Coloreo

Pablo Torres

Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

Curso de Complementos de Matemática I - Matemática Discreta

Introducción

INTRODUCCIÓN

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie, 1852]
4 colores son suficientes para colorear cualquier mapa de modo tal que regiones limítrofes (i.e. regiones con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color.

Equivalentemente,

Conjetura de los 4 colores [Hnos. Guthrie (Francis and Frederick), 1852]
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

Teorema de los 4 colores
Todo grafo planar puede ser coloreado con a lo sumo 4 colores.

- 1852: Los Hnos. Guthrie plantean el problema a Augusts De Morgan (University College London).

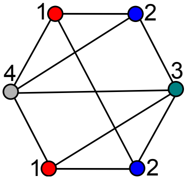
  De Morgan consulta a Sir William Hamilton (Dublin).

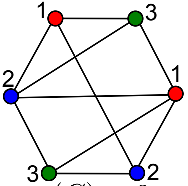
  I am not likely to attempt your quaternion of colors very soon.
- Primera publicación Arthur Cayley, *On the colorings of maps*, Proc. Royal Geographical Society 1, 259-261, 1879.
- 1879: Alfred Bray Kempe publica una prueba de la Conjetura (American Journal of Mathematics).

Coloreo de grafos

Definición: Un k-coloreo de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$f(u) = f(v) = i \Longrightarrow uv \notin E(G).$$





$\chi(G) = 3$

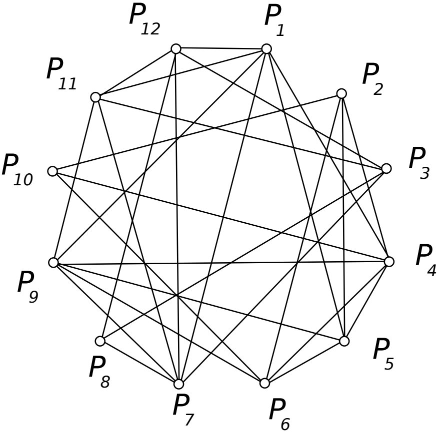
Aplicaciones

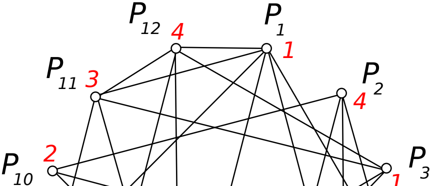
En un aeropuerto existen 4 instalaciones que son destinadas al mantenimiento de los aeroplanos (i.e. a lo sumo 4 aeroplanos pueden ser atendidos al mismo tiempo). Estas instalaciones se encuentran operables de $7:00$ a $19:00$ hs. Realizar el mantenimiento requiere de tres horas por cada aeroplano. En un día particular 12 aeroplanos necesitan mantenimiento en los periodos indicados:

$P_1 : 11:00 \ - \ 14:00$; $P_2 : 15:00\ 18:00$; $P_3 : 8:00 \ - \ 11:00$; $P_4 : 13:30 \ - \ 16:30$; $P_5 : 13:00 \ - \ 16:00$; $P_6 : 14:00 \ - \ 17:00$; $P_7 : 9:30 \ - \ 12:30$; $P_8 : 7:00 \ - \ 10:00$; $P_9 : 12:00 \ - \ 15:00$; $P_{10} : 16:00 \ - \ 19:00$; $P_{11} : 10:00 \ - \ 13:00$; $P_{12} : 9:00 \ - \ 12:00$.

¿Pueden realizarse todas las tareas de mantenimiento?

Aplicaciones





Ejemplos

- $\chi(K_n) = n$.
- $\chi(P_n) = 2, \ (n \geq 2)$.
- Si T es un árbol (con $|V(T)| \geq 2$), $\chi(T) = 2$.
- G es bipartito $\implies \chi(G) \leq 2$. $\iff \chi(G) \leq 2$.
- $\chi(C_n)$ $=2$ si n es par y $\chi(C_n) = 3$ si n es impar.
- $\chi(W_n)$ $=\chi(C_n) + 1$.
- Si G_P es el grafo de Petersen, $\chi(G_P)$ $=3$.
- Si G es k-crítico entonces $\delta(G) \geq k - 1$.

Cotas del número cromático

$n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$,

$\alpha(G)$: número de estabilidad de G, $\omega(G)$: número de clique de G,

1. $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.
2. $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
3. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.
4. $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.
5. $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.
6. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq 1 + n$.
7. $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.
8. $\chi(G) \leq 1 + \text{máx}\{\delta(G') : \ G' \subseteq G\}$.

Cotas del número cromático

Sea G un grafo simple.

