Repaso de conceptos de teoría (ver bibliografía: Meyer)

Sea ε un experimento aleatorio y S el espacio muestral correspondiente, definimos una función X que asigna a cada uno de los elementos de $s \in$ S un único número real x=X(s). Llamaremos a X como *variable aleatoria*, y el conjunto de todos los valores posibles de X será el *recorrido* R_X.
Sea un suceso A ⊂ S y un suceso B ⊂ R_X, y si $\mathrm{A} = \{s \in \mathrm{S}/\mathrm{X}(s) \in \mathrm{B}\}$, decimos que A y B son *sucesos equivalentes*. Luego, como ya sabemos calcular la probabilidad P(A), y siendo que A y B son equivalentes, definimos a la probabilidad de B como P(B)=P(A).

Valores característicos
Esperanza matemática o valor esperado E(X)

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{\forall i} x_i \, \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i) = \sum_{\forall i} x_i \, \mathrm{p}(x_i)$$

Varianza V(X) y desvío estándar σ_X

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \mathrm{E}[(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X}))^2] = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \big(\mathrm{E}(\mathrm{X})\big)^2 = \sigma_{\mathrm{X}}^2$$

Propiedades
Si C es una constante, y X e Y variables aleatorias cualesquiera:

$E(C)=C$
$E(C\,X)=C\,E(X)$
$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$V(X+C)=V(X)$
$V(C\,X)=C^2\,V(X)$

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son variables aleatorias *independientes*:

$V(X_1+X_2+\ldots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\ldots+V(X_n)$

<u>Variables aleatorias discretas con distribuciones conocidas</u>

Experimento de Bernoulli: es un experimento aleatorio ε_B que tiene solamente dos resultados posibles, “éxito” y “no éxito”.
Si definimos el suceso D:”éxito”, la probabilidad de éxito será P(D)=p y la probabilidad del suceso complementario será P($\overline{\mathrm{D}}$)=1-p=q

Sea la variable aleatoria discreta X definida como

X:"cantidad de éxitos en una única repetición del experimento $\boldsymbol{\varepsilon}_B$"

Justificar

Definiendo el suceso D:"éxito", y siendo P(D)=*p* (y P($\overline{\mathrm{D}}$)=1-*p*=*q*)

X tendrá una distribución de Bernoulli de *parámetro p* y de denota como $\mathrm{X} \sim \mathrm{B_e}(p)$

Porque se puede tener 1 éxito o ninguno

El recorrido es R_X={0,1} o también puede expresarse como $x = 0,1$

y su función de probabilidad puntual P(X=*x*)=p_X(*x*) será

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \mathrm{p_X}(x) = p^x (1-p)^{1-x} = p^x \, q^{1-x} \quad \text{con } x = 0,1$$

No olvidar indicar R_X

E(X)=*p*
V(X)=*p q*=*p* (1-*p*)

Justificar ambos resultados

En esta unidad se estudiarán varias distribuciones de probabilidad basándonos en este tipo de experimentos $\boldsymbol{\varepsilon}_B$. Se sugiere completar la tabla disponible en el material de la unidad con la información de cada distribución estudiada.

En el desarrollo anterior se usaron dos notaciones posibles P(X=*x*) y p_X(*x*) para la función de probabilidad puntual. Lógicamente, con usar una de las notaciones será suficiente. Por el momento, las notaciones p_X(*x*) y p(*x*) son equivalentes porque nos referimos a una sola variable aleatoria X. **Prestar especial cuidado al uso de letras mayúsculas y minúsculas, *cursiva* e imprenta**. Recordar además que hay algunas hipótesis que deben cumplirse para considerar que una dada variable aleatoria tiene una distribución determinada.

Algunos ejercicios resueltos

Variables aleatorias discretas

Generalidades

1) Se arrojan en forma sucesiva dos dados. Sea X la suma de los números observados. Determine el recorrido de X y represente la función de probabilidad puntual y la distribución acumulada para la variable X. Calcule e interprete la esperanza matemática, varianza y desvío estándar de X.

