Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 6: Aplicaciones del cálculo integral.

---

1. *a*) Obtenga las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos, dados en coordenadas polares), *i*) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$, *ii*) $(1, 0)$, *iii*) $(0, \frac{\pi}{2})$,y iv) $(\sqrt{2}, \frac{5\pi}{3})$.

   b) Obtenga las coordenadas polares, con argumento $-\pi \leq \theta < \pi$ y radio $r \geq 0$, de los siguientes puntos, dados en coordenadas cartesianas, *i*) $(-2, 0)$, *ii*) $(1, 0)$, *iii*) $(\sqrt{3}, 1)$ y *iv*) $(0, -4)$.

2. *a*) Demuestre que el conjunto de puntos cuyas coordenadas cartesianas (x, y) satisfacen la ecuación cartesiana dada, es igual al de los puntos cuyos coordenadas polares (r, θ) satisfacen la correspondiente ecuación polar.

   1) $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $\quad r = 2\cos\ \theta$, $\quad \cos\ \theta > 0$;
   2) $x^2 + y^2 - x = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\quad r = 1 + cos\ \theta$;
   3) $(x^2 + y^2)^2 = |x^2 - y^2|$, $\quad r = \sqrt{|\cos\ 2\theta|}$.

   b) Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los siguientes ejercicios:

   a) $r \leq 1$, *b*) $r \geq 2$, *c*) $1 \leq r \leq 2$, *d*) $r \leq \theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi/4$,
   e) $\theta = 1$ *f*) $\theta = 1,\ 1 \leq r \leq 2$ *g*) $r = 1,\ 1 \leq \theta \leq 2$, *h*) $\theta \geq 1,\ r \geq 2$

3. *a*) Esboce la curva de ecuación polar $r = \theta$, $\theta \geq 0$ (esta curva es una *espiral*).

   b) Obtenga el área de la región limitada por la espiral $r = \theta$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

   c) Repita el ejercicio anterior para las siguientes curvas: *i*) *Cardiode*: $f(\theta) = 1 + \cos\ \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$; *ii*) *Ocho aplastado*: $f(\theta) = \sqrt{|\cos\ \theta|}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

4. Determine en cada caso el volumen de los sólido generado,

   a) al hacer girar la región entre la curva $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, y el eje x, alrededor del eje x,

   b) al hacer girar la región acotada por la curva $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$, alrededor de la recta $y = 1$.

   c) al hacer girar la región comprendida entre el eje y y la curva $x = 2/y$, $1 \leq y \leq 4$. , alrededor del eje y

   d) al hacer girar la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$, alrededor de la recta $x = 3$

e) al hacer girar la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante, alrededor del eje y.

5. *a*) Determine la longitud de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$ con $1 \le x \le 4$.

   b) Determine una función que mida la longitud de la gráfica de f a partir del punto $(1, 13/12)$ hasta el punto $(x, f(x))$ para un x genérico.

6. Determine una curva que pase por el punto $(0,1)$, cuya integral de su longitud sea $L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} dy$. ¿Cuántas curvas cumplen con lo anterior? Justifique su respuesta.

7. La gráfica de la ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ es una curva perteneciente a la familia de las *astroides* (no *asteroides*) en virtud de su apariencia de estrella. Determine la longitud de esta astroide, calculando la longitud de la mitad de la parte que está en el primer cuadrante, $y = \left(1 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{\sqrt{2}}{4} \le x \le 1$ y multiplique por 8.

8. Dadas las siguientes ecuaciones paramétricas con sus respectivos intervalos de parámetros del movimiento de una partícula en el plano xy se pide identificar la trayectoria de la partícula determinando una ecuación cartesiana para ello, y graficar la ecuación cartesiana e indicar la dirección del movimiento de la partícula.

   a) $x = 3t$, $y = 9t^2$, $-\infty < t < +\infty$; *b*) $x = -\sqrt{t}$, $y = t$, $t \ge 0$;
   c) $x = \dfrac{t}{t-1}$, $y = \dfrac{t-2}{t+1}$, $-1 < t < 1$; *d*) $x = 4\cos t$, $y = 2\sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$.

9. Una rueda de radio a gira sin patinarse a lo largo de una recta horizontal. Determine ecuaciones paramétricas para la curva que describe el punto P ubicado sobre un rayo de la rueda a b unidades del centro ($b \le a$). Como parámetro utilice el ángulo θ que gira la rueda. La curva se denomina *trocoide* y es una *cicloide* cuando $b = a$.

10. Obtenga el área bajo un arco de la cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

11. Obtenga las longitudes de las siguientes curvas:

    a)$x = \cos t$, $y = t + \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le \pi$; *b*)$x = t^3$, $y = \frac{3}{2}t^2$, $0 \le t \le \sqrt{3}$
    c)$x = \dfrac{t^2}{2}$, $y = \dfrac{(2t+1)^{\frac{3}{2}}}{3}$, $0 \le t \le 4$; *d*)$x = 8\cos t + 8t \operatorname{sen} t$, $y = 8 \operatorname{sen} t - 8t\cos t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$