# UNIDAD 5: Geometría analítica del plano.

Apuntes basados en notas de clase de Francisco Vittone.

## 1 Introducción y repaso.

Hoy es muy común hablar de *coordenadas*. Los GPS nos dicen de manera precisa en qué punto de la tierra nos encontramos en un momento determinado, repecto de un sistema de coordenadas fijo, que todo el mundo conoce y entiende. De modo que si queremos trasmitir nuestra posición a cualquier persona del mundo, bastará dar estos números y ellos sabrán donde encontrarnos. Observemos que las coordenadas no son más que eso: números. Números que aislados carecerían de sentido, pero una vez que fijamos un marco de referencia que todos sabemos interpretar, se vuelven una manera de describir entes geométricos: en nuestro ejemplo, un punto.

Así, para determinar el punto de intersección de dos rectas en el plano, bastará fijar un sistema de coordenadas común a todos nosotros e indicar cuales son las coordenadas del punto en ese sistema. De esta manera cualquiera puede localizar el punto de forma exacta.

Esta idea tan simple de vincular objetos geométricos con números constituye una de las ideas más brillantes de la historia de la matemática y abre las puertas a una maquinaria de trabajo potente que ha permitido resolver problemas que son impensables desde el punto de vista sintético que hemos desarrollado hasta ahora (por ejemplo, demostrar la imposibilidad de resolver los tres problemas clásicos de construcción).

A partir de esta unidad nos dedicaremos al estudio de la denominada *geometría analítica*, cuya base fundamental es utilizar ideas del álgebra para describir objetos geométricos. La geometría analítica se basa en la introducción de *coordenadas cartesianas*.

René Descartes    Pierre de Fermat

Las coordenadas cartesianas deben su nombre al célebre filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) pero fueron introducidas simultáneamente por el no menos célebre Pierre de Fermat. Este método revolucionó el estudio de la geometría dado que, como ya hemos mencionado, permitió la utilización de todos los conocimientos del álgebra para resolver de manera mucho más precisa y sencilla muchos problemas de geometría.

En Álgebra y Geometría I hemos visto cómo se vinculan los puntos de una recta, del plano o del espacio con los números reales. En la próxima sección repasaremos un poco estas ideas (no es necesario el estudio exahustivo de la misma si los conceptos le son familiares al lector), y en las sección siguiente veremos otros *lugares geométricos del plano*, las llamadas *secciones cónicas*, que sí son parte del programa de Álgebra y Geometría II.

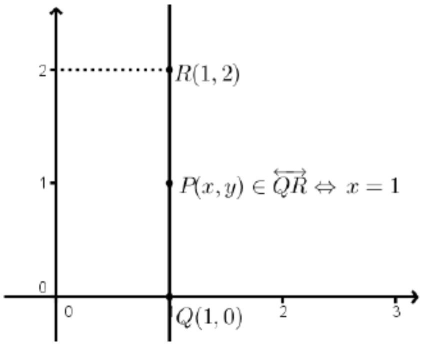
## 1.1 Lugares geométricos

Se denomina **lugar geométrico del plano** a todo subconjunto del plano formado por todos los puntos que satisfacen una o más condiciones geométricas determinadas.

Así por ejemplo, dado un punto $Q$ fijo del plano decimos que la *circunferencia de centro $Q$ y radio $r$* es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a distancia $r$ de $Q$.

Dados dos puntos $Q$ y $R$, la *recta* $\overleftrightarrow{QR}$ puede definirse como el lugar geométrico de los puntos que están alineados con $Q$ y $R$.

El hecho de introducir coordenadas, nos plantea la siguiente pregunta: así como los puntos del espacio que pertenecen a un lugar geométrico cumplen una determinada condición geométrica, las coordenadas de estos puntos (que son números reales) ¿cumplirán alguna condición algebraica? Este es el objetivo principal de la geometría analítica: determinar qué condiciones algebraicas verifican las coordenadas de los puntos que pertenecen a un deteminado lugar geométrico.




Consideremos algunos ejemplos. Tomemos los puntos $Q(1,0)$ y $R(1,2)$ del plano. Si $P(x,y)$ es un punto de la recta $\overleftrightarrow{QR}$ es evidente que $x = 1$. Recíprocamente, cualquier punto del plano cuya abscisa es 1, está alineado con $Q$ y $R$. Luego

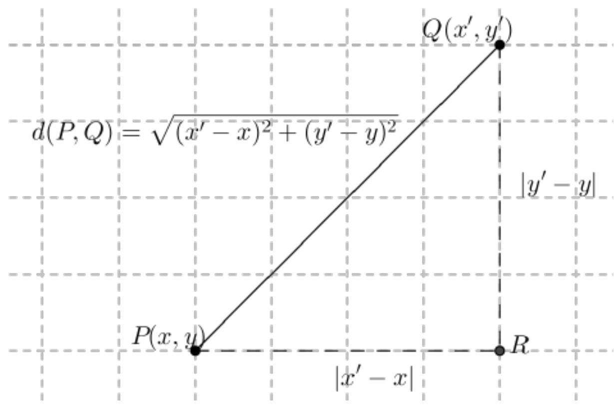
$$\overleftrightarrow{QR} = \{P(x,y) \,:\, x = 1\}$$

Por lo tanto, esta recta está caracterizada por la ecuación $x = 1$, que de hecho se denomina ecuación de la recta $\overleftrightarrow{QR}$.

Sean ahora $P(x,y)$ y $Q(x',y')$ dos puntos cualesquiera del plano, determinaremos en función de $x$, $y$, $x'$ e $y'$ la distancia entre ellos.

**Definición 1.1.** Se denomina **distancia** entre dos puntos $P$ y $Q$ y se denota $d(P,Q)$ a la longitud $PQ$ del segmento $\overline{PQ}$.

Sea $R$ el punto de intersección entre la perpendicular al eje $x$ por $Q$ y la perpendicular al eje $y$ por $P$.




Entonces $\overset{\triangle}{PRQ}$ es un triángulo rectángulo, y aplicando el Teorema de Pitágoras resulta

$$d(P,Q) = PQ = \sqrt{PR^2 + RQ^2}.$$

Observemos que $PR = |x'-x|$ y $RQ = |y'-y|$. Reemplazando en la ecuación anterior, resulta

$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2}.}$$

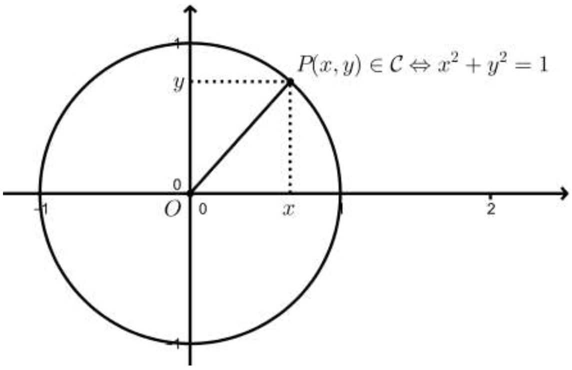
Son consecuencias inmediatas de la definición de distancia:

1. $d(P,Q) \geq 0$ (pues es la longitud de un segmento) y $d(P,Q) = 0$ si y sólo si $P = Q$.
2. $d(P,Q) = d(Q,P)$.
3. Dados tres puntos $P, Q, R$ vale la *desigualdad triangular* $d(P,Q) + d(Q,R) \geq d(P,R)$.

Consideremos la circunferencia centrada en el origen $O$ y radio 1, esto es, $\mathcal{C} = \{P : d(P,O) = 1\}$. Entonces

$$P(x,y) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow d(P,O) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Luego $\mathcal{C} = \{P(x,y) \,/\, x^2 + y^2 = 1\}$.

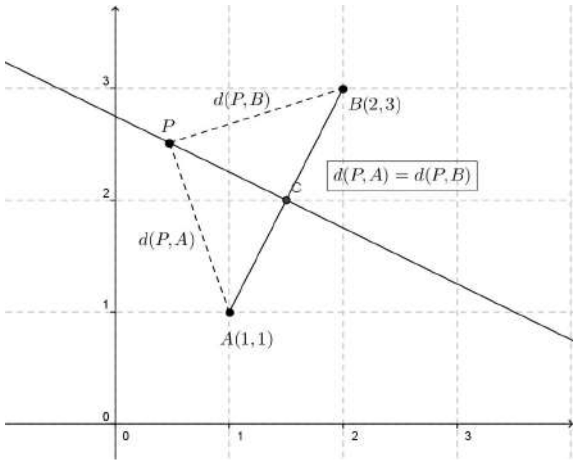



Por lo tanto $x^2 + y^2 = 1$ es la ecuación que caracteriza el lugar geométrico $\mathcal{C}$: las coordenadas de todo punto de $\mathcal{C}$ la satisfacen, y recíprocamente si $(x,y)$ es un par ordenado de números reales que la satisfacen, el punto $P(x,y)$ pertenece a $\mathcal{C}$.

Sea ahora $r$ la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, siendo $A(1,1)$ y $B(2,3)$.

Dado un punto $P$ de coordenadas $(x,y)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
P \in r \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,A) = d(P,B) \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x + 4y - 11 = 0
\end{aligned}$$




Luego $r = \{P(x,y) : \; 2x + 4y - 11 = 0\}$.

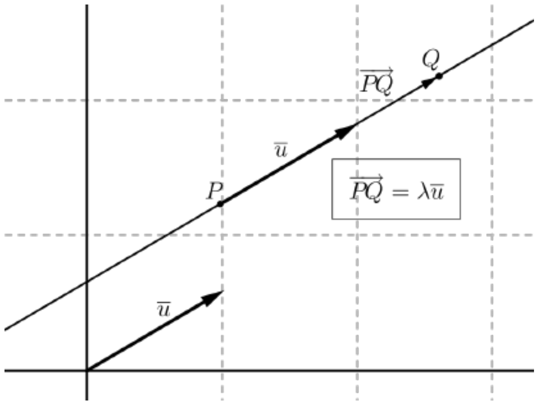
## 1.2 Recta en el Plano

Recordemos que una recta en el plano que pasa por dos puntos $P$ y $Q$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que están alineados con $P$ y $Q$. Si utilizamos el lenguaje de los vectores, tenemos que un punto $R$ del plano pertenece a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ si y sólo si los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son paralelos.