Definimos nuestro experimento ε como

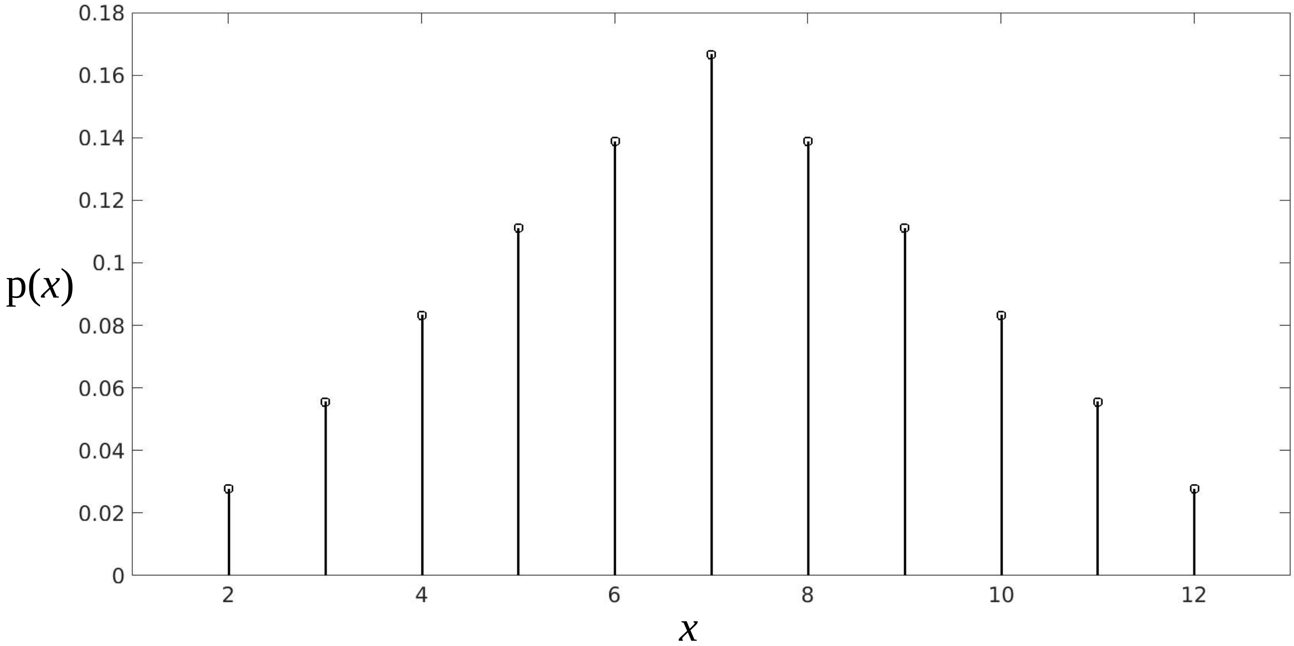
ε:"se arrojan dos dados y de registra el número de la cara superior"
El espacio muestral S está formado por todos los pares ordenados (m,n) donde 1≤m≤6 y 1≤n≤6, y #S=36.
Suponemos que los dados están equilibrados, por lo tanto todos los elementos de S son igualmente probables y esa probabilidad vale 1/36.

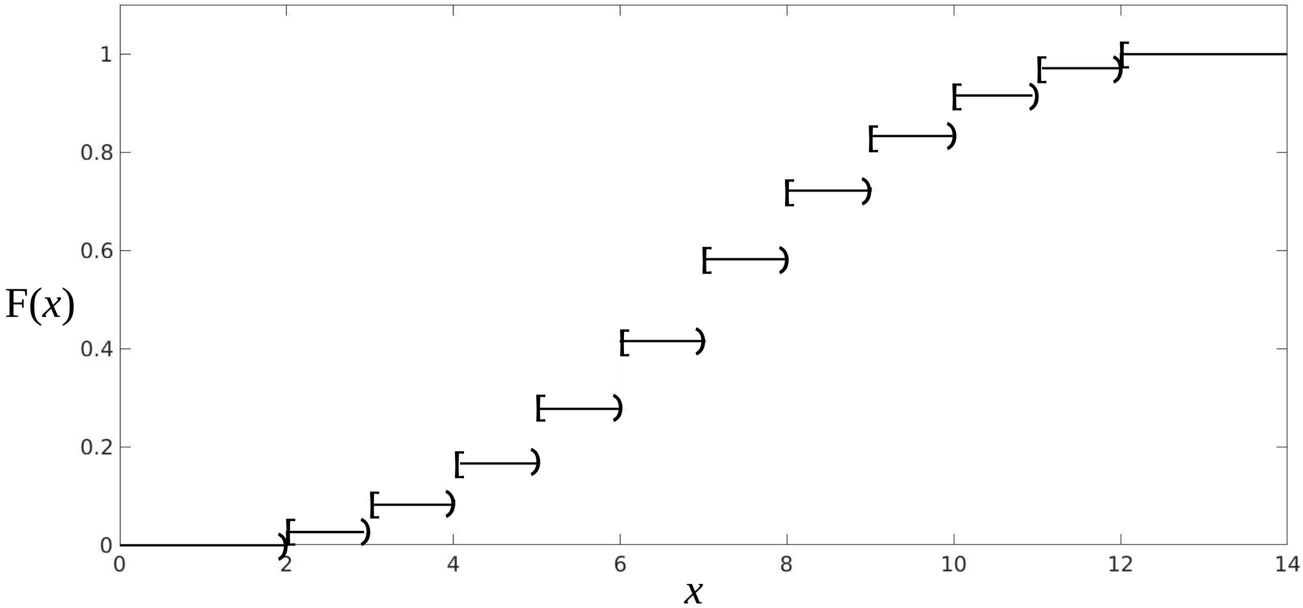
Luego, definimos una v.a. discreta: X:"suma de los números observados"
El recorrido es R_X={2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12} y también puede expresarse como $x = \overline{2{,}12}$ (que significa "x asume todos los valores posibles entre 2 y 12")

