1. Encontrar la dimensión y construir una base de los cuatro espacios fundamentales asociados a las siguientes matrices en $\mathbb{R}^{m\times n}$:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$,

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 8 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   (g) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (h) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

   (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Probar o dar un contraejemplo: dada A matriz en $\mathbf{F}^{m\times n}$, si $m = n$ entonces el espacio nulo de A es igual al espacio nulo a izquierda de A.

3. Construir una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ cuyo espacio nulo esté generado por el vector $(1, 0, 1)^t$.

4. ¿Existe una matriz cuyo espacio fila contenga a $(1, 1, 1)^t$ y cuyo espacio nulo contenga a $(1, 0, 0)^t$?

5. (a) Sea A una matriz en $\mathbf{F}^{n\times n}$. Probar que A tiene rango uno si y sólo si A puede factorizarse como $A = uv^t$ con $u, v \in \mathbf{F}^n$.

   (b) Dados a, b, c números reales con $a \neq 0$, ¿cómo debe elegirse $d \in \mathbb{R}$ de modo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tenga rango uno? Con esta elección de d, factorizar A en uv^t.

6. Sean $A \in \mathbf{F}^{m\times n}$ y $B \in \mathbf{F}^{n\times p}$ dos matrices. Probar las siguientes afirmaciones:

   (a) $N(B) \subseteq N(AB)$,

   (b) $C(AB) \subseteq C(A)$,

   (c) $N(A^t) \subseteq N((AB)^t)$,

   (d) $C((AB)^t) \subseteq C(B^t)$.

   ¿Qué podemos decir de las dimensiones de los espacios anteriores?

7. Mostrar por medio de un contraejemplo que el espacio nulo de AB no necesariamente contiene al espacio nulo de A, y que el espacio columna de AB no está necesariamente contenido en el espacio columna de B.

8. Factorizar en $A = LU$ a las siguientes matrices y verificar que las columnas de L son una base del espacio columna de A.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

   (a) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$,

   (b) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + 2x_2y_2 - 3x_1y_2$,

   (c) $b : \mathbf{F}^2 \times \mathbf{F}^2 \to \mathbf{F}$, $b(x, y) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$,

   (d) $b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $b(z, w) = 2z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} - z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}$,

   (e) $b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $b(z, w) = 2z_1\overline{w_1} + (1 + i)z_1\overline{w_2} + (1 + i)z_2\overline{w_1} + 3z_2\overline{w_2}$,

   (f) $b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $b(z, w) = z_1\overline{w_1} - iz_1\overline{w_2} + iz_2\overline{w_1} + 2z_2\overline{w_2}$,

(g) $b : \mathbf{F}^3 \times \mathbf{F}^3 \to \mathbf{F}$, $b(x,y) = 2x_1\overline{y_1} + x_3\overline{y_3} - x_1\overline{y_3} - x_3\overline{y_1}$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$,

(h) $b : \mathbf{F}^3 \times \mathbf{F}^3 \to \mathbf{F}$, $b(x,y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_2 + x_3y_3$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$,

10. Determinar para qué valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la función $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$b(x,y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + bx_2y_2 + (1+b)x_3y_3$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

11. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

(a) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{F}^{n\times n} \times \mathbf{F}^{n\times n} \to \mathbf{F}$, $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^*)$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$,

(b) $\langle \cdot, \cdot \rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$, $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$,

(c) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbf{F}^n \times \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}$, $\langle x, y\rangle = y^*Q^*Qx$, con $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$ donde $Q \in \mathbf{F}^{n\times n}$ es una matriz inversible.

(d) $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{F}$, $\langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$, donde V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbf{F}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo .

12. Restringir el producto interno del item (b) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[x]$ y calcular su matriz en la base $\mathfrak{B} = \{1, x, ..., x^n\}$.

13. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Sean $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbf{F}$ Pruebe que:

(a) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$.

(b) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$.

(c) Si para todo $z \in V$, $\langle z, u\rangle = \langle z, v\rangle$, entonces $u = v$.

14. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sean $u, v \in V$. Probar que $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$ si y sólo si $\{u, v\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

15. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V. Más específicamente, si $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ son dos productos internos en V, entonces la función $b : V \times V \to \mathbf{F}$ dada por

$$b(u,v) = \langle u, v\rangle_1 + \langle u, v\rangle_2$$

es un producto interno en V.

16. Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea d la distancia asociada. Sean $u, v, w \in V$. Demostrar que:

(a) $d(u, v) \geq 0$.

(b) $d(u, v) = 0$ si y sólo si $u = v$.

(c) $d(u, v) = d(v, u)$.

(d) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

17. Pruebe la **Identidad del Paralelogramo**: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. Si $u, v \in V$, entonces

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

18. Pruebe el **Teorema del Coseno**: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. Si $u, v \in V$ y θ es el ángulo entre u y v, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos(\theta) + \|v\|^2.$$

19. Pruebe el **Teorema de Pitágoras**: Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y sea $\|\cdot\|$ la norma inducida. Si $u, v \in V$ son dos vectores ortogonales, entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

20. (a) Sea $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$b(x,y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2.$$

i. Probar que b es un producto interno.

ii. Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para b.

(b) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 9f.

21. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 = 0\}$ para el producto interno canónico.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = \operatorname{span}\{(1, 2, 1)\}$,

      i. Para el producto interno canónico.

      ii. Para el producto interno definido por $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$.

   (c) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = \operatorname{span}\{(i, 1, 1), (-1, 0, i)\}$ para el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_T$ definido en el Ejercicio 11d con $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,

$$T(z) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} z^t,$$

   y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^3$.

   (d) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : \ z_1 + 2iz_2 - z_3 + (1+i)z_4 = 0, \ z_2 + (2-i)z_3 + z_4 = 0\}$ para el producto interno $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w_1} + 2z_2\overline{w_2} + z_3\overline{w_3} + 3z_4\overline{w_4}$.

   (e) $V = \mathbb{R}^4$, $S_5 = \operatorname{span}\{(1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1)\}$ para el producto interno canónico.

22. (a) Hallar bases ortonormales para los subespacios del Ejercicio 21 para cada uno de los productos internos considerados.

   (b) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

   (c) Hallar el punto de S_5 más cercano a $x_0 = (0, 1, 1, 0)$.

23. (a) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

   (b) Se considera en $C[-1, 1]$ el producto interno $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathfrak{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $W = \operatorname{span}(\mathfrak{B})$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = \operatorname{span}\{1\}$ en W.

   (c) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$. *Sugerencia*: Observar que basta considerar el subespacio $S = \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3, \operatorname{sen}(\pi x)\}$.

   (d) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f(x), g(x)\rangle = \int_0^{\pi} f(x)g(x)dx$.

      i. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\mathfrak{B} = \{1, \cos(x), \operatorname{sen}(x)\}$ del subespacio $S = \operatorname{span}(B)$.

      ii. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

24. Determinar si las siguientes funciones son o no formas bilineales. En caso afirmativo calcular su matriz en la base canónica correspondiente.

   (a) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_2y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2$,

   (b) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = -x_1y_1 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_1y_2$,

   (c) $b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $b(z, w) = (1+i)z_1w_1 + z_2w_1 + (1-i)z_2w_2 - 3z_1w_2$,

   (d) $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = x_1^2 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2^2$,

   (e) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = 2x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_3 - x_3y_1$,

   (f) $b : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$, $b(z, w) = z_1w_1 + (2+i)z_2w_1 + 2z_2w_2 + (2+i)z_1w_2 + z_1w_3 + z_3w_1 - z_3w_3$,

   (g) $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $b(x, y) = (3x_1 + x_2 - x_3).(4y_2 + 2y_3)$.

25. Probar que las siguientes funciones son formas bilineales:

   (a) $b : \mathbf{F}^n \times \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}$, definida por $b(x, y) = x.A.y^t$ donde $A \in \mathbf{F}^{n\times n}$.

   (b) $b : V \times V \to \mathbf{F}$ definida por $b(v, w) = f_1(v).f_2(w)$ donde V es un $\mathbf{F}$-espacio vectorial y $f_1, \ f_2 \in V^*$.

26. Para las formas bilineales del Ejercicio 24:

   (a) Calcular su matriz en la base $\mathfrak{B} = \{(1, 2, 4), \ (2, -1, 0), \ (-1, 2, 0)\}$ para aquellas formas bilineales definidas sobre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

   (b) Determinar si son simétricas. En caso afirmativo, calcular $\ker(B)$ y $\operatorname{ran}(B)$.

27. Sea $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $B(x, y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 4x_2y_1 + \kappa x_2y_2$, una forma bilineal simétrica. Determinar κ de manera que B sea degenerada.