Esto nos permite definir qué entendemos por una recta que pasa por un punto del plano dado en la dirección de un vector dado.

**Definición 1.2.** Dado un punto $P$ y un vector no nulo $\overline{u}$, la **recta** $r$ **que pasa por** $P$ **en la dirección de** $\overline{u}$ es el lugar geométrico de los puntos $Q$ tales que $\overrightarrow{PQ}//\overline{u}$. Esto es,

$$Q \in r \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \overrightarrow{PQ} = \lambda \overline{u} \tag{1.1}$$




Observemos que $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$. Luego la recta $r$ está compuesta por todos los puntos $Q$ que verifican

$$\boxed{\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda \overline{u}, \ \lambda \in \mathbb{R}.} \tag{1.2}$$

La ecuación (1.2) se denomina **ecuación vectorial** de la recta $r$.

De esta ecuación derivaremos las denominadas **ecuaciones paramétricas** de $r$, esto es, ecuaciones que dependen de un parámetro:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

o sea $r$ pasa por $P(x_0, y_0)$ y tiene la dirección de $\overline{u} = (u_1, u_2)$. Como $\overline{u} \neq \overline{0}$, debe ser $u_1 \neq 0$ o $u_2 \neq 0$.

Recordemos que hemos estudiado también la **ecuación cartesiana de la recta**, esto es, una ecuación que involucra sólo las variables $x$ e $y$ y sea satisfecha únicamente por las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta

$$ax + by + c = 0.$$

Hemos visto además que ecuación de este tipo es siempre la ecuación cartesiana de una recta.

**Teorema 1.3.** *Un lugar geométrico en el plano es una recta si y sólo si su ecuación cartesiana es de la forma*

$$ax + by + c = 0 \tag{1.3}$$

*con $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq \overline{0}$.*

*Proof.* Hecha en Álgebra y Geometría I. □

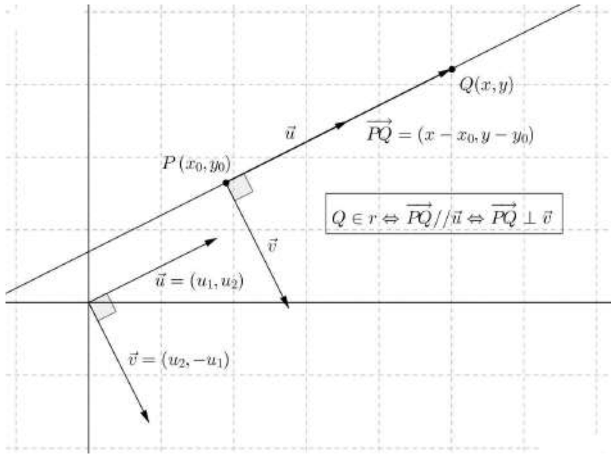
*Nota* 1.4. Más precisamente, hemos visto que si $r$ es una recta de ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda\, u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda\, u_2 \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

su ecuación general es $u_2 x - u_1 y - u_2 x_0 + u_1 y_0 = 0$, que puede reescribirse como

$$u_2(x - x_0) + (-u_1)(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (u_2, -u_1) \times (x - x_0, y - y_0) = 0.$$

Esta última expresión no es más que afirmar que el vector $\overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0)$ es perpendicular a $\overline{v} = (u_2, -u_1)$. Esto es inmediato del hecho de que $Q \in r$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ}$ es paralelo a $\overline{u} = (u_1, u_2)$, que es equivalente a que $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a $\overline{v} = (u_2, -u_1) \perp \overline{u}$.




*Nota* 1.5. Sea $r$ una recta de ecuación general $ax + by + x = 0$. Entonces el vector $\overline{v} = (a, b)$ es un vector perpendicular a $r$ y $\overline{u} = (b, -a)$ o $\overline{u'} = (-b, a)$ son direcciones de $r$.

*Nota* 1.6. Si $\alpha \neq 0$ y ponemos $a' = \alpha a$, $b' = \alpha b$, $c' = \alpha c$, entonces $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ son ecuaciones cartesianas de la misma recta $r$.

*Nota* 1.7. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación general de una recta $r$ en el plano. Si alguno de los coeficientes $a$, $b$ o $c$ se anulan, la recta tiene características particulares:

- si $c = 0$, el punto $O(0, 0)$ verifica la ecuación de $r$,o sea que $r$ es una recta que pasa por el origen.
- si $a = 0$, $b \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $y = -\frac{c}{b}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(x, -\frac{c}{b})$, y por lo tanto $r$ es una recta horizontal, paralela al eje $x$, que corta al eje $y$ en el punto de ordenada $-\frac{c}{b}$.
- si $b = 0$, $a \neq 0$, la ecuación cartesiana puede escribirse como $x = -\frac{c}{a}$, o sea los puntos que satisfacen la ecuación de la recta son de la forma $Q(-\frac{c}{a}, y)$, y por lo tanto $r$ es una recta vertical, paralela al eje $y$, que corta al eje $x$ en el punto de abscisa $-\frac{c}{a}$.

En cuanto a posiciones relativas entre dos rectas, nos hemos adelantado pues hemos reducido las tres opciones a los tres posibles casos para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases}$$

con $(a, b) \neq \overline{0}$, $(a', b') \neq \overline{0}$.

Cada una de las ecuaciones del sistema es la ecuación de una recta. Luego tenemos tres opciones:

1. Las dos rectas no son paralelas, en cuyo caso se cortan en un único punto y el sistema tiene solución única, dada por las coordenadas del punto de intersección.

   $$\text{El sistema } S \text{ es compatible determinado si y sólo si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0.$$

2. Las dos rectas son paralelas y no coincidentes. En este caso, las rectas no se cortan en ningún punto, y por lo tanto el sistema $S$ es incompatilble.

3. Las dos rectas son coincidentes, en cuyo caso las coordenadas de todos los puntos de cualquiera de las rectas es solución del sistema. En este caso $S$ es compatible indeterminado.

   $$\text{El sistema } S \text{ es compatible indeterminado o incompatible si y sólo si } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0.$$

Finalizamos esta sección recordando la noción de distancia de un punto a una recta:

**Definición 1.8.** Dado un punto $P$ del plano y una recta $r$, si trazamos una perpendicular a $r$ que pase por $P$, ésta corta a $r$ en un único punto $P'$. Se denomina **distancia** de $P$ a $r$, y se denota $d(P,r)$ a la distancia $d(P,P')$ entre $P$ y $P'$.

*Nota* 1.9. Si $P \in r$ es inmediato de la definición que $d(P,r) = d(P,P) = 0$.

**Teorema 1.10.** *Sea $r$ una recta de ecuación general $ax+by+c=0$ y sea $P$ $(x_0,y_0)$ un punto del plano. Entonces*

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\mid ax_0+by_0+c \mid}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

*Proof.* Sea $\overline{v} = (a,b)$ un vector normal a $r$. Si $Q$ es un punto cualquiera de $r$, entonces

$$d(P,r) = \left| proy_{\,\overline{v}}\, \overrightarrow{QP} \right|$$

Supongamos que $Q$ tiene coordenadas $(x',y')$. Entonces, como $Q \in r$ debe verificarse

$$ax' + by' + c = 0 \Rightarrow c = -ax' - by' \tag{1.4}$$

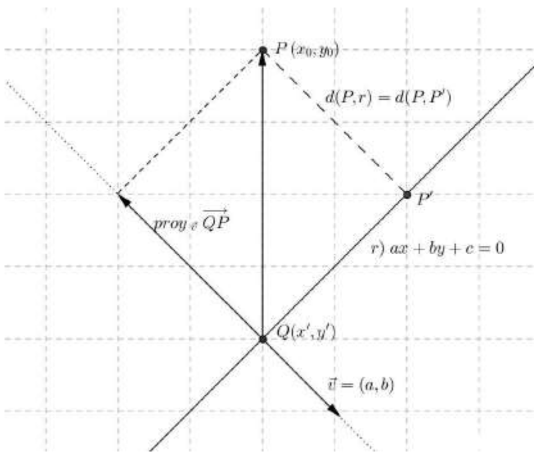
Por otra parte, $\overrightarrow{QP} = (x_0 - x', y_0 - y')$ y $\overline{v}_0 = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$ es el versor asociado a $\overline{v}$. Luego

$$|proy_{\,\overline{v}}\, \overrightarrow{QP}| = |(\overrightarrow{QP} \times \overline{v}_0)\cdot \overline{v}_0| = \left| \frac{a(x_0-x') + b(y_0-y')}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|$$

Ahora $a(x_0-x') + b(y_0-y') = ax_0 + by_0 - ax' - by' = ax_0 + by_0 + c$, donde la útilma igualdad surge de (1.4). Luego

$$d(P,r) = \left| proy_{\,\overline{v}}\, \overrightarrow{QP} \right| = \left| \frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right|.$$

□




## 2 Secciones cónicas

Estudiaremos en esta sección las denominadas *secciones cónicas*. Las secciones cónicas constituyen, después de las rectas, las curvas planas más simples de describir a través de una ecuación cartesiana.

El primero en introducirlas fue Apolonio de Perga, en el siglo III a.C., con el objetivo de construir curvas que permitiecen resolver los problemas de construcción de la antigua Grecia (ya no con la sóla utilización de regla y compás). Durante mucho tiempo las cónicas jugaron un papel relativamente secundario en la matemática, hasta que Kepler y posteriormente Newton con sus leyes mostraron que las órbitas de los planetas son elipses que tienen al sol como uno de sus focos. Galileo demostró que la trayectoria de un proyectil es parabólica. Actualmente se utilizan para construir espejos que reflejan la luz de forma particular, entre muchas otras aplicaciones. Desde el punto de vista de la matemática pura, las cónicas están en la base de la geometría proyectiva y la geometría algebraica moderna.