Armamos una tabla para obtener la función de probabilidad puntual P(X=*x*)=p(*x*) y la función de distribución acumulada P(X≤*x*)=F(*x*).

x	S						p(*x*)	F(*x*)
2	(1,1)						1/36	1/36
3	(1,2)	(2,1)					2/36	3/36
4	(1,3)	(2,2)	(3,1)				3/36	6/36
5	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)			4/36	10/36
6	(1,5)	(2,4)	(3,3)	(4,2)	(5,1)		5/36	15/36
7	(1,6)	(2,5)	(3,4)	(4,3)	(5,2)	(6,1)	6/36	21/36
8	(2,6)	(3,5)	(4,4)	(5,3)	(6,2)		5/36	26/36
9	(3,6)	(4,5)	(5,4)	(6,3)			4/36	30/36
10	(4,6)	(5,5)	(6,4)				3/36	33/36
11	(5,6)	(6,5)					2/36	35/36
12	(6,6)						1/36	1

Las gráficas de p(x) y F(x) son





Calculamos E(X) usando su definición:

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{\mathrm{R_X}} x_i\, \mathrm{p}(x_i) = \sum_{n=2}^{12} n\, \mathrm{p}(n) = 7$$

Desarrollar ambos resultados

$$\mathrm{E(X^2)} = \sum_{\mathrm{R_X}} x_i^2\, \mathrm{p}(x_i) = \sum_{n=2}^{12} n^2\, \mathrm{p}(n) = \frac{329}{6}$$

Notar que *n* representa cada uno de los valores posibles de X entre 2 y 12.
Luego, podemos calcular la varianza y el desvío como:

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - (\mathrm{E(X)})^2 = \frac{329}{6} - 7^2 = \cdots \qquad \sigma_\mathrm{X} = \sqrt{\mathrm{V(X)}} \cong 2{,}415$$

3) La siguiente tabla muestra la función de distribución acumulada de una variable aleatoria X

x	1	2	3	4
$P(X \leq x_i)=F(x_i)$	1/8	3/8	3/4	1

Determine:

a) la función de probabilidad puntual de X.

Calculamos la función de probabilidad puntual $P(X=x_i)=p(x_i)$ como

P(X=1)=p(1)=F(1)=1/8

p(2)=F(2)-F(1)=2/8=1/4

p(3)=F(3)-F(2)=3/8

p(4)=F(4)-F(3)=1/4

Podemos resumir los resultados en la tabla siguiente

x	1	2	3	4
$P(X=x_i)=p(x_i)$	1/8	1/4	3/8	1/4

b) P(1 ≤ X ≤ 3), P(X < 3) y P(X > 1,4).

Hay muchas formas de evaluar estas probabilidades

P(1 ≤ X ≤ 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=F(3)-F(1)+p(1)=…

P(X < 3)=P(X ≤ 2)=F(2)=…

P(X > 1,4)=p(2)+p(3)+p(4)=1-P(X ≤ 1)=…

c) Calcule e interprete la esperanza matemática, varianza y desvío estándar de X.

$$\mathrm{E(X)} = \sum_{i=1}^{4} x_i \, \mathrm{p}(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\mathrm{E(X^2)} = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 \, \mathrm{p}(x_i) = \frac{17}{2}$$

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E(X^2)} - [\mathrm{E(X)}]^2 = \frac{15}{16} \qquad \sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \cdots$$

E(X) representa …

σ_X representa la dispersión de los valores de X respecto de E(X).

Se debe resaltar que usamos la notación x_i para simbolizar un valor específico que puede asumir X (la variable aleatoria). Esta notación es necesaria cuando formulamos las ecuaciones para calcular E(X) y V(X). Vamos a ver que en el resto de la práctica usaremos también x para referirnos a un valor específico de X.

Algunas variables aleatorias discretas famosas

6) De un lote de 20 artículos 4 son defectuosos. Se eligen al azar 3 artículos. Sea X: "número de artículos defectuosos encontrados". Determine la distribución de X cuando los artículos se extraen con reposición y cuando se extraen sin reposición. En ambos casos calcular la función de probabilidad acumulada.