1. Sea f un coloreo óptimo de G, i.e. $f(V(G)) = \{1, \ldots, \chi(G)\}$. Observemos que si W es una clique máxima de G, entonces $f(v) \neq f(u)$ para cada par de vértices $u, v \in W$. Luego, $\chi(G) \geq |W|$. Ergo, $\chi(G) \geq |W| = \omega(G)$.
   Por otro lado, si $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, como la función $f(v_i) = i, \ \forall i \in [n]$ es un coloreo de G, entonces $\chi(G) \leq n$.
2. Sea f un coloreo óptimo de G. Consideremos $V_i = f^{-1}(\{i\}), i \in [\chi(G)]$ (clases se color). Observemos que $\cup_{i=1}^{\chi(G)} V_i = V(G)$ y $V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i \neq j$, i.e. $\{V_i\}_{i=1}^{\chi(G)}$ es una partición de G.
   Por otro lado, observemos que dos vértices de una misma clase de color no son adyacentes. Ergo, cada V_i es un conjunto estable. Entonces, $|V_i| \leq \alpha(G), \forall i \in [\chi(G)]$. Luego, $n = |V(G)| = |\cup_{i=1}^{\chi(G)} V_i| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |V_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G)\alpha(G) \geq n$.

Cotas del número cromático

3. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$.
   Por lo anterior sabemos que $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G})$. Pero hemos visto que $\omega(\overline{G}) = \alpha(G)$. Ergo,
   $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq \chi(G)\omega(\overline{G}) = \chi(G)\alpha(G) \geq n$.
4. $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq n$.
   Sea I un estable máximo de G y $v \in I$. Luego, $I \subseteq V(G) - N(v)$y en consecuencia $\alpha(G) = |I| \leq n - |N(v)| = n - gr(v) \leq n - \delta(G)$.
   Ergo, $\chi(G)(n - \delta(G)) \geq \chi(G)\alpha(G) \geq n$.
5. $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.
   Sea $I = \{v_1, \ldots, v_{\alpha(G)}\}$ un estable máximo de G. Notemos $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y consideremos
   $f : V(G) \mapsto \{1, \ldots, n + 1 - \alpha(G)\}$ tal que $f(v) = 1$ si
   $i = 1, \ldots, \alpha(G)$ (i.e. $v \in I$) y $f(v_i) = 1 + i - \alpha(G)$ si
   $i = \alpha(G) + 1, \ldots, n$.
   Luego, los únicos vértices que reciben el mismo color son los vértices de I (color 1). En consecuencia f es un coloreo de G y por lo tanto $\chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$.

El número cromático es monótono no decreciente por subgrafos inducidos

Sea G' un subgrafo (inducido o no) de un grafo G (notación $G' \subseteq G$).
Queremos probar que $\chi(G') \leq \chi(G)$.
Consideremos f un coloreo óptimo (mínimo) de G y f' la restricción de f a $V(G')$.
Observemos que la función f' es un coloreo de G', ya que para todo $u, v \in V(G')$ se verifica

$$f'(u) = f'(v) \implies f(u) = f(v) \implies uv \notin E(G) \implies uv \notin E(G').$$

Como f usa $\chi(G)$ colores, f' utiliza a lo sumo $\chi(G)$ colores y por lo tanto

$$\chi(G') \leq \chi(G).$$

Cotas del número cromático

Teorema

Para todo grafo G de orden n se verifica,

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor .$$

Prueba:

Inducción sobre $n - \omega(G)$.

Si $n - \omega(G) = 0$, $G \approx K_n$. ✓

Si $k = 1$, $\chi(G) = n - 1 = \omega(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor$.

Sea $k \geq 2$ y supongamos que el resultado es cierto para todo grafo H de orden n' tal que $n' - \omega(H) < k$.

Sea G tal que $k = n - \omega(G) \geq 2$. Tomemos u y v dos vértices no adyacentes en G. Consideremos $H = G - \{u, v\}$. Observemos que $|V(H)| = n - 2 \geq \omega(G) \geq 1$.

Cotas del número cromático

Teorema

Para todo grafo G de orden n se verifica,

$$\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor .$$

Prueba:
Luego, si f_H es un coloreo óptimo de H, entonces $f_G : V(G) \mapsto \{1, \ldots, \chi(H)+1\}$ con $f_G|_H = f_H$ y $f_G(u) = f_G(v) = \chi(H)+1$ es un coloreo de G. En consecuencia,

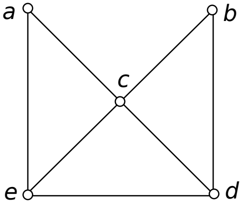
$\chi(G) \leq \chi(H) + 1$.
Además, si W es una clique máxima de G, como $\{u, v\} \nsubseteq W$, entonces $W - \{u, v\}$ es una clique de H de tamaño al menos $|W| - 1$. Ergo,

