

4. Luciano ha decidido aprender un poco más de lógica, por lo que ha ido a la Biblioteca y se puso a leer sobre silogismos. Uno que le llamó la atención es el **silogismo disyuntivo**, o **Modus tollendo ponens**, que puede escribirse así: *si se nos dice que al menos una de dos proposiciones es verdadera; y también se nos dijo que no es la primera la que es verdadera; se puede inferir que debe ser la última la que es verdadera.*

1. Escriba la regla de secuencia asociada a este silogismo.
2. Luciano decide agregar esta regla a nuestro sistema de deducción natural, y quiere demostrar que se preserva soundness. ¿Podrá hacerlo? En caso afirmativo, ayúdelo y demuestre que al agregar esta regla a la relación  $\vdash$  se preserva soundness. En caso negativo, demuestre que no es posible lo anterior.

5. Se quiere, en cada caso, encontrar un conjunto de fórmulas  $\Gamma$  que satisfaga las condiciones requeridas. Si esto es posible, dar un conjunto  $\Gamma$  y probar que la elección es válida. En caso contrario, justificar por qué no es posible encontrarlo.

1.  $\phi \notin \Gamma$  y  $\Gamma \vdash \phi$ , donde  $\phi \equiv (p_0 \rightarrow \neg p_0) \wedge (\neg p_0 \rightarrow p_0)$
2.  $\Gamma$  consistente,  $\neg(p_0 \vee p_1) \notin \Gamma$  y  $\Gamma \vdash \neg(p_0 \vee p_1)$  —
3.  $\Gamma$  inconsistente y  $\Gamma \not\vdash p_0 \rightarrow p_1$  1/0.
4.  $\Gamma$  sólo contiene tautologías y  $\Gamma \vdash p_0$  0

2. ¿Verdadero o falso? Justifique.

Sea  $S$  un conjunto consistente de fórmulas, y  $F$  una fórmula. Puede asegurarse que el conjunto  $S \cup \{F\}$  es consistente si  $F$  es una:

- (a) fórmula satisfactible.
- (b) tautología.

Justifique en cada caso.

3. ¿Verdadero o falso? Justifique.

- a) Si  $\Gamma \models \phi$  entonces  $\Gamma \cup \{\phi\}$  es consistente.
- b) Si  $\Gamma \models \phi$  entonces  $\Gamma \cup \{\phi\}$  es inconsistente.

4. Considere el conjunto de fórmulas

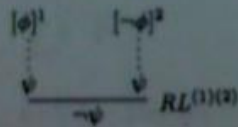
$$\Gamma = \{p \rightarrow q, q \leftrightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r \rightarrow q, \neg q\}$$

- a) Demuestre que  $\Gamma$  es consistente. —
- b) Encuentre todas las valuaciones  $v$  tales que  $\llbracket \Gamma \rrbracket_v = \top$ .

4. Luciano ha decidido aprender un poco más de lógica, por lo que ha ido a la Biblioteca y se puso a leer *Analytica priora* de Aristóteles. En el texto, encuentra la siguiente frase:

*No es posible deducir una conclusión verdadera de premisas contradictorias*

Haciendo uso de sus conocimientos sobre deducción natural, intenta traducir esta forma de razonar como una regla de secuentes, de la siguiente forma:



i. Escriba la regla de secuyente asociada

ii. Luciano decide agregar esta regla a nuestro sistema de deducción natural, y quiere demostrar que se preserva soundness. ¿Podrá hacerlo? En caso afirmativo, ayúdelo y demuestre que al agregar esta regla a la relación  $\vdash$  se preserva soundness. En caso negativo, demuestre que no es posible lo anterior.

3. Sean  $\Gamma$  y  $\Delta$  conjuntos de fórmulas tales que  $\Gamma$  es consistente y  $\Delta$  es inconsistente. Demostrar o refutar las siguientes afirmaciones:

- i.  $\Gamma \cup \Delta$  es inconsistente. —
- ii.  $\Gamma \cap \Delta$  es consistente. —

~~Sea  $\Gamma$  un conjunto de fórmulas consistente. Demuestre que si  $\Gamma \vdash \phi$  entonces  $\Gamma \vdash \neg\phi$  es inconsistente.~~

5. Para cada caso, determine si es posible encontrar un conjunto de fórmulas  $\Gamma$  tales que se cumplan las condiciones pedidas.

- (a)  $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ,  $\gamma \models \alpha \vee \beta$ ,  $\gamma \models \alpha \rightarrow \beta$  y  $\gamma \not\models \beta \rightarrow \alpha$ .
- (b)  $\Gamma = \{\alpha', \beta', \gamma'\}$ ,  $\{\alpha' \rightarrow \beta' \wedge \gamma', \beta' \rightarrow \neg\gamma', \neg\alpha' \rightarrow \perp\}$  es consistente.

3. Demostrar o refutar las siguientes proposiciones:

- a) Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos conjuntos consistentes de fórmulas, entonces  $S_1 \cup S_2$  es consistente. —
- b) Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos conjuntos inconsistentes de fórmulas, entonces  $S_1 \cap S_2$  es inconsistente. —