Facultad de
Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura
FCEIA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ROSARIO

Probabilidad y Estadística

Unidad 5: Variables aleatorias continuas

Lic. Maite San Martín

Mayo 2025

Variable aleatoria continua
Definición

En la Unidad 4 definimos una variable aleatoria como una función X que parte del espacio muestral S asociado con un experimento aleatorio ε y cuyo recorrido es un conjunto finito o infinito numerable de valores.

Ahora, ¿qué pasa si la variable de interés puede tomar "cualquier valor" dentro de un intervalo específico? Si X es una variable aleatoria tal que $X: S \rightarrow R$ de forma tal que R es un infinito no numerable, entonces decimos que X es una variable aleatoria continua.

Ahora bien, ¿qué pasa con las probabilidades puntuales $p(x_i)$? Ahora que los valores posibles de X no son contables, ya no podemos hablar del i-ésimo valor de X y, por lo tanto, $p(x_i)$ pierde significado.

Variable aleatoria continua
Definición

Se dice que X es una variable aleatoria continua si existe una función f, llamada función de densidad de probabilidad (fdp) de X, que satisface las siguientes condiciones:

- $f(x) \geq 0$ para todo x
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$
- Para cualquier par de valores a, b tales que $-\infty < a < b < +\infty$, tenemos que $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$. Esta probabilidad se representa gráficamente como el área bajo la curva definida por la función de densidad comprendida entre los valores a y b.

Variable aleatoria continua
Observación

Una consecuencia de la descripción probabilística de X para un valor específico de X, por ejemplo x_0, es que tenemos $\mathrm{P}(X = x_0) = 0$, ya que $\mathrm{P}(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx = 0$. Sin embargo, debemos tener en cuenta que si permitimos que X tome todos los valores en un intervalo, entonces la probabilidad cero no es equivalente a la imposibilidad. Es decir, en el caso continuo $P(A) = 0$ no implica que $A = \emptyset$. Si, por ejemplo, tenemos una variable aleatoria X que puede tomar cualquier valor en el intervalo [0; 2], aunque cada punto concebible del intervalo puede ser un valor posible de X, por definición la probabilidad de cada uno de esos puntos será 0.

En este sentido, las siguientes expresiones serán todas equivalentes cuando trabajemos con variables aleatorias X continuas:

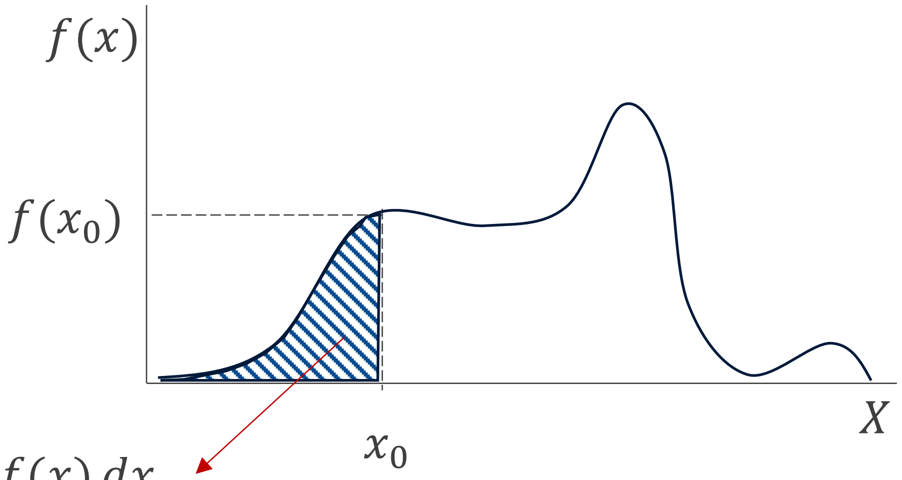
$$P(c \leq X \leq d), \qquad P(c \leq X < d), \qquad P(c < X \leq d), \qquad P(c < X < d)$$

Variable aleatoria continua

Observación

Si X sólo toma valores en un intervalo finito $[a, b]$, simplemente podemos establecer $f(x) = 0$ para todo $x \notin [a, b]$. Por lo tanto, la fdp está definida para todos los valores reales de X, y cualquiera sea el caso debe cumplirse que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$. Cuando la fdp se especifique sólo para ciertos valores de X, entonces supondremos que es cero para cualquier otro.

Atención: $f(x)$ no representa ninguna probabilidad.
Sólo cuando la función se integra entre dos límites aparece la probabilidad.



$$P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\, dx$$

Variable aleatoria continua

Ejemplo

Supongamos la función $\mathrm{f}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

a) Probar que $\mathrm{f}(x)$ puede ser la fdp de una variable aleatoria continua X.

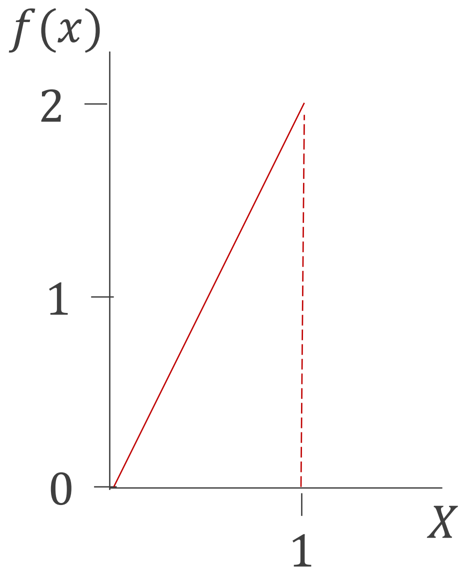
b) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2})$

c) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2}\ /\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3})$

Variable aleatoria continua
Ejemplo

Supongamos la función $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

a) Probar que $f(x)$ puede ser la fdp de una variable aleatoria continua X.



Por un lado, $f(x) \geq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.

