Unidad 3 – Límite y Continuidad

1. Límite Finito en un Punto

La idea de límite aparece en muchas situaciones. Por ejemplo, en geometría elemental, se define la longitud de una circunferencia como el límite al que tiende la longitud de la sucesión de polígonos regulares inscriptos en ella, de una cantidad de lados cada vez más grande. La misma idea es utilizada para definir el área de círculos.
En Física, para definir a la velocidad instantánea, se recurre al límite de la velocidad media, cuando el intervalo de tiempo considerado se hace cada vez menor.
Estas ideas pueden hacerse precisas cuando se ”entienden” los conceptos de límites de funciones de variable real. Comenzaremos ahora a estudiar límites de funciones.

1.1. Distancia de Puntos y Entornos

Como adelantamos, nos interesa ver en qué condiciones los valores de una función real se ”aproximan” a un número determinado, a medida que los valores de la variable independiente se ”aproximan” a un valor determinado en el dominio.
Para eso entonces, necesitamos contar con algún elemento que nos permita hablar de a qué distancia se encuentran elementos, tanto del dominio de la función, como de su recorrido.
Teniendo siempre en cuenta la representación de los números reales en la recta numérica, en todo momento será indistinto hablar del *número* x o del *punto* x. Así, como tanto el dominio como el recorrido de las funciones son subconjuntos de $\mathbb{R}$, recurriremos al valor absoluto para cuantificar la distancia en que se encuentran dos puntos, recordando que, para $x, y \in \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|$$

Definición. Llamamos *entorno* (o *entorno abierto*) de un número real a, de radio δ, al intervalo abierto $(a-\delta, a+\delta)$, y lo notamos por $E(a,\delta)$. Esto es,

$$\begin{aligned} E(a,\delta) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a-\delta < x < a+\delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, -\delta < x-a < \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \delta\}\ . \end{aligned}$$

Además, llamamos *entorno reducido* del punto a y de radio δ, al conjunto $E(a,\delta) - \{a\}$, y lo notamos por $E'(a,\delta)$. Esto es,

$$\begin{aligned} E'(a,\delta) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-a| < \delta \text{ y } x \neq a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < |x-a| < \delta\} \end{aligned}$$

El entorno del punto a y radio δ es el conjunto de números reales (puntos) x, cuya distancia al número (punto) a es menos que δ. En el entorno reducido, se excluye al número a. Por eso, es el entorno de números a distancia de a menor a δ, y mayor a 0.

Nota. Sean a un número real y dos números reales positivos δ_1 y δ_2. Entonces, si δ es un número positivo tal que $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene

$$E(a,\delta) \;\subseteq\; E(a,\delta_1) \cap E(a,\delta_2) \ ,$$

y

$$E'(a,\delta) \;\subseteq\; E'(a,\delta_1) \cap E'(a,\delta_2) \ .$$

En efecto,

$$|x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |x-a| < \delta_1 \text{ y } |x-a| < \delta_2 \ ,$$

y

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; 0 < |x-a| < \delta_1 \text{ y } 0 < |x-a| < \delta_2 \ .$$

Más adelante esta observación nos permitirá asegurar que, si una propiedad se cumple en un $E(a,\delta_1)$ y otra en un $E(a,\delta_2)$, entonces, ambas simultáneamente, se cumplen en cualquier $E(a,\delta)$, para cualquier $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Lo propio para entornos reducidos.

1.2. Definición de Límite Finito en un Punto

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \neq 3 \\ 4 & \text{si } x = 3 \end{cases} \ .$$

El gráfico de la función f se muestra en la Figura 1. En él podemos observar que los valores de la función f se acercan al número 5, cuando los valores de x se acercan a 3.

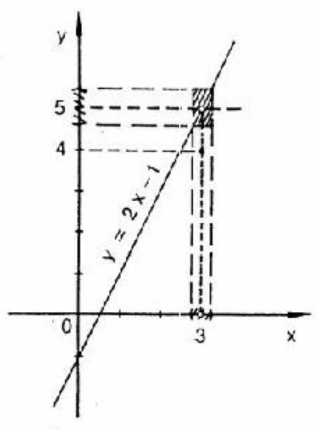


Figura 1: Gráfico de f

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Si se desea, por ejemplo, que la distancia entre los valores de la función $f(x)$ y el número 5, sea menor que 0.0001, basta considerar las siguientes proposiciones:

$$|f(x)-5|<0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |(2x-1)-5|<0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |2x-6|<0{,}0001$$
$$\Leftrightarrow |2(x-3)|<0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; 2|x-3|<0{,}0001 \;\Leftrightarrow\; |x-3|<0{,}00005$$

y concluir que, si

$$0<|x-3|<0{,}00005 \;\Rightarrow\; |f(x)-5| \;<\; 0,0001\ .$$

Dicho de otra forma, para valores de x dentro del entorno reducido de 3 y radio $0{,}00005$, los valores correspondientes de $f(x)$ se encuentran en el entorno de 5 y radio $0{,}0001$. Notemos que primero elegimos el número $0{,}0001$ y a partir de él obtuvimos el número $0{,}00005$.
En general, para cualquier $\varepsilon>0$, basta considerar $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, para asegurarnos de obtener valores de $f(x)$ a distancia menor que ε del número 5, siempre que se consideren valores de x a distancia menor que δ del número 3 (excluyendo al propio 3). En efecto,

$$0<|x-a|<\frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x-6|<\varepsilon \Leftrightarrow |(2x-1)-5|<\varepsilon \Leftrightarrow |f(x)-5|<\varepsilon.$$

Para indicar que los valores de la función $f(x)$ se aproximan a 5, cuando los valores de x se aproximan a 3, se utiliza el símbolo

$$\lim_{x\to 3}\ f(x)=5\ ,$$

que en el caso descripto queda

$$\lim_{x\to 3}\ 2x-1=5\ .$$

Definición. Dada una función real f y un número real a, de manera que f está definida en un entorno reducido del punto a, decimos que un valor ℓ es el límite de la función f, cuando la variable independiente tiende al valor a, y notamos con el símbolo

$$\lim_{x\to a}\ f(x)=\ell\ ,$$

si, para cualquier valor $\varepsilon>0$, prefijado, existe un número positivo δ, tal que,

$$0<|x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell|<\varepsilon\ .$$

En términos de entornos, si

$$x\in E'(a,\delta) \;\Rightarrow\; f(x)\in E(\ell,\varepsilon)\ .$$

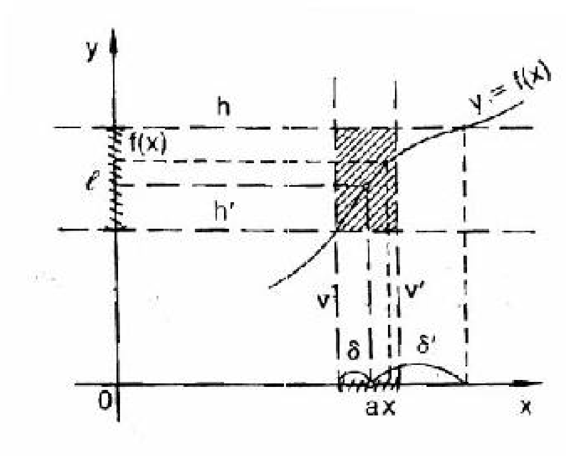


Figura 2: Relación ϵ - δ

En la Figura 2 se ilustran los elementos mencionados en la definición de límite.
En forma proposicional,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \ \exists \delta > 0 \ / \ \forall x \ : \ \ (\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon) \ .$$

Nota. No se exige que el número a esté en el dominio de la función f. Sí que la función f esté definida en un entorno reducido del punto a.

Nota. Las siguientes expresiones son equivalentes.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ , \quad \lim_{x \to 0} f(x + a) = \ell \ , \quad \lim_{x \to a} f(x) - \ell = 0 \ .$$

Se puede mostrar a partir de la definición de límite.

Nota. Observemos que, para una misma función, el número δ, en general depende tanto del valor ε, como del punto a. Además, si en un punto a, para un ε, un número δ satisface la definición de límite, entonces, cualquier $\delta' < \delta$, también es válido. Y por otro lado, si un valor δ es útil para un ε, también es útil para un $\varepsilon' > \varepsilon$.
En efecto, para tales δ', δ, ε y ε'

$$0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon < \varepsilon' \ .$$

La idea es, tomar ε tan chico como se quiera, o sea, *arbitrariamente chico*.

1.3. Algunos Límites Finitos

Apelando a la noción de cercanía de los valores de las funciones al valor límite, utilicemos la definición anterior para probar algunos límites de funciones elementales.

Ejemplo (La función constante)**.** $f(x) = c \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to a} c = c \ .$$

En efecto, para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $\delta > 0$, se verifica que $0 < |x - a| < \delta$ implica

$$|f(x) - c| \ = \ |c - c| \ = \ 0 \ < \ \varepsilon \ .$$

Ejemplo (La función lineal)**.** $f(x) = mx + h$ con $m \neq 0$.

$$\lim_{x \to a} \ (mx + h) = ma + h \ .$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $|f(x) - \ell| \ = \ |(mx + h) - (ma + h)| \ = \ |mx + h - ma - h| \ = |m(x - a)| \ = |m||x - a|$, basta considerar $\delta < \frac{\varepsilon}{|m|}$ y así,

$$0 < |x - a| < \delta < \frac{\varepsilon}{|m|} \ \Rightarrow \ |mx + h - (ma + h)| = |m||x - a| < \varepsilon \ .$$

Ejemplo. En particular si consideramos $f(x) = 3x + 1$.

$$\lim_{x \to 2} \ 3x + 1 = 7 \ .$$

En efecto, notemos que en este caso,

$$|f(x) - \ell| \ = \ |(3x + 1) - 7| \ = \ |3x - 6| \ = |3(x - 2)| \ = 3|x - 2|.$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$, si elegimos $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$ y x es tal que $0 < |x - 2| < \delta < \frac{\varepsilon}{3}$, será

$$|f(x) - \ell| \ = \ 3|x - 2| \ < \ 3\frac{\varepsilon}{3} \ = \ \varepsilon \ .$$

Ejemplo (La función cuadrática)**.**

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9 \ .$$

En efecto

$$|x^2 - \ell| \ = \ |x^2 - 9| \ = \ |(x - 3)(x + 3)| \ = |x - 3| \ |x + 3| \ .$$

Supongamos que elegimos $\delta = 1$, y sea x tal que $|x - 3| < \delta = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} |x - 3| \ &< \ \delta \ \Rightarrow \ -1 < x - 3 < 1 \\ &\Rightarrow \ 2 < x < 4 \ \Rightarrow \ 5 < x + 3 < 7 \\ &\Rightarrow \ |x + 3| < 7 \ . \end{aligned}$$

Entonces, eligiendo $\delta \leq \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$, se tiene $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{7}$ y $|x + 3| < 7$, y entonces

$$|x^2 - 9| \ = \ |x - 3| \ |x + 3| \ < \ |x - 3| \cdot 7 \ < \ \delta \cdot 7 \ < \ \frac{\varepsilon}{7} \cdot 7 \ = \ \varepsilon \ .$$

Más aún, para cualquier número real a,

$$\lim_{x \to a} \ x^2 = a^2 \ .$$

Esta última afirmación más general se propone como ejercicio.