El problema nos pide analizar la cantidad de artículos defectuosos al hacer extracciones de un lote. Es decir, se hace una extracción y se analiza si el artículo es defectuoso o no, y luego se repite el experimento. El éxito del experimento es que el artículo extraído sea defectuoso.
La extracción con reposición significa que se devuelve el artículo extraído al lote cada vez que se repite el experimento.

Caso 1: extracción con reposición
Definimos suceso D:"artículo extraído es defectuoso"
P(D)=4/20=0,2=*p*
P($\overline{\text{D}}$)=0,8=*q*

Justificar

Definimos con mayor precisión la variable aleatoria
X:"número total de artículos defectuosos hallados al extraer 3 artículos al azar"

Suponiendo que cada extracción es independiente de las demás, podemos decir que X tiene una distribución Binomial de *parámetros* 3 y 1/5 y lo denotamos así X~Bi(3,1/5)

La función de probabilidad es

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\binom{3}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{3-x} \quad \text{con } x=\overline{0,3}$$

La función de distribución acumulada F(x)=P($\mathrm{X} \leq x$) resulta

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x)=\sum_{i=0}^{x}\binom{3}{i}\left(\frac{1}{5}\right)^{i}\left(\frac{4}{5}\right)^{3-i} \quad \text{con } x=\overline{0,3}$$

F(0)=p(0)=…
F(1)=p(0)+p(1)=…
F(2)=…
F(3)=…

Se puede resolver usando la tabla provista en el material de clase

El problema no lo pide, pero

$$\mathrm{E(X)} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}6 \qquad \mathrm{V(X)} = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = 0{,}48$$

Caso 2: extracción sin reposición
En este caso, P(D) variará en cada repetición del experimento, dependiendo de si encontramos o no un elemento defectuoso. Además, la cantidad de piezas del lote es comparable a la cantidad de extracciones.

Definimos con mayor precisión la variable aleatoria
X:"número total de artículos defectuosos hallados al extraer 3 artículos al azar de un total de 20 artículos"

Suponiendo que cada extracción es independiente de las demás, podemos decir X~Hi(20,4,3)
La función de probabilidad es

$$\mathrm{P(X} = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{20-4}{3-x}}{\binom{20}{3}} = \frac{\binom{4}{x}\binom{16}{3-x}}{\binom{20}{3}} \quad \text{con } x = \overline{0{,}3}$$

Nota: analizar P(X=*x*) en función de los conceptos del capítulo 3, es decir
-formas posibles de extraer 3 elementos de un total de 20 es $\binom{20}{3}$
-formas posibles de extraer *x* elementos defectuosos de un total de 4 defectuosos es …
- formas posibles de extraer 3-*x* elementos no defectuosos de un total de 16 no defectuosos es ….

La función de distribución acumulada F(*x*)=P($\mathrm{X} \leq x$) resulta

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{i=0}^{x} \frac{\binom{4}{i}\binom{16}{3-i}}{\binom{20}{3}} \quad \text{con } x = \overline{0{,}3}$$

F(0)=…
F(1)=…
F(2)=…
F(3)=…

Se debe usar la fórmula de p(*x*) porque no se dispone de tablas

El problema no lo pide, pero

$$\mathrm{E(X)} = 3 \cdot \frac{4}{20} = 3 \cdot \frac{1}{5} = 0{,}6$$

$$\mathrm{V(X)} = 3 \cdot \frac{4}{20} \cdot \frac{(20-4)}{20} \cdot \frac{(20-3)}{(20-1)} = 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{17}{19} = \cdots$$

Relacionar E(X) y V(X) de este caso con el anterior de este ejercicio.

8) Supongamos que un mecanismo es inspeccionado regularmente al finalizar cada día para chequear si aún funciona correctamente. Sea *p* la probabilidad del suceso "el mecanismo falla durante cualquier día dado". Considere la variable aleatoria X: "número de inspecciones necesarias para obtener la primera falla".

Suponemos que el estado de funcionamiento del mecanismo al hacer la inspección es independiente del estado encontrado en todas las otras inspecciones.

