Completitud

Lemas, Teorema de Completitud

Definiciones

- $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ es **inconsistente** si $\Gamma \vdash \bot$.
- $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ es **consistente maximal** si es consistente y además $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$, $\forall \phi \in \textsc{Prop}$.
- Un modelo lógico es **correcto** si, $\forall \Gamma \subseteq \textsc{Prop}$, $\Gamma \vdash \phi \implies \Gamma \models \phi$.
- Un modelo lógico es **completo** si, $\forall \Gamma \subseteq \textsc{Prop}$, $\Gamma \models \phi \implies \Gamma \vdash \phi$.

Lema 1: Formulaciones Equivalentes

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. Γ es consistente.
2. $\nexists\phi \in \textsc{Prop} \mid \Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$.
3. $\exists\phi \in \textsc{Prop} \mid \Gamma \nvdash \phi$.

Y su contrarrecíproca:

1. Γ es inconsistente.
2. $\exists\phi \in \textsc{Prop} \mid \Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$.
3. $\forall\phi \in \textsc{Prop}, \Gamma \nvdash \phi$.

Lema 1: Formulaciones Equivalentes

Desmostración por reducción al absurdo.

$1 \implies 2$ *Supongamos que* $\exists\phi$*:* $\Gamma \vdash \phi$ *y* $\Gamma \vdash \neg\phi$. Por $i_\perp$, $\Gamma \vdash \perp$ pero por hipótesis, Γ es consistente. **Contradicción**.

$2 \implies 3$ *Supongamos que* $\forall\phi$, $\Gamma \vdash \phi$ (en particular, también $\neg\phi$). Luego, por hipótesis, $\Gamma \vdash \phi$ y $\Gamma \vdash \neg\phi$. **Contradicción**.

$3 \implies 1$ *Suponer que* $\Gamma \vdash \perp$. Luego, por $e_\perp$, $\Gamma \vdash \phi$ para cualquier ϕ. En particular, el de la hipótesis. **Contradicción.**

Lema 2: Condición suficiente de Consistencia

Si Γ **es satisfactible** entonces también **es consistente**. Es decir, si existe valuación v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$, entonces $\Gamma \nvdash \perp$.

Demostración.

Sea v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$. Si suponemos que Γ es inconsistente, es decir $\Gamma \vdash \perp$ entonces, por Correctitud, vale $\Gamma \models \perp$. Luego para toda valuación b tal que $[\![\Gamma]\!]_b = T$ valdrá $[\![\perp]\!]_b = T$. En particular para v, $[\![\perp]\!]_v = T$. **Absurdo**.

Luego Γ es consistente.

Lema 3: Propiedades de la Inconsistencia

1. Si $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \phi$.
2. Si $\Gamma \cup \{\phi\}$ es inconsistente, entonces $\Gamma \vdash \neg\phi$.

Demostración.

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\neg\phi]^{(1)}}{\bot}\,Hip}{\phi}\,RAA^{(1)} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma \qquad [\phi]^{(1)}}{\bot}\,Hip}{\neg\phi}\,i_{\neg}$$

Lema 4: Lema de Lindenbaum

Todo conjunto $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*.

Demostración.
Sea $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ consistente. Recordar que $\textsc{Prop}$ *es numerable*. Se define la sucesión de conjuntos tal que:

- $\Gamma_0 = \Gamma$
- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_\mathsf{n} \cup \{\phi_\mathsf{n}\} & \text{si } \Gamma_\mathsf{n} \cup \{\phi_\mathsf{n}\} \text{ consistente,} \\ \Gamma_n & \text{si } \Gamma_\mathsf{n} \cup \{\phi_\mathsf{n}\} \vdash \bot \end{cases}$

Luego tenemos que $\Gamma^* = \bigcup_{\mathsf{n} \in \mathbb{N}} \Gamma_\mathsf{n}$, entonces:

Lema 4: Lema de Lindenbaum

1. $\Gamma = \Gamma_0 \subseteq \Gamma^*$
2. $\forall$i, Γ_i consistente, pues por hipótesis $\Gamma_0 = \Gamma$ (**Base**) y si Γ_n consistente (**H.I.**) entonces también Γ_{n+1} pues:
   - Si $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \vdash \perp$ entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$ (consistente por **H.I.**)
   - Si $\Gamma_n \cup \{\phi_n\} \nvdash \perp$ (es consistente) entonces $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\phi_n\}$
3. Si suponemos que Γ^* no es consistente, es decir, $\Gamma^* \vdash \perp$ entonces $\exists\psi : \Gamma^* \vdash \psi$ y $\Gamma^* \vdash \neg\psi$. En ambas derivaciones, existen un numero finito de premisas $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_k \in \Gamma^*$. Considerar $\Gamma_j : \psi_1, \psi_2, ..., \psi_k \in \Gamma_j \subseteq \Gamma^*$, luego $\Gamma_j \vdash \psi$ y $\Gamma_j \vdash \neg\psi$ por lo que Γ_j inconsistente, lo que contradice el punto **2**. Luego Γ^* consistente.

Lema 4: Lema de Lindenbaum

4. Supongamos que Γ^* no es maximal. Es decir, existe un Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$. ¿$\Delta \subseteq \Gamma^*$?

Sea $\psi_m \in \Delta$. Como Δ consistente y $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$ entonces $\Gamma_m \cup \{\psi_m\}$ es consistente, y por definición, $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\psi_m\}$, de donde $\psi_m \in \Gamma_{m+1} \subseteq \Gamma^*$, por lo que $\psi_m \in \Gamma^*$. Entonces $\Delta \subseteq \Gamma^*$ y, por doble contención, $\Delta = \Gamma^*$ por lo que Γ^* maximal.

