PRÁCTICA 1: *Cardinalidad*

1. Mediante el uso de biyecciones apropiadas, demuestre cada uno de los siguientes ítems:
   (a) $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \bmod 2 = 0\}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.
   (b) $\mathbb{Z}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.
   (c) $A = \{1, 2, 3\}$ no es equipotente a $B = \{7\}$.
   (d) todos los intervalos reales cerrados y acotados son equipotentes entre sí.
   (e) $(-\infty, \infty)$ es equipotente a $(0, 1)$ y a $(0, \infty)$.
2. Sean A, B, C conjuntos cualesquiera. Mostrar que:
   (a) si $A \subseteq B$ entonces $card\,(A) \leq card\,(B)$.
   (b) $card\,(A - B) \leq card\,(A)$.
   (c) Si $A \subseteq B$, y A es infinito, entonces B es infinito.
   (d) Si $A \subseteq B$ y B es numerable, entonces A es numerable.
   (e) $card\,(A) = card\,(A \times \{b\})$ para cualquier b.
   (f) $card\,(A \times B \times C) = card\,(A \times (B \times C))$.
   (g) $card\,(A \times B) = card\,(B \times A)$.
   (h) si $card\,(B) \leq card\,(C)$ entonces $card\,(A \times B) \leq card\,(A \times C)$.
   (i) si $card\,(A) = n$ entonces $card\,(\mathcal{P}\,(A)) = 2^n$.
3. Demuestre las siguientes propiedades:
   (a) la relación $\sim$ es una relación de equivalencia.
   (b) la relación $\preceq$ es una relación de orden.
4. Mostrar que si $A \sim B$ y $C \sim D$ entonces $A \times C \sim B \times D$. ¿Vale la afirmación recíproca?
5. Demuestre que si $A \preceq B$ y $C \preceq D$, y además $B \cap D = \emptyset$, entonces $A \cup C \preceq B \cup D$.
6. Demuestre que $[0, 1]$ es equipotente a $[0, 1)$.

7. Mostrar que los siguientes conjuntos son infinito numerables:
   (a) $A = \left\{ \frac{\sqrt[m]{m}}{n^n} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$.
   (b) $B = \{$sucesiones de la forma $\langle s_0, s_0 + r, s_0 + 2r, \ldots, s_0 + nr, \ldots \rangle \mid s_0, r \in \mathbb{Z}\}$.
   (c) $C = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Z}, b > a\}$.

8. Sea P_i el conjunto de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado $i \in \mathbb{N}_0$. (Considere al polinomio nulo como un polinomio de grado 0).
   (a) Describa por comprensión los conjuntos P_0, P_3 y P_n.
   (b) Describa al conjunto P de todos los polinomios a coeficientes enteros de grado natural en términos de los conjuntos P_i.
   (c) Defina una función $f : P_i \to \mathbb{Z}^{i+1}$ inyectiva (demuéstrelo).
   (d) Valiéndose de todo lo anterior y de las propiedades de las relaciones $\preceq$ y $\sim$, demuestre que P es numerable.

9. Un número $r \in \mathbb{C}$ se dice algebraico sii es la solución de una ecuación polinómica a coeficientes enteros, es decir sii $a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots + a_n r^n = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ y $a_n \neq 0$. Probar que:
   (a) todo número racional es algebraico.
   (b) ¿Qué se puede concluir del ítem anterior con respecto a la cardinalidad del conjunto de los números algebraicos?
   (c) $\sqrt{2}$ es algebraico
   (d) i es algebraico.
   (e) el conjunto de los números algebraicos es numerable.

10. Los números que no son algebraicos se denominan trascendentes.
   (a) Teniendo como hipótesis que $\mathbb{C}$ no es numerable, probar que existen números trascendentes.
   (b) Probar que los números trascendentes no son numerables.

   Sugerencia: en ambos casos razonar por el absurdo y considerar a los números complejos como la unión de algebraicos y trascendentes.

11. Se sabe que $\aleph_0 < c$, donde $\aleph_0 = card\,(\mathbb{N})$ y $c = card\,(\mathbb{R})$. Pero... ¿existe un cardinal α tal que $\aleph_0 < \alpha < c$? Cantor, al no poder dar una respuesta a esta pregunta, conjetura la validez de la llamada hipótesis del continuo. Esta expresa que:

    no existe un cardinal α tal que $\aleph_0 < \alpha < c$.

    A partir de esto, al cardinal c se lo suele llamar también $\aleph_1$. Utilizando esta hipótesis, se pide demostrar el siguiente teorema:

$$card\,(A) = \aleph_0,\ card\,(B \cup A) = \aleph_1 \ \Rightarrow\ card\,(B) = \aleph_1$$

12. Sea Σ un conjunto finito de símbolos. Σ^* denota el conjunto de todas las cadenas (secuencias finitas y ordenadas de símbolos) sobre el alfabeto Σ.
    (a) ¿Cuántas cadenas se pueden construir sobre el alfabeto Σ?
    (b) Teniendo en cuenta que un lenguaje sobre Σ es un subconjunto de Σ^*, ¿cuántos lenguajes existen sobre el alfabeto Σ?

13. (a) Muestre que la cardinalidad de $\mathcal{P}\,(X)$ es igual a la cardinalidad del conjunto de todas las funciones de X en $\{0, 1\}$.
    (b) Pruebe que $card\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}) \le card\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$.
    (c) Concluya que $\aleph_0 < \mathcal{P}\,(\mathbb{N}) \le card\,(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$.
    (d) Todo programa de computadora puede ser considerado como una cadena sobre el alfabeto presente en el sistema. Por lo tanto, ¿cuántos programas se pueden escribir en una máquina?
    (e) ¿Qué conclusiones se pueden sacar a partir de los últimos dos ítems?