Ejemplo (La función recíproca).
$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$
En efecto, comencemos observando que
$$|f(x)-\ell| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2-x}{2x}\right| = \frac{|x-2|}{|2x|}\ .$$
En este caso, si elegimos $\delta = 1$, tenemos que
$$\begin{aligned} |x-2| &< \delta \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \\ &\Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow 2 < 2x < 6 \\ &\Rightarrow |2x| > 2\ . \end{aligned}$$

Entonces, en este caso, dado $\varepsilon > 0$, eligiendo $\delta \leq \min\{1, 2\varepsilon\}$, se tiene que $|x-2| < 2\varepsilon$ y $|2x| > 2$,y en consecuencia
$$|f(x)-\ell| = \frac{|x-2|}{|2x|} < \frac{|x-2|}{2} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

Más aún, si $a \neq 0$,
$$\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}\ .$$
Esta última afirmación es un poco más complicada que las anteriores y nuevamente se propone como ejercicio.

Luego, como consecuencia de un teorema que demostraremos, concluiremos que la función recíproca no tiene límite (finito) en el punto 0. (Ver la sección 3).

1.4. Unicidad del Límite

Teorema 1 (Unicidad del límite). *Sea f una función real definida en un entorno reducido del punto a y sean ℓ_1 y ℓ_2 dos números reales tales que*
$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell_2\ ,$$
entonces se verifica que $\ell_1 = \ell_2$.

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, (cuya existencia garantizamos por ser ℓ_1 y ℓ_2 límites de la función en el punto a) tales que
$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-\ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2}\ .$$
Entonces, si consideramos $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y consideramos cualquier $x \in E'(a,\delta)$, tendremos
$$|\ell_1-\ell_2| = |\ell_1 - f(x) + f(x) - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x)-\ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$
De la arbitrariedad de ε, por consecuencia de la Propiedad Arquimedeana, surge
$$|\ell_1-\ell_2| = 0 \implies \ell_1 = \ell_2\ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Q.E.D.

Observación. Propiedad Arquimediana: dados $x, y \in \mathbb{R},\ z > 0$ si para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $x \leq y < x + \frac{z}{n} \Rightarrow x = y$. En particular, para $x = 0$, $y = |l_1 - l_2|$, $z = 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

1.5. No Existencia de Límite

Recordemos la forma proposicional de la definición de límite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \ \exists \delta > 0\ /\ \forall x\ :\ \ (0 < |x - a| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon)\ ,$$

y neguemos esta última proposición para afirmar que un valor ℓ **no** es límite de la función f en el punto a.

$$\exists \varepsilon > 0\ /\ \forall \delta > 0\ ,\ \exists x\ :\ \ (\ 0 < |x - a| < \delta\quad \text{y}\quad |f(x) - \ell| \geq \varepsilon\ )\ .$$

Ejemplo. Consideremos la función *signo*

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x)\ =\ \frac{x}{|x|}\ =\ \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}\ .$$

La función f no tiene límite en el punto $a = 0$.
Notemos que el motivo de esto **no** es que la función no está definida en 0, pues la condición de existencia de límite en el punto 0 no exige que este valor esté en el dominio de f. Mostraremos esto en dos partes. En una primera etapa probaremos que $\ell = 1$ no es límite de la función en el punto 0, y luego que ningún otro número real $\ell \neq 1$ lo es.
Para mostrar que $\ell = 1$ no es el límite buscado, consideremos un entorno de 1 de radio $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Aquí, en cualquier entorno reducido del punto 0, existen puntos a la izquierda de 0, para los cuales se tiene $f(x) = -1$, y luego, para ellos,

$$|f(x) - \ell|\ =\ 2\ \geq \frac{1}{2}\ ,$$

y entonces $\ell = 1$ no puede ser límite de la función en el punto 0. Ver parte izquierda de la Figura 3.
Para mostrar que ningún $\ell \neq 1$ es límite, consideremos $\varepsilon = \frac{|1-\ell|}{2} > 0$, pues $\ell \neq 1$. Observemos en este caso que en cualquier entorno reducido de 0 existen puntos a su derecha, para los cuales

$$|f(x) - \ell|\ =\ |1 - \ell|\ >\ \frac{|1 - \ell|}{2}\ =\ \varepsilon\ .$$

Ver la parte derecha de la Figura 3.
Luego, la función f no admite a ningún número real como límite de la función en el punto 0.

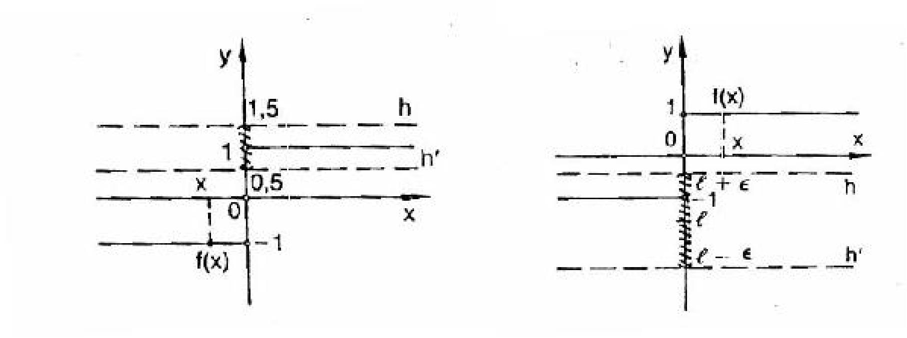


Figura 3: No existencia de límite

1.6. Límites Laterales

Hasta ahora al hablar de límite en el punto a hemos considerado puntos próximos a éste a ambos lados. Es decir, números reales en un entorno reducido del punto a, a la izquierda y a la derecha. En ocasiones interesa sólo el comportamiento de la función en puntos del dominio a un solo lado de un punto dado.
Por ejemplo, para la función f de la parte anterior hemos probado que no existe límite finito en el punto $a = 0$. Sin embargo, puede pensarse en el comportamiento de la función en el conjunto de los números reales positivos, a la derecha del punto 0, exclusivamente. A la derecha de 0, para cualquier x próximo a 0, se satisface la definición de límite con el número $\ell = 1$. Se dice en esta situación que la función tiene límite 1 a la derecha de 0, y se nota

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \ .$$

De forma similar, si se consideran puntos negativos, la función tiene límite -1 a la izquierda de 0, y en este caso se nota

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \ .$$

Definición (Límites laterales)**.**

1. Se dice que un número ℓ es el límite por derecha de la función f en el punto a, y se nota
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell \ ,$$
si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que
$$a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

2. Se dice que un número ℓ es el límite por izquierda de la función f en el punto a, y se nota
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell \ ,$$
si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que
$$a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

A los límites anteriores se los conoce como límites laterales de la función en el punto a.

Ejemplo. 1) $\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2 = 1$, 2) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$, 3) $\lim\limits_{x\to 2^-} [x] = 1$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} [x] = 2$.

Proposición 1. *Sean a un número real y f una función. Entonces, existe el límite*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ ,$$

si y solamente si, existen los límites laterales, y ambos valen ℓ. Esto es, si y sólo si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \ .$$

Demostración: $\Rightarrow$) Si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ ,$$

entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

Pero entonces, para ese δ, si x verifica

$$a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

y

$$a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

con lo que se verifican las afirmaciones para los límites laterales

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \ .$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si valen

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell \ ,$$

entonces, para $\varepsilon > 0$, existen δ_1 y δ_2 tales que

$$a - \delta_1 < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \quad \text{y} \quad a < x < a + \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$,

$$a - \delta \ > \ a - \delta_1 \quad \text{y} \quad a + \delta \ < \ a + \delta_2$$

y se tiene que si x verifica

$$a - \delta < x < a \ \Rightarrow \ a - \delta_1 < x < a \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

$$a < x < a + \delta \ \Rightarrow \ a < x < a + \delta_2 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon \ ,$$

con lo que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

y entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ .$$

Q.E.D.

Nota. En vista de que la existencia e igualdad de límites laterales en un punto es condición necesaria y suficiente para garantizar la existencia de límite allí, la no existencia de alguno de los límites laterales, o la diferencia entre ambos en el caso de existir, implica la no existencia de límite finito de la función en el punto.

Ejemplo (Función parte entera)**.**

$$\lim_{x\to 1^-} [x\,] = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} [x\,] = 1 \quad\Rightarrow\quad \nexists \lim_{x\to 1} [x] \ .$$

De la misma manera se concluye que si $n \in \mathbb{Z}$, no existe $\lim\limits_{x\to n} [x]$.

1.7. Algunos Teoremas de Límite Finito

Proposición 2. *Sean f una función y a un número real tal que existe*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \ .$$

Entonces, existe

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |\ell| \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si x verifica

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

Como además

$$\big||f(x)| - |\ell|\big| < |f(x)-\ell| \ ,$$

para el mismo δ, vale

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ \big||f(x)| - |\ell|\big| < |f(x)-\ell| < \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

Nota. Vale la recíproca de la proposición anterior?

1. La función signo, $f(x) = \frac{x}{|x|}$, es un ejemplo de una función para la cual existe

$$\lim_{x\to 0} |f(x)| = |1| = 1 \ ,$$

   sin que exista el límite de ella en el punto 0, y la vuelta de la proposición anterior no necesariamente vale.

2. En la proposición anterior sí vale la vuelta en el caso $\ell = 0$,

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to a} f(x) = 0 \ .$$

   En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-0| = \big||f(x)| - 0\big| < \varepsilon \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Teorema 2 (Carácter local del límite). *Sean a un número real y dos funciones f y g para las cuales se verifican*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \text{ y } f(x) = g(x) \text{ en algún } E'(a,\rho) \text{ (entorno reducido de } a) \, .$$

Entonces g tiene límite en el punto a y vale

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell \, .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta' \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \, .$$

Por hipótesis, existe $\rho > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \rho \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) \, .$$

Tomando en cuenta esas afirmaciones, y eligiendo $\delta \leq \min\{\delta', \rho\}$, vale

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ y } f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; |g(x) - \ell| < \varepsilon \, .$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ para el cual

$$0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |g(x) - \ell| < \varepsilon \, ,$$

que es lo que queríamos probar. *Q.E.D.*

Ejemplo. Existe el límite de la función $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, en el punto $a = 1$?
Para cualquier $x \neq 1$, vale

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = f(x)$$

y además (límite de función lineal)

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} x+1 = 2 \, ,$$

por lo tanto existe el límite de $g(x)$ y vale

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2 \, .$$

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y f una función definida en A (no necesariamente es A el dominio de f). Diremos que la función f está acotada en el conjunto A, si existe un número real $M > 0$, tal que, para todo $x \in A$ se tiene

$$|f(x)| \leq M \, .$$

De manera alternativa, decimos que f está acotada en el conjunto A si el conjunto

$$\{f(x) \, : \, x \in A\}$$

es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$.

Ejemplo.

1. La función $f(x) = 2x + 6$ está acotada en el intervalo $[1, 2]$, por $M = 10$.
2. La función $f(x) = 2x + 6$ está acotada en el intervalo $[-10, 4]$, por $M = 14$.
3. La función $f(x) = 2x + 6$ no está acotada en $\mathbb{R}$.
4. La función $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ está acotada en todo $\mathbb{R}$, por $M = 1$.
5. La función $h(x) = \frac{1}{x}$ no está acotada en $[-1, 1] - \{0\}$.

