*. Para ello, se completa el desarrollo de la función de ley* $f(x) = \exp x$ *visto en el Ejemplo 2 alrededor del punto* $a = 0$*, con su resto en la forma de Lagrange, probado en la Proposición 6,*

$$\exp x = T_n(\exp x, 0)(x) + R_n(\exp x, 0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \exp\xi\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ ,\quad \text{con}\quad \xi \ \text{entre } 0 \text{ y } x\ .$$

El valor buscado se puede aproximar a partir de allí haciendo $x = 1$*, observando para* ξ *entre* 0 *y* 1*, quedará,*

$$e \ = \ 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n!}+\exp\xi\ \frac{1}{(n+1)!} \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{(n+1)!} < \frac{\exp\xi}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}\ .$$

De lo anterior, para hallar el valor de e con, un error, por ejemplo menor a 10^{-5}*, será suficiente considerar valores n tales que* $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5} \Leftrightarrow 300000 < (n+1)!$*, lo cual, por inspección, se verifica tomando* $n = 9$ *(o mayor), valor con el que se tiene*

$$e \ \approx \ \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} \ = \ \frac{98\,641}{36\,288} \ = \ 2,718\,281\,526\ ,$$

aproximación que es exacta con el error propuesto de 10^{-5}*, y de la cual entonces no es necesario considerar las cifras decimales desde la quinta en adelante, que son imprecisas.*

La fórmula de Taylor con resto puede usarse también para establecer la irracionalidad de e, hasta ahora no demostrada. En efecto, si se elige trabajar con $n \geqq 3$*, se tiene que*

$$\frac{1}{(n+1)!} \ < \ R_n(\exp(x),0)(1) \ < \ \frac{3}{(n+1)!} \quad \Rightarrow \quad 0 \ < \ \frac{1}{(n+1)} \ < \ n!\,e - \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} \ < \ \frac{3}{n+1} \ \leqq \ \frac{3}{4},$$

de lo cual, dado que para cualquier n, la suma $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$*, si e fuera racional, de la forma* $e = \frac{p}{q}$ *con* p,q *enteros coprimos, para n suficientemente grande sería* $n!\ e = n!\frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$*, y luego la resta escrita en las últimas desigualdades resultaría ser un número entero positivo menor o igual que* $\frac{3}{4}$*, lo cual no es posible.*

Ejemplo 9. *El valor* $\operatorname{sen} 1$ *puede calcularse con error menor a* 10^{-4}*, completando el desarrollo encontrado en Ejemplo 3 con su resto y evaluando en el punto* $x=1$*,*

$$\operatorname{sen} x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2n+1}(\operatorname{sen} x,0)(x) \quad\Rightarrow\quad \operatorname{sen} 1=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!}+R_{2n+1}(\operatorname{sen} x,0)(1)\ ,$$

con n a determinar. Para esto se utiliza la expresión del resto de Lagrange, para ξ *entre* 0 *y* 1*,*

$$|R_{2n+1}(\operatorname{sen} x,0)(1)|=\left|\frac{f^{(2n+2)}(\xi)\,1^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|\leqq\left|\frac{1}{(2n+2)!}\right|\ <\ 10^{-4}\ \text{ si }\ n\geqq 3\ ,$$

de lo cual se concluye, con la precisión propuesta, la aproximación exacta hasta la tercera cifra decimal,

$$\operatorname{sen} 1\approx\sum_{k=0}^{3}\frac{(-1)^{k}(1)^{2k+1}}{(2k+1)!}=1-\frac{1^{3}}{6}+\frac{1^{5}}{120}-\frac{1^{7}}{5040}=\frac{4241}{5040}=0,841...$$

Las aproximaciones por polinomios también permiten calcular valores numéricos aproximados de integrales que no se pueden calcular directamente mediante funciones elementales, como las mencionadas en la parte introductoria de la Unidad 3.

