Proceso Poisson

Una fuente radioactiva emite partículas α y sea

X_t: *número de partículas emitidas durante un período especificado de tiempo [0,t).*

El interés se centra en determinar la distribución de probabilidad de X_t

Sea $p_n(t)=P[X_t=n]$

X_t: *0,1,2,………; n=0,1,2….*

Cinco hipótesis fundamentales

- A_1: el número de partículas emitidas durante intervalos de tiempo no sobrepuestos son variables aleatorias *independientes*
- A_2: si X_t se define como antes y si Y_t es el número de partículas emitidas $[t_1, t_1+t)$ para cualquier $t_1>0$, las variables aleatorias X_t y Y_t tienen la misma distribución de probabilidad. Es decir, la distribución del número de partículas emitidas durante cualquier intervalo depende sólo de la longitud del intervalo y no de los puntos extremos

…continuamos con las hipótesis

- A_3: Si el intervalo es suficientemente pequeño, la probabilidad de obtener exactamente una emisión durante ese intervalo es directamente proporcional a la longitud del intervalo.
- A_4: La probabilidad de obtener dos o más emisiones en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.
- A_5: $X_0=0$, o equivalentemente, $p_0(0)=1$. *Esto* es una condición inicial para el modelo.

Formalización

Consideremos el espacio muestral Ω.

Sea $w \in \Omega$ y $t \geq 0$.

Definimos,

$N_t(w)$: variable aleatoria que cuenta el número de arribos en el intervalo [0, t) para la realización w.

$$P\left(N_t = k\right) = \frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^k}{k!} \quad \forall\, k \in \mathrm{N}\,; \forall t \geq 0$$

- ✓ Para w fijo, $t \rightarrow N_t(w)$ es una función seccionalmente constante cuyos saltos se producen en los instantes de los arribos.
- ✓ El número de arribos posibles en un lapso de tiempo $[0, t)$ es cualquier número natural.

Luego,

la familia $N = \{N_t, t \geq 0\}$ es un proceso de parámetro continuo $(t \geq 0)$ y

espacio de estados $E = N_0$ (discreto).

Hipótesis de trabajo

- En el instante inicial no se ha producido ningún arribo. Luego, $N_0(w) = 0$

- $t \rightarrow N_t(w)$ tiene sólo saltos de magnitud 1. No se considera la posibilidad de que se produzcan dos arribos en el mismo instante

(si asi fuera en la realidad se considera que el contador no tiene sensibilidad como para contabilizar ambos y cuenta sólo uno).

• El número de arribos en un intervalo acotado es finito con probabilidad 1.

• El número de arribos en un intervalo de la forma (s, s+t] es $N_{s+t} - N_s$.

Ese número es independiente de los arribos ocurridos antes del tiempo s y más aún, del instante de inicio del intervalo. Sólo depende de la longitud del intervalo.

Estas hipótesis permiten asegurar que todas las v.a. que conforman el proceso tienen distribución de Poisson con el mismo parámetro . Esto significa que:

El parámetro puede interpretarse como:

Número promedio de eventos por unidad de tiempo.

Sea N_t un proceso de Poisson con tasa λt.

- ✓ La función $t \to N_t$ es no decreciente, continua a derecha y da saltos de medida 1.
- ✓ Esos saltos los da en los instantes en que se producen arribos (aleatorios).

El tiempo transcurrido entre dos arribos sucesivos es independiente de los arribos de los que se trate y de los instantes de los arribos precedentes.

Más aún, los tiempos inter-arribos son independientes e idénticamente distribuidos y todos tienen distribución exponencial.

Si T es v.a. exp(λ) entonces $E(T) = \frac{1}{\lambda}$

Pensar:

Si en promedio ocurren λ arribos por unidad de tiempo, el tiempo entre dos arribos debe ser en promedio 1/λ.

Específicamente:

$$E(T_{k+1} - T_k) = \frac{1}{\lambda}, \quad \forall k.$$

Notar que

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

Es decir T_k puede escribirse como suma de k variables aleatorias iid. Luego:

$$E(T_k) = \frac{k}{\lambda}.$$

Si $\{T_k, k \in N\}$ es un proceso de tiempos de arribo en un proceso $N = \{N_t, t \geq 0\}$ y

$$T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1}),$$

son variables aleatorias iid con distribución $\exp(\lambda)$, entonces N es un proceso de Poisson de tasa λ.