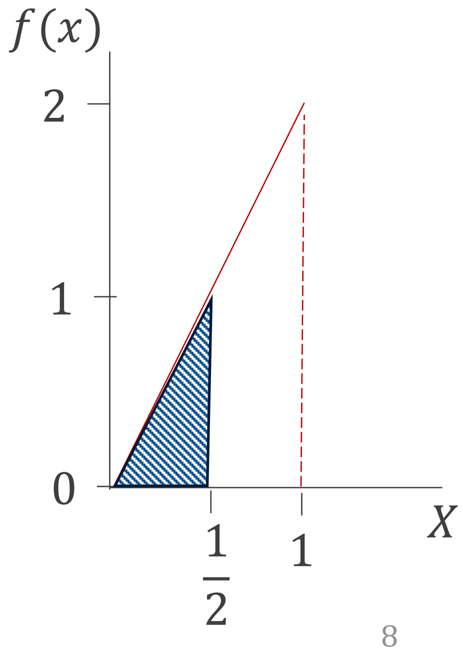
Por el otro lado, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 2x\, dx = 1$

Variable aleatoria continua
Ejemplo

Supongamos la función $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

b) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2})$

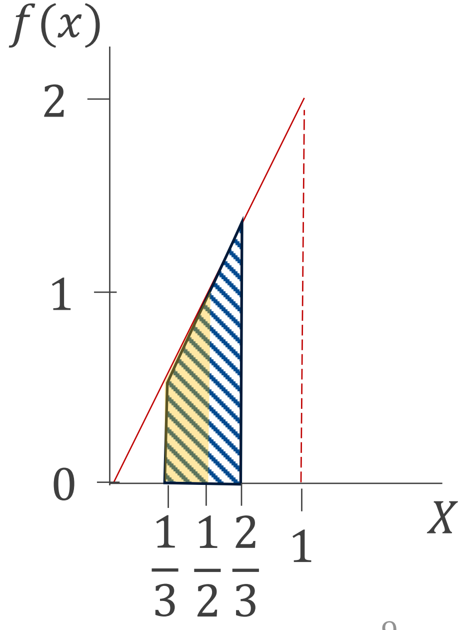
$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} (2x)\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} (2x)\,dx = \frac{1}{4}$$



Variable aleatoria continua
Ejemplo

Supongamos la función $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

c) Calcular $P(X \leq \frac{1}{2} \,/\, \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3})$



$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{P\left(X \leq \frac{1}{2} \cap \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{P\left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} (2x)\,dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (2x)\,dx} = \frac{5/36}{1/3} = \frac{5}{12}$$

Variable aleatoria continua
Definición

Si X es una variable aleatoria continua, entonces es posible definir F, la función de distribución acumulada de X como

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$$

Características:

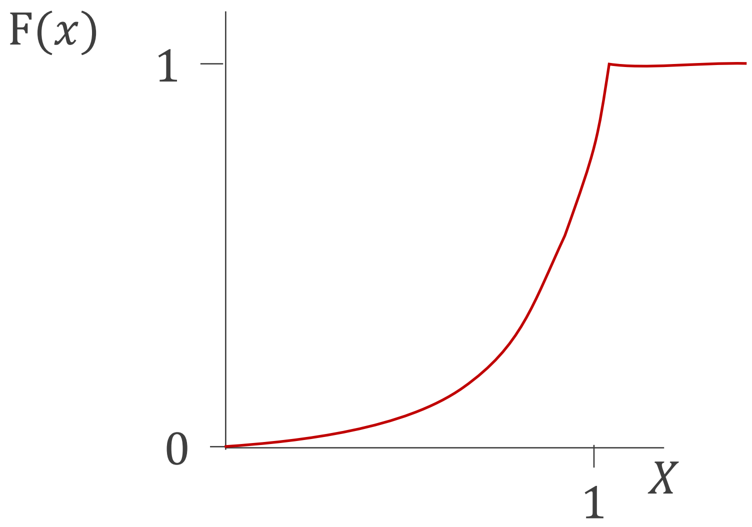
- F es continua
- F es derivable en los puntos de continuidad de f. Además, $F'(x) = f(x)$
- F es no decreciente: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Variable aleatoria continua
Ejemplo

Para la variable aleatoria X con fdp $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$ podemos hallar la $F(x)$:

$$Si\ 0 < x \leq 1\ entonces\ F(x) = \int_0^x (2x)\, dx = x^2$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \leq 0, \\ x^2, & si\ 0 < x \leq 1, \\ 1, & si\ x > 1 \end{cases}$$



Variable aleatoria continua
Definición

Valores característicos

Sea X una variable aleatoria continua con fdp $f(x)$. Luego:

a) El valor esperado de X (esperanza matemática de X) se define como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\; dx$$

b) La variancia de X se define como

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

Variable aleatoria continua
Ejemplo

Sea la variable aleatoria X: proporción de tiempo que juega un jugador de fútbol en un partido, con fdp $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

Hallar su esperanza y su variancia e interpretar en términos del problema.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, 2x\ dx = \int_{0}^{1} 2x^2\ dx = \frac{2}{3}$$

En promedio, el jugador de fútbol está en la cancha 2/3 de los partidos (60 minutos).

Variable aleatoria continua
Ejemplo

Sea la variable aleatoria X: proporción de tiempo que juega un jugador de fútbol en un partido, con fdp $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

Hallar su esperanza y su variancia e interpretar en términos del problema.

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\ f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 2x\ dx = \int_0^1 2x^3\ dx = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

En promedio, el jugador de fútbol está en la cancha 2/3 de los partidos (60 minutos), con un desvío estándar de 1/18 de partido (5 minutos).

Variable aleatoria continua
Algunos modelos conocidos

Del mismo modo que en el caso discreto, hay ciertos modelos aleatorios que se presentan con frecuencia en fenómenos observables y que merecen especial atención.

En esta unidad vamos a abordar tres modelos particulares: la distribución Uniforme, la distribución Exponencial y la distribución Normal.

Variable aleatoria continua
Distribución uniforme

Supongamos que X es una variable aleatoria continua que puede tomar todos los valores en el intervalo $[a, b]$, en donde ambos a y b son finitos. Si la fdp de X está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

entonces decimos que X está distribuida uniformemente en el intervalo $[a, b]$, y lo notamos como X$\sim U[a, b]$.

Una variable aleatoria de este tipo tiene una fdp que es una constante en el intervalo de definición. A fin de satisfacer la condición $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$, esta constante debe ser igual al recíproco de la longitud del intervalo.