Sea el suceso F: "el mecanismo falla durante un día dado"
P(F)=*p* y P($\overline{\mathrm{F}}$)=1-*p*=*q*
a) Determine la distribución de probabilidades de X.
X: "número de inspecciones necesarias para obtener la primera falla"
X~Ge(*p*)

$$\mathrm{P(X} = x) = p\, q^{x-1} \qquad \text{con } x = 1, 2, \cdots$$

También podemos expresar el recorrido como $\mathrm{R_X} = \mathbb{N}$

b) Halle la probabilidad de que sean necesarios 5 días para encontrar la primera falla.

$$\mathrm{P(X = 5) = p(5)} = p\, q^{5-1} = p\, q^4$$

c) Halle *p* de modo que la probabilidad hallada en b) sea máxima.
Sabemos que p(5) es una función de *p*, por lo que el problema se reduce a encontrar el valor p_M que maximice la función *f*(*p*).
Se sugiere resolver el problema expresando p(5) como una función de *q*=1-*p*
Finalmente, resulta p_M=1/5

$$\text{Luego } \mathrm{P(X = 5)} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cong 0{,}082$$

El problema no lo pide, pero para el valor de *p* calculado

$$\mathrm{E(X)} = 5$$

$$\mathrm{V(X)} = \frac{4}{5} \cdot 5^2 = 20$$

9) Un “gran” lote de llantas para autos contiene el 20% de llantas defectuosas. De ese lote se seleccionarán 5 llantas para colocar en un auto.

Como disponemos de un “gran” lote de llantas, podemos decir que la proporción de llantas defectuosas se mantiene constante a pesar que el experimento sea sin reposición.
Sea el suceso D:”llanta defectuosa”
P(D)=0,2 y P($\overline{\mathrm{D}}$)=0,8

a) Calcule la probabilidad de que sea necesario seleccionar 8 llantas del lote para obtener 5 en buen estado.
Definimos la variable aleatoria
X:”número de llantas seleccionadas hasta obtener 5 llantas en buen estado”
X~Pa(5, 0,8)

$$\mathrm{P(X} = x) = \binom{x-1}{5-1}\ 0{,}8^5\ 0{,}2^{x-5} \qquad \mathrm{con}\ x = 5, 6, \cdots$$

P(X=8)=…

b) Calcule el número promedio de selecciones para obtener 5 llantas en buen estado.
Debemos calcular la esperanza

$$\mathrm{E(X)} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25$$

Luego, el número promedio de selecciones que debemos realizar para obtener 5 llantas en buen estado es 6,25. Debemos recordar que E(X) puede no ser un valor posible de la v.a. discreta X, como en este caso.
Luego, si repetimos el experimento un gran número de veces y calculamos el promedio del número de llantas seleccionadas, veremos que ese promedio se acerca al valor de E(X).

El problema no lo pide, pero

$$\mathrm{V(X)} = \frac{5 \cdot 0{,}2}{0{,}8^2} = \cdots$$

10) El número de moléculas que hay en 1 cm^3 de aire es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ=3.

En este problema se contabiliza el número de moléculas que hay en un volumen de 1cm^3 de aire. Esta cantidad de moléculas es una variable aleatoria y tiene una distribución de Poisson (del enunciado), con parámetro de valor 3.

Para resolver el problema, identificamos la variable aleatoria
X:"número de moléculas que hay en un volumen de 1 cm^3 de aire"

$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Po}(3)$ se lee "X tiene una distribución de Poisson de parámetro 3"

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=e^{-3}\frac{(3)^x}{x!} \quad \text{con } x=0,1,2,\cdots$$

E(X)=3 V(X)=3

a) Calcule la probabilidad de que en 1 cm^3 de aire no se encuentre ninguna molécula.
En este caso se pide calcular la probabilidad de X=0. Entonces

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=e^{-3}\frac{(3)^0}{0!}=0{,}0498$$

Este valor puede buscarse en la tabla correspondiente o se puede calcular directamente.

b) Calcule la probabilidad de que en 1 cm^3 de aire se encuentre a lo sumo dos moléculas.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 2)=\sum_{x=0}^{2} e^{-3}\frac{(3)^x}{x!}e^{-3}=0{,}0498+0{,}1494+0{,}2240=0{,}4232$$

c) ¿Cuál es el mínimo volumen de aire en el que la probabilidad de encontrar por lo menos una molécula es mayor o igual que 0,99?

Hasta ahora, el volumen en que se cuenta la cantidad de éxitos del experimento es fijo y vale 1 cm^3. Evaluemos la probabilidad de hallar al menos una molécula en 1 cm^3 de aire.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=1-0{,}0498=0{,}9502<0{,}99$$

Evidentemente, la variable X que está definida en 1 cm^3 no describe el experimento aleatorio al que se refiere este apartado. Para la resolución de este problema debemos recurrir a conceptos que se verán en la unidad 7.

11) Se sabe que el número de grietas que aparecen en una longitud dada de alambre sigue una ley de Poisson. ¿Qué valor debe tener el promedio de grietas en 4 metros, para que la probabilidad de encontrar al menos una grieta en 4 metros sea menor que 0,5?

