PRÁCTICA 3 - Límite y Continuidad - Parte 2

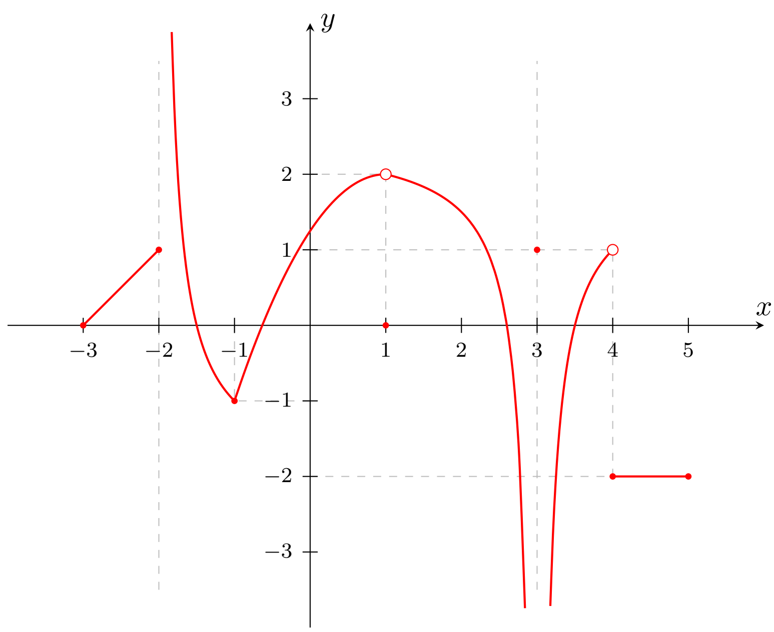
1. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ y $g(x) = x+3$.

   -a- ¿Es correcto decir que $f = g$?

   -b- ¿Cómo son los límites $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$? Justificar la respuesta.

   -c- Analizar la continuidad de las funciones f y g en el punto $x_0 = 2$.

2. Sea f una función definida en el intervalo $[-3, 5]$ y cuya representación gráfica es la siguiente:



   -a- Analizar la continuidad de f en los puntos $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$, $x = 4$ y $x = 5$.

   -b- En los puntos del ítem (a) donde f no es continua, determinar de qué tipo de discontinuidad se trata. Justificar.

3. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

   -a- $f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

   -b- $f_2(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 2 \\ 1+x & x > 2 \end{cases}$, $(x_0 = 2)$.

   -c- $f_3(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$, $(x_0 = -1)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

-d- $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ -5 & x = 3 \end{cases}$, $(x_0 = 3)$.

-e- $f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$, $(x_0 = 1)$.

-f- $f_6(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $(x_0 = 0)$.

4. Para cada función f_i del ejercicio 4 que tenga una discontinuidad evitable en el punto x_0 dado, dar una nueva función g de manera que $g(x) = f_i(x),\ \forall x \neq x_0$, y $g(x)$ sea continua en x_0.

5. Dar un ejemplo de una función cuyo dominio sea el intervalo cerrado $[0,1]$, que sea continua en el intervalo abierto $(0,1)$ pero no en su dominio.

6. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

-a- $f_1(x) = [x]$.

-b- $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+7x-4}{x+4} & \text{si } x \neq -4 \\ 3 & \text{si } x = -4 \end{cases}$.

-c- $f_3(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-6x+4}$.

-d- $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -5 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

-e- $f_5(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

7. Dadas las funciones

$$f_1(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, \qquad f_2(x) = \frac{|3-x|}{x-3}, \qquad f_3(x) = 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

determinar para cuáles de ellas se puede definir una función $F_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que coincida con f_i, es decir,

$$F_i(x) = f_i(x) \quad \forall\, x \in Dom(f_i),\ i = 1,2,3.$$

8. -a- Probar que si f es una función continua en el punto $x = a$, entonces la función $|f|$ también lo es.

   -b- Mostrar que la afirmación recíproca no es cierta. Es decir, si $|f|$ es continua en $x = a$, no necesariamente f lo es.

9. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h = f \circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

-a- $f(x) = x+1$, $g(x) = x^2 - x$.

-b- $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

-c- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

-d- $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

10. Sea la función g definida por $g(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

    -a- Determinar su dominio.

    -b- Trazar la gráfica de la función g.

    -c- Calcular $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$.

    -d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x=1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? En caso afirmativo, dar su ley.

11. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

12. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(ax^2) - b}{2x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

13. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

14. Dada la función $f : [-1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

analizar si el teorema de Bolzano asegura la existencia de un punto $c \in (-1, 4)$ tal que $f(c) = 0$.

15. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x \in \mathbb{R}$.

    -a- Demostrar que existe un número $c \in [n, n+1]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(c) = 0$.

    -b- Aproximar c con un error menor que $0{,}01$.

    -c- Probar que existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(\beta) = 20$.

16. Sea la función $f(x) = \tan(x)$.

    -a- Probar que $f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$.

    -b- A partir de la gráfica de la función f, analizar si existe $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ tal que $f(\alpha) = 0$.

    -c- Explicar los motivos por los cuales lo obtenido en los ítems anteriores no contradice al teorema de Bolzano.

17. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\cos x - \sqrt{x} = 0$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

18. Un **punto fijo** de una función f es un número $\xi \in$ *Dom*(f) tal que $f(\xi) = \xi$.

   -a- Representar gráficamente una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0,1]$ y determinar gráficamente si f tiene un punto fijo.

   -b- ¿Es posible trazar la gráfica de una función continua $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que su imagen está contenida en $[0,1]$ y que no tenga un punto fijo?

   -c- Demostrar que si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, tal que $\mathbf{Im}(f) \subseteq [0,1]$, entonces f tiene un punto fijo.
   Sugerencia: Aplicar el teorema de Bolzano a la función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, donde $g(x) = f(x) - x$.

19. Demostrar que si la función f es continua y no tiene ceros en el intervalo $[a,b]$ entonces $f(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$, o bien $f(x) < 0$ para todo $x \in [a,b]$.

20. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

   -a- $f_1(x) = 2x - 5,\ x \in \mathbb{R}.$

   -b- $f_2(x) = x^2 + 4,\ x \leq 0.$

   -c- $f_3 = 2x^3 - 5,\ x \in \mathbb{R}.$

   -d- $f_4(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119