Variable aleatoria continua
Distribución uniforme

- Para cualquier sub-intervalo $[c, d]$ en donde a $\leq c < d \leq b$, la $P(c \leq X \leq d)$ es la misma para todos los sub-intervalos de la misma longitud,:

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx = \frac{d-c}{b-a}$$

dependiendo sólo de la longitud del intervalo y no de la ubicación del mismo

- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Variable aleatoria continua
Distribución uniforme: ejemplo

Se puede suponer que la dureza, H de una muestra de acero (medida en escala Rockwell) es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo [50,70].

a) Exprese la fdp de H.

$$f(h) = \begin{cases} \frac{1}{20}, & si\ 50 \leq h \leq 70 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) Calcule la $P(55 < H < 65)$.

$$P(55<H<65)= \int_{55}^{65} \frac{1}{20} dH = \frac{10}{20} = 0{,}5$$

Variable aleatoria continua
Distribución uniforme: ejemplo

Se puede suponer que la dureza, H de una muestra de acero (medida en escala Rockwell) es una variable aleatoria continua distribuida uniformemente en el intervalo [50,70].

c) Calcule la $\mathrm{E}(H)$.

$$E(H) = \int_{50}^{70} h \frac{1}{20} dh = \frac{50 + 70}{2} = 60$$

b) Calcule la $\mathrm{V}(H)$.

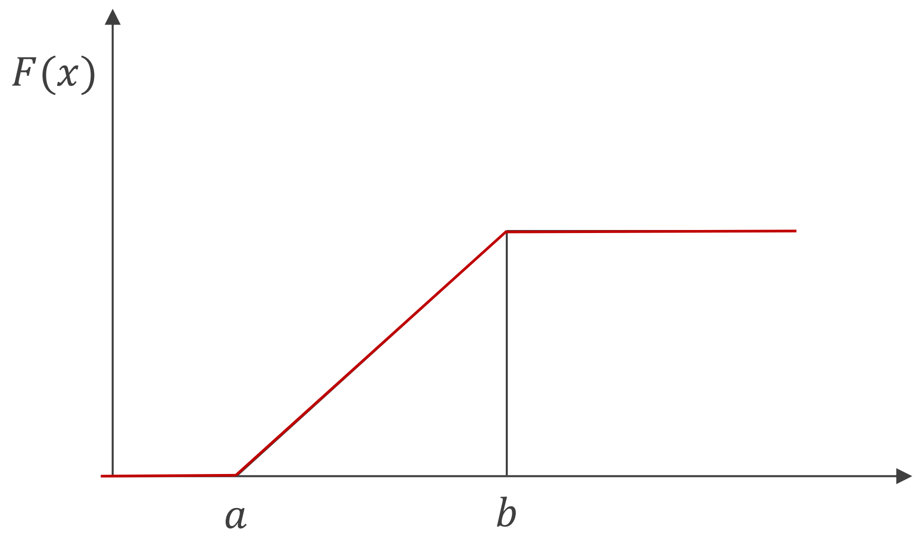
$$\mathrm{V}(H) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_{50}^{70} h^2 \frac{1}{20} dh - \left(\int_{50}^{70} h \frac{1}{20} dh\right)^2 = \frac{(70-50)^2}{12} = \frac{100}{3}$$

Variable aleatoria continua
Distribución uniforme

- Si X es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[\mathrm{a}, b]$, entonces la función de distribución acumulada $F(x)$ será:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & si\ a \leq x < b \\ 1, & si\ x > b \end{cases}$$



Variable aleatoria continua
Distribución uniforme

Las variables aleatorias con recorrido en un intervalo $[a, b]$ vinculadas a un experimento en el que el azar no favorece ningún subintervalo o subregión (no hay sesgo) suelen modelarse bien con una distribución uniforme. Algunos ejemplos:

- ε: “Una persona llega al azar a una parada de colectivos donde los coches pasan cada 10 minutos exactos”. La variable aleatoria X: “espera del pasajero” sigue una distribución uniforme en el intervalo (0,10), ya que cualquier instante dentro del intervalo tiene la misma probabilidad de ocurrir si el pasajero llega aleatoriamente a la parada.
- ε: “Un generador de números aleatorios que produce números decimales entre 0 y 1”. La variable aleatoria X: “valor generado” típicamente se modela como $X \sim U(0,1)$. Este es el uso más común en simulaciones y algoritmos estocásticos.

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial

Se dice que una variable aleatoria continua X que toma todos los valores no negativos tiene una distribución exponencial con parámetro α positivo si su fdp está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Lo simbolizamos como $X \sim \exp(\alpha)$.

La distribución exponencial suele utilizarse para modelar el tiempo entre eventos que ocurren de manera aleatoria, pero con tasa constante. Por ejemplo: tiempo entre llegadas de clientes a una tienda, tiempo entre llamadas telefónicas en una central de atención al cliente, tiempo hasta que falla un componente electrónico, tiempo hasta el próximo error o falla en un servidor o sistema informático.

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial

Algunas propiedades:

- La función de distribución acumulada $F(x)$ de la distribución exponencial está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t}\, dt = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha t}, & x \geq 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

- El valor esperado de X se obtiene como

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x\, \alpha e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}$$

- La variancia de X puede obtenerse como

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial

La distribución exponencial tiene una propiedad llamativa, que también presenta la distribución geométrica para variables aleatorias discretas: la propiedad de falta de memoria. Sea $X \sim \exp(\alpha)$, y considerando dos números cualesquiera $s, t > 0$, entonces

$$P(X > s + t \,/\, X > s) = P(X > t)$$

Ejemplo: Una lamparita tiene una vida útil (tiempo hasta que se quema) que sigue una distribución exponencial con parámetro α =0.01.

a) ¿Cuál es la duración esperada de esta marca de lamparitas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lamparita dure más de 30 horas?

c) Si la lamparita ya funcionó durante 50 horas sin fallar, ¿cuál es la probabilidad de que dure al menos 80 horas?