Teorema 3. *Sean f una función y a un número real tal que existe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$ en el cual la función f está acotada.

Demostración: Como f tiene límite ℓ en el punto a, en particular, para $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in E'(a, \delta)$,

$$|f(x) - \ell| \ < \ 1 \ .$$

Con lo cual, en ese entorno,

$$\begin{aligned} |f(x) - \ell| \ < \ 1 \quad & \Rightarrow \quad -1 < f(x) - \ell < 1 \Rightarrow \ell - 1 < f(x) < \ell + 1 \\ & \Rightarrow \quad -|\ell| - 1 < \ell - 1 < f(x) < \ell + 1 < |\ell| + 1 \\ & \Rightarrow \quad -(|\ell| + 1) < f(x) < |\ell| + 1 \Rightarrow |f(x)| < |\ell| + 1 \ . \end{aligned}$$

Q.E.D.

Observación. Hemos usado la propiedad de valor absoluto: $-|x| \ \leq \ x \ \leq \ |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. La función $f(x) = \frac{1}{x}$ no tiene límite (finito) en el punto $x = 0$. Si lo tuviera, existiría un entorno reducido de 0 en el cual la función f estaría acotada (ver ejemplo anterior).

Nota. La recíproca del teorema anterior no es cierta, hay funciones acotadas en todo entorno reducido de a que no tienen límite en a, por ejemplo, la función signo en $a = 0$.

Teorema 4. *Sean f una función, a un número real tal que existe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \ ,$$

y dos números, k y h, tales que

$$h < \ell < k \ .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$, donde para todo x allí se verifica

$$h < f(x) < k \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Demostración: Mostraremos primero que existe un entorno reducido del punto, para el cual se verifica la desigualdad derecha de la tesis, o sea, $f(x) < k$. Luego probaremos que existe otro entorno reducido para la desigualdad izquierda, $l < f(x)$. Y finalmente el resultado será consecuencia de considerar el entorno reducido intersección de los dos encontrados.
Siendo $k > \ell$, como

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell ,$$

eligiendo $\varepsilon = k - \ell > 0$, sabemos que existe $\delta_1 > 0$ tal que, si $x \in E'(a, \delta_1)$,

$$|f(x) - \ell| < k - \ell .$$

Con lo cual, en ese entorno $E'(a, \delta_1)$,

$$\begin{aligned} f(x) - \ell \leq |f(x) - \ell| \ < \ k - \ell \\ \Rightarrow \ f(x) \ < \ k - \ell + \ell \ = \ k\mathbb{Q}uad(1) \end{aligned}$$

Ahora, como $\ell > h$, si elegimos $\varepsilon = \ell - h > 0$, sabemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que, si $x \in E'(a, \delta_2)$,

$$|f(x) - \ell| < \ell - h .$$

Con lo cual, en $E'(a, \delta_2)$

$$\begin{aligned} h - \ell \ < \ f(x) - \ell \ < \ \ell - h \\ \Rightarrow \ h \ < \ f(x) \ < \ 2\ell - h\mathbb{Q}uad(2) \end{aligned}$$

Considerando, $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$ de (1) y (2) vale que si

$$x \in E'(a, \delta) \ \Rightarrow \ h < f(x) < k .$$

Q.E.D.

Corolario 1. *(Teorema de conservación del signo) Sean f una función, a un número real tal que existe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \neq 0 .$$

Entonces, existe un entorno reducido $E'(a, \delta)$, donde $f(x) \neq 0$; y vale, por ejemplo,

$$|f(x)| > \frac{|\ell|}{2} .$$

Demostración: Si $\ell > 0$, consideramos $h = \frac{\ell}{2} < \ell$, y si $\ell < 0$, tomamos $k = \frac{\ell}{2} > \ell$, y aplicamos el teorema anterior.
Además, por la Proposición 2, vale

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |\ell| \ \neq 0 ,$$

siendo $\frac{|\ell|}{2} < |\ell|$, sigue la segunda afirmación del enunciado. *Q.E.D.*

1.8. Álgebra de Límites

Teorema 5. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que existen los límites en el punto a, y valen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \ .$$

Entonces, se verifican:

1. *la función $f+g$ tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2 \ ;$$

2. *si $c \in \mathbb{R}$, la función cf tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (cf)(x) = c\ell_1 \ ;$$

3. *la función $f-g$ tiene límite en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (f-g)(x) = \ell_1 - \ell_2 \ ;$$

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (\ell_1 + \ell_2)| \ &= \ |(f(x) - \ell_1) + (g(x) - \ell_2)| \\ \leq \ |f(x) - \ell_1| + |g(x) - \ell_2| \ &< \ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \ = \ \varepsilon \ . \end{aligned}$$

2. Si $c = 0$ el resultado es trivial, sea entonces $c \neq 0$; dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{|c|} \ .$$

Entonces, para los x tales que $0 < |x-a| < \delta$,

$$|(cf)(x) - (c\ell_1)| \ = \ |c(f(x) - \ell_1)| \ = \ |c| \, |f(x) - \ell_1| \ < \ |c| \, \frac{\varepsilon}{|c|} \ = \ \varepsilon \ .$$

3. Por los apartados anteriores,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} (f-g)(x) \ &= \ \lim_{x\to a} (f + (-1)g)(x) = \\ &= \ \lim_{x\to a} f(x) + (-1) \lim_{x\to a} g(x) \ = \ \ell_1 - \ell_2 \ . \end{aligned}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Q.E.D.

Teorema 6. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

y g está acotada en un entorno reducido $E'(a,\rho)$. Entonces, la función fg tiene límite en el punto a, y vale

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = 0 \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, sean $\delta' > 0$ y $M > 0$ tales que

$$0 < |x-a| < \delta' \ \Rightarrow \ |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \rho \ \Rightarrow \ |g(x)| \le M \ .$$

Entonces, para $\delta \le \min\{\rho, \delta'\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$, se tiene

$$|(fg)(x) - 0| \ = \ |f(x)g(x)| \ = \ |f(x)|\,|g(x)| \ < \ \frac{\varepsilon}{M}\,M \ = \ \varepsilon \ .$$

Q.E.D.

Observar que en el teorema anterior, no se exige la existencia de límite de la función g.

Teorema 7. *Sean a un número real, f y g dos funciones tales que existen los límites en el punto a, y valen*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \ .$$

1. *Entonces existe el límite de la función fg en el punto a, y vale*

$$\lim_{x\to a} (fg)(x) = \ell_1\ell_2 \ .$$

2. *Si además, $\ell_2 \neq 0$, la función $\frac{f}{g}$ tiene límite en el punto a y vale*

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2} \ .$$

Demostración:

1. En primer lugar, recordemos (por teorema 3) que como f tiene límite ℓ_1 en el punto a, está acotada en un $E'(a,\rho)$, por un número $M > 0$, esto es,

$$0 < |x-a| < \rho \ \Rightarrow \ |f(x)| \le M \ .$$

Si $\ell_2 = 0$, el enunciado es del teorema anterior. Supongamos entonces $\ell_2 \neq 0$.
Dado $\varepsilon > 0$, sean δ_1 y δ_2 tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell_1| < \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_2|} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell_2| < \frac{\varepsilon}{2\,M} \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \text{mín}\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,

$$\begin{aligned} |(fg)(x) - (\ell_1 \ell_2)| &= |f(x)g(x) - f(x)\ell_2 + f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &\leq |f(x)g(x) - f(x)\ell_2| + |f(x)\ell_2 - \ell_1\ell_2| \\ &= |f(x)(g(x) - \ell_2)| + |(f(x) - \ell_1)\ell_2| \\ &= |f(x)|\,|g(x) - \ell_2| + |f(x) - \ell_1|\,|\ell_2| \\ &< M \frac{\varepsilon}{2\,M} + \frac{\varepsilon}{2\,|\ell_2|}\,|\ell_2| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ . \end{aligned}$$

2. Mostraremos primero el caso particular

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{\ell_2}\ .$$

Comencemos notando que, como $\ell_2 \neq 0$, por la prueba del Corolario 1, existen un entorno $E'(a, \rho)$, dentro del cual es $|g(x)| > m$, para algún $m > 0$, por ejemplo, $\frac{|\ell_2|}{2}$. Por otro lado, para $\varepsilon > 0$, existe $\delta' > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta' \ \Rightarrow\ |g(x) - \ell_2| < m\,|\ell_2|\,\varepsilon\ .$$

Entonces, para $\delta \leq \text{mín}\{\rho, \delta'\}$, y x tal que $0 < |x - a| < \delta$,

$$\begin{aligned} \left|\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \frac{1}{\ell_2}\right| &= \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\ell_2}\right| = \left|\frac{\ell_2 - g(x)}{g(x)\ell_2}\right| = \\ &= |g(x) - \ell_2\,| \frac{1}{|g(x)|}\,\frac{1}{|\ell_2|} < m\,|\ell_2|\varepsilon\ \frac{1}{m}\,\frac{1}{|\ell_2|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para concluir, por el primer apartado,

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \ell_1 \frac{1}{\ell_2} = \frac{\ell_1}{\ell_2}\ .$$

Q.E.D.

Nota. El teorema anterior no afirma nada sobre el cociente en el caso en el que el denominador tenga límite cero. Ya sabemos que no existe el límite de la función $\frac{1}{x}$ en el punto $a = 0$, pero sí el límite de la función $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ en el punto $a = 1$.

Nota. Combinando los resultados de esta parte con los límites hechos por definición al comienzo podemos afirmar las siguientes proposiciones.

1. Para todo $n \in \mathbb{N}$, y $a \in \mathbb{R}$, existe

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n\ .$$

2. Dado un polinomio $p(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0$ y $a \in \mathbb{R}$, existe

$$\lim_{x \to a} p(x) = \alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + ... + \alpha_1 a + \alpha_0 = p(a)\ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

3. Dada una función racional
$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + ... + \beta_1 x + \beta_0},$$
y $a \in \mathbb{R}$, existe
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1}x^{m-1} + ... + \beta_1 x + \beta_0} = \frac{\alpha_n a^n + \alpha_{n-1}a^{n-1} + ... + \alpha_1 a + \alpha_0}{\beta_m a^m + \beta_{m-1}a^{m-1} + ... + \beta_1 a + \beta_0} = \frac{p(a)}{q(a)},$$
siempre que $q(a) \neq 0$.

4. En particular, podemos generalizar la afirmación para $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{Z}$.

Proposición 3. *Los resultados del álgebra de Límites son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.*

1.9. Límite de Funciones Trigonométricas

Para probar la existencia de límites de las funciones trigonométricas, probaremos primero el siguiente resultado, del cual en esta parte sólo utilizaremos la desigualdad izquierda. Ambas serán útiles más adelante.

Proposición 4. *Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$,*
$$|\operatorname{sen} x| \leq |x| \leq |\tan x|,$$
y las igualdades valen sólo para $x = 0$.