Ejemplo 10. *Para obtener una estimación de la integral definida* $\int_0^{\frac{1}{2}}\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$*, puede usarse la fórmula de Taylor de la función de ley* $\exp x$*, alrededor de* $a=0$*, por ejemplo con* $n=4$*,*

$$\exp x\ =\ 1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+R_{4}(x)\ .$$

En ella, si $x\in[-c,0]$ *con* $c>0$*, resulta* $\exp(-c)\leqq\exp x\leqq 1$*, y en consecuencia con la notación usada, eligiendo* $m=\exp(-c)$ *y* $M=1$*, puede acotarse*

$$0\ <\ \frac{\exp(-c)\,(-x)^{5}}{5!}\ \leqq\ (-1)^{5}R_{4}(x)\ \leqq\ \frac{(-x)^{5}}{5!}\quad\Rightarrow\quad\frac{x^{5}}{5!}\ \leqq\ R_{4}(x)\ <\ 0\ .$$

De lo anterior, sustituyendo x por $-t^2$*, valdrá*

$$\exp(-t^{2})\ =\ 1-t^{2}+\frac{t^{4}}{2!}-\frac{t^{6}}{3!}+\frac{t^{8}}{4!}+R_{4}\left(-t^{2}\right)\ ,\quad \text{donde}\quad \frac{-t^{10}}{5!}\leqq R_{4}\left(-t^{2}\right)\ <\ 0$$

$$\Rightarrow\quad\int_{0}^{\frac{1}{2}}\exp(-t^{2})\,\mathrm{d}t\ =\ \int_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t^{2}+\frac{t^{4}}{2!}-\frac{t^{6}}{3!}+\frac{t^{8}}{4!}+R_{4}\left(-t^{2}\right))\,\mathrm{d}t$$

$$=\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3\,2^{3}}+\frac{1}{2!\,2^{5}\,5}-\frac{1}{3!\,2^{7}\,7}+\frac{1}{4!\,2^{9}\,9}+\int_{0}^{\frac{1}{2}}R_{4}\left(-t^{2}\right)\,\mathrm{d}t\ ,$$

siendo

$$-9\ 10^{-6}\ <\ \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{5!}\ \leqq\ \frac{-t^{10}}{5!}\ \leqq\ R_{4}(-t^{2})\ \leqq\ 0\quad\Rightarrow\ -4{,}5\ 10^{-6}\ \leqq\ \int_{0}^{\frac{1}{2}}R_{4}\left(-t^{2}\right)\,\mathrm{d}t\ \leqq\ 0\ .$$

Se concluye así la aproximación, con error menor a 10^{-5}*, y por lo tanto exacto hasta la cuarta cifra,*

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}e^{-t^{2}}dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{3}}\frac{1}{3}+\frac{1}{2!2^{5}}\frac{1}{5}-\frac{1}{3!2^{7}}\frac{1}{7}+\frac{1}{4!2^{9}}\frac{1}{9}=\frac{1785491}{3870720}=0,4612...$$

5. Ejercicios

1. Hallar en cada caso el polinomio de Taylor, para la función, grado, y punto indicados.

$$a)\ f_1(x) = x\exp x\ ,\ \ n=5\ ,\ \ a=1\ ,\quad b)\ f_2(x) = x^5+x^3+x\ ,\ \ n=5\ ,\ \ a=1\ ,$$

$$c)\ f_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\ ,\ \ n=3\ ,\ \ a=0\ ,\quad d)\ f_4(x) = x\operatorname{sen} x\ ,\ \ n=9\ ,\ \ a=0\ .$$

2. Mostrar que si f es una función par (impar) en un entorno que contiene al punto 0, entonces, si f es n veces derivable en 0, el polinomio de Taylor $T_n(f,0)$ sólo contiene potencias pares (impares) de x.

3. Arribar a los desarrollos dados, recordando utilizar propiedades adecuadas cuando resulte conveniente.

   a) $T_{2n+1}(\operatorname{sen}(3x),0)(x) \ = \ T_{2n+2}(\operatorname{sen}(3x),0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k\, 3^{2k+1}}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$,

   b) $T_n(\exp(-2x),0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-2)^k}{k!}\, x^k$,

   c) $T_{2n+1}(\operatorname{senh} x,0)(x) \ = \ T_{2n+2}(\operatorname{senh} x,0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$,

   d) $T_{2n}(\cosh x,0)(x) \ = \ T_{2n+1}(\cosh x,0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{(2k)!}\, x^{2k}$,

   e) $T_n(a^x,0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\ln^k a}{k!}\, x^k$, para $a>0$,

   f) $T_n((1+x)^\alpha,0)(x) \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\, x^k$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo $\binom{\alpha}{k} \ = \ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$.