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial: Ejemplo

Una lamparita tiene una vida útil (tiempo hasta que se quema) que sigue una distribución exponencial con parámetro α=0.01.

$$X: tiempo\ hasta\ que\ se\ quema\ la\ lamparita\ (horas)$$

$$X \sim \exp(0.01) \qquad f(x) = \begin{cases} 0.01\ e^{-0.01x}, & x > 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la duración esperada de esta marca de lamparitas?

$$E(X) = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0.01} = 100 \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad La\ duración\ esperada\ para\ esta\ marca\ de\ lamparitas\ es\ de\ 100\ horas.$$

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial: Ejemplo

Una lamparita tiene una vida útil (tiempo hasta que se quema) que sigue una distribución exponencial con parámetro α=0.01.

$$X: tiempo\ hasta\ que\ se\ quema\ la\ lamparita\ (horas)$$

$$X \sim \exp(0.01) \qquad f(x) = \begin{cases} 0.01\, e^{-0.01x}, & x > 0 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la lamparita dure más de 30 horas?

$$P(X > 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - F(30) = 1 - (1 - e^{-0.01*30}) = e^{-0.3} = 0{,}7408 \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \ La\ probabilidad\ de\ que\ la\ lamparita\ dure\ más\ de\ 30\ horas\ es\ 0{,}7408.$$

Variable aleatoria continua
Distribución exponencial: Ejemplo

c) ¿Si la lamparita ya funcionó durante 50 horas sin fallar, ¿cuál es la probabilidad de que dure al menos 80 horas?

Forma 1:

$$P(X \geq 80\ /\ X \geq 50) = \frac{P(X \geq 80 \cap X \geq 50)}{P(X \geq 50)} = \frac{P(X \geq 80)}{P(X \geq 50)} = \frac{e^{-0.8}}{e^{-0.5}} = \frac{0{,}4493}{0{,}6065} = 0{,}7408$$

Forma 2:

$$P(X \geq 80 \quad X \geq 50) = P(X \geq 50 + 30 \quad X \geq 50) = (X \geq 30) = e^{-0.3} = 0{,}7408$$

Si la lamparita ya funcionó durante 50 horas sin fallar, la probabilidad de que dure al menos 80 horas, es decir, que dure al menos 30 horas más, es igual a 0,7408.

Variable aleatoria continua
Distribución Normal

Se dice que una variable aleatoria continua X que toma cualquier valor real tiene una distribución Normal (o una distribución Gaussiana) con esperanza μ y desvío estándar σ si su fdp está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Donde los parámetros μ y σ deben satisfacer: $-\infty < x < +\infty$ y $\sigma > 0$.

En términos simbólicos, indicamos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ o $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Variable aleatoria continua
Distribución Normal

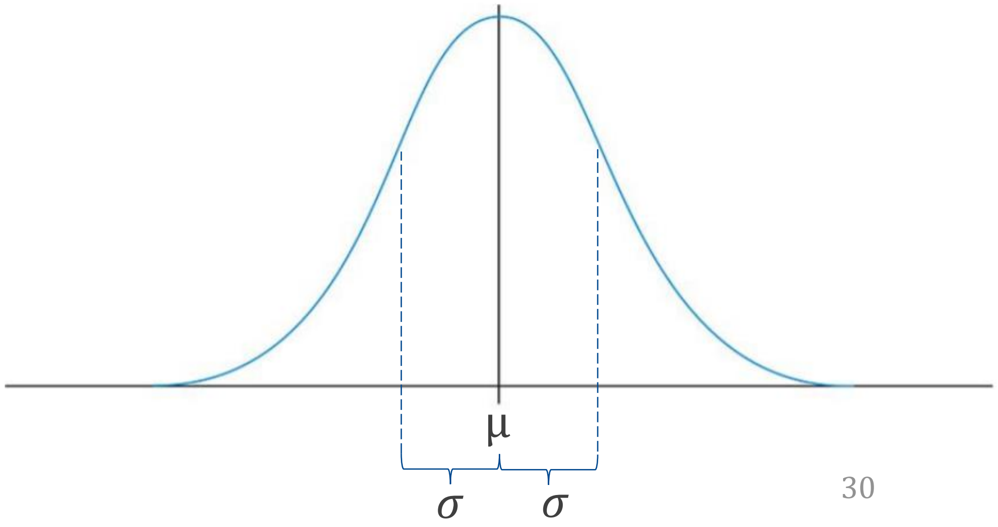
La distribución Normal fue descubierta por Abraham de Moivre en el año 1720 al buscar una forma matemática para aproximar probabilidades bajo una distribución $Bi(n, p)$ cuando n crece. Con el tiempo, sus usos fueron expandiéndose y se terminó convirtiendo en el modelo base para la teoría clásica de probabilidad.

La importancia de este modelo radica en que gran cantidad de fenómenos observables en la naturaleza siguen una distribución aproximadamente Normal. Uno de los primeros fenómenos al que se le ajustó un modelo Normal fue al análisis de errores de medición en observaciones astronómicas. Galileo (S. XVII) notó que la distribución de estos errores era simétrica, que con mayor frecuencia los errores estaban cercanos a 0 y que errores muy grandes o muy chicos son poco frecuentes, pero recién a comienzos del 1800 Adrain y Gauss formularon matemáticamente este modelo.

Variable aleatoria continua
Distribución Normal

La distribución Normal tiene una serie de características fundamentales:

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, por ser la $f(x)$ definida previamente una fdp.
- Es simétrica alrededor de su esperanza μ
- Tiene forma de campana, con puntos de inflexión en $\mu \pm \sigma$
- Si bien una variable Normal puede tomar cualquier valor real, los valores cercanos a μ son altamente frecuentes, a medida que nos alejamos del centro (valores muy grandes o muy chicos) disminuye la frecuencia con que se observan dichos valores