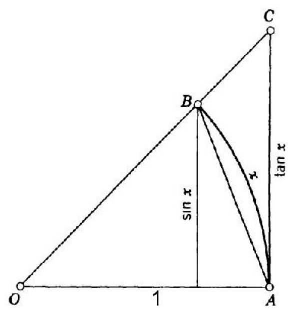


Figura 4: Funciones trigonométricas

Demostración: En primer lugar notemos que para $x = 0$, el resultado vale por igualdad en los dos casos. Para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, comparemos áreas en la Figura 4. Allí, si $0 < |x| < 2\pi r$ es la longitud del arco,
$$\text{área } \overset{\triangle}{AOB} < \text{área sect. circ. } AOB < \text{área } \overset{\triangle}{AOC},$$
que puesto en valores queda
$$\frac{|\operatorname{sen}(x)|}{2} < \frac{|x|}{2} < \frac{|\tan x|}{2},$$
desigualdades que inmediatamente implican las propuestas en el enunciado. *Q.E.D.*

Nota. La desigualdad
$$|\operatorname{sen}(x)| < |x|$$
es cierta para todo $x \neq 0$. Para completar con los valores $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, se tiene
$$|\operatorname{sen}(x)| \ \leq \ 1 < \ \frac{\pi}{2} \ \leq \ |x| \ .$$

La desigualdad izquierda de la proposición anterior nos permite afirmar que
$$\lim_{x\to 0} \ \operatorname{sen}(x) = 0 \ .$$
En efecto, para $\varepsilon > 0$, basta considerar $\delta < \varepsilon$, y entonces para los x tales que
$$0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ |\operatorname{sen}(x) - 0| = |\operatorname{sen}(x)| \ \leq \ |x| \ < \ \delta \ < \varepsilon \ .$$
De la misma manera podemos afirmar que
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \ ,$$
eligiendo, de nuevo, $\delta < \varepsilon$ se tiene
$$0 < |x - 0| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) - 0\right| = \left|\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right| \ \leq \ \left|\frac{x}{2}\right| \ < \ |x| \ < \ \delta \ < \varepsilon \ .$$
A continuación veamos que
$$\begin{aligned}
\cos x \ &= \ \cos\left(2\frac{x}{2}\right) \\
&= \ \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \ 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \ 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \ ,
\end{aligned}$$
identidad útil para arribar a
$$\lim_{x\to 0} \ \cos x = 1 \ .$$
En efecto, utilizando álgebra de Límites,
$$\lim_{x\to 0} \ \cos x \ = \ 1 - 2 \cdot 0^2 \ = \ 1 \ .$$
Finalmente, concluimos el siguiente resultado.

Teorema 8. *Para $a \in \mathbb{R}$,*
$$\lim_{x\to a} \ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a \quad \textit{y} \quad \lim_{x\to a} \ \cos x = \cos a \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Demostración: Utilizando lo anterior, más las fórmulas para la suma de senos y cosenos, y el álgebra de Límites, tenemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x &= \lim_{x\to 0}\operatorname{sen}(x+a)\\ &= \lim_{x\to 0}(\operatorname{sen} x\ \cos a + \cos x\ \operatorname{sen} a)\\ &= 0\cdot\cos a + 1\cdot \operatorname{sen} a\ = \operatorname{sen} a\ ,\end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned}\lim_{x\to a}\cos x &= \lim_{x\to 0}\cos(x+a)\\ &= \lim_{x\to 0}(\cos x\ \cos a - \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} a)\\ &= 1\cdot\cos a - 0\cdot \operatorname{sen} a\ = \cos a\ .\end{aligned}$$

Q.E.D.

Corolario 2.

1. *Para* $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$*,*

$$\lim_{x\to a}\tan x = \tan a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\sec x = \lim_{x\to a}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos a} = \sec a\ .$$

2. *Para* $a \neq k\pi$*,*

$$\lim_{x\to a}\csc x = \lim_{x\to a}\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} a} = \csc a \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a}\cot x = \lim_{x\to a}\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = \cot a\ .$$

1.10. El Principio de Intercalación

Teorema 9 (Principio de intercalación)**.** *Sean f, g y h tres funciones y a un número real, tales que, en algún entorno reducido $E'(a,\rho)$ se tiene*

$$g(x)\ \le\ f(x)\ \le\ h(x)\ ,$$

y además las funciones g y h tienen límite en el punto a, siendo

$$\lim_{x\to a}\ g(x)\ =\ \lim_{x\to a}\ h(x)\ =\ \ell\ .$$

Entonces la función f también tiene límite en el punto a y vale

$$\lim_{x\to a}\ f(x) = \ell\ .$$

Demostración: Sean $\varepsilon > 0$ y los números positivos δ_1 y δ_2, para los cuales valen

$$0 < |x-a| < \delta_1\ \Rightarrow\ |g(x)-\ell| < \varepsilon \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2\ \Rightarrow\ |h(x)-\ell| < \varepsilon\ .$$

Entonces, para $\delta \le \min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}$, y x tal que

$$0 < |x-a| < \delta\ \Rightarrow\ \begin{cases} g(x)\ \le\ f(x)\ \le\ h(x),\\ \ell-\varepsilon\ <\ g(x),\\ h(x)\ <\ell+\varepsilon,\end{cases}$$

combinando las tres desigualdades, se tiene que

$$\ell-\varepsilon\ <\ g(x)\ \le\ f(x)\ \le\ h(x)\ <\ \ell+\varepsilon\ \Rightarrow\ \ell-\varepsilon\ <\ f(x)\ <\ \ell+\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)-\ell|\ <\ \varepsilon\ .$$

Q.E.D.

Proposición 5. *El Principio de Intercalación es válido también si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.*

Proposición 6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ .$$

Demostración: Por la Proposición 4, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, y $x \neq 0$, valen

$$|\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x| \ .$$

Entonces, para los x tales que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donde $\operatorname{sen} x > 0$ y $\tan x > 0$; se tiene

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x| \\
&\quad\Rightarrow \quad \operatorname{sen} x < x < \tan x \quad \text{dividimos por} (\operatorname{sen} x > 0) \\
&\quad\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \\
&\quad\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \ ,
\end{aligned}$$

Y para los x tales que $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, donde $\operatorname{sen} x < 0$ y $\tan x < 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
&|\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x| \\
&\quad\Rightarrow \quad -\operatorname{sen} x < -x < -\tan x \quad \text{dividimos por} (-\operatorname{sen} x > 0) \\
&\quad\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\tan x}{\operatorname{sen} x} \\
&\quad\Rightarrow \quad 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \ .
\end{aligned}$$

Como además sabemos que

$$\lim_{x\to 0} \ \cos x \ = \ 1 \ \neq 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to 0} \ \frac{1}{\cos x} = 1 \ ,$$

utilizando el teorema 9 se concluye que

$$\lim_{x\to 0} \ \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1 \neq 0 \ ,$$

por lo que existe el límite y vale

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ .$$

Q.E.D.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

2. Generalización del Concepto de Límite

2.1. Límites Infinitos

Consideremos la función

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{1}{x^2} \; .$$

Si prefijamos $M > 0$, siempre es posible encontrar un entorno reducido en el cual los valores correspondientes de la función son mayores que M.
Por ejemplo, si $M = 10^8$, y $x \neq 0$,

$$f(x) > 10^8 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} > 10^8$$
$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{10^8} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{10^4} \; .$$

Es decir,

$$0 < |x - 0| < \frac{1}{10^4} \Rightarrow f(x) > 10^8 \; ,$$

y en el entorno reducido de centro 0 y radio 10^{-4}, la función es más grande que 10^8.
En general, para $M > 0$ basta considerar $\delta < \frac{1}{\sqrt{M}}$ para que se verifique

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - 0| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$
$$\Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{M}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} > M \Rightarrow f(x) > M \; .$$

Definición.

1. Una función tiene límite $+\infty$ en el punto a, si para cualquier número positivo M, existe un número positivo δ, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M \; .$$

   Para indicar esta situación, notamos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \; .$$

2. Una función tiene límite $-\infty$ en el punto a, si para cualquier número positivo M, existe un número positivo δ, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -M \; .$$

   En este caso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \; .$$

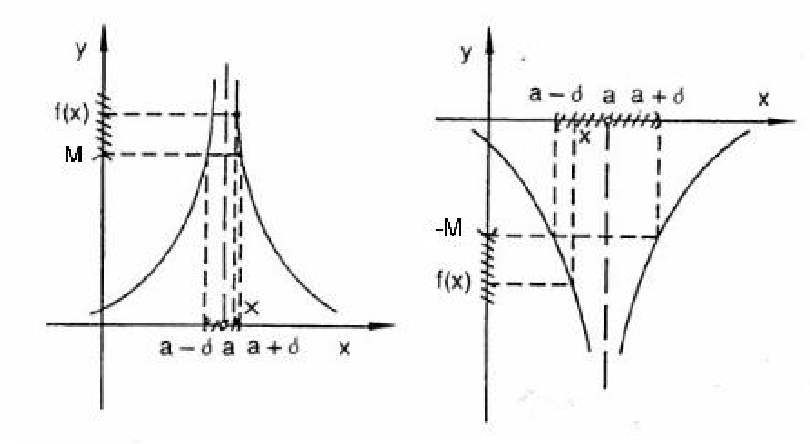


Figura 5: Límite infinito

Teorema 10. *(álgebra de límites infinitos) Sean a un número real y f y g dos funciones tales que*

1. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = -\infty$.
3. *Si c es número positivo,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a}(cg)(x) = -\infty$.
4. *Si c es número negativo,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a}(cf)(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a}(cg)(x) = +\infty$.
5. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ *(resp. $-\infty$) entonces* $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$ *(resp. $-\infty$) . En consecuencia,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *entonces* $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x) = +\infty$.

Demostración:

1. Dado $M > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ f(x) > \frac{M}{2} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow\ g(x) > \frac{M}{2} \ .$$

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$$(f+g)(x) \ = \ f(x) + g(x) \ > \ \frac{M}{2} + \frac{M}{2} \ = \ M \ .$$

2. Dado $M > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ \Rightarrow\ f(x) < -\frac{M}{2} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \ \Rightarrow\ g(x) < -\frac{M}{2} \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Entonces, para $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$$(f+g)(x) \;=\; f(x)+g(x) \;<\; -\frac{M}{2}-\frac{M}{2} \;=\; -M\ .$$

3. Dado $M > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) > \frac{M}{c} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; g(x) < -\frac{M}{c}\ .$$

Entonces, para x tal que $0 < |x-a| < \delta_1$,

$$(cf)(x) \;=\; c\,f(x) \;>\; c\,\frac{M}{c} \;=\; M,$$

y para x tal que $0 < |x-a| < \delta_2$,

$$(cg)(x) \;=\; c\,g(x) \;<\; c\left(-\frac{M}{c}\right) \;=\; -M.$$

4. Dado $M > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que (recordar $c < 0$)

$$0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) > -\frac{M}{c} \quad \text{y} \quad 0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; g(x) < \frac{M}{c}\ .$$

Entonces, para x tal que $0 < |x-a| < \delta_1$,

$$(cf)(x) \;=\; cf(x) \;<\; c\left(-\frac{M}{c}\right) \;=\; -M\ ,$$

y para x tal que $0 < |x-a| < \delta_2$,

$$(cg)(x) \;=\; c\,g(x) \;>\; c\,\frac{M}{c} \;=\; M.$$

5. Dado $M > 0$, sean $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, tales que

$0 < |x-a| < \delta_1 \;\Rightarrow\; f(x) > \sqrt{M}$ y $0 < |x-a| < \delta_2 \;\Rightarrow\; g(x) > \sqrt{M}$ (resp. $g(x) < -\sqrt{M}$) .