Definimos una v.a. con distribución de Poisson (de acuerdo al enunciado)
X:"número de grietas que aparecen en una longitud de 4 metros"
$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Po}(\lambda)$ se lee "X tiene una distribución de Poisson de parámetro λ"

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^{x}}{x!} \quad \text{con } x=0,1,2,\cdots$$

Por propiedades de la distribución de Poisson, sabemos que
E(X)= λ y V(X)=..... Completar

Para calcular λ deberemos usar el segundo dato del enunciado.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)<0{,}5 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=1-e^{-\lambda}<0{,}5 \Longrightarrow \cdots \Rightarrow$$
$$\lambda<\ln 2\cong 0{,}6931$$

Luego, el promedio de grietas en 4 metros de alambre es menor a 0,6931.

12) El número de clientes que entran en un negocio en un intervalo de tiempo de 2 min es una v.a. de Poisson con esperanza igual a 1.

De acuerdo al enunciado, identificaremos
X:"número de clientes que entran al negocio en 2 minutos"
Como E(X)=1, el parámetro de la distribución de Poisson de X es 1.
Luego
$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Po}(1)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=e^{-1}\frac{(1)^{x}}{x!} \quad \text{con } x=0,1,2,\cdots$$

a) Calcule la probabilidad de que en un período de 2 minutos no ingresen clientes al negocio.

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=e^{-1}\cong 0{,}3679$ Se puede calcular usando la tabla provista

b) Se observa el número de clientes que ingresan al negocio durante 15 intervalos de 2 minutos. Calcule la probabilidad de que en a lo sumo 5 de esos intervalos no se registren ingresos.

Definimos el suceso C:"no ingresan clientes en un intervalo de 2 minutos"
$\mathrm{P(C)} = \mathrm{P(X = 0)} \cong 0{,}3679$

Luego, definimos la v.a. discreta Z como
Z:"número de intervalos de 2 minutos en los que no ingresan clientes de un total de 15 intervalos de 2 minutos observados"
Z~Bi(15, 0,3679)

La función de probabilidad es

$$\mathrm{P(Z} = z) = \binom{15}{z}\, 0{,}3679^{z}\, 0{,}6321^{15-z} \qquad \text{con } z = \overline{0{,}15}$$

La probabilidad de que en a lo sumo 5 de esos intervalos no se registren ingresos resulta

$$\mathrm{P(Z} \leq 5) = \sum_{z=0}^{5} \binom{15}{z}\, 0{,}3679^{z}\, 0{,}6321^{15-z} = \cdots$$

El problema no lo pide, pero
E(Z)=... V(Z)=...

Completar

13) El número de defectos en un rollo de alambre de 100 metros es una v.a. con distribución de Poisson de parámetro λ. La probabilidad de que un rollo de 100 metros de alambre tenga al menos un defecto es 0,4.

Como en el ejercicio anterior, definimos la vv.aa.
X:"número de defectos en 100 metros de alambre"

$$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Po}(\lambda)$$

$$\mathrm{P(X} = x) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^{x}}{x!} \qquad \text{con } x = 0, 1, 2, \cdots$$

E(X)= λ V(X)= λ

Para calcular λ deberemos usar el segundo dato del enunciado. Luego,

$$\mathrm{P(X} \geq 1) = 1 - \mathrm{P(X} = 0) = 0{,}4 \Rightarrow \mathrm{P(X} = 0) = e^{-\lambda}\frac{(\lambda)^{0}}{0!} = 0{,}6 \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$
$$\lambda \cong 0{,}5108$$

Completar

a) Calcule la probabilidad de que en 100 metros de alambre se encuentren a lo sumo 2 defectos.

Completar

$$P(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} P(X = k) = \sum_{k=0}^{2} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^k}{k!} = \cdots$$

Finalmente, la probabilidad de que en 100 metros de alambre se encuentren a lo sumo cuatro defectos es …

b) Calcule la probabilidad de que en 10 rollos de 100 metros de alambre c/u, haya a lo sumo uno con uno o más defectos.

Definimos el suceso D:"rollo de 100 m de alambre con al menos 1 defecto"
Claramente, de acuerdo con los datos del enunciado
P(D)=P(X≥1)=0,4

Luego, suponiendo que la fabricación de cada rollo es independiente de los demás, definimos la v.a. discreta Y con distribución binomial como
Y:"número de rollos de 100 m de alambre con al menos 1 defecto de un total de 10 rollos"

$$Y \backsim \mathrm{Bi}(10,\ 0{,}4)$$

$$P(Y = y) = \binom{10}{y} 0{,}4^{y}\ 0{,}6^{10-y} \qquad \text{con } y = \overline{0{,}10}$$

$$P(Y \leq 1) = P(Y = 0) + P(Y = 1) = 0{,}0436$$

Luego, la probabilidad de que en 10 rollos de 100 metros de alambre c/u, haya a lo sumo un rollo con uno o más defectos es 0,0436.

c) Calcule la esperanza matemática de la variable aleatoria "número de rollos de 100 metros entre los 10 rollos, que tienen al menos un defecto".

