Espacios con producto interno

Álgebra Lineal 2024 (LM, PM, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

1 de octubre de 2024

Producto interno

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Un ***producto interno*** *sobre V es una función que a cada par de vectores en V, (u, v) le asigna un escalar que se nota: $u \cdot v$, $u \times v$, $\langle u, v \rangle$ o $(u|v)$, de modo tal que para todos $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se verifica:*

1. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$.
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.
3. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$.
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$ *y* $\langle u, u \rangle = 0$ *si y solo si* $u = 0$.

Ejemplos de productos internos

1. Sea $V = \mathbb{K}^n$, $V \ni v = (v_1, \cdots, v_n)^t$. ***Producto interno canónico***.

$$V = \mathbb{R}^n, \quad \langle u, v\rangle := u^t v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i\,; \qquad V = \mathbb{C}^n, \quad \langle u, v\rangle := u^t \overline{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overline{v_i}.$$

2. En $V = \mathbb{R}^2$, para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$

$$\langle u, v\rangle := u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 4u_2 v_2.$$

3. Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, para $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, definamos

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{b_{ij}},$$

Sea B matriz, su ***matriz adjunta*** es $B^* = \overline{B^t}$, i.e. $b^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$. Se tiene

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*) = tr(B^* A).$$

...

4. Sean $t_0, \cdots, t_n \in \mathbb{K}$ distintos. Sea $V =_n [x]$.

$$\langle p, q\rangle := p(t_0)\overline{q(t_0)} + \cdots + p(t_n)\overline{q(t_n)}.$$

Axiomas $1), 2)$ y $3)$ ✓. Veamos el axioma $4)$.

5. Sea $V = C([0,1])$. Para $f, g \in V$ sea

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

Axiomas $1), 2)$ y $3)$ ✓ por las propiedades de la integración. Además

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)dt \geq 0.$$

Si $\langle f, f\rangle = \int_0^1 f^2(t)dt = 0$, suponiendo que $f \neq 0$ y por el teorema de conservación del signo para una función continua se llegaría a que $\langle f, f\rangle > 0$ lo que es una contradicción.

Espacio producto interno

Definición

Un ***espacio producto interno****, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) munido de un producto interno.*
Un espacio producto interno real de dimensión finita es frecuentemente llamado ***espacio euclidiano****.*
Un espacio producto interno complejo de dimensión finita es frecuentemente llamado ***espacio unitario****.*

Definición

Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se llama ***norma*** *de un vector v a $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Resulta equivalente $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$.*

Teorema

Si V es un espacio producto interno, entonces para $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ cualesquiera se tiene

1. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$.
2. $\|v\| > 0$ *para* $v \neq 0$.
3. $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz***.
4. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. ***Desigualdad triangular***

Demos: ... ■

Definición

*Sea V un espacio producto interno, luego se define la **distancia** entre dos vectores $u, v \in V$ como*

$$dist(u, v) = \|u - v\|.$$

Ortogonalidad

Definición

*Sean $u, v \in V$ espacio producto interno. Entonces diremos que u **y** v **son ortogonales** si $\langle u, v\rangle = 0$. Notación $u \perp v$.*
*Si $u \in V$ es ortogonal a todo vector en $W \underset{s.e.}{\subseteq} V$ se dice que u **es ortogonal a** W.*

***Complemento ortogonal de** W* $\quad W^{\perp} := \{v \in V : v \perp w, \forall w \in W\}$

Nota

El único vector en V que es ortogonal a todo vector en V y es el vector nulo.

Ejemplo

Sea $V = \mathbb{R}^3$ y sea W un plano por el origen y sea L la recta por el 0, perpendicular a W. Luego si $0 \neq z \in L$ y $0 \neq w \in W$ se tiene que $z \cdot w = 0$. Así cada vector en L es ortogonal a cada vector w en el plano. De hecho se tiene que

$$L = W^{\perp}, \qquad W = L^{\perp}.$$

Proposición

$i)$ Un vector $v \in W^{\perp}$ si y solo si v es ortogonal a todo vector en un conjunto que genere a W.
$ii)$ $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

Demos: Ejercicio. ■

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. El complemento ortogonal del espacio fila de A es de $nul(A)$, y el complemento ortogonal del espacio columna de A es $nul(A^t)$.

$$(Fil(A))^{\perp} = nul(A) \qquad (Col(A))^{\perp} = nul(A^t).$$

Demos: ... ■

.

