Práctica 5: Autovalores, autovectores. Diagonalización.

1. Calcular los autovalores y sus autovectores asociados para las siguientes transformaciones lineales.
   a) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^2)$ definida por $T(u,v) = (v,u)$ para $u,v \in \mathbb{K}$.
   b) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ definida por $T(u,v,w) = (2v,0,5w)$ para $u,v,w \in \mathbb{K}$.
   c) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ definida por
   $$T(x_1,\cdots,x_n) = (x_1+\cdots+x_n,\cdots,x_1+\cdots+x_n), \qquad x_1,\cdots,x_n \in \mathbb{K}.$$
2. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Probar que para toda $T \in \mathcal{L}(V)$ y para cada autovalor λ de T, el autoespacio asociado a λ es un subespacio vectorial de V.
3. Encontrar los autovalores y sus autovectores asociados para los operadores lineales sobre $\mathbb{K}^2$ dados por las siguientes matrices:
   $$a)\begin{bmatrix}3 & 0\\ 8 & -1\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}10 & -9\\ 4 & -2\end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad d)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$
4. Encontrar el autoespacio correspondiente de cada autovalor:
   $$a)A = \begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 10, \qquad b)B = \begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -3\\ 2 & 4 & 9\end{bmatrix}, \lambda = 3.$$
5. Para cada matriz dada, encontrar los autovalores para el operador T sobre $\mathbb{K}^n$ sin realizar cálculos. Describir los autovectores $v \in \mathbb{K}^n$ asociados a cada autovalor λ analizando las soluciones de la ecuación matricial $(A-\lambda I)v = 0$.
   $$a)\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix}1 & 3 & 7 & 11\\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & 8\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$
6. Probar que, si A es una matriz diagonal $n \times n$, para todo $i \in \{1,\cdots,n\}$, el vector $x^i = e_i$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda_i = A_{ii}$.
7. *a)* Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus filas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es autovalor de A.
   b) Sea A una matriz $n \times n$ tal que la suma de las entradas de cada una de sus columnas es igual a $\beta \in \mathbb{R}$. Mostrar que β es autovalor de A.
8. Sea
   $$A = \begin{bmatrix}5 & -2 & 6 & -1\\ 0 & 3 & h & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$
   Encontrar h tal que el autoespacio correspondiente a $\lambda = 5$ sea bidimensional.
9. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible y $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Probar que λ es autovalor de T si y sólo si λ^{-1} es autovalor de T^{-1}.
10. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$, $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ matriz inversible y $\lambda \in \mathbb{K}$. Probar que λ es autovalor de A si y sólo si λ es autovalor de A^t.
11. Sea V un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $T \in \mathcal{L}(V)$ con la propiedad que todo $v \in V\backslash\{0\}$ es un autovector asociado al mismo autovalor para T. Probar que T debe ser igual a un escalar por la identidad en V.

12. Diagonalizar las siguientes matrices:

$$a)\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{bmatrix}, \qquad b)\begin{bmatrix}4 & 0 & -2\\2 & 5 & 4\\0 & 0 & 5\end{bmatrix}, \qquad c)\begin{bmatrix}-7 & -16 & 4\\6 & 13 & -2\\12 & 16 & 1\end{bmatrix}, \qquad d)\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 4 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

13. Sea A una matriz 3×3 con dos autovalores. Cada autoespacio es unidimensional. Determinar si A es diagonalizable justificando la respuesta.

14. Demostrar que si A es tanto diagonalizable como invertible, también lo es A^{-1}.

15. $a)$ Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea inversible pero no diagonalizable.
    $b)$ Describir una matriz 2×2 distinta de cero que sea diagonalizable pero no inversible.

16. Si los autovalores de A, una matriz 3×3, son $1, 1$ y 2, cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?. Justificar la respuesta
    - $a)$ A es inversible
    - $b)$ A es diagonalizable.
    - $c)$ A no es diagonalizable.

17. En cada uno de los siguientes ítems, siendo $A = PDP^{-1}$, calcule A^4.

$$a)P = \begin{bmatrix}5 & 7\\2 & 3\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}; \quad b)P = \begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}a & 0\\0 & b\end{bmatrix}; \quad c)P = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

18. Sea

$$A = \begin{bmatrix}4 & 4 & 2 & 3 & -2\\0 & 1 & -2 & -2 & -2\\6 & 12 & 11 & 2 & -4\\9 & 20 & 10 & 10 & -6\\15 & 28 & 14 & 5 & -3\end{bmatrix}.$$

Diagonalizarla, encontrar sus autovalores y determinar las bases para los autoespacios correspondientes.