PRÁCTICA 3 - Límite y Continuidad - Parte 1

Límite

1. Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   (a) $|x-3| < 2 \Rightarrow |x| < 5.$

   (b) $|x-3| < \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|} < 2.$

2. (a) En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \epsilon$$

   Siendo $f(x) = 2 - 3x$, para los siguientes valores: $a = -1$, $c = 5$ y $\epsilon = 0{,}1$

   (b) Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

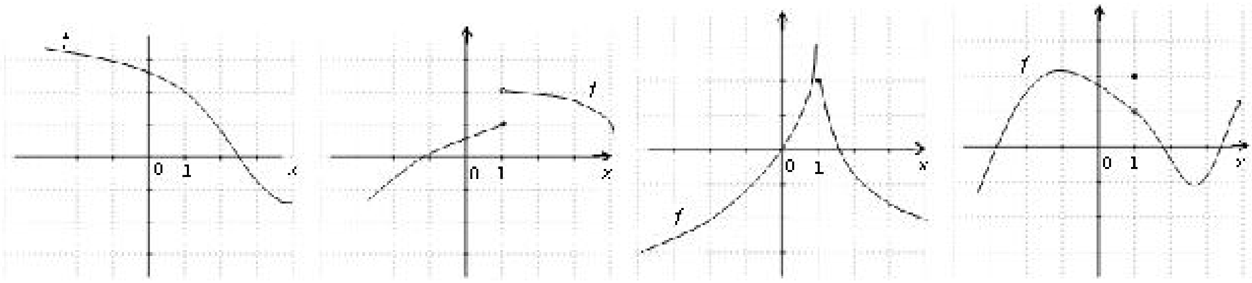
3. Utilizando la representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$,

   (a) explicitar el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |f(x) - 1| < 1/2\}$.

   (b) determinar un número $\delta > 0$, tal que $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 1| < 1/2$.

   (c) comprobar analíticamente la validez de la afirmación anterior.

4. Resolver para cada una de las funciones cuyas gráficas se esbozan a continuación, lo que se pide en cada item.



   (a) Analizar la existencia del límite $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = L$.

   (b) En caso de una respuesta afirmativa en -a-, representar el número L sobre el eje de las ordenadas y, en caso de una respuesta negativa, explicar las razones de la misma.

5. (a) Si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$, ¿debería estar definida f en $x = 1$? Si fuera así, ¿debe ser $f(1) = 3$? Justificar la respuesta.

   (b) Si $g(0) = 5$, ¿debería existir $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$? Si fuera así, ¿debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 5$? Justificar la respuesta.

   (c) Representar gráficamente tres funciones que carezcan, por razones diferentes, de límite en el punto $x = 0$.

6. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ se considera la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 2 & \text{si } x < -1, \\ ax + b & \text{si } |x| \leq 1, \\ -x^2 + 4x - 6 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

   (a) Representar gráficamente la función h para $x < -1$ y $x > 1$.
   (b) A partir de la gráfica obtenida, determinar a y b de manera que existan $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$.

7. Para cada una de las siguientes funciones determinar su dominio y su gráfica. A partir de la gráfica indicar el valor de cada límite.

   (a) $f_1(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 1} f_1(x)$.
   (b) $f_2(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$, $\lim\limits_{x\to 1} f_2(x)$.
   (c) $f_3(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$, $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$
   (d) $f_4(x) = \dfrac{\ln x^4 - \ln x^2 - \ln x}{\ln x^3}$, $\lim\limits_{x\to 1} f_4(x)$.

8. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} (9 - x) = 5$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8}{x} = 2$.

Cálculo de límites

9. Calcular los siguientes límites, indicando en cada caso las propiedades aplicadas.

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} \left(5x^2 - 2x + 3\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x + 2}{x^4 - x + 5}$.

10. Sabiendo que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 6$$

   determinar, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) + h(x))$.
   (b) $\lim\limits_{x\to a} (g(x) \cdot h(x))$.
   (c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2g(x)}{f(x) - h(x)}$.
   (d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

11. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 4} (3x - 2)$.
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} 3\sqrt{x^2 + 9}$.
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3x}{x^3 - 4x}$.
   (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x + 14} - 4}{x - 2}$.
   (e) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan(x) + x}{4}$.
   (f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}{\tan(x) - 1}$.
   (g) $\lim\limits_{y\to 2} \dfrac{y^2 - 4}{2 - y}$.
   (h) $\lim\limits_{v\to 1} \dfrac{v^4 - 1}{v^3 - 1}$.
   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x + \operatorname{sen} x}{3\cos x}$.
   (j) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\ln(x^2 + 4x + 4)}{\ln(x + 2)}$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

12. Analizar :

    (a) Si no existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$?, ¿o puede existir $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$?
    (b) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$, ¿debe existir $\lim_{x\to a} g(x)$?
    (c) Si existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$, ¿se sigue de ello que existe $\lim_{x\to a} g(x)$?

13. (a) Si $2-x^2 \le f(x) \le 2\cos x$ para todo x, determinar $\lim_{x\to 0} f(x)$.
    (b) Si $g(x) \le f(x) \le h(x)$ para todo $x \neq 2$ y $\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} h(x) = -5$. ¿Se puede concluir algo acerca de los valores de f, g y h en $x=2$? ¿Es posible que $f(2)=0$? ¿Es posible que $\lim_{x\to 2} f(x) = 0$? Justificar las respuestas.

14. (a) Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, demostrar la siguiente proposición:

    Si $f(x)\neq 0$ en un entorno reducido del punto a y $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces
    $$\lim_{x\to a}\frac{\operatorname{sen}(f(x))}{f(x)} = 1.$$
    (b) Utilizando el resultado del ítem anterior, calcular los siguientes límites.