Conjunto ortogonal

Definición

Si $S \subset V$, S es un ***conjunto ortogonal*** *si todo par de vectores distintos de S son ortogonales.*
Un ***conjunto ortonormal*** *es un conjunto ortogonal S donde $\|v\| = 1$ para todo $v \in S$.*

Ejemplos

1. Las bases canónicas en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ son conjuntos ortonormales con respecto al producto interno canónico.
2. Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, para $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, con el producto interno

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{b_{ij}},$$

   Sea E^{pq} tal que la matriz que tiene un 1 en la fila p, columna q y 0 en el resto. $\{E^{pq} : p, q = 1, \cdots, n\}$ es un conjunto ortonormal pues

$$\langle E^{pq}, E^{rs}\rangle = tr(E^{pq}(E^{rs})^*) = tr(E^{pq}E^{sr})\delta_{qs}tr(E^{pr}) = \delta_{qs}\delta_{pr}.$$

3. Sea $V = C([0,1])$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.
   Sea $f_n(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi nx)$ y $g_n(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(2\pi nx)$. Entonces $\{1, f_1, g_1, f_2, g_2, \cdots\}$ es un conjunto infinito ortonormal o ***sistema ortonormal*** .

Teorema

Un conjunto ortogonal de vectores no nulos es linealmente independiente.

Demos: ... ■

Corolario

Si un vector w *es combinación lineal de una colección ortogonal de vectores no nulos* $v_1, \cdots, v_m$, *entonces* w *es igual a la combinación lineal particular dada por*

$$w = \sum_{j=1}^{m} \frac{\langle w, v_k \rangle}{||v_k||^2} v_k.$$

Observación

Si $\{v_1, \cdots, v_m\}$ *es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio con producto interno de dimensión finita* V, *luego* $m \leq \dim(V)$.

Dimensión geométrica de $V \leq$ *Dimensión algebraica de* V.

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Teorema

Proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Sea V un espacio con producto interno y sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ linealmente independiente. Entonces pueden construirse vectores ortogonales $w_1, w_2, \cdots, w_n \in V$ tales que para cada $k = 1, \cdot, n$ resulte el conjunto $\{w_1, \cdots, w_k\}$ una base para el espacio generado por $v_1, \cdots, v_k$.

Demos: ... ■

Observación

Por ejemplo para para $n = 4$ los vectores toman la forma

$$w_1 = v_1, \qquad w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2,$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1, \qquad w_4 = v_4 - \frac{\langle v_4, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 - \frac{\langle v_4, w_2 \rangle}{||w_2||^2} w_2 - \frac{\langle v_4, w_3 \rangle}{||w_3||^2} w_3.$$

Corolario

Todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Observación

Sean V *un e.v.p.i.* $\dim(V)$ *finita,* $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base ordenada de* V. *Luego podemos definir una matriz asociada al producto interno del siguiente modo*

$$G = (g_{ij}) = (\langle v_i, v_j \rangle)$$

Así para $[u]_{\mathcal{B}} = [x_1, \cdots, x_n]^t$ *y* $[w]_{\mathcal{B}} = [y_1, \cdots, y_n]^t$,

$$\langle u, w \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} x_j v_j, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j \rangle = [u]_{\mathcal{B}}^t \, G \, \overline{[w]}_{\mathcal{B}}.$$

Si B *es ortonormal, la matriz* $G = I$ *y el producto interno queda*

$$\langle u, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y}_j.$$

Ejemplo

Consideremos $V = \mathbb{R}^3$ y los vectores $v_1 = (3,0,4)^t, v_2 = (-1,0,7)^t, v_3 = (2,9,11)^t$ en $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico.
Aplicando el proceso de Gram-Schmidt se obtienen los vectores
$w_1 = V_1 = (3,0,4)^t$,
$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1, = (-1,0,7)^t - \frac{25}{25}(3,0,4)^t = (-4,0,3)^t$ y
$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = (2,9,11)^t - \frac{50}{25}(3,0,4)^t - \frac{25}{25}(-4,0,3)^t = (0,9,0)$.
$\{w_1, w_2, w_3\}$ constituye una base ortogonal.
Si queremos una base ortonormal, basta dividir cada vector por su norma y obtenemos $u_1 = (\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5})^t$, $u_2 = (\frac{-4}{5}, 0, \frac{3}{5})^t$ y $u_3 = (0,1,0)^t$.

Proyección ortogonal. Mejor aproximación

Sean V un e.v.p.i. $s/\mathbb{K}$ y $0 \neq u \in V$. Queremos descomponer $y \in V$ como

$$y = \widehat{y} + z, \quad \widehat{y} = \alpha u, \quad \langle u, z \rangle = 0. \tag{1}$$

Para $\alpha \in \mathbb{K}$, sea $z = y - \alpha u$, de modo que se cumpla (1). Entonces $y - \widehat{y}$ es ortogonal a u si y sólo si

$$0 = \langle y - \alpha u, u \rangle = \langle y, u \rangle - \alpha \langle u, u \rangle,$$

i.e. sólo si

$$\alpha = \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2}, \qquad \widehat{y} = \frac{\langle y, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

El vector $\widehat{y}$ es la ***proyección ortogonal de*** y ***sobre*** u y z es la componente de y ortogonal a u.