Claramente, el enunciado se refiere a la v.a. Y definida en el apartado anterior.
Luego:
E(Y)=10 * 0,4=4

Ejercicios adicionales

1) Una variable aleatoria X puede tomar cuatro valores: 0, 10, 20 o 30 con probabilidades (1+3a)/4, (1-a)/4, (1+2a)/4, (1-4a)/4, respectivamente.

De acuerdo al enunciado:
p(0)= (1+3a)/4
p(10)=(1-a)/4
p(20)= (1+2a)/4
p(30)= (1-4a)/4

a) Averigüe el o los valores de a para que ésta sea una distribución de probabilidades.
Para que p(*x*) sea una función de probabilidad puntual deben cumplirse

$0 \leq \mathrm{p}(x_i) \leq 1 \quad \text{para todo } i$

$$\sum_{i=1}^{4} \mathrm{p}(x_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{4} \mathrm{p}(x_i) = \frac{(1+3\mathrm{a}) + (1-\mathrm{a}) + (1+2\mathrm{a}) + (1-4\mathrm{a})}{4} = 1 \quad \text{para todo a} \in \mathbb{R}$$

Planteamos la condición $0 \leq \mathrm{p}(x_i) \leq 1 \quad \text{para todo } i$

$0 \leq \mathrm{p}(0) \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow -1/3 \leq \mathrm{a} \leq 1$
$0 \leq \mathrm{p}(10) \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow -3 \leq \mathrm{a} \leq 1$
$0 \leq \mathrm{p}(20) \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow -1/2 \leq \mathrm{a} \leq 3/2$
$0 \leq \mathrm{p}(30) \leq 1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow -3/4 \leq \mathrm{a} \leq 1/4$

Completar el cálculo

Calculando la intersección de cada uno de los intervalos hallado para a resulta:
$-1/3 \leq \mathrm{a} \leq 1/4$

b) Para los valores de a) hallados, obtenga la E(2X+1) y V(2X+1).
Aplicando propiedades de la esperanza y la varianza
E(2X+1)=E(2X)+1=2 E(X)+1= … = 31-45 a
V(2X+1)=V(2X)=4 V(X)=…=500-200 a-2025 a^2

Completar

5) En una fábrica dos máquinas producen el mismo artículo. La máquina A produce diariamente el doble de artículos que la máquina B. El 2% de los artículos producidos por la máquina A son defectuosos al igual que el 3% de los producidos

por B. Si se combina la producción diaria de ambas máquinas y luego se toman al azar 10 artículos. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar a lo sumo dos defectuosos?

Definimos una serie de variables aleatorias:
N:"cantidad total de artículos fabricados"
Na:"cantidad de artículos fabricados por la máquina A"
Nb:"cantidad de artículos fabricados por la máquina B"
R:"cantidad total de artículos defectuosos fabricados"
Ra:"cantidad total de artículos defectuosos fabricados por la máquina A"
Rb:"cantidad total de artículos defectuosos fabricados por la máquina B"

De los datos del problema, podemos calcular

Na=2 Nb (1)

De (1)

Ra=0,02 Na=0,02 . 2 Nb=0,04 Nb (2)

Rb=0,03 Nb (3)

De (1)

N=Na + Nb=2 Nb + Nb=3 Nb (4)

De (2) y (3)

R=Ra+Rb= 0,04 Nb + 0,03 Nb= 0,07 Nb (5)

Definimos el suceso D:"el artículo encontrado es defectuoso"

De (4) y (5)

$$P(D) = \frac{R}{N} = \frac{0{,}07\ \mathrm{Nb}}{3\ \mathrm{Nb}} = \frac{7}{300}$$

Consideramos que cada artículo fue fabricado independientemente del resto. Entonces, analizaremos la v.a. discreta
X:"número de artículos defectuosos en un grupo de 10 artículos"

Debemos tener en cuenta dos casos.
Caso 1: la cantidad total N de artículos producidos es suficientemente grande como para que P(D) no varíe apreciablemente (sería como extracción con reposición). Entonces, X tendrá una distribución binomial.

Caso 2: la cantidad total N de artículos producidos no es suficientemente grande (sería como extracción sin reposición). Entonces X tendrá una distribución hipergeométrica.

Completar la resolución del ejercicio para ambos casos.