Su nombre se debe a que pueden obtenerse como intersecciones entre planos y un doble cono.

Un **doble cono recto** es una figura que se engendra al hacer girar una recta $g$ alrededor de una recta $h$ que la corta. La recta $h$ se denomina *eje* del cono y las distintas posiciones de la recta $g$ *generatrices* del cono. El punto de intersección del eje con cualquiera de las generatrices se denomina *vértice* del cono.

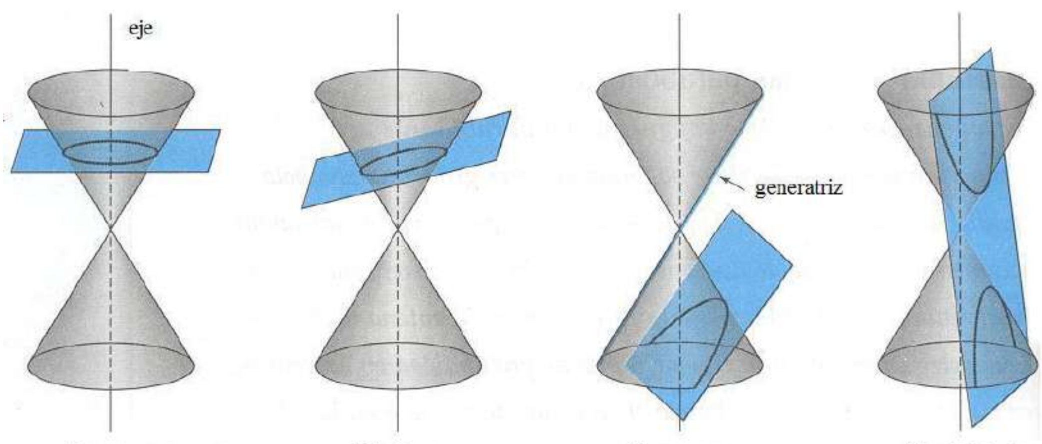
Una *sección cónica* es toda sección que se obtiene de intersecar un doble cono recto con un plano que lo corta. Según las distintas posiciones del plano de corte las secciones cónicas (o simplemente *cónicas*) reciben nombres diferentes, que damos a continuación:

(a) Si el plano es perpendicular al eje del cono y no pasa por el vértice, la cónica se denomina una *circunferencia*. En el caso especial de que el plano pase por el vértice se obtiene un punto.

(b) Si el plano no es perpendicular al eje del cono y forma con él un ángulo superior al ángulo que forman el eje del cono y cualquier generatriz, la cónica resultante se denomina una *elipse*, salvo en el caso especial que el plano pase por el vértice donde se obtiene un punto.

(c) Si el plano es paralelo a cualquiera de las generatrices del cono, la cónica resultante se denomina *parábola*, excepto si el plano pasa por el vértice, en cuyo caso se obtiene una recta.

(d) Si el ángulo que forman el plano y el eje es inferior al ángulo que forman el eje y una generatriz cualquiera, la cónica que se denomina *hipérbola*, salvo en el caso especial en que el plano pase por el vértice, en cuyo caso se obtienen dos rectas que se cortan.




(a) Circunferencia (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

Los casos especiales que aparecen en los casos que enumeramos anteriormente (un punto, una recta o un par de rectas concurrentes) se denominan *cónicas degeneradas*.

Nos dedicaremos a caracterizar las cónicas como lugares geométricos en términos de distancia, encontraremos sus elementos distinguidos y sus ecuaciones cartesianas en un sistema dado.

## 2.1 Circunferencia

Comenzaremos recordando la definición de la circunferencia:

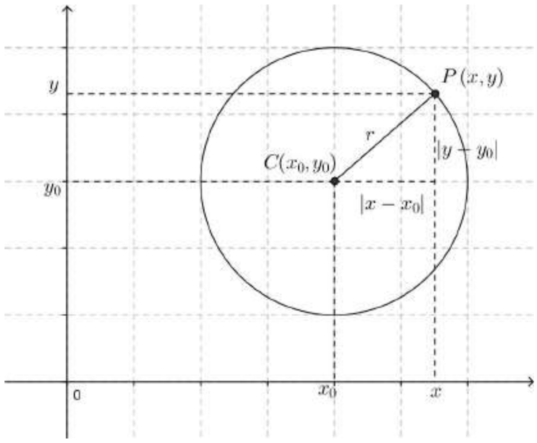
**Definición 2.1.** Se denomina **circunferencia** al conjunto de los puntos del plano que equidistan (a una distancia $r > 0$ denominada **radio**) de un punto fijo del plano, denominado **centro** de la circunferencia.

Ya hemos visto en unidades anteriores que la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ representa una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio $r$. Nos disponemos ahora a determinar las ecuaciones de una circunferencia centrada en un punto cualquiera del plano. Sea $C(x_0, y_0)$ un punto del plano y sea $r > 0$ un número real positivo. Sea $\mathcal{C}(C, r)$ la circunferencia de centro $C$ y radio $r$. Entonces resulta:

$$Q(x, y) \in \mathcal{C}(C, r) \Leftrightarrow d(P, C) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Obtenemos así que la ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio $r$ es

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2} \tag{2.1}$$




**Ejemplos 2.2.** 1. La circunferencia de centro $C(1, 2)$ y radio 3 tiene ecuación

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

2. Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{C} = \{Q(x, y) : \ x^2 + 2x + y^2 + 4y + 5 = 4\}.$$

Si completamos cuadrados en la ecuación $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 4$ obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1 \\ y^2 - 4y = (y^2 - 4y + 4) - 4 = (y - 2)^2 - 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = (x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 + 5 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2.$$

Luego $x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 4 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ y por lo tanto $\mathcal{C}$ es la circunferencia con centro en $C(-1, 2)$ y radio 2.

3. Consideremos el lugar geométrico $\circ$ dado por la ecuación $x^2+y^2-2x-2y+2 = 0$. Si completamos cuadrados, vemos que esta ecuación es equivalente a

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

con lo cual $\circ$ está constituido por el único punto $P(1, 1)$.

4. Consideremos ahora el lugar geométrico $\mathcal{C}$ definido por la ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$. En este caso, si completamos cuadrados vemos que la ecuación es equivalente a

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = -1$$

y por lo tanto $\mathcal{C}$ es el conjunto vacío.

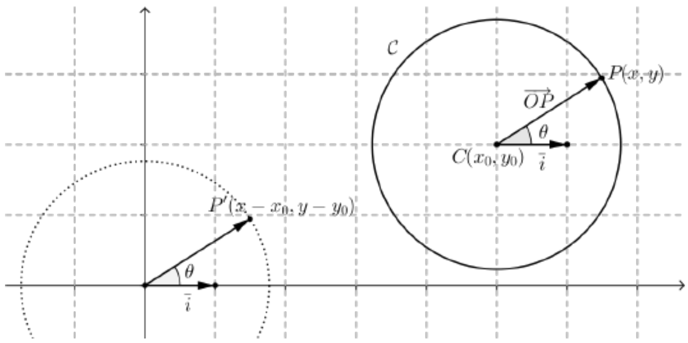
Así como hemos establecido en la primer sección las ecuaciones paramétricas de una recta en el plano, podemos encontrar ecuaciones paramétricas de las distintas secciones cónicas.

Las ecuaciones paramétricas de una curva son aquellas que describen las coordenadas de los puntos de una curva, y sólo de ellos, a través de un parámetro. Supongamos que $\mathcal{C}$ es una circunferencia centrada en el punto $C(x_0, y_0)$ y de radio $r$. Supongamos que un punto $P(x, y)$ es un punto genérico de la circunferencia. Entonces sabemos que sus coordenadas verifican la ecuación

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Nos interesa ahora determinar las coordenadas $(x, y)$ de $P$ en función de un parámetro. Para ello consideremos el ángulo $\theta$ que el vector $\overrightarrow{CP} = (x - x_0, y - y_0)$ determina con el versor $\bar{i} = (1, 0)$. Sea $P'$ el punto tal que $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{CP}$. Entonces las coordenadas de $P'$ son $(x - x_0, y - y_0)$ y por lo tanto

$$\cos\theta = \frac{x - x_0}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y - y_0}{r}$$




Obtenemos que cualquier punto $P$ sobre $\mathcal{C}$ puede obtenerse como

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + r\cos\theta \\ y = y_0 + r\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]} \tag{2.2}$$

Las ecuaciones (2.2) se denominan **ecuaciones paramétricas** de $\mathcal{C}$. Es claro que podríamos hacer variar el parámetro en todo $\mathbb{R}$ en cuyo caso estaríamos representando cada punto con una cantidad infinita de parámetros. Observemos que en (2.2) los parámetros $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ describen el punto $P_0$ de coordenadas $(x_0 + r, y_0)$. Cualquier otro punto puede describirse con un único parámetro. Así, el parámetro $\theta = \frac{\pi}{2}$ describe el punto $P_1(x_0, y_0 + r)$, el parámetro $\theta = \pi$ describe el punto $P_2(x_0 - r, y_0)$ y el parámetro $\theta = \frac{3}{2}\pi$ describe el punto $P_3(x_0, y_0 - r)$.

Si hacemos variar $\theta$ en algún subintervalo de $[0, 2\pi]$, podemos describir un arco de circunferencia. Por ejemplo la ecuación (2.2) con $\theta \in [0, \pi/2]$ describe el arco entre $P_0$ y $P_1$. Si hacemos variar $\theta \in [\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi]$, describimos la semicircunferencia de $P_1$ a $P_3$.