Entonces, si $\delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y x tal que $0 < |x-a| < \delta$,

$(f\cdot g)(x) \;=\; f(x)g(x) \;>\; \sqrt{M}\cdot\sqrt{M} \;=\; M\ ,$ (resp. $(f\cdot g)(x) \;<\; \sqrt{M}(-\sqrt{M}) \;=\; -M$) .

De manera alternativa, podríamos haber observado que,

$$\lim_{x\to a} g(x) = -\infty \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a}(-g)(x) = +\infty$$

y entonces

$$\lim_{x\to a}(f\cdot(-g))(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} -(f\cdot g)(x) = +\infty \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = -\infty\ .$$

Por último,

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = -\infty \ ,$$

implican

$$\lim_{x\to a} (-f)(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} (-g)(x) = +\infty \ ,$$

con lo que

$$\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) \ = \ \lim_{x\to a} ((-f)\cdot(-g))(x) \ = \ +\infty \ .$$

Q.E.D.

Ejemplo. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$

Al igual que sucedió cuando estudiamos a los límites finitos puntuales, presentaremos aquí la noción de límites laterales infinitos, en los cuales la atención se restringe a valores de la variable independiente acercándose al punto sólo por un lado.

Definición (Límites laterales infinitos)**.**

1. Una función tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) por izquierda en el punto a, si para $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$a-\delta < x < a \ \Rightarrow \ f(x) > M \ \ \text{(resp. } f(x) < -M) \ ;$$

2. Una función tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) por derecha en el punto a, si dado $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$a < x < a+\delta \ \Rightarrow \ f(x) > M \ \ \text{(resp. } f(x) < -M) \ .$$

Las situaciones anteriores se notarán, correspondientemente,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \ .$$

Proposición 7. *(Álgebra de límites laterales infinitos) Los resultados del Teorema 10 son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to a^+$ o $x \to a^-$.*

Ejemplo. 1) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, 2) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, 3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$.

2.2. Límites en el Infinito

Si aceptamos a los símbolos

$$x \to +\infty \quad \text{y} \quad x \to -\infty$$

para describir, respectivamente, a las situaciones en las que se estudia el comportamiento de cierta propiedad a medida que el valor de la variable independiente crece con valores arbitrariamente grandes, o decrece con valores arbitrariamente pequeños, definiremos los siguientes límites, a los que llamaremos límites en el infinito.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Definición (Límites finitos en el infinito)**.**

1. Una función f tiene límite ℓ cuando $x \to +\infty$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que
$$x > H \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
Para indicar esta situación, notamos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

2. Una función f tiene límite ℓ cuando $x \to -\infty$, si para cualquier número $\varepsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que
$$x < -H \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon \ .$$
En este caso, notamos $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

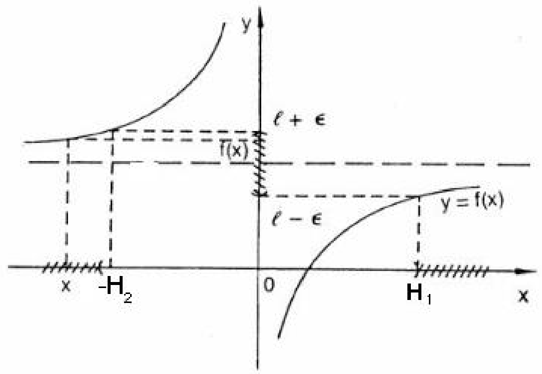


Figura 6: Límite en el infinito

Observemos en este punto que, si una propiedad se verifica para todo $x > H_1$, y otra propiedad se verifica para $x > H_2$, ambas propiedades, simultáneamente, se verifican para $H \geq \text{máx}\{H_1, H_2\}$.

De la misma manera, si una propiedad vale para $x < -H_1$, y otra para $x < -H_2$, ambas propiedades valen para $H \leq \text{mín}\{-H_1, -H_2\}$.

Con estas dos observaciones, modificando lo que se deba en cada caso, se deja como ejercicio probar el siguiente resultado.

Proposición 8. *Los resultados de la subsección 1.8 son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$. Lo mismo para el Principio de Intercalación.*

Ejemplo. 1) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\frac{1}{x-2} + 1) = 1$ 3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x = 1$.

Combinando las definiciones anteriores con las hechas para límites infinitos, definiremos los nuevos símbolos que representan situaciones en los que las funciones crecen o decrecen arbitrariamente a medida que también lo hace la variable independiente.

Definición (Límites infinitos en el infinito)**.**

1. Una función f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to +\infty$, si para cualquier número $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que
$$x > H \;\Rightarrow\; f(x) > M \;.$$
2. Una función f tiene límite $+\infty$ cuando $x \to -\infty$, si para $M > 0$, existe $H > 0$, tal que
$$x < -H \;\Rightarrow\; f(x) > M \;.$$
3. Una función f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to +\infty$ si dado $M > 0$, existe $H > 0$, tal que
$$x > H \;\Rightarrow\; f(x) < -M \;.$$
4. Una función f tiene límite $-\infty$ cuando $x \to -\infty$ si dado $M > 0$, existe $H > 0$, tal que
$$x < -H \;\Rightarrow\; f(x) < -M \;.$$

Los símbolos para las situaciones anteriores son, respectivamente,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \;, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \;, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \;, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \;.$$

Proposición 9. *(álgebra de límites infinitos en el infinito) Los resultados de la subsección 2.1 son válidos si se reemplazan los símbolos $x \to a$ por $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.*

Ejemplo. 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, 2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, 3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

Proposición 10.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = 0$, *y lo mismo ocurre cuando se reemplazan los símbolos punto $x \to a$ por $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.*
2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \ell \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 0^\pm} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ell$, *y lo mismo ocurre si se reemplaza el valor ℓ por los símbolos $+\infty$ o $-\infty$.*

Demostración:

1. Surge observando que, para $M > 0$,

$$f(x) > M \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{f(x)} < \frac{1}{M} \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M} \;, \qquad \text{y} \qquad f(x) < -M \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{M} < \frac{1}{f(x)} < 0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \frac{1}{M} \;.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

2. Aquí, para $H > 0$,

$$x > H \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{H}\,, \qquad \text{y} \qquad x < -H \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{H} < \frac{1}{x} < 0\,.$$

Q.E.D.

Ejemplo.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \operatorname{sen} x = 0\,, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1\,.$$

3. Límites Indeterminados

Dado un número real c cualquiera, consideremos las funciones

$$f(x) = c(x-a)\,, \quad g(x) = (x-a)\,, \quad \text{y} \quad h(x) = (x-a)^2\,.$$

Para ellas se verifica:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0\,, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} h(x) = 0\,,$$

y además

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = c\,, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \pm\infty\,,$$

dependiendo el último límite del signo de c.

En ese ejemplo observamos que el cociente de dos funciones que tienen límite cero en un punto, puede tener cualquier límite finito, o incluso los símbolos $+\infty$ o $-\infty$.

Se dice que el límite del cociente de dos funciones que tienen límite cero en un punto es una *indeterminación del límite.*

Un límite es indeterminado cuando no puede anticiparse o determinarse el resultado, y se deben realizar simplificaciones, reemplazos adecuados, etc., antes de encontrarlo.

El producto de una función que tiene límite cero en un punto, por una función acotada, tiene límite cero, y por lo tanto está determinado. En cambio, no puede anticiparse el resultado para el producto de una función que tienda a cero, por una función que tenga límite infinito.

Casos de Límites Indeterminados

1. Cociente de dos funciones con límite cero.

2. Cociente de dos funciones con límite infinito (de cualquier signo).

3. Producto de un límite cero por uno infinito.

4. Suma de dos infinitos de distinto signo.

Nota. Si bien mencionamos que el cociente de dos funciones con límite 0 en un punto es un caso de indeterminación del límite, no pasa esto cuando el numerador es la función nula, pues en este caso, el límite sí está determinado, y vale 0. En efecto, si g es una función definida en un entorno reducido de un punto a, que no se anula en este entorno, y que tiende a 0 en ese punto, entonces, para los x dentro de ese entorno, $\frac{0}{g(x)} = 0$, y por el Carácter Local del Límite, $\lim_{x \to a} \frac{0}{g(x)} = 0$.

Ejemplo. 1) $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$, 2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x}{x^3} = 0$, 3) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x}{x} = -\infty$,
4) $\lim_{x \to 1} (\sqrt{x}-1) \frac{3}{x^2-1} = \frac{1}{4}$, 5) $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$.

Nota.
Al estudiar funciones del tipo $f^{\,g}$, aparecerán otros límites indeterminados.

Nota.
Las mismas consideraciones hechas para el cálculo de límites puntuales valen para los límites en el infinito y para el cálculo de límites laterales, con los mismos casos de indeterminación.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Anexos

Anexo 1 - Resumen de todas las definiciones

Definición. Límite finito

Se dice que un número L es el límite de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definición. Límites laterales finitos

-a- Se dice que un número L es el límite por derecha de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-b- Se dice que un número L es el límite por izquierda de la función f en el punto a, y se nota

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ a - \delta < x < a \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \epsilon.$$

Definición. Límites laterales infinitos

-a- Se dice que el límite por derecha de la función f en el punto a es **más infinito**, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

-b- Se dice que el límite por derecha de la función f en el punto a es **menos infinito**, y se nota

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $\delta > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ a < x < a + \delta \ \Rightarrow\ f(x) < -M.$$

-c- Análogamente, se definen los límites por izquierda de la función f en el punto a cuando sean $+\infty$ o $-\infty$, considerando los semientornos a izquierda $a-\delta < x < a$.

Definición. Límites en el infinito

-a- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es L, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-b- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es L, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

si para cualquier $\epsilon > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ |f(x) - L| < \epsilon.$$

-c- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$

-d- Se dice que el límite cuando x tiende a más infinito de una función f es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > H \ \Rightarrow \ f(x) < -M.$$

-e- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es más infinito, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ f(x) > M.$$

-f- Se dice que el límite cuando x tiende a menos infinito de una función f es menos infinito, y se nota

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

si para cualquier $M > 0$, existe un número $H > 0$, tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x < -H \ \Rightarrow \ f(x) < -M.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Anexo 2 - Análisis de límites con la función raíz cuadrada

En este anexo queremos pensar resultados que involucran a la función raíz. Repasemos primero la definición. Partiendo de la función cuadrática $g(x) = x^2$, restringimos su dominio para conseguir inyectividad y así poder definir su inversa. Es decir, considerando $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}_0^+$, se tiene g inyectiva. Luego, $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geqq 0$, es su función inversa, i.e.

$$x \geqq 0, \quad \sqrt{x} = y \Leftrightarrow y^2 = x.$$

Recordando que la función cuadrática es estrictamente creciente en los reales no negativos, pues

$$0 < x_1 < x_2 \underset{\text{Teo 7 (3) (U1)}}{\Longrightarrow} x_1^2 < x_1 x_2 \ \wedge \ x_1 x_2 < x_2^2 \underset{\text{Teo 6 (U1)}}{\Longrightarrow} x_1^2 < x_2^2, \tag{1}$$

podemos ver que la función raíz también lo es.