4. Hallar los polinomios de Taylor $T_{2n}(\operatorname{sen}^2 x,0)$, $T_{2n}(\cos^2 x,0)$ y $T_{2n+1}(\operatorname{sen} x\cos x,0)$.

5. A partir del Lema 1 obtener los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0 y una expresión del error correspondiente:

$$f_1(x) \ = \ \frac{2+x-x^2}{1-x}\ ,\quad f_2(x) \ = \ \frac{x}{1-x^2}\ ,\quad f_3(x) \ = \ \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \text{y} \quad f_4(x) \ = \ \arctan x\ .$$

6. Decidir qué grado debe considerarse para aproximar, con un error menor a 10^{-7},

   a) el valor de π, utilizando el desarrollo $T_n(\arctan x,0)(1)$, y

   b) el valor $\ln 1{,}5$; usando los desarrollos $T_n(\ln(1+x),0)(0{,}5)$ y $T_n\left(\ln(\frac{x+1}{1-x}),0\right)(\frac{1}{5})$.

7. Mostrar que se puede sustituir $\operatorname{sen}\theta$ por θ para $|\theta|<0{,}3$ (aproximadamente 17° en el sistema sexagesimal), con un error menor de 5 milésimos.

8. Hallar, con error menor a 10^{-6}, los valores *a*) $\exp(-0{,}1)$, *b*) $\cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$, *c*) $\operatorname{sen}(0{,}5)$ y *d*) $\sqrt[4]{1{,}1}$.

9. Justificando su integrabilidad, calcular un valor aproximado de cada integral con error menor a 10^{-5}.

$$a)\ \int_0^1 \exp(-x^2)\ \mathrm{d}x\ ,\quad b)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}\ ,\quad c)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^3}} \quad \text{y} \quad d)\ \int_0^1 \frac{\exp x - 1}{x}\ \mathrm{d}x\ .$$

Apéndice. Clasificación de Puntos Críticos

La fórmula de Taylor también puede ser usada para demostrar un criterio de clasificación de puntos críticos de funciones reales, más general que el de la derivada segunda, estudiado en AM1.

Proposición 7. *Si f es una función derivable hasta el orden n en el punto a, en donde son*

$$f'(a) \;=\; f''(a) \;=\; \cdots \;=\; f^{(n-1)}(a) \;=\; 0 \quad \text{y} \quad f^{(n)}(a) \;\neq\; 0\,,$$

entonces, para n par, en el punto crítico a se alcanza un mínimo local si $f^{(n)}(a) > 0$, o un máximo local, si $f^{(n)}(a) < 0$, mientras que para n impar, allí no se se alcanza extremo local.

<u>**Demostración**</u>. Combinando las igualdades de la derivada de la hipótesis con la Proposición 4, se tiene

$$f(x) \;=\; f(a)+0+\cdots+0+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+E(x) \;\;\Rightarrow\;\; f(x)-f(a) \;=\; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+E(x)\,,$$

donde vale el $\lim\limits_{x\to a} \frac{E(x)}{(x-a)^n} = 0$. En este punto, si se asumen n par y $f^{(n)}(a) > 0$, el límite anterior permite asegurar, para $\varepsilon = \frac{f^{(n)}(a)}{2n!} > 0$, la existencia de $\delta > 0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; \left|\frac{E(x)}{(x-a)^n}\right| < \frac{f^{(n)}(a)}{2n!} \;\;\Rightarrow\;\; |E(x)| \;\leqq\; \frac{f^{(n)}(a)}{2n!}\,(x-a)^n \;\;\Rightarrow\;\; E(x) \;\geqq -\frac{f^{(n)}(a)}{2n!}\,(x-a)^n\,,$$

de donde, retomando,

$$f(x)-f(a) \;=\; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+E(x) \;\geqq\; \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n-\frac{f^{(n)}(a)}{2n!}(x-a)^n \;=\; \frac{f^{(n)}(a)}{2n!}(x-a)^n \;>\; 0\,,$$

resultando para $|x-a| < \delta$, la desigualdad $f(x) \geqq f(a)$, de lo cual en el punto a se alcanza un mínimo local.