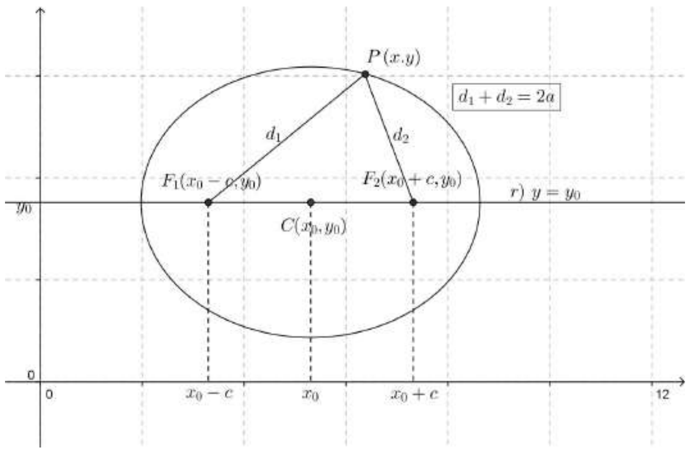
## 2.2 Elipse

**Definición 2.3.** Dados dos puntos distintos $F_1$ y $F_2$ del plano y un número real positivo $a$ tal que $2a > d(F_1, F_2)$, se denomina **elipse** de **focos** $F_1$ y $F_2$ al lugar geométrico de los puntos $P$ del plano tales que

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

El punto medio del segmento que determinan los focos se denomina **centro** de la elipse. La recta determinada por los focos de la elipse se denomina **eje focal**. Denotaremos por $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ la elipse de focos $F_1$ y $F_2$ y distancia $2a$.

Así como podemos graficar una circunferencia tomando una cuerda de longitud $r$ y haciéndola girar alrededor de un punto, es fácil contruir mecánicamente una elipse para darnos una idea de cómo es su gráfica. Podemos por ejemplos fijar dos clavos a una superficie (que representarán los focos) y tomar un hilo de longitud $2a$. Fijamos uno de los extremos del hilo a uno de los clavos y el otro extremo al otro clavo. Si tomamos un lapiz y realizamos un dibujo de modo que el hilo siempre quede tenso, obtendremos una figura como la siguiente. Esta es la elipse con los focos en los lugares en que fijamos los clavos.




Comenzaremos encontrando las ecuaciones cartesianas de una elipse que tenga su eje focal paralelo al eje $x$ o al eje $y$.

Comencemos analizando el primer caso. Supongamos que $F_1$ y $F_2$ se encuentran sobre la recta de ecuación $y = y_0$ paralela al eje $x$. Sea $C(x_0, y_0)$ el centro de la elipse, esto es, el punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$. Luego, si

$$c = d(C, F_1) = d(C, F_2) > 0,$$

las coordenadas de los focos resultan

$$F_1(x_0 - c, y_0), \quad F_2(x_0 + c, y_0).$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-(x_0-c))^2 + (y-y_0)^2} + \sqrt{(x-(x_0+c))^2 + (y-y_0)^2} = 2a \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2} = 2a - \sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad ((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2 = \left(2a - \sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad ((x-x_0)-c)^2 + (y-y_0)^2 = \\
&\phantom{\Leftrightarrow} \quad 4a^2 - 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} + ((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-x_0)^2 - 2c(x-x_0) + c^2 = \\
&\phantom{\Leftrightarrow} \quad 4a^2 - 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} + (x-x_0)^2 + 2c(x-x_0) + c^2.
\end{aligned}$$

Reordenando y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a) \quad &\Leftrightarrow \quad 4a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} = 4a^2 + 4c(x-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad a\sqrt{((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2} = a^2 + c(x-x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad a^2\left[((x-x_0)+c)^2 + (y-y_0)^2\right] = \left[a^2 + c(x-x_0)\right]^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2(x-x_0)^2 + 2a^2c(x-x_0) + a^2c^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^4 + 2a^2c(x-x_0) + c^2(x-x_0)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2-c^2)(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2(a^2-c^2)
\end{aligned}$$

Definamos $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, (observemos que $a^2 - c^2 > 0$, justificar por qué), tenemos

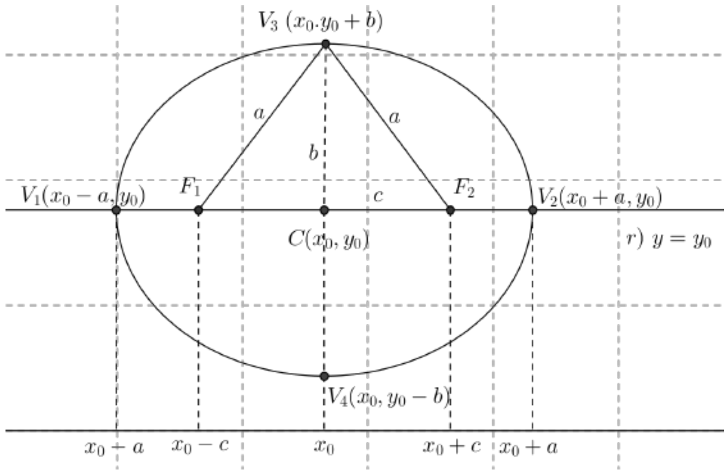
$$P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a) \Leftrightarrow b^2(x-x_0)^2 + a^2(y-y_0)^2 = a^2b^2$$

dividiendo ambos miembros por $a^2b^2$ obtenemos finalmente

$$\boxed{P(x,y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a) \Leftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1}$$

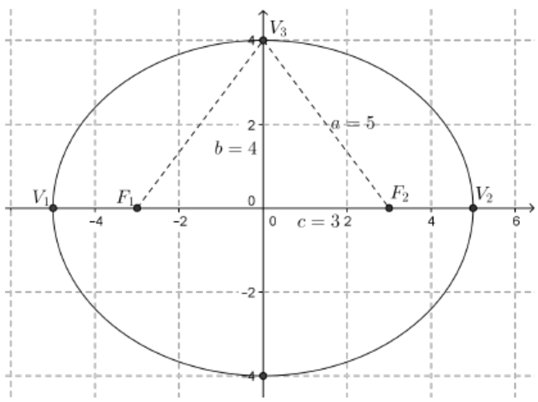
Analicemos los significados geométricos de $a$, $b$ y $c$.

- $c$ es la distancia del centro de la elipse a cada uno de los focos. Esto es, $2c = d(F_1, F_2)$.
- $a$ es tal que cada punto de la elipse verifica $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ y recíprocamente. Esto implica que si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la elipse, los puntos $V_1(x_0 - a, y_0)$ y $V_2(x_0 + a, y_0)$ son puntos de la elipse, que se denominan **vértices** de la elipse. Son los puntos donde la distancia al centro es máxima.
- $b^2 = a^2 - c^2$, lo que implica que los puntos $V_3(x_0, y_0 + b)$ y $V_4(x_0, y_0 - b)$ son puntos de la elipse también denominados **vértices**, y son los puntos donde la distancia al centro es mínima.
- Observemos que siempre se verifica $a > b$ y $a > c$.

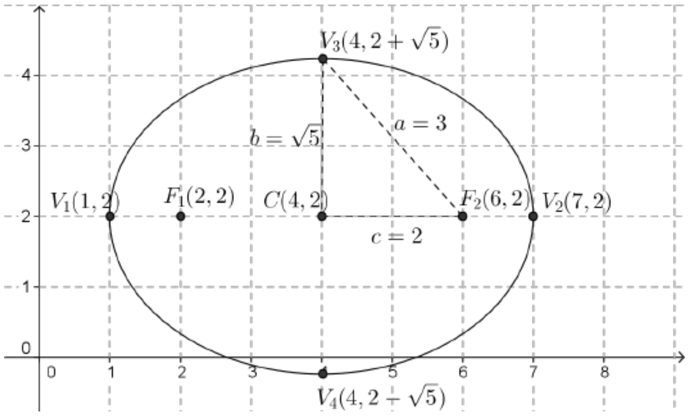



**Ejemplos 2.4.** 1. Consideremos la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Entonces la elipse está centrada en el origen $O(0,0)$, $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, con lo cual $a = 5$, $b = 4$ y $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$.

Luego los focos de la elipse son $F_1(-3, 0)$ y $F_2(3, 0)$ y los vértices son $V_1(-5, 0)$, $V_2(5, 0)$, $V_3(0, 4)$ y $V_4(0, -4)$. Con esta información estamos en condiciones de realizar la gráfica de la elipse:




2. Queremos encontrar la elipse de focos $F_1(2, 2)$, $F_2(6, 2)$ y $a = 3$. El punto medio de $\overline{F_1F_2}$ es $C(4, 2)$. Luego $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 2$ y en consecuencia $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5}$. Luego la ecuación de la elipse es
$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1$$
y los vértices son $V_1(1, 2)$, $V_2(7, 2)$, $V_3(4, 2 + \sqrt{5})$ y $V_4(4, 2 - \sqrt{5})$.




*Nota* 2.5. Si la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ tiene sus focos sobre una recta paralela al eje $y$ y centro en el punto $C(x_0, y_0)$, entonces de manera análoga a lo hecho anteriormente, concluimos que la ecuación de la elipse es

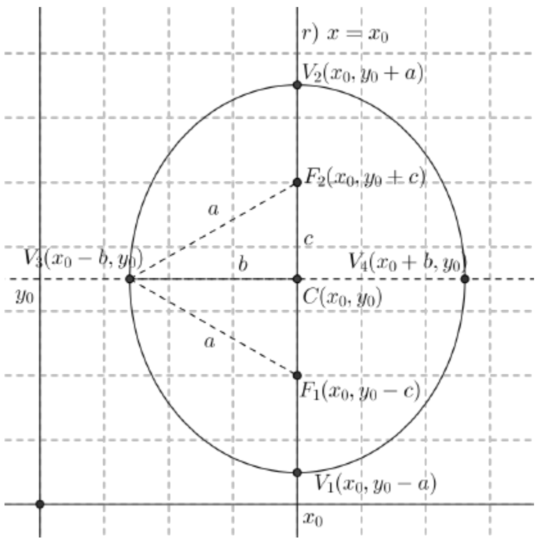
$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1}$$

donde si $c = d(C, F_1)$,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} < a.$$

Tenemos además:

- Los focos son $F_1(x_0, y_0 - c)$ y $F_2(x_0, y_0 + c)$.
- Los vértices son $V_1(x_0, y_0 - a)$, $V_2(x_0, y_0 + a)$, $V_3(x_0 - b, y_0)$ y $V_4(x_0 + b, y_0)$.



