Práctica 6: Lógica de predicados - Deducción natural

1) Probar la validez de los siguientes secuentes usando, entre otras, las reglas de introducción y eliminación de la igualdad. El símbolo $+$ es un símbolo de función de aridad 2, mientras que $<$ es un símbolo de predicado también de aridad 2.

a) $(y = 0) \wedge (y = x) \vdash 0 = x$

b) $(x = 0) \vee ((x + x) > 0) \vdash (y = (x + x)) \to ((y > 0) \vee (y = (0 + x)))$

2) Las pruebas de los secuentes que hay a continuación combinan las reglas para la igualdad y los cuantificadores. Encuentre pruebas para:

a) $P(b) \vdash \forall x(x = b \to P(x))$

b) $P(b), \forall x \forall y(P(x) \wedge P(y) \to x = y) \vdash \forall x(P(x) \leftrightarrow x = b)$

c) $\exists x \exists y(H(x, y) \vee H(y, x)), \neg \exists x H(x, x) \vdash \exists x \exists y \neg(x = y)$

3) Pruebe los siguientes secuentes:

a) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash (\forall x \neg Q(x)) \to (\forall x \neg P(x))$

b) $\forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \vdash \neg(\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$

c) $\neg \exists x \phi \vdash \forall x \neg \phi$

d) $(\forall x \phi) \wedge (\forall x \psi) \dashv\vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

4) Demostrar la validez de los siguientes secuentes, donde $ar(f) = 2$, $ar(F) = ar(G) = ar(P) = ar(Q) = 1$ y $ar(S) = 0$:

a) $\forall x P(x) \to S \vdash \exists x(P(x) \to S)$

b) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

c) $\forall x(\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x(P(x) \to Q(x))$

d) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

e) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

f) $\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x P(x)$

g) $\forall x(f(x, c) = x), \forall x(f(c, x) = x) \vdash \forall y(\forall x(f(x, y) = x)) \to y = c)$

5) Pruebe la validez de los siguientes secuentes:

a) $\forall x \forall y P(x, y) \vdash \forall u \forall v P(u, v)$

b) $\exists x \exists y F(x, y) \vdash \exists u \exists v F(u, v)$

6) En la práctica 5 se pedía dar un conjunto de fórmulas Γ que caracterice la estructura de grupo.

a) Demuestre que $\Gamma \vdash e = e^{-1}$

b) Exprese, mediante una fórmula ϕ, la siguiente propiedad:

"Existe un único elemento neutro para la operación binaria"

c) Demuestre que $\Gamma \vdash \phi$

7) En el ejercicio 6 de la práctica 5 se pedía caracterizar a los grafos simples bipartitos mediante un conjunto Γ de fórmulas de la lógica de predicados. Utilizando dicha formalización, demuestre:

a) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (U(x) \wedge R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow U(z))$

b) $\Gamma \vdash \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(x,z) \wedge W(y) \rightarrow W(z))$

8) En este ejercicio trabajaremos sobre relaciones de equivalencia y sus propiedades. Sea $\mathcal{F} = \{f, a, b\}$, $\mathcal{P} = \{R\}$ una signatura con $ar(a) = ar(b) = 0$, $ar(f) = 1$, $ar(R) = 2$. Decimos que R es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

a Represente como fórmulas ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de la lógica de predicados las propiedades que debe cumplir R para ser una relación de equivalencia.

Una relación de equivalencia divide a un conjunto A en *clases de equivalencia*. En una relación de equivalencia, si se cumple $R(n,m)$ decimos que n y m pertenecen a la misma clase, mientras que si se cumple $\neg R(n,m)$ decimos que n y m pertenecen a diferentes clases.

b Demuestre que en una relación de equivalencia, si las constantes a y b pertenecen a diferentes clases, entonces cualquier elemento que esté relacionado con a no está relacionado con b.

Finalmente, decimos que f *preserva clase* si cualquier elemento está relacionado con el resultado de aplicarle la función. Es decir, aplicar f nos mantiene (o preserva) en la misma clase de equivalencia.

c Represente como una fórmula ϕ_4 la propiedad f preserva clase en R.

d Demuestre que en una relación de equivalencia R donde f preserva clase se cumple que si dos elementos están relacionados, entonces también están relacionadas sus f-imágenes[1].

[1]Es decir, el resultado de aplicarle f