Variable aleatoria continua

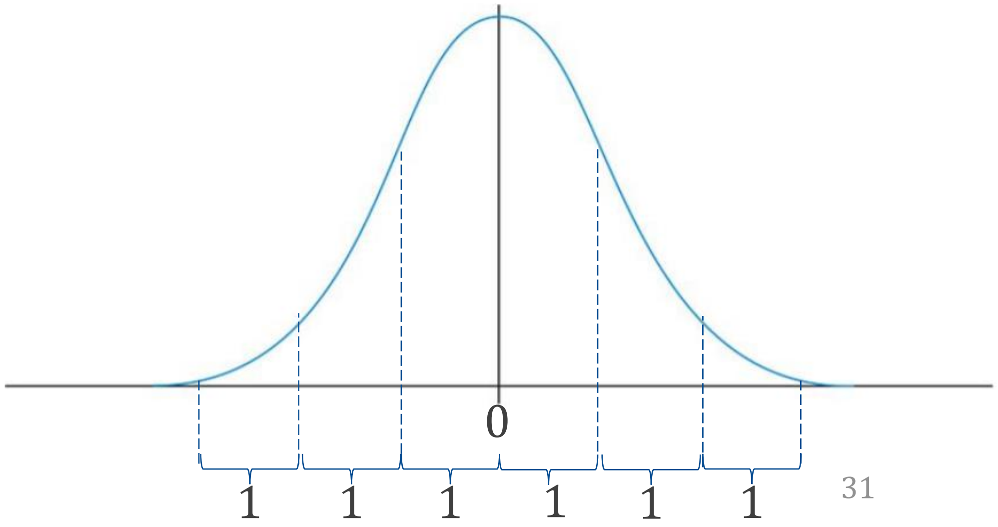
Distribución Normal

Si una variable aleatoria Z tiene una distribución $N(0,1)$, entonces decimos que Z tiene una distribución Normal estándar (o estandarizada).

A su vez, para cualquier variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ podemos aplicar una transformación lineal para obtener Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

¿Por qué resulta interesante la distribución Normal estándar? Porque probabilidades vinculadas a valores bajo este modelo se encuentran tabuladas.



Variable aleatoria continua
Distribución Normal

La tabla de la distribución Normal (al menos la que vamos a utilizar en este curso, puede haber otras) provee probabilidades acumuladas bajo la curva, del tipo $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = F(x)$. Teniendo en cuenta su simetría y la propiedad de cierre de las curvas de densidad, esta tabla nos permite calcular cualquier probabilidad bajo un modelo Normal estándar.

$$P(Z \leq -2{,}24) = 0{,}0125$$

El valor de la tabla para z es el área bajo la curva de la normal estándar a la izquierda de z

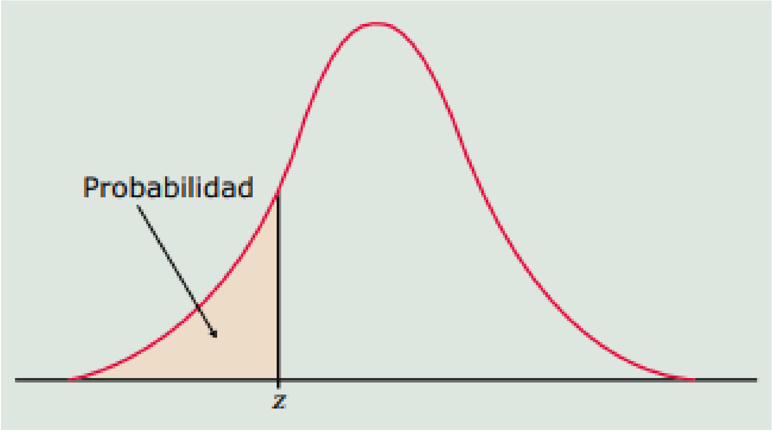


TABLA A: Probabilidades de la normal estándar

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183

Variable aleatoria continua

Distribución Normal: Ejemplos

Dados $Z \sim N(0,1)$, $X_1 \sim N(3, 3^2)$, $X_2 \sim N(4,1)$ y $X_3 \sim N(4, 10^2)$, hallar:

- $P(Z \leq -2) = 0,0228$
- $P(Z < -2) = 0,0228$
- $P(Z > -2) = 0,9772$
- $P(Z > 2) = 0,0228$
- $P(-2 \leq Z \leq 2) = 0,9544$
- $P(-1 \leq Z \leq 1) = 0,6826$
- $P(-3 \leq Z \leq 3) = 0,9974$

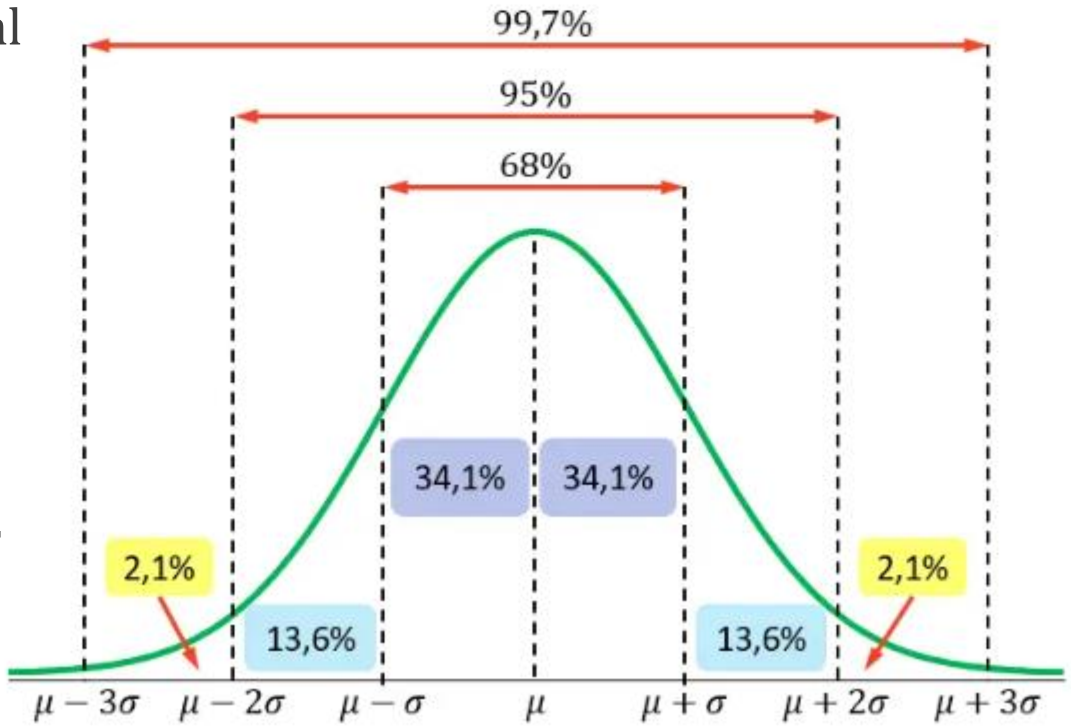
- $P(X_1 \leq -2) = 0,0475$
- $P(X_1 > 4{,}7) = 0,2843$
- $P(X_1 \geq 20) \cong 0$
- $P(1 \leq X_2 \leq 4) = 0,4987$
- $P(X_2 \leq 4) = 0,50$
- $P(X_3 \leq 4) = 0,50$