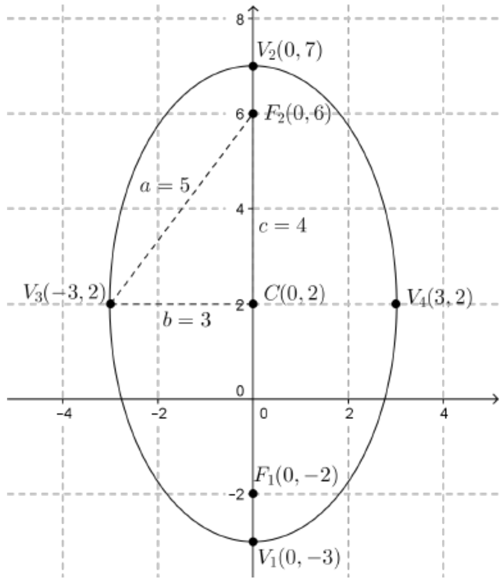

**Ejemplos 2.6.** 1. Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{E} = \{Q(x, y) : 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0\}.$$

Comenzamos completando cuadrados en el término $9y^2 - 36y$. Tenemos: $9y^2 - 36y = 9(y^2 - 4y) = 9(y^2 - 4y + 4 - 4) = 9((y-2)^2 - 4) = 9(y-2)^2 - 36$. Luego

$$\begin{aligned} 25x^2 + 9y^2 - 36y - 189 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 25x^2 + 9(y-2)^2 - 36 - 189 = 0 \Leftrightarrow 25x^2 + 9(y-2)^2 = 225 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1 \end{aligned}$$

Concluimos que $\mathcal{E}$ es una elipse de centro $C(0, 2)$, con $a = 5$ y $b = 3$, con lo cual $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$. Luego $\mathcal{E}$ es una elipse vertical con focos $F_1(0, -2)$ y $F_2(0, 6)$ y vértices $V_1(0, -3)$, $V_2(0, 7)$, $V_3(-3, 2)$ y $V_4(2, 3)$.




Encontraremos ahora las ecuaciones paramétricas de la elipse $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$. Supongamos que $\mathcal{E}$ está centrada en el punto $C(x_0, y_0)$, su eje focal es paralelo al eje $x$ y sus ecuaciones son

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

Consideremos ahora el punto $P'(x', y')$, donde

$$x' = \frac{x - x_0}{a}, \quad y' = \frac{y - y_0}{b}$$

Entonces las coordenadas de $P'$ verifican $x'^2 + y'^2 = 1$, o sea, $P'$ está en una circunferencia centrada en el origen y de radio 1.

Luego $x' = \cos\theta, \ y' = \sin\theta$, y por lo tanto tenemos

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cos\theta \\ y = y_0 + b\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi].} \tag{2.4}$$

Recíprocamente, si $(x, y)$ son las coordenadas de un punto que pueden escribirse como en (2.4), el punto $P(x, y)$ que describe verifica $x - x_0 = a\cos\theta$, $y - y_0 = b\sin\theta$ y por lo tanto

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2\theta}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

de donde $P \in \mathcal{E}$. De manera análoga, puede verse que las ecuaciones paramétricas de una elipse con eje focal paralelo al eje $y$ son

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + b\cos\theta \\ y = y_0 + a\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, 2\pi]}$$

## 2.3 Hipérbola

**Definición 2.7.** Dados dos puntos distintos del plano $F_1$ y $F_2$ y un número real positivo $a$ tal que $2a < d(F_1, F2)$, se denomina **hipérbola** de focos $F_1$ y $F_2$ al lugar geométrico de los puntos $P$ del plano que verifican

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

El punto medio del segmento $\overline{F_1F_2}$ se denomina **centro** de la hipérbola y la recta que contiene a los focos se denomina **eje focal**.

Hallaremos las ecuaciones de las hipérbolas con eje focal paralelo al eje $x$ o al eje $y$.

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola y $c = d(C, F_1) = d(C, F_2)$, resulta en este caso $c > a$. Si denotamos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, realizando los mismos pasos que para obtener la ecuación de la elipse, obtenemos que la ecuación de una hipérbola $\mathcal{H}$ de focos $F_1$, $F_2$ y distancia $a$ es:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1} \tag{2.5}$$

si el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ (o sea es horizontal), y

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1} \tag{2.6}$$

si el eje focal es vertical, o sea, es la recta $r)\ x = x_0$.

**Interpretación geométrica de $a$, $b$ y $c$:**

Sea $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ la hipérbola de focos $F_1$ y $F_2$ y distancia $2a$. Supondremos que el eje focal es la recta $r)\ y = y_0$ paralela al eje $x$ (si el eje focal es paralelo al eje $y$ el desarrollo que haremos a continuación es análogo).

Si $C(x_0, y_0)$ es el centro de la hipérbola, entonces

$$\boxed{c = d(C, F_1) = d(C, F_2)},$$

con lo cual los focos son $F_1(x_0 - c, y_0)$ y $F_2(x_0 + c, y_0)$.

Sean $V_1$ y $V_2$ los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal más cercanos a $F_1$ y $F_2$ respectivamente. $V_1$ y $V_2$ se denominan **vértices** de la hipérbola. Como $V_1$ es un punto de $\mathcal{H}$, se debe verificar $d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = 2a$.

Pero $d(V_1, F_2) = d(V_1, C) + d(C, F_2) = d(V_1, C) + c$ y $d(V_1, F_1) = d(C, F_1) - d(C, V_1) = c - d(V_1, C)$. Luego

$$2a = d(V_1, F_2) - d(V_1, F_1) = d(V_1, C) + c - (c - d(V_1, C)) = 2d(V_1, C) \Rightarrow \boxed{d(V_1, C) = a}$$

De manera análoga se concluye que $d(V_2, C) = a$ con lo cual los vértices son $V_1(x_0 - a, y_0)$ y $V_2(x_0 + a, y_0)$.

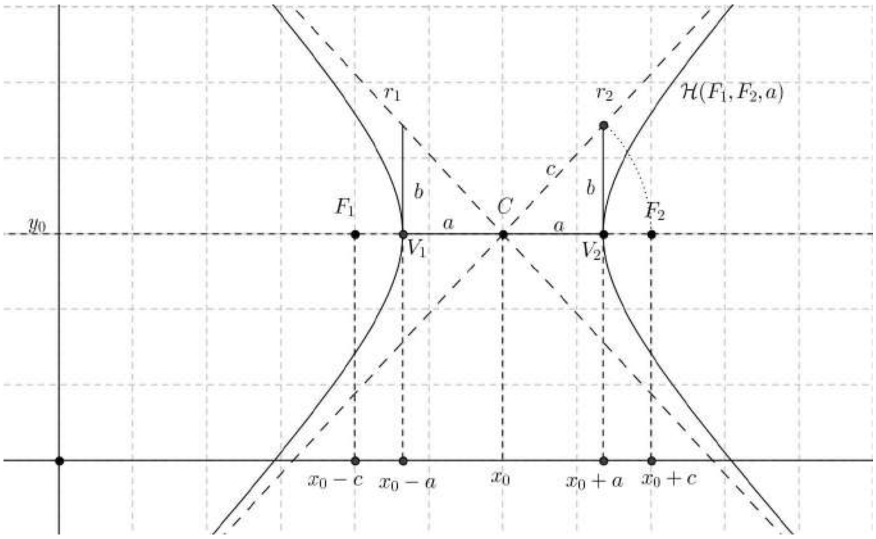
Pongamos ahora

$$\boxed{b = \sqrt{c^2 - a^2}}.$$

Tracemos por $V_1$ y por $V_2$ segmentos perpendiculares al eje focal de longitud $b$. Si trazamos las rectas $r_1$ y $r_2$ que pasan por $C$ y por los extremos de estos segmentos, obtenemos que tienen pendientes $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$ respectivamente y por lo tanto sus ecuaciones son

$$\boxed{r_1)\ y = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0, \quad r_2)\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0}$$

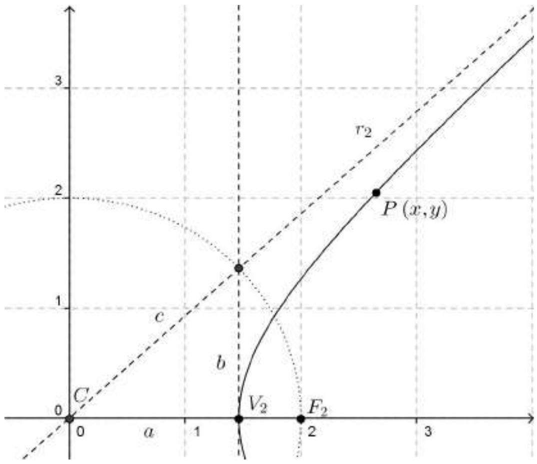
Entonces estas rectas son las **asíntotas** de la hipérbola. O sea que a medida que los puntos de la hipérbola se alejan del centro en cualquiera de las cuatro direcciones, éstos se acercan tanto como queramos a estas rectas, sin nunca tocarlas.




Probaremos este hecho para el caso particular que la hipérbola esté centrada en el origen, a los efectos de simplificar los cálculos (puede intentarse la prueba general!).

Sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola con $x > 0$, $y > 0$ como se muestra en la figura. Entonces

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$




Observemos que la ecuación general de $r_2$ cuando $C$ es el origen es $-bx + ay = 0$. Entonces

$$d(P, r_2) = \frac{|-bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|-bx + ab\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\left|-bx + b\sqrt{x^2 - a^2}\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\left|\sqrt{x^2 - a^2} - x\right|.$$

Ahora bien, $P$ se aleja de $C$ a medida que su abscisa $x$ crece. Como tenemos

$$\lim_{x \to \infty}\left|\sqrt{x^2 - a^2} - x\right| = \lim_{x \to \infty}\left|\frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right| = \lim_{x \to \infty}\left|\frac{x^2 - a^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right| = 0$$

resulta que la distancia $d(P, r_2)$ tiende a 0 cuando $P$ se aleja de $C$, como queríamos ver.

En el caso de que la hipérbola tenga eje focal paralelo al eje $y$, el análisis es análogo, pero las asíntotas tienen pendientes $-\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{b}$. Analizaremos esto más adelante con un ejemplo.

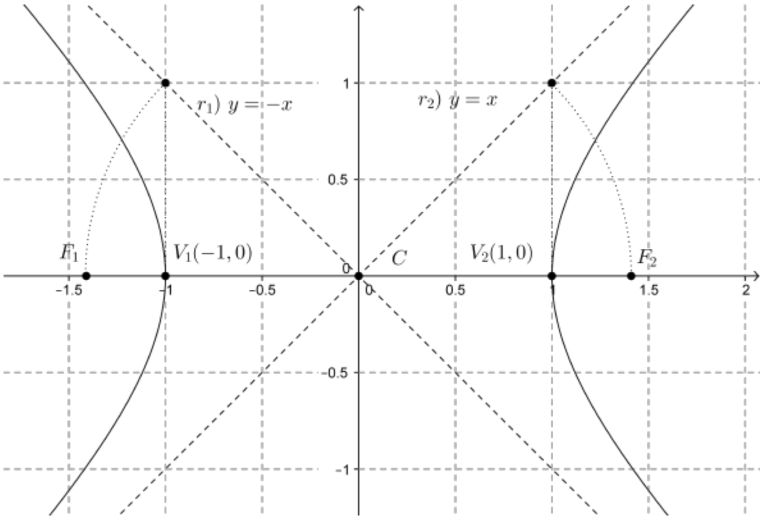
**Ejemplos 2.8.** 1. Sea $\mathcal{H}$ la hipérbola de focos $F_1(\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(-\sqrt{2}, 0)$ y $a = 1$.

El centro de $\mathcal{H}$ es $C(0, 0)$, el punto medio de $\overline{F_1F_2}$, y por lo tanto $c = d(C, F_1) = \sqrt{2}$. Luego $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 1$ y como el eje focal de $\mathcal{H}$ es el eje $x$, la ecuación de $\mathcal{H}$ es

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Los vértices son $V_1(-1,0)$ y $V_2(1,0)$ y las asíntotas son las rectas

$$r_1)\ y=-x, \quad r_2)\ y=x.$$




2. Consideremos el lugar geométrico

$$\mathcal{H}=\{Q(x,y): 16x^2+32x-9y^2+18y-137=0\}.$$

Completando cuadrados tenemos

$$16x^2+32x=16(x^2+2x+1-1)=16(x+1)^2-16;\ \ -9y^2+18y=-9(y^2-2y+1-1)=-9(y-1)^2+9.$$

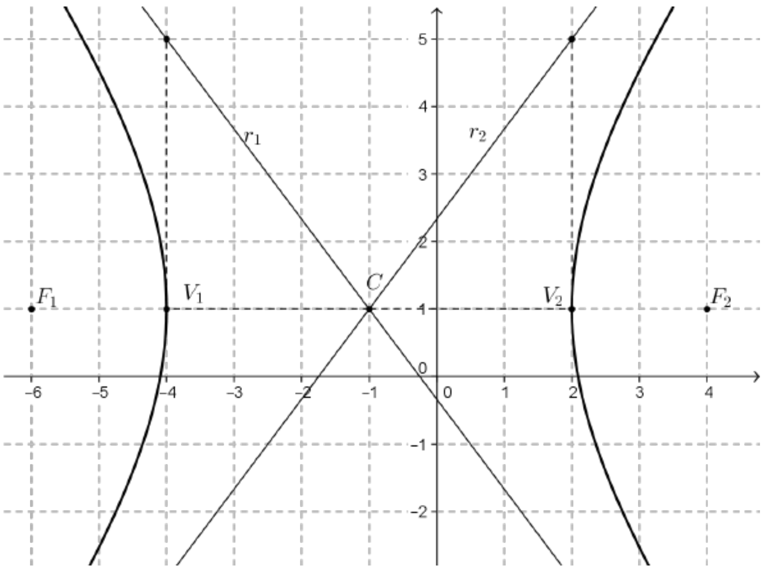
Luego

$$\begin{aligned} 16x^2+32x-9y^2+18y-137=0 &\Leftrightarrow 16(x+1)^2-16-9(y-1)^2+9-137=0\\ &\Leftrightarrow 16(x+1)^2-9(y-1)^2=144\\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1 \end{aligned}$$

Luego $\mathcal{H}$ es una hipérbola con centro en $C(-1,1)$ y eje focal paralelo al eje $x$, $r)\ y=1$. Además $a^2=9$ y $b^2=16$ con lo cual $a=3$, $b=4$ y $c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.

Concluimos entonces que los focos de $\mathcal{H}$ son $F_1(4,1)$ y $F_2(-6,1)$ y los vértices son $V_1(-4,1)$ y $V_2(2,1)$. Las asíntotas son $r_1$ de ecuación $y=-\frac{4}{3}(x+1)-1$ y $r_2$ de ecuación $y=\frac{4}{3}(x+1)-1$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ es:

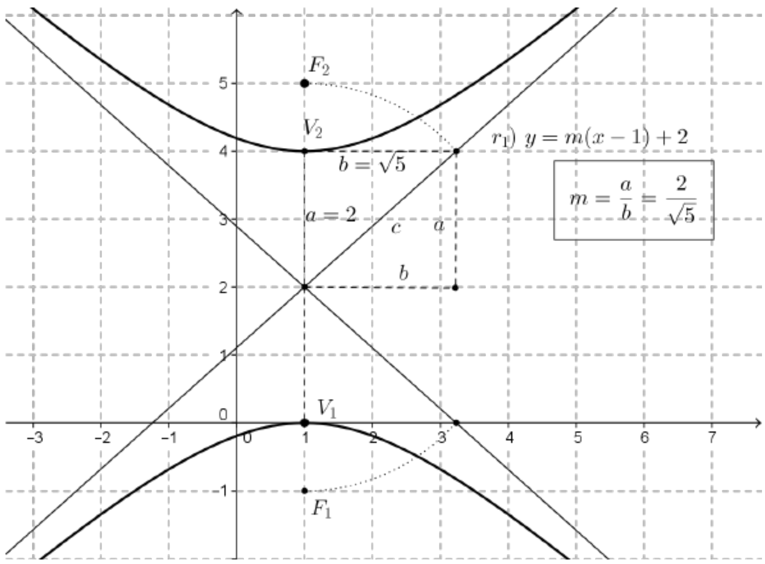


3. Consideremos la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1.$$

En este caso se trata de una hipérbola de centro $C(1,2)$ y eje focal $r)\ x = 1$ paralelo al eje $y$. Tenemos además $a^2 = 4$, $b^2 = 5$ con lo cual $a = 2$, $b = \sqrt{5}$ y $c = \sqrt{4+5} = 3$. Luego los focos de $\mathcal{H}$ son $F_1(1,-1)$ y $F_2(1,5)$ y los vértices son $V_1(1,0)$ y $V_2(1,4)$. La asíntotas son $r_1$ de ecuación $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$ y $r_2$ de ecuación $y = \frac{2}{\sqrt{5}}(x-1)+2$.

La gráfica de $\mathcal{H}$ es




4. Consideremos el lugar geométrico $\mathcal{H}$ representado por la ecuación $2x^2 - y^2 - 4x + 4y - 2 = 0$. Si completamos cuadrados, vemos que la ecuación puede ser escrita como

$$2(x-1)^2 - (y-2)^2 = 0.$$

Los puntos que la satisfacen son aquellos cuyas coordenadas verifican $2(x-1)^2 = (y-2)^2$, o sea

$$x - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(y-2) \quad \text{o} \quad x - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(y-2).$$

Por lo tanto $\mathcal{H}$ es la unión de estas dos rectas, que se intersecan en el punto $P(1,2)$.

Determinaremos ahora las ecuaciones paramétricas de la hipérbola. Para ello necesitaremos de las funciones hiperbólicas. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el **coseno hiperbólico** de $t$ y el **seno hiperbólico** se definen como

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Es fácil verificar que el coseno hiperbólico es una función par y que $Im(\cosh) = [1, +\infty)$. Por otra parte, el seno hiperbólico es una función impar y $Im(\sinh) = \mathbb{R}$.

Además vale la relación

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Consideremos entonces la hipérbola $\mathcal{H}$ de ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Luego $\mathcal{H}$ es una hipérbola con eje focal paralelo al eje $x$. Descompondremos a $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{H}^-$$

donde $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : x > x_0\}$ y $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : x < x_0\}$.

Sea $P(x,y) \in \mathcal{H}^+$. Como $Im(\sinh) = \mathbb{R}$, existirá un número real $t$ tal que $\dfrac{y-y_0}{b} = \sinh\, t$. Observemos que entonces

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} = 1 + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t$$

y como $(x-x_0) > 0$, resulta

$$\frac{x-x_0}{a} = \cosh\, t \tag{2.7}$$

Concluimos que los puntos de $\mathcal{H}^+$ pueden parametrizarse como

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cosh\, t \\ y = y_0 + b\sinh\, t \end{cases} , t \in \mathbb{R}}$$

y recíprocamente, dado un $t \in \mathbb{R}$ cualquiera estas ecuaciones siempre desciben un punto de $\mathcal{H}^+$.