Consideremos $0 < x_1 < x_2$. Si se supone $\sqrt{x_1} \geqq \sqrt{x_2}$, por (1) se tendría que $\left(\sqrt{x_1}\right)^2 \geqq \left(\sqrt{x_2}\right)^2$, es decir, $x_1 \geqq x_2$, contradiciendo el teorema 5 (U1).

Por lo tanto,

$$0 \geqq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}, \tag{2}$$

y la función raíz es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$.

Proposición 11.

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$.

Tomando $\delta = \epsilon^2$ resulta

$$0 < x < \delta \underset{(2)}{\Longrightarrow} 0 < \sqrt{x} < \sqrt{\delta} \underset{\sqrt{\delta}=\epsilon}{\Longrightarrow} 0 < \sqrt{x} < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

Proposición 12. *Sea $a \in \mathbb{R}^+$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \epsilon \Leftrightarrow \left| (\sqrt{x} - \sqrt{a}) \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right) \right| < \epsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\left| \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 \right|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} < \epsilon \underset{\text{positivos}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} |x - a| < \epsilon \end{aligned} \tag{3}$$

Sea $\delta_1 = \frac{a}{2}$. Resulta $\delta_1 > 0$. Luego,

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |x-a| < \tfrac{a}{2} \underset{\text{Prop 2(U1)}}{\Longrightarrow} -\tfrac{a}{2} < x-a < \tfrac{a}{2} \underset{\text{Teo 7(U1)}}{\Longrightarrow} \tfrac{a}{2} < x < \tfrac{3}{2}a \underset{(2)}{\Longrightarrow} \sqrt{\tfrac{a}{2}} < \sqrt{x} < \sqrt{\tfrac{3}{2}a} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{Teo 7(U1)}}{\Longrightarrow} \sqrt{\tfrac{a}{2}} + \sqrt{a} < \sqrt{x} + \sqrt{a} < \sqrt{\tfrac{3}{2}a} + \sqrt{a} \underset{\sqrt{\frac{a}{2}}+\sqrt{a}>0}{\Longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} > \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}a} + \sqrt{a}}.$$

Por lo tanto, existe una constante positiva $c = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt{a}}$ tal que

$$|x-a| < \delta_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < c\ . \tag{4}$$

Tomando $\delta \leqq \min\{\delta_1, \frac{\epsilon}{c}\}$ y volviendo a la ecuación (3), resulta

$$0 < |x-a| < \delta \underset{(4)}{\Longrightarrow} |x-a| \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| < \delta c < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. □

Proposición 13. *Sea f una función no negativa tal que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$. Entonces*

$$\lim_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}\ .$$

Demostración. Por hipótesis, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, es decir, $\forall\ \epsilon_1 > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon_1. \tag{5}$$

Como f es una función no negativa, por la conservación del signo, resulta $L \geqq 0$.

Si $L > 0$, por la proposición 12, $\lim\limits_{y \to L} \sqrt{y} = \sqrt{L}$, es decir, $\forall\ \epsilon_2 > 0$, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$0 < |y - L| < \delta_2 \Rightarrow \left| \sqrt{y} - \sqrt{L} \right| < \epsilon_2. \tag{6}$$

Si $L = 0$, por la proposición 11, $\lim\limits_{y \to 0^+} \sqrt{y} = 0$, es decir, $\forall\ \epsilon_2 > 0$, $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$0 < y < \delta_2 \Rightarrow |\sqrt{y}| < \epsilon_2. \tag{7}$$

Sea $\epsilon > 0$.

Por (6) o (7) según sea el caso, tomando $\epsilon_2 = \epsilon$, existe $\delta_2 > 0$. Luego, por la ecuación (5), tomando $\epsilon_1 = \delta_2$, existe $\delta = \delta_1 > 0$, tal que

$$0 < |x-a| < \delta \underset{(5)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \epsilon_1 = \delta_2 \underset{\text{(6) o (7)}}{\Longrightarrow} \left| \sqrt{f(x)} - \sqrt{L} \right| < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

□

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Anexo A3 - Límites con las funciones recíprocas

Proposición 14. *Sea f una función tal que $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$. Si existe un entorno reducido a derecha de a en el cual f es positiva, i.e. existe $\rho > 0$ tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in (a, a+\rho)$, entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Demostración. Sea $M > 0$.
Queremos hallar $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a+\delta)$ entonces $\dfrac{1}{f(x)} > M$.
Como $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$, para $\varepsilon = \frac{1}{M}$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in (a, a+\delta_1)$ entonces $|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$.

Sabemos además que $f(x) > 0$ $\forall x \in (a, a+\rho)$. Luego, considerando $\delta = \min\{\delta_1, \rho\}$, resulta que si $x \in (a, a+\delta)$ entonces $0 < f(x) = |f(x)| < \frac{1}{M}$.
Luego, si $x \in (a, a+\delta)$ entonces $\dfrac{1}{f(x)} > M$, i.e.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

□

Las siguientes tres proposiciones se demuestran de manera análoga a la Proposición 14.

Proposición 15. *Sea f una función tal que $\lim_{x \to a^+} f(x) = 0$. Si existe un entorno reducido a derecha de a en el cual f es negativa, i.e. existe $\rho > 0$ tal que $f(x) < 0$ $\forall x \in (a, a+\rho)$, entonces*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Proposición 16. *Sea f una función tal que $\lim_{x \to a^-} f(x) = 0$. Si existe un entorno reducido a derecha de a en el cual f es positiva, i.e. existe $\rho > 0$ tal que $f(x) > 0$ $\forall x \in (a-\rho, a)$, entonces*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Proposición 17. *Sea f una función tal que $\lim_{x \to a^-} f(x) = 0$. Si existe un entorno reducido a derecha de a en el cual f es positiva, i.e. existe $\rho > 0$ tal que $f(x) < 0$ $\forall x \in (a-\rho, a)$, entonces*

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Ejemplos:

1. Calcular $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x-a}$.

   Observemos que la función $f(x) = x-a$ verifica que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 0$ y además, $f(x) > 0$ si $x \in (a, a+1)$ ($\rho = 1$ en la Prop. 1). Luego, aplicando la Proposición 14 resulta $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

2. Análogamente, por Proposición 3 se obtiene que

$$\lim_{x \to a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty.$$

3. Calcular $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$.

   Observemos que la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ verifica que $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = 0$ y además, $f(x) > 0$ si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ($\rho = \frac{\pi}{2}$ en la Prop. 1). Luego, aplicando la Proposición 14 resulta $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

4. Análogamente, por Proposición 3 se obtiene que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = -\infty.$$

5. Calcular $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1}$.

   Observemos que la función $f(x) = x^2-1$ verifica que $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ y además, $f(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$ ($\rho = 1$ en la Prop. 1). Luego, aplicando la Proposición 14 resulta $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

6. Calcular $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2-1}$.

   Observemos que la función $f(x) = x^2-1$ verifica que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 0$ y además, $f(x) < 0$ si $x \in (-2, -1)$ ($\rho = 1$ en la Prop. 1). Luego, aplicando la Proposición 2 resulta $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

7. Análogamente, se obtiene que

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x^2-1} = +\infty.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Anexo A4 - Más álgebra de límites

Teorema 11. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^+} (f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Recordemos que $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a+\delta \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

En primer lugar, como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$, en particular se sabe que $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge a < x < a+\delta_1 \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < 1 \ \Rightarrow\ L-1 < f(x) < L+1 \ \Rightarrow\ f(x) > L-1. \quad (8)$$

Como $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, considerando $K = \max\{M, M-L+1\}$, resulta $K > 0$, y sabemos que $\exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a+\delta_2 \ \Rightarrow\ g(x) > K \ \Rightarrow\ g(x) > M - L + 1. \quad (9)$$

Considerando ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, se tiene $\delta > 0$ tal que, por (8) y (9),

$$x \in \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g) \wedge\ a < x < a+\delta \ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x) > (L-1)+(M-L+1) = M.$$

Es decir, para $M > 0$ hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f+g) \wedge\ a < x < a+\delta \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to a^+} (f+g)(x) = +\infty.$$

$\square$

Corolario 3. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^+} (f+g)(x) = -\infty.$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x\to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario. $\square$

Corolario 4. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^-} (f + g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} (f + g_2)(x) = -\infty.$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto a, es decir, $a - \delta < x < a$.

□

Teorema 12. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^+} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos primero el caso $L > 0$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L > 0$, aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite lateral), sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \rho \ \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L > 0$. Ahora, como $\lim\limits_{x\to a^+} g(x) = +\infty$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$. Resulta $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2}\, K = \frac{L}{2}\, \frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado, hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso $L < 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L < 0$, aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ a < x < a + \rho \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{-2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L < 0$.

Ahora, como $\lim\limits_{x \to a^+} g(x) = +\infty$, entonces existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $\delta = \min\{\rho, \delta_1\}$. Resulta $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \ \wedge \ g(x) > K \ \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2}\, K.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado hemos encontrado un $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ a < x < a + \delta \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

□

Corolario 5. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^+} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x \to a^+} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 de la página 21 del apunte, sabemos que

$$\lim_{x \to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

(En realidad, estaríamos usando la Proposición 7 por tratarse de límites laterales).

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

□

Corolario 6. *Sea $a \in \mathbb{R}$, sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to a^-} g_1(x) = +\infty \wedge \quad \lim_{x\to a^-} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to a^-} (f\cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L>0, \\ -\infty & L<0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x\to a^-} (f\cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L>0, \\ +\infty & L<0. \end{cases}$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre los semientornos a izquierda del punto a, es decir, $a-\delta < x < a$.

□

Teorema 13. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Probemos primero que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty$.

Recordemos que $\mathrm{Dom}(f+g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.
Sea $M>0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H>0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g) \wedge\ x>H \ \Rightarrow (f+g)(x) > M.$$

En primer lugar, como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, se sabe que $\exists\ H_1>0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge\ x>H_1 \ \Rightarrow\ |f(x)-L|<1 \ \Rightarrow\ L-1<f(x)<L+1 \ \Rightarrow\ f(x)>L-1. \quad (10)$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, considerando $K = \max\{M, M-L+1\}$, resulta $K>0$, y sabemos que $\exists\ H_2>0$ tal que

$$x\in\mathrm{Dom}(g) \wedge\ x>H_2 \ \Rightarrow\ g(x)>K \ \Rightarrow\ g(x)>M-L+1. \quad (11)$$

Considerando ahora $H = \max\{H_1, H_2\}$, se tiene $H>0$ tal que, por (10) y (11),

$$x\in\mathrm{Dom}(f)\cap\mathrm{Dom}(g) \wedge\ x>H \ \Rightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x) > (L-1)+(M-L+1) = M.$$

Es decir, para $M>0$ hemos encontrado un $H>0$ tal que

$$x\in\mathrm{Dom}(f+g) \wedge\ x>H \ \Rightarrow (f+g)(x)>M.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = +\infty.$$

□

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Corolario 7. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = -\infty.$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por álgebra de límites en el infinito, sabemos que

$$\lim_{x\to a^+} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario.

$\square$

Corolario 8. *Sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_1(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} (f+g_1)(x) = +\infty \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} (f+g_2)(x) = -\infty.$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior o del corolario anterior, considerando siempre $x < -H$ y las adaptaciones que correspondan.