- $z \,/\, P(Z \leq z) = 0{,}85$ $\quad z = 1,04$
- $x_1 \,/\, P(X_1 > x_1) = 0{,}50$ $\quad x_1 = 3$
- $Z_{0,90} = 1{,}28$
- $Z_{0,10} = -1{,}28$
- $X_{1_{0,05}} = -1{,}92$
- $X_{1_{0,95}} = 7{,}92$
- $x_2 \,/\, P(-x_2 < X_2 < x_2) = 0{,}80$
  $x_2 = 2{,}72$

Variable aleatoria continua
Distribución Normal

Otra característica interesante de la distribución Normal es la regla 68-95-99,7, también conocida como regla empírica. ¿A qué se refiere esta regla?

- El 68% de los valores de una distribución normal se encuentran a una desviación estándar de la media.
- El 95% de los valores de una distribución normal se encuentran a dos desviaciones estándar de la media.
- El 99,7% de los valores de una distribución normal se encuentran a tres desviaciones estándar de la media.



Variable aleatoria continua

Distribución Normal: Ejemplo

Los tiempos de llegada de los nadadores que compiten en 100 metros estilo mariposa están distribuidos normalmente con $\mu = 55\ segundos$ y $\sigma = 5\ segundos$.

a) Los auspiciantes deciden dar certificados a aquellos nadadores que llegan antes de los 49 segundos. Si son 50 los nadadores inscriptos en la competencia de 100 metros estilo mariposa, ¿cuántos certificados necesitarán aproximadamente?

b) ¿En qué tiempo debe llegar un nadador para estar ente el 2% de los más rápidos?

$a)\ Necesitarán\ aproximadamante\ 6\ certificados$

$b)\ Debe\ tardar\ a\ lo\ sumo\ 44{,}75\ segundos$

Variable aleatoria continua

Distribución Normal: Ejemplo

Un hombre apareció muerto de un disparo mientras cazaba en una zona boscosa de Chubut. Se hizo pasar como un accidente, pero la policía interrogó a otro cazador que -según se supo- tuvo un altercado con la victima. Ellos encontraron una hoja de pino en el saco del sospechoso. El acusado afirmó que estuvo cazando en Salta el día del incidente. El bosque de Chubut tiene sólo pinos de la especie A y Salta sólo pinos de la especie B. Las hojas tipo agujas de la especie A, tienen longitudes distribuidas normalmente con media igual a 5,4 cm y desvío estándar de 0,4 cm, mientras que las de la especie B están distribuidas normalmente con media igual a 6,4 cm y desvío estándar O,5 cm.

La Fiscalía lo contrata a Ud. por ser un experto estadística. Ud. está por ensayar:
H_0: *la hoja es de la especie B* versus H_1: *la hoja pertenece a la especie A*

a) Grafique las dos distribuciones sobre el mismo eje. Identifique a las distribuciones.

b) Suponga que la hoja de pino hallado en el saco sospechoso mide 5,42 cm. Calcule el p-value.

c) Redacte su decisión y sus conclusiones. Utilice $\alpha = 0{,}05$.

Función de variable aleatoria
Ejemplo

Supongamos que X: radio de la entrada de un tubo se considera una variable aleatoria continua con fdp f. Si, además, consideramos $A = \pi X^2$ el área de la entrada, entonces sería razonable pensar que:

a) Como el valor de X es el resultado de una experiencia aleatoria, también lo será el valor de A, por lo que podríamos pensar que A es también una variable aleatoria continua.

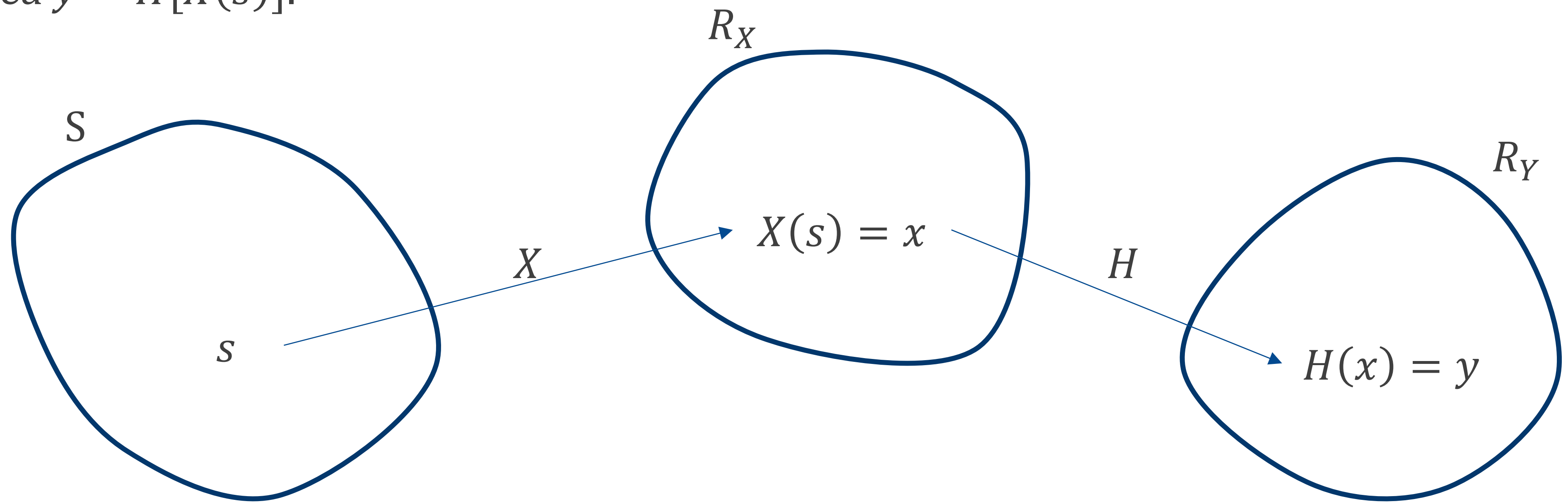
b) Dado que A es una función de X, podríamos esperar que g, la fdp de A, es obtenible de alguna forma conociendo f.