Si hubiesemos tomado $P(x,y) \in \mathcal{H}^-$, tendríamos comparando con (2.7)

$$\frac{x-x_0}{a} = -\cosh\, t$$

y por lo tanto las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{H}^-$ son

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 - a\cosh\, t \\ y = y_0 + b\sinh\, t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}}.$$

Si ahora la ecuación de $\mathcal{H}$ fuese

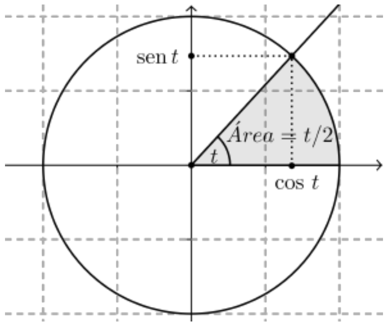
$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

definimos $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : y > y_0\}$ y $\mathcal{H}^- = \mathcal{H} \cap \{P(x,y) : y < y_0\}$ y parametrizamos

$$\boxed{\mathcal{H}^+ \begin{cases} x = x_0 + b\sinh\, t \\ y = y_0 + a\cosh\, t \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}, \qquad \mathcal{H}^- \begin{cases} x = x_0 + b\sinh\, t \\ y = y_0 - a\cosh\, t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.}$$

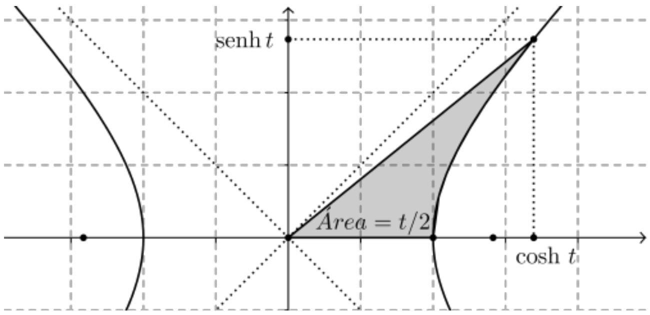
La interpretación geométrica del parámetro $t$ es más compleja y simplemente indicaremos cómo se obtiene. No intentaremos una prueba dado que requiere de herramientas que escapan a los contenidos de este curso. Las **funciones hiperbólicas** pueden definirse de manera similar que como se definen las funciones trigonométricas. Recordemos que para definir las funciones trigonométricas se utiliza la denominada **circunferencia trigonométrica**, es decir, la circunferencia centrada en el origen y de radio 1, y cuya ecuación por lo tanto es $x^2 + y^2 = 1$. Si $\theta$ es un ángulo y $P(x,y)$ es un punto de la circunferencia tal que el ángulo orientado en el sentido contrario a las agujas del reloj que forma el vector $\overrightarrow{OP}$ con el versor $\bar{\imath}$, entonces $\cos\theta = x$ y $\sin\theta = y$ (observemos que utilizamos estas fórmulas para parametrizar la circunferencia).

Otra forma de describir las funciones trigonométricas es a través del área. Supongamos que tenemos un número real $t$ y queremos determinar cos $t$ y sin $t$. No pensemos por el momento en $t$ como un ángulo. Tomemos la circunferencia trigonométrica y marquemos un punto $P(x,y)$ sobre ella de modo que el área que queda determinada en el sector circular delimitado por el eje positivo de las $x$ con la semirrecta $\overrightarrow{OP}$ sea $t/2$. Supongamos ahora que definimos cos $t = x$ y sin $t = y$.




Como el área de un sector circular de radio $r$ correpondiente a un ángulo $t$ (en radianes) es $\frac{t}{2}r^2$, en nuestro caso particular vemos que el seno y el coseno como los acabamos de definir coinciden con las definiciones que ya conocíamos.

Sin embargo, esto debiera motivarnos de alguna manera a definir como sigue las funciones hiperbólicas. Consideremos ahora la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$. Consideremos un número real $t$ cualquiera y marquemos un punto $P(x, y)$ con $x > 0$ sobre la hipérbola de modo que el área de la región comprendida entre la gráfica de la hipérbola y la asíntota sea $|t/2|$. Si $t \geq 0$ elegimos un punto con $y \geq 0$ y si $t < 0$ elegimos un punto con $y < 0$. Entonces definimos cosh $t = x$ y sinh $t = y$.




Es bastante difícil demostrar que en efecto

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

pero puede hacerse utilizando elementos de cálculo elemental (una prueba completa puede verse en "Shankar, K. *Deriving the definition of the hyperbolic trigonometric functions and their identities*", 2011, www.kaushikshankar.com). Sin embargo, de como hemos definido las funciones hiperbólicas, resulta evidente que la función coseno hiperbólico es par y que la función seno hiperbólico es impar, que $\cosh 0 = 1$ y $\sinh 0 = 0$. También, como $P(x, y)$ es un punto de la hipérbola, debe verificarse

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

y es inmediato que esta hipérbola puede parametrizarse como

$$\begin{cases} x = \cosh t \\ y = \sinh t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si ahora consideramos la hipérbola de ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

y definimos $x' = \dfrac{x - x_0}{a}$, $y' = \dfrac{y - y_0}{b}$, resulta claro que $P'(x', y')$ pertenece a la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$ y por lo tanto existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $x' = \cosh t$, $y' = \sinh t$. Despejando $x$ e $y$ obtenemos las ecuaciones paramétricas que ya habíamos encontrado.

## 2.4 Parábola

**Definición 2.9.** Dados una recta $r$ y un punto $F$ del plano tal que $F \notin r$ se denomina **parábola** de **directriz** $r$ y **foco** $F$ al lugar geométrico de los puntos $P$ del plano que equidistan de $F$ y $r$, esto es, tales que

$$d(P,F) = d(P,r).$$

Denotaremos por $\mathcal{P}(F,r)$ la parábola de directriz $r$ y foco $F$.

Encontraremos las ecuaciones de $\mathcal{P}$ en el caso que la directriz sea paralela al eje $x$ o al eje $y$.

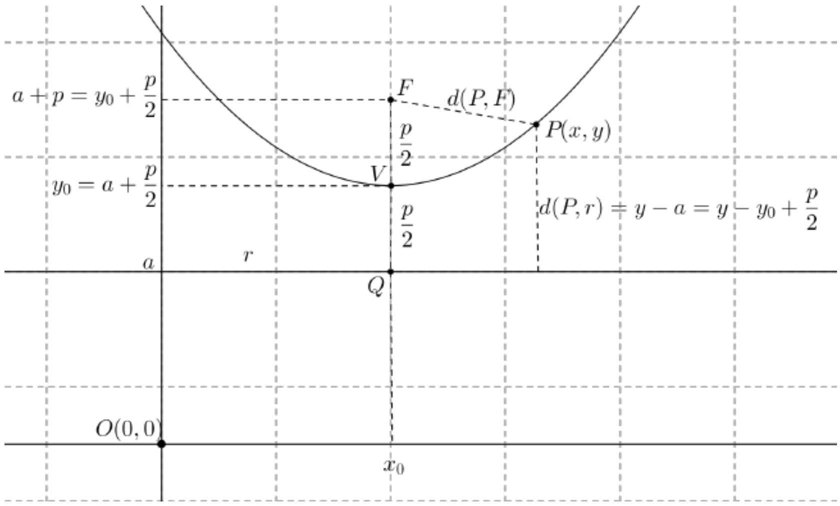
Comencemos analizando el caso que la directriz sea paralela al eje $x$, o sea, tiene ecuación $r)\ y = a$. Supongamos que el foco tiene coordenadas $F(x_0, y')$. Analizaremos dos casos, que $y' > a$ y que $y' < a$ (es decir, que $F$ esté *sobre* o *debajo* de la directriz). Fijemos

$$p = d(F,r)$$

y sea $Q(x_0, a) \in r$ el pie de la perpendicular a $r$ por $F$. O sea que $d(F,Q) = p$.

<u>**Caso I:**</u> $y' > a$.

En este caso $y' = a + p$. Sea $V(x_0, y_0)$ con $y_0 = a + \frac{p}{2}$ el punto medio de $\overline{FQ}$.




Entonces $d(V,F) = d(V,r) = \frac{p}{2}$. Luego $V \in \mathcal{P}(F,r)$ y se denomina el **vértice** de la parábola.

Observemos que además $a = y_0 - \frac{p}{2}$ y las coordenadas del foco $F$ son $(x_0, y_0 + \frac{p}{2})$. Por otra parte dado $P(x,y)$, resulta claro que $y > a$ (en caso que $y \leq a$ es evidente que $d(P,F) > d(P,r)$). Por lo tanto $d(P,r) = y - a = y - y_0 + \frac{p}{2}$ y entonces

$$\begin{aligned}
P \in \mathcal{P}(d,r) \quad &\Leftrightarrow \quad d(P,r) = d(P,F) \Leftrightarrow y - y_0 + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + \left(y - y_0 - \frac{p}{2}\right)^2} \\
&\Leftrightarrow \quad (y-y_0)^2 + p(y-y_0) + \frac{p^2}{4} = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 - p(y-y_0) + \frac{p^2}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad 2p(y-y_0) = (x-x_0)^2
\end{aligned}$$

Concluimos que la ecuación de la parábola $\mathcal{P}(F,r)$ es

$$\boxed{(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)} \qquad (2.8)$$

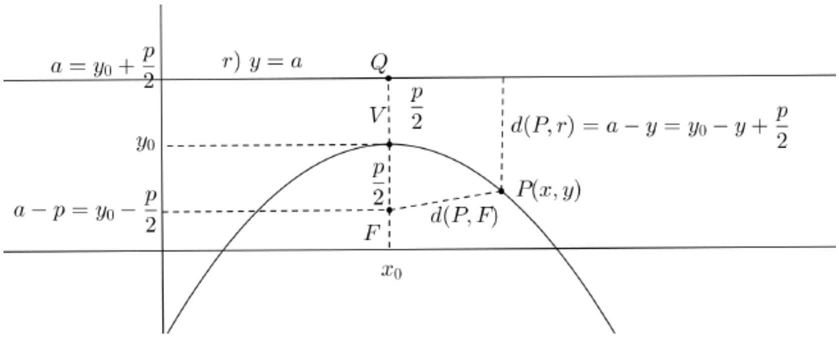
<u>**Caso II:**</u> $y' < a$.