$\omega(G) - 1 \leq \omega(H) \leq \omega(G)$.
Por lo tanto,
$|V(H)| - \omega(H) = (n-2) - \omega(H) \leq (n-2) - (\omega(G)-1) = n - \omega(G) - 1 = k - 1 < k$,

$\chi(G) \leq \chi(H) + 1 \leq \left\lfloor \frac{n-2+\omega(H)}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n+\omega(H)}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+\omega(G)}{2} \right\rfloor$. $\square$

Cotas: Algoritmo Greedy

Dado un grafo G y un orden de sus vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, el *algoritmo greedy* colorea los vértices en el orden dado asignando a v_i el menor color aún no utilizado en sus vértices vecinos de menor índice.



Orden: a, b, c, d, e:
$a, b \to 1$, $c \to 2$, $d \to 3$, $e \to 4$.

Orden: a, d, b, e, c:
$a, d \to 1$, $b, e \to 2$, $c \to 3$.

- Observemos que en cada iteración el color que se le asigna a un vértice es a lo sumo uno más que la cantidad de vecinos del vértices.
  Luego,

Generalización de la definición de coloreo

Un k-coloreo de un grafo G es una función $f : V(G) \mapsto A$, con $|A| = k$ tal que

$$f(u) = f(v) \implies uv \notin E(G).$$

$\chi(G) = \text{mín}\{k : G \text{ admite un } k\text{-coloreo}\}$.

Cotas de $\chi(G)$

Teorema (Nordhaus-Gaddum, 1956)

Si G es un grafo de orden n entonces,

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$,
2. $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Prueba:
Sean $\chi(G) = k$, $\chi(\overline{G}) = c$, g un k-coloreo de G, $\bar{g}$ un c-coloreo de $\overline{G}$.

La asignación $v \to (g(v), \bar{g}(v))$ determina un coloreo de K_n.

Por lo tanto, $n = \chi(K_n) \leq k.c = \chi(G).\chi(\overline{G})$.

La media geométrica de dos reales positivos es a lo sumo su media aritmética:

$$\sqrt{n} \leq \sqrt{\chi(G).\chi(\overline{G})} \leq \frac{\chi(G) + \chi(\overline{G})}{2}.$$

Cotas de $\chi(G)$

Teorema (Nordhaus-Gaddum, 1956)

Si G es un grafo de orden n entonces,

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1,$
2. $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2.$

Prueba:
Cotas superiores: Ejercicio (Sug. Inducción o a partir de la cota $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \subseteq G\}$).

$\square$

Cotas de $\chi(G)$

Teorema (Nordhaus-Gaddum, 1956)

Si G es un grafo de orden n entonces,

1. $2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$,
2. $n \leq \chi(G).\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

Teorema

Sea n un entero positivo. Para todo par de números enteros a, b tales que

$$2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1 \wedge n \leq a.b \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2,$$

existe un grafo G de orden n tal que

$$\chi(G) = a \wedge \chi(\overline{G}) = b.$$

Cotas de $\chi(G)$: Teorema de Brooks

Sabemos que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Además, para todo $k \geq 1$,

- $\chi(C_{2k+1}) = 3 = \Delta(C_{2k+1}) + 1$,
- $\chi(K_k) = k = \Delta(K_k) + 1$.

Teorema (Brooks, 1941)

Si G es un grafo conexo que no es un ciclo impar o un grafo completo, entonces

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Prueba:
Recomendamos su lectura $\square$

Cotas de $\chi(G)$.

- Sabemos que si G es k-crítico entonces $\delta(G) \geq k - 1$.
- **Observación**: Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- **Brooks, 1941**: Si $\Delta(G) \geq 3$ entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G)\}$.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G) - 1\}$.

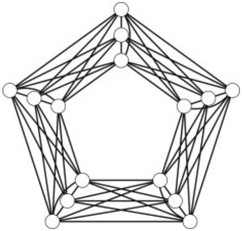


Figura: M_8, $\chi(M_8) = 8$, $\omega(M_8) = 6$ y $\Delta(M_8) = 8$.

Cotas de $\chi(G)$.

- Sabemos que si G es k-crítico entonces $\delta(G) \geq k-1$.
- **Observación**: Los únicos grafos k-críticos $(k-1)$-regulares son los ciclos impares y los grafos completos.
- **Brooks, 1941**: Si $\Delta(G) \geq 3$ entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G)\}$.
- Conjetura[Borodin y Kostochka, 1977]: Si $\Delta(G) \geq 9$ entonces $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G)-1\}$.
- La conjetura es cierta para $\Delta(G) \geq 10^{14}$ [B. Reed, 1999].
- La conjetura es cierta para grafos claw-free ($K_{1,3}$-free) [D. W. Cranston y L. Rabern, 1999].
- Existe otros resultados (positivos) parciales, pero en general la conjetura sigue abierta.