En esta última parte de la Unidad 5 abordaremos problemas de este tipo.

Función de variable aleatoria

Definición

Sea ε un experimento y sea S un espacio muestral asociado con ε. Sea X una variable aleatoria definida en S. Supongamos que $y = H(x)$ es una función real de x. Entonces, $Y = H(X)$ es una variable aleatoria, ya que para cada $s \in S$ se determina un valor de Y, sea $y = H[X(s)]$.



Función de variable aleatoria
Sucesos equivalentes y probabilidad

Si C un suceso (subconjunto) asociado con el recorrido de Y, R_Y y $B \subset R_X$ es un suceso asociado al recorrido de X, entonces decimos que B y C son sucesos equivalentes si

$$B = \{x \in R_X \ / \ H(x) \in C\}$$

Dicho de otra forma, B y C son sucesos equivalentes si y sólo si B y C ocurren juntos. Es decir, cuando ocurre B, ocurre C, y viceversa. Del mismo modo, si tenemos un suceso A asociado a S que es equivalente a B, entonces a su vez A es equivalente a C. Cabe destacar que estos tres sucesos equivalentes entre sí están asociados con espacios muestrales diferentes.

Esta equivalencia de sucesos nos servirá una vez más para definir probabilidades:

$$P(C) = P[\{x \in R_X \ / \ H(x) \in C\}]$$

Función de variable aleatoria
Sucesos equivalentes y probabilidad: ejemplo

Sea X una variable aleatoria con fdp $f(x) = e^{-x},\ x > 0$.

Supongamos que $H(x) = 2x + 1$. Luego:

- Si $R_X = \{x \,/\, x > 0\}$, entonces $R_Y = \{y \,/\, y > 1\}$
- Si el suceso C está definido como $C = \{Y \geq 5\}$, el suceso B equivalente definido en el recorrido de X es $B = \{x \geq 2\}$ ya que $y \geq 5$ si y sólo si $2\text{x} + 1 \geq 5$
- Luego, $P(C) = P(Y \geq 5) = P(B) = P(X \geq 2) = \int_2^{\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{e^2}$

Función de variable aleatoria

En el universo de las variables aleatorias que surgen como funciones de otras variables aleatorias, podemos diferenciar tres casos:

1) X es una variable aleatoria discreta, por lo que $Y = H(X)$ también será discreta. Por ejemplo, si X puede tomar los valores -1, 0 y 1, luego $Y = X^2$ también tendrá un recorrido finito.

2) X es una variable aleatoria continua, pero $Y = H(X)$ es discreta. Por ejemplo,

   $X \sim U[0{,}10]$ y se define $Y = \begin{cases} 0, & si\ X \leq 3 \\ 1, & si\ X > 3 \end{cases}$.

3) X es una variable aleatoria continua, y se define H una función continua, dando lugar a $Y = H(X)$ variable aleatoria continua. Por ejemplo, $X \sim U[0{,}10]$ y se define $Y = X^2$.

Función de variable aleatoria

Caso 1: X discreta – Y discreta

Si X es una variable aleatoria discreta e $Y = H(X)$, entonces se deduce que Y es también una variable aleatoria discreta.

¿Por qué? Porque supongamos que se pueden enumerar los valores posibles de X como $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ Luego, los valores posibles de Y se pueden enumerar como $y_1 = H(x_1)$, $y_2 = H(x_2), \dots$ y, si bien algunos de los valores de Y pueden ser iguales, esto no impide que estos valores puedan enumerarse.

Asimismo, si $p(x_i) = P(X = x_i)$ y H es una función tal que a cada valor y le corresponde exactamente un valor x, entonces la distribución de probabilidades de Y es:

$$Valores\ posibles\ de\ Y\text{:}\quad y_i = H(x_i), \qquad i = 1,2,\dots,n,\dots$$

$$Probabilidades\ de\ Y\text{:}\quad q(y_i) = P(Y = y_i) = p(x_i)$$

Función de variable aleatoria

Caso 1: X discreta – Y discreta

Ejemplo 1

Supongamos la variable aleatoria X que toma los tres valores -1, 0 y 1 con probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\ y \frac{1}{6}$ respectivamente. Si $\mathrm{Y} = 3X + 1$, ¿cuál es la distribución de probabilidades de Y?

Ejemplo 2

Supongamos la misma variable aleatoria X del ejemplo 1. Si se define $\mathrm{Y} = X^2$, ¿cuál es la distribución de probabilidades de Y?

Función de variable aleatoria
Caso 2: X continua – Y discreta

Si X es una variable aleatoria continua, puede definirse $Y = H(X)$ de forma tal que Y es una variable aleatoria discreta.

Para obtener la distribución de probabilidades de Y, simplemente tenemos que

a) considerar para cada uno de los valores que puede tomar Y el suceso equivalente en el recorrido R_X,

b) calcular las probabilidades de esos sucesos en R_X.

En términos generales, si $\{Y = y_i\}$ es equivalente a un suceso, llamémoslo A, en el R_X, entonces:

$$q(y_i) = P(Y = y_i) = \int_A f(x)\,dx$$

Función de variable aleatoria
Caso 2: X continua – Y discreta

Ejemplo

Supongamos que X es una variable aleatoria que puede tomar todos los valores reales.
Se define además Y de forma tal que $Y = 1$ si $X \geq 0$ e $Y = -1$ si $X < 0$.