6) Un sistema de protección está constituido por *n* radares que funcionan independientemente. La probabilidad de que un radar detecte un cohete que ingrese a la zona de protección es 0,9. ¿Cuál es el número de radares necesarios para que la probabilidad de detectar un cohete que ingrese a la zona de protección sea 0, 999?

Definimos el suceso
D:"radar detecta un cohete"
P(D)=0,9

Suponemos que los radares funcionan independientemente unos de otros.
Si tenemos un conjunto de *n* radares, habrá detección si al menos un radar detecta un cohete. Entonces, definimos la v.a. discreta
X:"número de radares que detectan un cohete de un total de *n* radares"
X~Bi(*n*, 0,9)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=\binom{n}{x}\ 0{,}9^{x}\ 0{,}1^{n-x} \qquad \text{con } x=\overline{0,n}$$

Como dijimos antes, habrá detección si al menos un radar detecta un cohete. Entonces, planteamos

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 1)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=0{,}999$$

De la igualdad anterior, despejamos el valor de *n* que se pide.

9) El número de artículos demandados durante una semana en un negocio es una v.a. de Poisson con parámetro 7. ¿Cuántos artículos debe tener dicho negocio al comenzar la semana, para satisfacer la demanda con probabilidad mayor o igual que 0,99?

Definimos la variable aleatoria
X:"número de artículos demandados en una semana"

$$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Po}(7)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x)=e^{-7}\,\frac{(7)^{x}}{x!} \quad \text{con } x=0,1,2,\cdots$$

Aunque el problema no lo pide: E(X)=7 V(X)=7

El problema pregunta el stock del artículo que debe tener el negocio al comenzar la semana para satisfacer la demanda.

Supongamos que el negocio tiene un stock de *k* artículos al comenzar la semana. Satisfacer la demanda con probabilidad mayor o igual que 0,99 significa que la demanda, representada por la v.a. X, debe ser menor o igual al stock *k*.
Es decir

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq k) = \sum_{x=0}^{k} e^{-7}\ \frac{7^x}{x!} \geq 0{,}99$$

Desarrollando la suma de la expresión anterior

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq k) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) \geq 0{,}99$$

El problema se resuelve usando la tabla de la distribución de Poisson, sumando hasta que la probabilidad sea mayor o igual que 0,99. De esta manera obtenemos el valor de *k*.

Finalmente, al inicio de la semana el negocio debe tener un stock de 14 artículos para satisfacer la demanda con una probabilidad mayor o igual a 0,99.

11) Una fábrica produce piezas de las cuales el 2% son defectuosas.
Definimos el suceso D:"la pieza es defectuosa"
De acuerdo al enunciado: P(D)=0,02

a) Calcule la probabilidad de que en un lote de 100 piezas no haya piezas defectuosas.
Suponiendo que la fabricación de una pieza es independiente de las demás, definimos la v.a.:
X:"número de piezas defectuosas en un lote de 100 piezas"

$$\mathrm{X} \backsim \mathrm{Bi}(100,\ 0{,}02)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=x) = \binom{100}{x}\ 0{,}02^x\ 0{,}98^{100-x} \qquad \text{con } x = \overline{0{,}100}$$

En este caso no podemos usar la tabla de la distribución Binomial. Luego, la probabilidad que no haya piezas defectuosas en un lote de 100 piezas es

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = \binom{100}{0}\ 0{,}02^0\ 0{,}98^{100} \cong 0{,}1326$$

b) Calcule la probabilidad de que en un lote de 100 piezas haya a lo sumo 3 piezas defectuosas.
En este caso, debemos usar la función de distribución acumulada para calcular P(X≤3)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{100}{x} 0{,}02^{x}\, 0{,}98^{100-x} \cong 0{,}859$$

Otra forma

Ahora resolveremos el problema usando la distribución de Poisson como una aproximación de la distribución binomial.
Para ello, supondremos que P(D) es un número suficientemente chico, y que el tamaño del lote es un número suficientemente grande.
Entonces, definimos una v.a.
Y:"número de piezas defectuosas en un lote de 100 piezas"

Aproximamos la distribución de Y con una distribución de Poisson

$$\mathrm{Y} \backsim \mathrm{Po}(2)$$

Notar que el parámetro usado es 100 * 0,02=2

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = y) = e^{-2}\frac{(2)^{y}}{y!} \quad \text{con } y = 0, 1, 2, \cdots$$

a)

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} = 0) = e^{-2}\frac{(2)^{0}}{0!} \cong 0{,}1353$$

Usando la tabla de la distribución de Poisson

b)

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq 3) = \sum_{y=0}^{3} \mathrm{P}(\mathrm{Y} = y) = \sum_{y=0}^{3} e^{-2}\frac{(2)^{y}}{y!} \cong 0{,}8571$$