Cotas de $\chi(G)$.

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n}{2}$.

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n+1-\alpha(G)$.

  $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+n+1-\alpha(G)}{2}$ [Brigham y Dutton, 1985].

- $\omega(G) \leq \chi(G) \leq 1+\Delta(G)$.

  Conjetura[B. Reed, 1998]: $\chi(G) \leq \frac{\omega(G)+1+\Delta(G)}{2}$.

Número cromático y número de clique

Sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G)$, i.e. $\chi(G) - \omega(G) \geq 0$.

¿Cuánto más grande que $\omega(G)$ puede ser $\chi(G)$?

¿Está acotada esa diferencia?

Ejemplos:

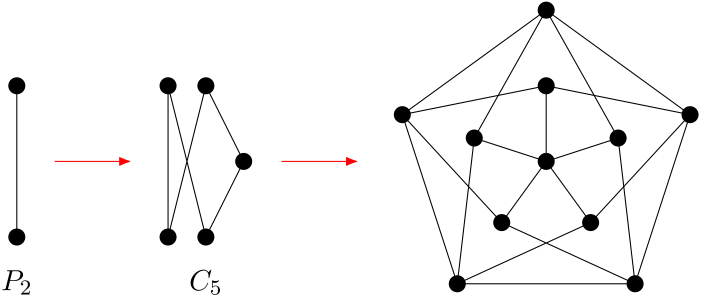
- $\chi(K_n) - \omega(K_n) = n - n = 0$.
- $\chi(C_{2k+1}) - \omega(C_{2k+1}) = 3 - 2 = 1$.
- $\chi(M_8) - \omega(M_8) = 8 - 6 = 2$.

Jan Mycielski (1955): Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un grafo G_k tal que $\chi(G_k) - \omega(G_k) = k$. Más aún, $\omega(G_k) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Construcción de Mycielski

Sea G un grafo con $\omega(G) \leq 2$ (libre de triángulos), $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Consideremos el siguiente grafo G_M:

1. $V(G_M) = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{w\}$.
2. $E(G_M) = E(G) \cup \{u_i v_j : \; v_i v_j \in E(G), \; i, j \in [n]\} \cup \{u_i w : \; i \in [n]\}$.



Proposición

$\chi(G_M) = \chi(G) + 1$ y $\omega(G_M) = 2$.

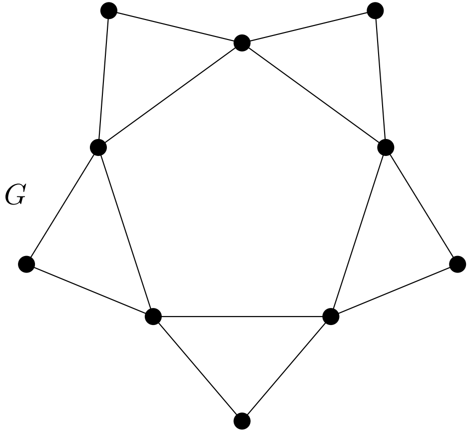
Grafos perfectos

Definición: [C. Berge, 1961] Un grafo G es perfecto si para todo subgrafo inducido G' de G (incluso G) se verifica que $\chi(G') = \omega(G)$.

Ejemplos:

- P_n, K_n son grafos perfectos.
- C_{2k} son grafos perfectos.
- Los grafos bipartitos son perfectos.
- C_{2k+1} no son grafos perfectos ($k \geq 2$).

Grafos perfectos



Observemos que $\chi(G) = 3 = \omega(G)$. Pero si consideramos el subgrafo inducido G' borrando todos los vértices de grado 2 de G, G' es isomorfo a C_5 y por lo tanto $\chi(G') = 3$ y $\omega(G') = 2$.

En consecuencia, G no es perfecto.

Conjetura de los grafos perfectos

Conjetura (C. Berge, 1961): Un grafo es perfecto ssi su complemento es perfecto.

Teorema (L. Lovász, 1972)

Un grafo es perfecto ssi su complemento es perfecto.

Conjetura Fuerte de los grafos perfectos

Conjetura (C. Berge, 1961): Un grafo es perfecto ssi no tiene como subgrafo inducido un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 ni su complemento (i.e. C_{2k+1} y $\overline{C_{2k+1}}$ no son subgrafos inducidos de G para todo $k \geq 2$).

Teorema (Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, Robin Thomas, 2002)

Un grafo es perfecto ssi no tiene como subgrafo inducido un ciclo impar de longitud mayor o igual a 5 ni su complemento.