    I. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{5x}$.
    II. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{x}$.
    III. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{sen} bx}$.
    IV. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.
    V. $\lim_{x\to 0} 6x^2\cot(x)\csc(2x)$.
    VI. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$.
    VII. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\csc(2x)}{\cos(3x)}$.
    VIII. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x + 2x}{x+x^2}$.
    IX. $\lim_{h\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$.

15. Utilizar las definiciones formales para probar los siguientes límites.

    (a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x} = +\infty$.
    (b) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty$.

16. Calcular los siguientes límites laterales:

    (a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x}$.
    (b) $\lim_{x\to 0^-}(1+\csc(x))$.
    (c) $\lim_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|2-x|}$.
    (d) $\lim_{x\to -2^+}(x+4)\dfrac{|x+2|}{x+2}$.
    (e) $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\cos\left(\dfrac{2}{x}\right)$.
    (f) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{\sqrt{x}(x-1)}{|1-x|}$.

17. Calcular los siguientes límites:

    (a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-1}{x}$.
    (b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-1}{x^2(x+3)}$.

18. Dada la función
$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^2 & \text{si } x \ge 2,\\ \lambda x - 4 & \text{si } x < 2,\end{cases}$$
    determinar el número real λ tal que exista $\lim_{x\to 2} g(x)$.

19. Utilizando el Teorema de Intercalación del Límite, calcular:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos 3x}{x}$.

20. (a) Demostrar que, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$.

    (b) Dada la función polinómica $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = +\infty.$$

Sugerencia: Reescriba a la función polinómica p como $p(x) = x^n(1 + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots + a_1\frac{1}{x^{n-1}} + a_0\frac{1}{x^n})$.

    (c) Mostrar que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1x + b_0} = \begin{cases} +\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m > 0, \\ -\infty & \text{si } m < n,\ a_n\, b_m < 0, \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } \ m > n. \end{cases}$$

21. Calcular los siguientes límites en el infinito.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{10x^6 + x^3 + 5}{x^4 + 10}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4 - x + 1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2+3}}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{9x^4 + x}{3x^4 + 5x^3 - 4x^2 - x + 2}$.

En los ejercicios siguientes se utilizan algunos de estos conceptos.

Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a. La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$.

(e) $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$.

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si se cumple cualquiera de las dos condiciones siguientes: (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ o (ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$, la recta $y = mx + b$ se llama **asíntota oblicua o inclinada** de la curva $y = f(x)$ porque la distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como se observa en la Figura 1. Se presenta un caso semejante si se hace $x \to -\infty$.

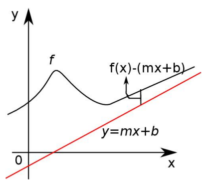


Figura 1: Asíntota oblícua

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

22. En cada uno de los siguientes ítems, determinar una función que satisfaga las condiciones indicadas. Elaborar un bosquejo de su gráfica.

    (a) $f(2) = 1$, $f(-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

    (b) $g(0) = 0$, $g(1) = 2$, $g(-1) = -2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

    (c) $h(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = -2$.

    (d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} k(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} k(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-} k(x) = 2$.

    (e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3^+} p(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 3^-} p(x) = -\infty$.

    Aclaración: En general las respuestas no son únicas; cualquier función que cumpla con las condiciones es aceptable. Se puede utilizar funciones definidas por partes, si esto ayuda.

23. Si f y g son funciones polinómicas tales que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)/g(x)) = 2$. ¿Qué se puede concluir sobre $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)/g(x))$? Fundamentar la respuesta.

24. Si f y g son funciones polinómicas con $g(x)$ tal que nunca es cero, ¿la gráfica de $f(x)/g(x)$ puede tener una asíntota vertical? Fundamentar la respuesta.

25. La gráfica de una función racional, ¿cuántas asíntotas horizontales puede tener? Justificar la respuesta.

26. Determinar algebraicamente los siguientes límites:

    (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4}\right)$.

    (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{9x^2 - x} - 3x}$.

    (c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x + \sqrt{x^2 + x}}$.

    (d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$.

Sea f una función racional tal que el grado del numerador es igual al grado del denominador mas 1. Al dividir el numerador por el denominador podemos reescribir a la función racional f como una función lineal, más un residuo que tiende a cero cuando $x \to \pm\infty$. Entonces **la gráfica de f tiene una asíntota oblicua**.

Por ejemplo, si se quiere determinar la asíntota oblicua de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$, se efectúa la división de polinomios para obtener, gracias al algoritmo del cociente, que

$$f(x) = \underbrace{\left(\frac{x}{2} + 1\right)}_{\textit{término lineal}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x - 4}\right)}_{\textit{residuo}}.$$

Cuando $x \to \pm\infty$, el residuo (cuya magnitud indica la distancia vertical que hay entre las gráficas de f y la del término lineal) tiende a cero. Por lo tanto, la recta $y = \dfrac{x}{2} + 1$ resulta ser una asíntota de la gráfica de f, tanto por derecha, si $t \to +\infty$, como por izquierda, si $t \to -\infty$.

27. Hallar las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$.

    (b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$.

    (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$.

    (d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$.

(a) Si se quisiera graficar estas funciones, ¿es posible que aparezcan otro tipo de asíntotas en ellas (verticales, horizontales)? ¿Por qué?

(b) Realizar un bosquejo de la gráfica de cada una de las funciones.

28. ¿Es la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ una función racional? ¿Tiene asíntota oblicua?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119