$\square$

Teorema 14. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos primero el caso $L > 0$.
Recordemos que $\mathrm{Dom}(fg) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$.
Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$, aplicando el Teorema 4 (para el caso de límite en el infinito), sabemos que existe $T > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > T \ \Rightarrow f(x) > \frac{L}{2} > 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L > 0$. Ahora, como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, entonces existe $H_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $H = \text{máx}\{T, H_1\}$. Resulta $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow f(x)g(x) > \frac{L}{2}\, K = \frac{L}{2}\,\frac{2M}{L} = M.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado, hemos encontrado un $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

Consideremos ahora el caso $L < 0$.
Sea $M > 0$ cualquiera. A partir de la definición, queremos hallar $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (fg)(x) < -M.$$

Como $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L < 0$, aplicando nuevamente el Teorema 4, sabemos que existe $T > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \ x > T \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0.$$

Consideremos ahora $K = \dfrac{-2M}{L}$. Luego, $K > 0$, ya que $M > 0$ y $L < 0$.
Ahora, como $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, entonces existe $H_1 > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H_1 \ \Rightarrow g(x) > K.$$

Consideremos entonces $H = \text{máx}\{T, H_1\}$. Resulta $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) \wedge \ x > H \ \Rightarrow f(x) < \frac{L}{2} < 0 \ \wedge \ g(x) > K \ \Rightarrow f(x)g(x) < \frac{L}{2}\, K.$$

Es decir, a partir de un $M > 0$ dado hemos encontrado un $H > 0$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(fg) \wedge \ x > H \ \Rightarrow (fg)(x) > M.$$

$\square$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Corolario 9. *Sean f y g funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to+\infty} (fg)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Consideremos la función $\tilde{g}$ tal que

$$x \in \mathrm{Dom}(g) \ \Rightarrow \tilde{g}(x) = -g(x).$$

Luego, por el ítem 4 del Teorema 10 (para el caso de límite en el infinito), sabemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{g}(x) = +\infty$$

Entonces, con $\tilde{g}$ y f se puede utilizar el teorema anterior y obtener el resultado de este corolario. □

Corolario 10. *Sean f, g_1 y g_2 funciones reales tales que*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \neq 0 \quad \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_1(x) = +\infty \wedge \quad \lim_{x\to-\infty} g_2(x) = -\infty.$$

Entonces

$$\lim_{x\to-\infty} (f \cdot g_1)(x) = \begin{cases} +\infty & L > 0, \\ -\infty & L < 0. \end{cases}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} (f \cdot g_2)(x) = \begin{cases} -\infty & L > 0, \\ +\infty & L < 0. \end{cases}$$

Demostración. Para ver este corolario basta reescribir la demostración del teorema anterior considerando siempre $x < -H$ y las adaptaciones que correspondan.

□

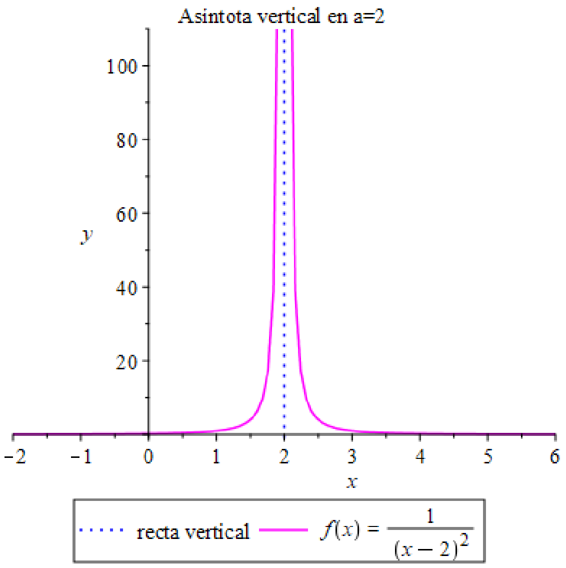
Anexo 5 - Asíntotas

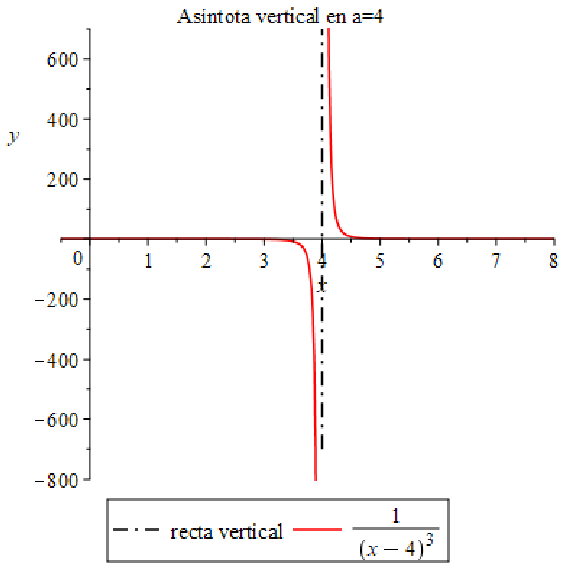
Ahora podemos definir formalmente la idea de asíntota que ya veníamos usando.

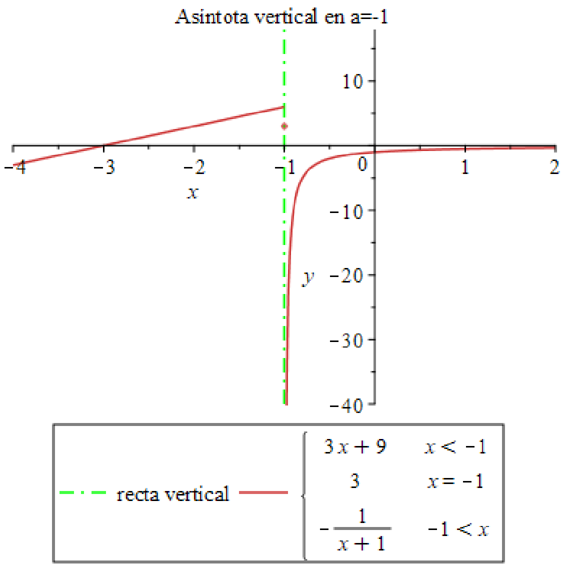
Definición. Se dice que la recta vertical $x = a$ es una *asíntota vertical* de la función f en el punto a si se verifica **por lo menos uno** de estos cuatro límites

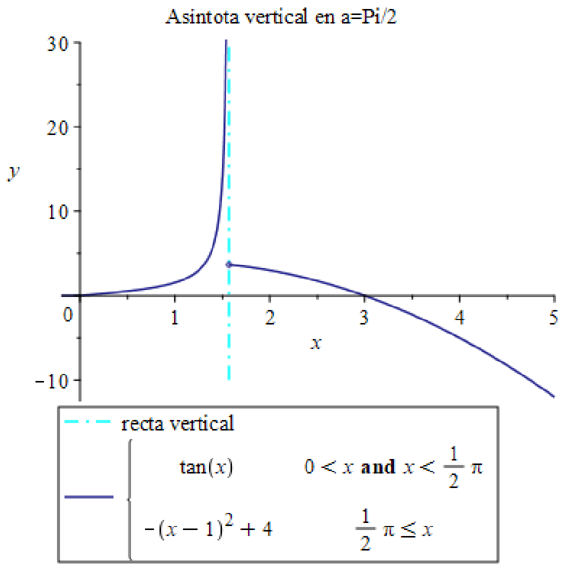
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty.$$

Algunos ejemplos







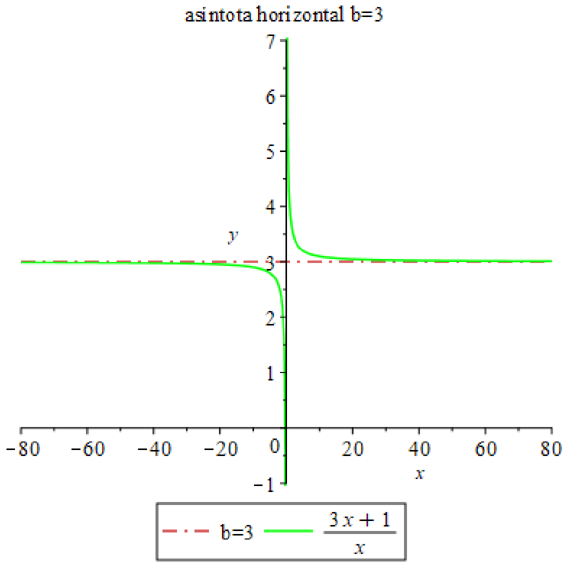


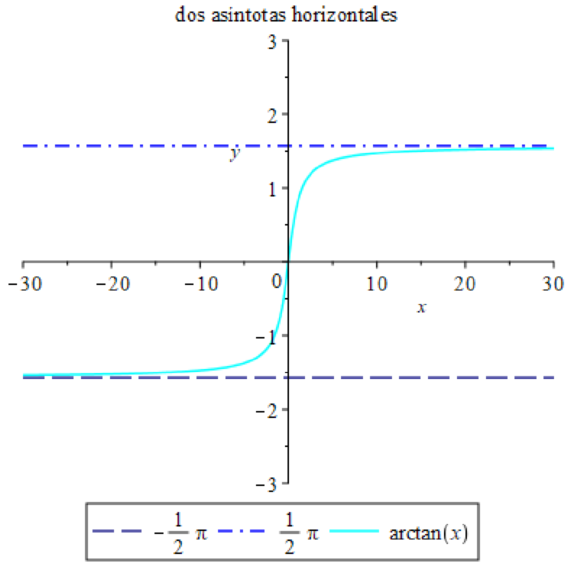
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

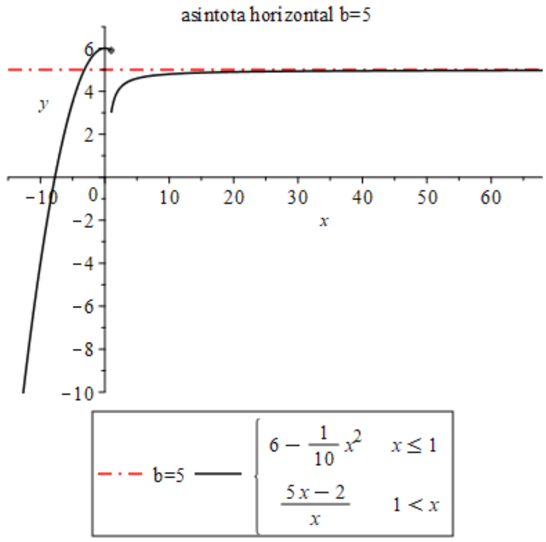
Definición. Se dice que la recta horizontal $y = b$ es una *asíntota horizontal* de función f si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

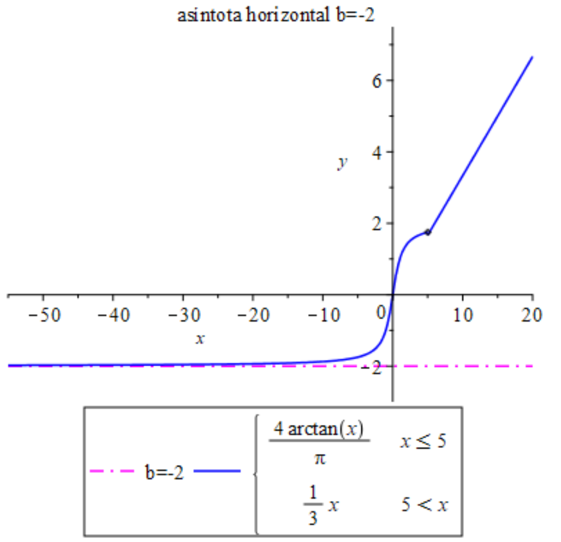
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Algunos ejemplos









Definición. Se dice que la recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es una *asíntota oblicua* de la función f si se verifica **por lo menos uno** de estos dos límites

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0$$

La definición indica que la distancia entre la curva $y = f(x)$ y la recta $y = mx + b$ tiende a 0, como se observa en la figura 7.