En este caso el foco se encuentre debajo de la directriz, como se muestra en la figura e $y' = a - p$. Pongamos ahora $V(x_0, y_0)$ con $y_0 = a - \frac{p}{2}$. Entonces nuevamente $V \in \mathcal{P}(F,r)$ y $a = y_0 + \frac{p}{2}$ con lo cual

$y' = y_0 - \frac{p}{2}$. En este caso, dado un punto $P(x,y)$ en $\mathcal{P}$ resulta $d(P,r) = a - y = y_0 - y + \frac{p}{2}$ y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
P \in \mathcal{P}(d,r) &\Leftrightarrow d(P,r) = d(P,F) \Leftrightarrow y_0 - y + \frac{p}{2} = \sqrt{(x-x_0)^2 + \left(y - y_0 + \frac{p}{2}\right)^2} \\
&\Leftrightarrow (y_0 - y)^2 + p(y_0 - y) + \frac{p^2}{4} = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + p(y - y_0) + \frac{p^2}{4} \\
&\Leftrightarrow -2p(y - y_0) = (x - x_0)^2
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)} \tag{2.9}
$$




**Ejemplos 2.10.** 1. En el curso de Cálculo I, se ha visto que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. De hecho veremos que la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es siempre la ecuación de una parábola. Basta completar cuadrados para distinguir quiénes son $x_0$, $y_0$ y $p$ en este caso. Trabajaremos con un ejemplo concreto.

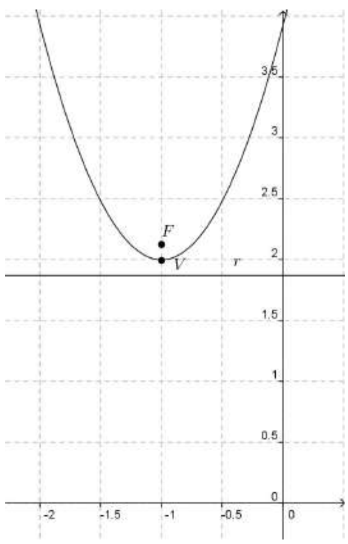
Consideremos el lugar geométrico

$$
\mathcal{P}\{R(x,y) : y = 2x^2 + 4x + 4\}
$$

Comenzamos completando cuadrados y tenemos $2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) = 2(x+1)^2 - 2$. Luego

$$
\begin{aligned}
y = 2x^2 + 4x + 4 &\Leftrightarrow y = 2(x+1)^2 - 2 + 4 \Leftrightarrow y - 2 = 2(x+1)^2 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}(y - 2) = (x+1)^2
\end{aligned}
$$

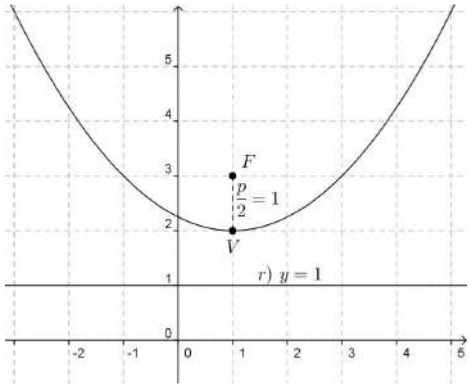
Concluimos que $\mathcal{P}$ es una parábola con $2p = \frac{1}{2}$, o sea $p = \frac{1}{4}$, de vértice $V(-1,2)$ y con directriz $r$ paralela al eje $x$. Recordando que la ecuación de $r$ es $y = a = y_0 - \frac{p}{2}$ concluimos que la directriz es $r)\ y = \frac{15}{8}$, y el foco es $F(-1, 2 + \frac{1}{8})$, o sea $F(-1, \frac{17}{8})$. La gráfica de $\mathcal{P}$ es la que se muestra a continuación:



2. Queremos encontrar las ecuaciones de la parábola $\mathcal{P}$ de foco $F(1,3)$ y directriz $r)$ $y=1$. Entonces $p=d(F,r)=2$ y por lo tanto el vértice de la parábola es $V(1,2)$ y su ecuación es

$$(x-1)^2 = 2(y-2).$$

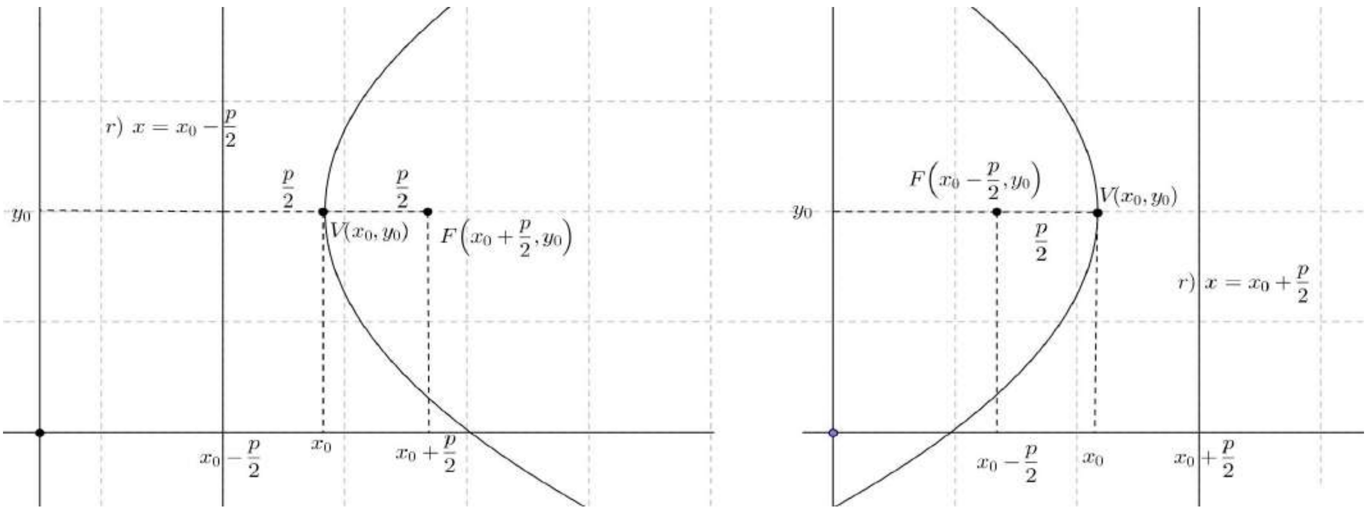
Su gráfica es



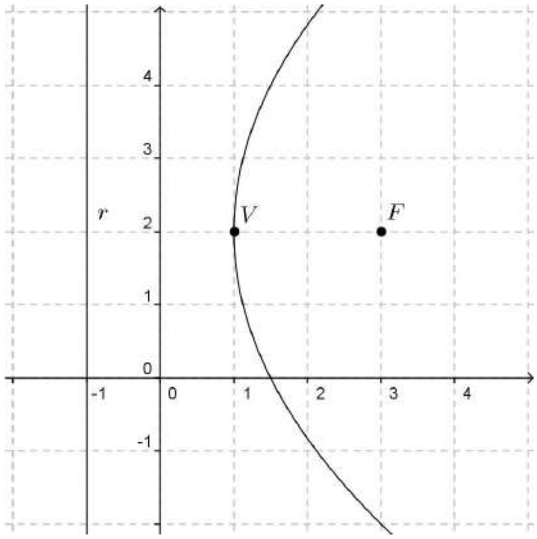

*Nota* 2.11. Si la parábola tiene directriz $r$ paralela al eje $y$, foco $F$, vértice $V(x_0,y_0)$ y $p=d(F,r)$, entonces con un razonamiento análogo al hecho anteriormente se concluye que:

- Si el foco está a la derecha de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la derecha y la ecuación es
$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$
- Si el foco está a la izquierda de la directriz, las ramas de la parábola van hacia la izquierda, y la ecuación es
$$(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$$

Sus gráficas son como se muestra en la figura:




**Ejemplo 2.12.** Sea $\mathcal{P}$ la parábola de ecuación $4(x-1)=(y-2)^2$. Entonces $\mathcal{P}$ es una parábola con vértice $V(1,2)$, $p=4$ y por lo tanto directriz $r$ paralela al eje $y$ de ecuación $x=-1$ y con foco $F(3,2)$. Su gráfica es




Determinaremos finalmente las ecuaciones paramétricas de una parábola. En este caso es muy sencillo. Dado que la ecuación de la parábola es *explícita*, es decir una de las coordenadas se expresa en función de la otra, podemos utilizar esta coordenada directamente como parámetro. A continuación mostramos las distintas ecuaciones de una parábola con las ecuaciones paramétricas asociadas:

| $(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$ | $(x-x_0)^2 = -2p(y-y_0)$ | $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ | $(y-y_0)^2 = -2p(x-x_0)$ |
|---|---|---|---|
| $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t \\ y = y_0 + \frac{1}{2p}t^2 \end{array} \right. ,\ t \in \mathbb{R}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + t \\ y = y_0 - \frac{1}{2p}t^2 \end{array} \right. ,\ t \in \mathbb{R}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \frac{1}{2p}t^2 \\ y = y_0 + t \end{array} \right. ,\ t \in \mathbb{R}$ | $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 - \frac{1}{2p}t^2 \\ y = y_0 + t \end{array} \right. ,\ t \in \mathbb{R}$ |