Lema 5: Clausura bajo derivación

Si $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ es *consistente maximal* entonces,
$\forall \phi$, si $\Gamma \vdash \phi$ entonces $\phi \in \Gamma$.

Demostración.
Suponer que $\phi \notin \Gamma$. Como Γ es consistente maximal, entonces vale $\Gamma \cup \{\phi\} \vdash \bot$ y por Lema 2.2, $\Gamma \vdash \neg\phi$.
Luego tengo $\Gamma \vdash \phi$ (por hipótesis) y $\Gamma \vdash \neg\phi$, y por $i_\bot$, $\Gamma \vdash \bot$.
Contradicción. Luego $\phi \in \Gamma$.

Lema 6: Propiedades de consistencia maximal

Si $\Gamma \subseteq \textsc{Prop}$ es consistente maximal, entonces valen las siguientes propiedades:

- $\forall \phi : \phi \in \Gamma$ o bien $\neg \phi \in \Gamma$, pero no ambas.
- $\forall \phi, \psi : \phi \wedge \psi \in \Gamma \iff \phi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$.
- $\forall \phi, \psi : \phi \vee \psi \in \Gamma \iff \phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.
- $\forall \phi, \psi : \phi \to \psi \in \Gamma \iff \neg \phi \in \Gamma$ o $\psi \in \Gamma$.

Demostración. Esta si no tengo ganas de hacerla. Saludos.

Lema 7: Condición necesaria de consistencia

Si Γ **es consistente** entonces también **es satisfactible**, es decir, existe una valuación v tal que $[\![\Gamma]\!]_v = T$.

Demostración.
Como Γ *consistente*, por Lema 4, $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ consistente maximal.
Sea v valuación tal que:

$$v(p_i) = \begin{cases} \mathrm{T} & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ \mathrm{F} & \text{si } p_i \notin \Gamma^* \end{cases}$$

Se prueba $\phi \in \Gamma^* \iff [\![\phi]\!]_v = T$, por inducción en ϕ:

Lema 7: Condición necesaria de consistencia

- Si $\phi \equiv p_i$:

  $$[\![p_i]\!]_v = T \overset{\text{H.I.}}{\Longleftrightarrow} p_i \in \Gamma^*.$$

- Si $\phi \equiv \neg\psi$:

  $$[\![\neg\psi]\!]_v = T \overset{def\,\neg}{\Longleftrightarrow} [\![\psi]\!]_v = F \overset{\text{H.I.}}{\Longleftrightarrow} \psi \notin \Gamma^* \overset{\text{L6.1}}{\Longleftrightarrow} \neg\psi \in \Gamma^*$$

- Si $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$:

  $$[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_v = T \overset{def\,\wedge}{\Longleftrightarrow} [\![\phi_1]\!]_v = [\![\phi_2]\!]_v = T \overset{H.I.}{\Longleftrightarrow} \phi_1 \in \Gamma^*$$

  $$\text{y } \phi_2 \in \Gamma^* \overset{L6.2}{\Longleftrightarrow} (\phi_1 \wedge \phi_2) \in \Gamma^*.$$

- Si $\phi \equiv \phi_1 \vee \phi_2$:

  $$[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_v = T \overset{def\,\vee}{\Longleftrightarrow} [\![\phi_1]\!]_v = T \text{ o } [\![\phi_2]\!]_v = T$$

  $$\overset{H.I.}{\Longleftrightarrow} \phi_1 \in \Gamma^* \text{ o } \phi_2 \in \Gamma^* \overset{L6.3}{\Longleftrightarrow} (\phi_1 \vee \phi_2) \in \Gamma^*.$$

Lema 7: Condición necesaria de consistencia

- $\phi \equiv \phi_1 \to \phi_2$:

$$
\begin{aligned}
& [\![\phi_1 \to \phi_2]\!]_v = F \\
& \xLeftrightarrow{def \to} [\![\phi_1]\!]_v = T \text{ y } [\![\phi_2]\!]_v = F \\
& \xLeftrightarrow{H.I.} \phi_1 \in \Gamma^* \ \text{ y } \phi_2 \notin \Gamma^* \\
& \xLeftrightarrow{L6.1} \neg\phi_1 \notin \Gamma^* \ \text{ y } \phi_2 \notin \Gamma^* \\
& \xLeftrightarrow{L6.4} (\phi_1 \to \phi_2) \notin \Gamma^*.
\end{aligned}
$$

Como cualquier formula $\phi \in \Gamma$ también estará en Γ^*, entonces resultará $[\![\phi]\!]_v = T$ y por lo tanto $[\![\Gamma]\!]_v = T$.

Teorema de Completitud

Si $\Gamma \models \phi$ entonces $\Gamma \vdash \phi$.

Demostración por contrarrecíproco ($\Gamma \nvdash \phi$ entonces $\Gamma \not\models \phi$).

- Si $\Gamma \nvdash \phi$, por contrarrecíproco Lema 3.1, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente.
- Luego, por Lema 7, $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es *satisfactible*. Es decir, $\exists v : [\![\Gamma \cup \{\neg\phi\}]\!]_v = T$
- Por definición de semántica, $[\![\Gamma]\!]_v = T$ y $[\![\neg\phi]\!]_v = T \overset{def\,\neg}{\Longleftrightarrow} [\![\phi]\!]_v = F$, por lo que $\Gamma \not\models \phi$.