Observación

Proyección ortogonal de y sobre L

$$\widehat{y} = \mathrm{proy}_L y = \frac{\langle y, u\rangle}{\|u\|^2} u.$$

Definición

Sean $W \underset{s.e.}{\subseteq} V$ e.v.p.i. $s/\mathbb{K}$ y $v \in V$. Si existe $\overline{w} \in W$ tal que

$$\|v - \overline{w}\| \leq \|v - w\| \; \forall w \in W,$$

*se dice que $\overline{w}$ es una **mejor aproximación a v en W**.*

Teorema

de la descomposición ortogonal

Sea W un subespacio vectorial de V espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con producto interno y sea $v \in V$.

i) *El vector $\overline{w} \in W$ es una mejor aproximación de v, por vectores de W si y sólo si $v - \overline{w}$ es ortogonal a W.*

ii) *Si existe una mejor aproximación a v por vectores de W, la misma es única.*

iii) *Si W es de dimensión finita y $\{w_1, \cdots, w_n\}$ es una base ortonormal de W, entonces el vector*

$$\overline{w} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle v, w_k \rangle}{||w_k||^2} w_k$$

es la única mejor aproximación a v por vectores de W.

Demos: ... ■

Proyección ortogonal

Definición

*Siempre que exista el vector $\overline{w}$ del teorema anterior se lo llama **proyección ortogonal**. Si todo vector de V tiene proyección ortogonal sobre W, la aplicación que a cada vector de V le asigna su proyección ortogonal sobre W se llama **proyección ortogonal de V sobre W**.*

Corolario

Sean V e.v.p.i $s/\mathbb{K}$, $W \underset{s.e.}{\subseteq} V$, $\dim(W)$ dimensión finita y P_W la proyección ortogonal de V sobre W. Entonces la aplicación $v \to v - P_W v$ es la proyección ortogonal de V sobre $W^\perp$.

Demos: ... ■

Ejemplo

Sean $V = \mathbb{R}^3$ con el p.i. canónico y $W = s.e.\{(3,12,-1)\}$. Calculemos la proyección ortogonal de $(-10,2,8)$ sobre W

$$\overline{w} = \frac{\langle(-10,2,8),(3,12,-1)\rangle}{9+144+1}(3,12,-1) = \frac{-14}{154}(3,12,-1).$$

La proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre W es la transformación lineal P_W definida por

$$(x_1,x_2,x_3) \mapsto P_W(x_1,x_2,x_3) = \frac{3x_1+12x_2-x_3}{154}(3,12,-1).$$

$rang(P_W) = 1$, luego por el teorema del rango se tiene que $\dim(nul(P_W) = 2$.
Además se tiene que

$$P_W(x_1,x_2,x_3) = 0 \Leftrightarrow 3x_1+12x_2-x_3 = 0 \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) \in W^{\perp},$$

por lo tanto $W^{\perp} = nul(P_W)$ y $\dim(W^{\perp}) = 2$.
La proyección ortogonal de V sobre $W^{\perp}$ es la transformación lineal $I - P_W$.

Definición

Un operador lineal $T \in \mathcal{L}(V)$ *se dice* ***idempotente*** *si* $T^2 = T$.

Teorema

Sean V *e.v.p.i* $s/\mathbb{K}$, WV, $\dim(W)$ *finita y sea* P_W *la proyección ortogonal de* V *sobre* W. *Entonces* P_W *es una transformación lineal idempotente de* V *sobre* W, $W^{\perp} = nul(P_W)$ *y* $V = W \oplus W^{\perp}$.

Demos: ... ■

Corolario

Bajo las condiciones del teorema, $I - P_W$ *es la proyección ortogonal de* V *sobre* $W^{\perp}$, *es una transformación lineal idempotente de* V *en* $W^{\perp}$ *con espacio nulo igual a* W.

Demos: ... ■

Corolario

Desigualdad de Bessel

Sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un conjunto ortogonal de vectores no nulos en un espacio con producto interno V. Sea $u \in V$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\langle u, v_k \rangle|^2}{\|v_k\|^2} \leq \|u\|^2,$$

la igualdad vale si y solo si

$$u = \sum_{k=1}^{n} \frac{\langle u, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k.$$

Demos: ... ∎