Observar que si n es par, $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ y $f^{(n)}(a) < 0$, la función $-f$ verifica las condiciones del caso probado, de donde en a se alcanzará un mínimo local de $-f$, y luego allí un máximo local de f.

Finalmente, para n impar, independiente del signo de $f^{(n)}(a) \neq 0$, en cualquier entorno de a, el producto $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ tendrá distinto signo a cada lado de a, de modo que nunca valdrán en todo el entorno las desigualdades $f(x) \leqq f(a)$ o $f(x) \geqq f(a)$ y no podrá alcanzarse en a un extremo.

Q.E.D.

Ejemplo 11. *Para buscar los extremos locales del polinomio de ley $f(x) = x^{11} - 4x^9 + 6x^7 - 4x^5 + x^3$, se comienza buscando sus puntos críticos,*

$$f'(x) \;=\; 11x^{10}-36x^8+42x^6-20x^4+3x^2 \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x=0 \;\;\vee\;\; x=\pm 1 \;\;\vee\;\; x=\pm\sqrt{\frac{3}{11}}\,,$$

y a continuación, se usará la proposición anterior en cada uno de ellos. En primer lugar,

$$f''(x) = 110x^9-288x^7+252x^5-80x^3+6x$$

$$\Rightarrow\; f''(0)=f''(-1)=f''(1)=0\,,\; f''\left(-\sqrt{\frac{3}{11}}\right) = -f''\left(\sqrt{\frac{3}{11}}\right) > 0\,,$$

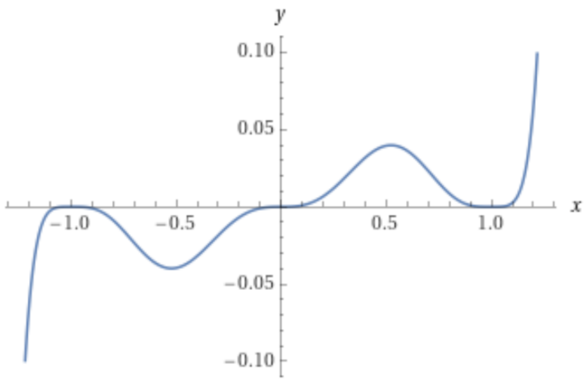
de lo que se puede asegurar, siendo ésta una derivada de orden par, que en el punto $-\sqrt{\frac{3}{11}}$ *se alcanza un mínimo local, en el punto* $\sqrt{\frac{3}{11}}$ *un máximo local, y no se puede concluir nada de los otros tres puntos. Para ver que sucede en ellos, se sigue derivando,*

$$f'''(x) = 980x^8 - 2016x^6 + 1260x^4 - 240x^2 + 6 \;\Rightarrow\; f'''(0) > 0\,,\; f''(-1) = f''(1) = 0\,,$$

y en este caso, siendo, dado que la primera derivada no nula en el punto 0 *es de orden impar, se concluye que allí no se alcanza extremo. Sigue sin aportar conclusión el criterio en los puntos* ± 1*. Repitiendo,*

$$f^{(4)}(x) = 7920x^7 - 12096x^5 + 5040x^3 - 480x \;\Rightarrow\; f^{(4)}(1) = -f^{(4)}(-1) > 0\,,$$

resultando finalmente, dado que el orden de derivación es par, que en el punto 1 *se alcanza un mínimo local, y en el punto* -1 *un máximo local. En la siguiente figura se muestra la gráfica de este polinomio, donde pueden verificarse las conclusiones obtenidas.*



Observar que sólo fue necesario factorizar el polinomio f'*, donde 0 como raiz doble es inmadiata,* ± 1 *cada una como raiz triple se obtiene siendo éstas entre las posibles por el Teorema de Gauss, y las otras dos, irracionales, siguen resolviendo una cuadrática. Luego, ya no deben factorizarse polinomios, sino evaluarse las expresiones de las derivadas en los puntos encontrados.*