Calculemos la función de distribución de probabilidades de Y si:

a) $\mathrm{X} \sim N(0,1)$

b) $\mathrm{X} \sim N(-10, 5^2)$

c) $\mathrm{X} \sim U[-5, 2]$

Función de variable aleatoria

Caso 3: X continua – Y continua

El caso que encontramos más frecuentemente en la práctica es aquel en el que X es una variable aleatoria con fdp f y H es una función continua. En estos casos, $Y = H(X)$ es una variable aleatoria continua y nuestro propósito será encontrar su fdp, que vamos a llamar g.

El procedimiento general en estos casos será el siguiente:

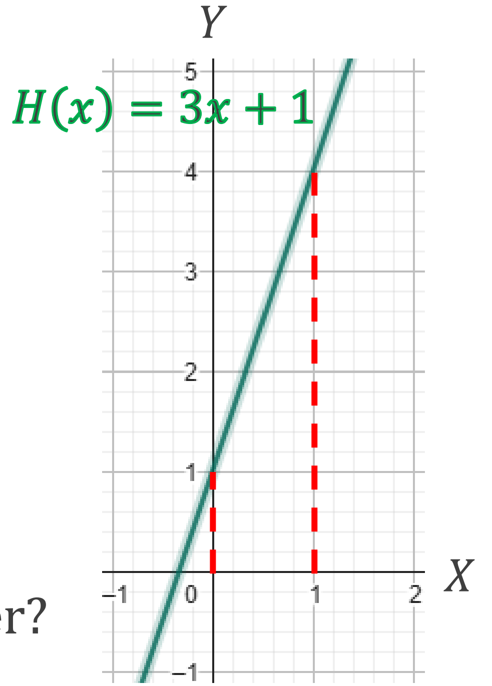
a) Plantear G, la función de densidad acumulada de Y: $G(y) = P(Y \leq y)$. Una vez que estemos aquí, necesitamos encontrar el suceso A en el recorrido de X que es equivalente al suceso $\{Y \leq y\}$.

b) Diferenciar $G(y)$ con respecto a y para obtener $g(y)$.

c) Determinar los valores y en el recorrido de Y para los cuales $g(y) > 0$.

Función de variable aleatoria

Caso 3: X continua – Y continua



Ejemplo

Supongamos una variable X con fdp $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

Sea $H(x) = 3x + 1$. Para encontrar la fdp de $\mathrm{Y} = \mathrm{H}(X)$, ¿qué tenemos que hacer?

a) $G(y) = P(Y \leq y) = P(3X + 1 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-1}{3}\right) = \int_0^{\frac{y-1}{3}} 2x\,dx = \left(\frac{y-1}{3}\right)^2$

b) $g(y) = G'^{(y)} = \frac{2}{9}(y - 1)$

c) Dado que $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$, si miramos la gráfica notamos que $1 < y < 4$.

Alternativa: teniendo en cuenta que si $H(x) = 3x + 1$ (estrictamente creciente) podemos definir $x = H^{-1}(y) = (\mathrm{y} - 1)/3$, entonces

$$0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{\mathrm{y} - 1}{3} < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < y - 1 < 3 \quad \Rightarrow \quad 1 < y < 4$$

Función de variable aleatoria
Caso 3: X continua – Y continua

En la alternativa del ejemplo, mencionamos que H era una función de X estrictamente creciente. En casos de este tipo, donde la función H es una función estrictamente creciente o decreciente podemos despejar x de $y = H(x)$ haciendo $x = H^{-1}(y)$ y llamando a H^{-1} función inversa de H.

De este modo, si H es estrictamente creciente entonces el suceso $\{H(X) \leq y\}$ es equivalente a $\{X \leq H^{-1}(y)\}$. Del mismo modo, si H es estrictamente decreciente entonces el suceso $\{H(X) \leq y\}$ es equivalente a $\{X \geq H^{-1}(y)\}$.

Función de variable aleatoria
Caso 3: X continua – Y continua

Teorema:

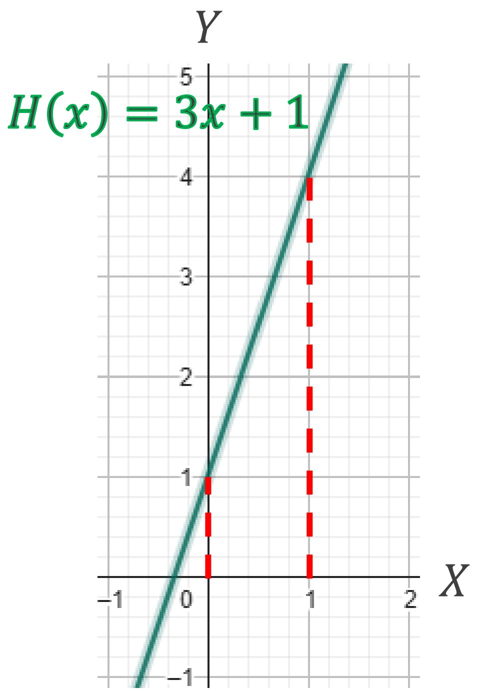
Sea entonces X una variable aleatoria continua con fdp f, en donde $f(x) > 0$ para $\mathrm{a} < \mathrm{x} < \mathrm{b}$. Supongamos que $y = H(x)$ es una función de x estrictamente monótona (creciente o decreciente). Supongamos que esta función es derivable (y por lo tanto continua) para todo x. Luego, la variable aleatoria Y definida como $Y = H(X)$ tiene una fdp g dada por

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

donde x se expresa en función de y en términos de la función inversa de H: $x = H^{-1}(y)$.

Función de variable aleatoria

Caso 3: X continua – Y continua



Ejemplo

Supongamos una variable X con fdp $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$

Sea $H(x) = 3x + 1$. Necesitamos encontrar la fdp de $\mathrm{Y} = \mathrm{H}(X)$

Como $Y = H(x)$ es una función monótona creciente, entonces es posible aplicar el teorema enunciado.

- Como $H(x) = 3x + 1$ (estrictamente creciente) podemos definir $x = H^{-1}(y) = \frac{\mathrm{y}-1}{3}$
- $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{3}$
- Luego, $g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = 2x \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\left(\frac{y-1}{3}\right) = \frac{2}{9}(y-1), \qquad 1 < y < 4$