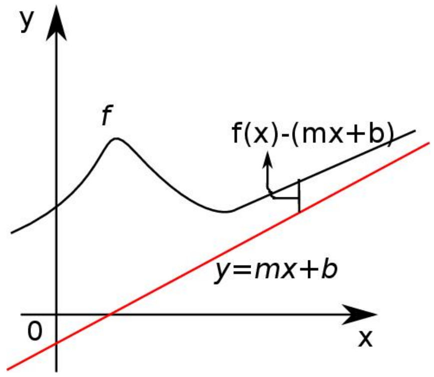


Figura 7: Asíntota oblicua

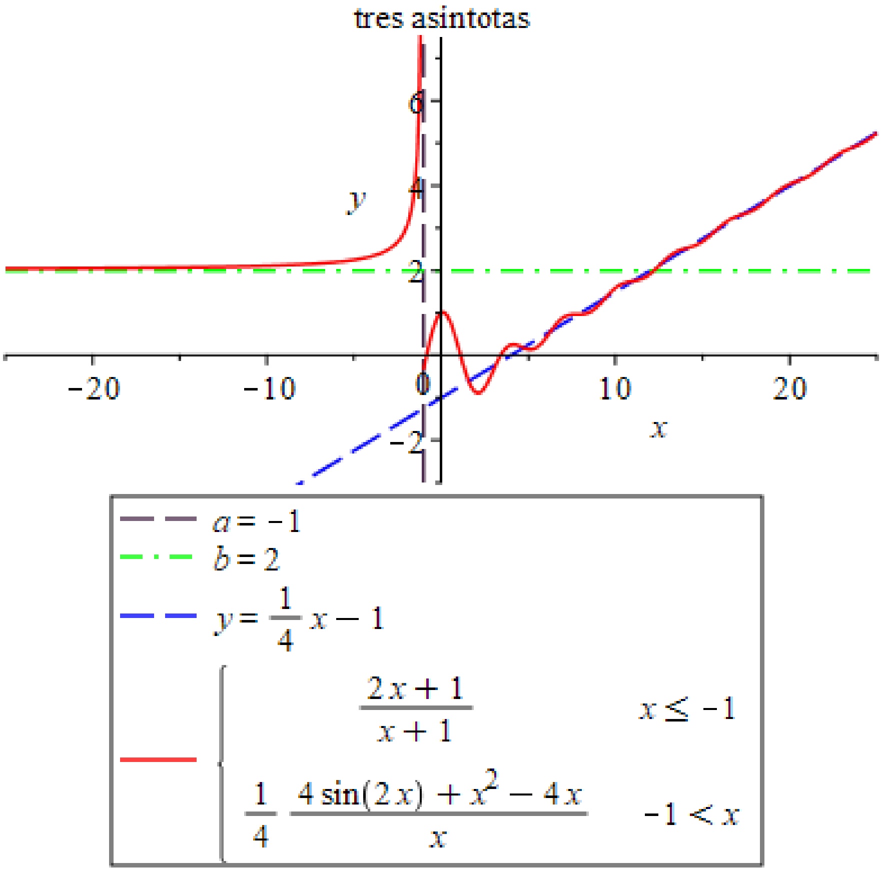


Figura 8: Ejemplo con tres asíntotas

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

4. Continuidad

4.1. Definición de Continuidad

La mayor parte de las funciones con las que hemos venido trabajando, tienen una importante propiedad, que es continuidad. Intuitivamente, la continuidad de una función significa que pequeños cambios en x ocasionan variaciones pequeñas entre sus imágenes, y no, por ejemplo, un salto brusco de su valor. La gráfica que la representa "no se rompe".

Hemos visto que para una función f y un punto a, la idea de límite de la función en el punto a se desvincula de la existencia del valor $f(a)$. La función puede o no tener límite en el punto, existir o no $f(a)$, en el caso en que ambos existan, pueden ser diferentes valores, o pueden ambos existir y coincidir.

Si existe el límite finito de una función en un punto a, existen el valor de la función en el punto, y además ambos valores coinciden, se dice que la función es *continua en el punto.*

Definición (Continuidad en un punto y en un conjunto). Sean f una función y a un número real, entonces, se dice que la función f es continua en el punto a, si y sólo si,

1. existe el valor $f(a)$,
2. existe el valor $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ (finito),
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si la función no es continua en el punto a, allí se dice discontinua.

Si en todo punto de un conjunto A la función es continua, se dice que es continua en el conjunto A.

Como la definición de continuidad utiliza el concepto de límite en un punto, puede entonces darse la definición utilizando entornos de a y $f(a)$.

Decimos que f es continua en a, si y solamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si

$$|x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon \ .$$

Respecto de la definición de límite, se han realizado dos modificaciones:

1. *Se ha reemplazado el valor ℓ por el número $f(a)$ y*
2. *la condición se debe verificar en el entorno completo, ya que f debe estar definida en el punto a, y en dicho punto vale, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon \ .$$

Definición (Continuidad lateral). Una función f se dice continua por izquierda (respectivamente, por derecha) en el punto a, si existe el valor de $f(a)$, el límite lateral por izquierda (respectivamente, por derecha) de la función allí, y ambos coinciden.

Cuando se trata de un intervalo cerrado (o semiabierto), la continuidad en los extremos se considera continuidad lateral.

Definición (Función continua). Se dice que una función es continua si es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo.

1. La función lineal $f(x) = mx + h$ es continua.
2. Los polinomios son funciones continuas, y las funciones racionales son continuas.
3. Las funciones seno y coseno, y las demás funciones trigonométricas, son continuas.
4. La función $f(x) = |x|$ es continua.
5. la función $f(x) = \frac{x}{|x|}$ es continua en todo $x \neq 0$ y no es continua en el punto $x = 0$. Lo mismo si la función se define de cualquier manera en el punto 0.
6. La función $f(x) = [x]$, parte entera de x, es continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, y no es continua en $\mathbb{Z}$. En los números enteros, la función es continua por derecha.

4.2. Tipos de Discontinuidades

Una función f puede ser discontinua en a, sucede si no se cumple una cualquiera de las condiciones de la definición. Es decir, puede ser discontinua en a si no existe $f(a)$, si no existe el límite cuando $x \to a$, o porque ambos existen pero son distintos.

Discontinuidades Evitables

Una función presenta una discontinuidad evitable en un punto, si existe el límite (finito) de la función allí, pero no coincide con el valor de la función en el punto, que puede incluso no estar definido.

Si f presenta una discontinuidad evitable en a, y allí tiene límite ℓ, definiendo una nueva función g de manera que

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases},$$

se obtiene una función continua en a, que coincide con f en los demás puntos.

Ejemplo (Discontinuidad evitable). Consideremos la función (ver la figura 9)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

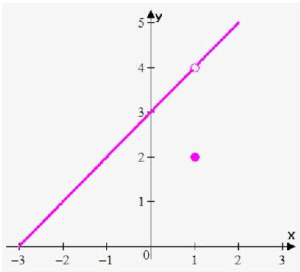


Figura 9: Discontinuidad evitable

Esta función no es continua en el punto 1, ya que, existe

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4 ,$$

pero este valor es diferente de $f(1) = 2$.

En este caso, puede considerarse una nueva función g, definida por

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;/$$

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \neq 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad = \; x+3 \;, \quad \text{para todo } x \;,$$

que, por construcción es una función que es continua en el punto, ya que fue hecha para que la función tenga en el punto 1 el mismo valor que su límite.

Discontinuidades Inevitables de Salto Finito

En el caso que en un punto a una función posea ambos límites laterales (finitos), pero ellos no coincidan, se dice que la función tiene una discontinuidad de salto finito.

En un punto donde una función presenta una discontinuidad de salto finito se suele llamar discontinuidad del salto la distancia entre los límites laterales en el punto.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)**.** La función (ver la figura 10)

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4-x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad ,$$

presenta una discontinuidad de salto finito en el punto $a = 2$, ya que existen pero son diferentes,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 2^+} f(x) = 2 \;.$$

En este caso, se dice que f tiene una discontinuidad de salto 1 (distancia entre sus límites laterales).

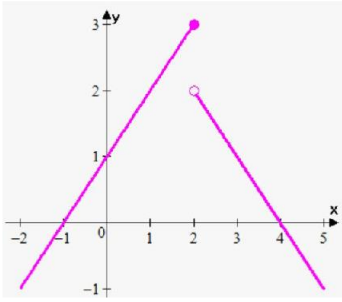


Figura 10: Discontinuidad de salto finito

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto finito)**.** La función parte entera, $[x]$. (ver la figura 11), parte entera de x, tiene discontinuidades de salto uno (finito) en todo número entero; en efecto, si $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lim_{x \to n^-} [x] = n - 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to n^+} [x] = n \ .$$

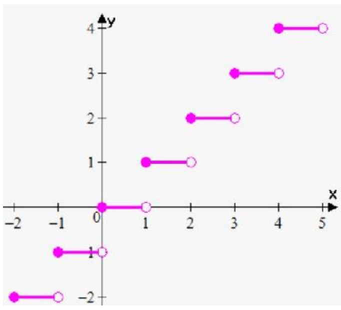


Figura 11: Discontinuidades inevitables de salto finito

Discontinuidades Inevitables de Salto Infinito

Una función tiene una discontinuidad de salto infinito en el punto a, si al menos uno de los dos límites laterales es infinito, y el otro existe finito o es infinito.

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto infinito)**.** La función (ver la figura 12) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, tiene una discontinuidad de salto infinito en el punto $a = 1$.

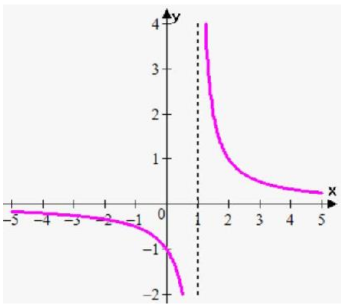


Figura 12: Discontinuidad inevitable de salto infinito

Ejemplo (Discontinuidad inevitable de salto infinito)**.** La función de la figura 13 presenta una discontinuidad de salto infinito en el punto 0, discontinuidades evitables en los puntos 2 y 6 y una discontinuidad de salto finito en el punto 4.

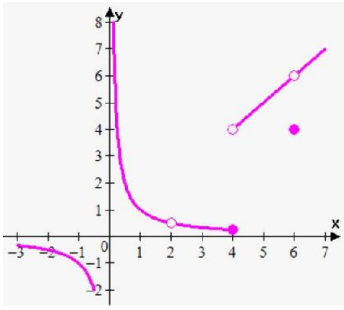


Figura 13: Varias discontinuidades

Discontinuidades Esenciales

Una función tiene una discontinuidad esencial en un punto, si allí la discontinuidad no es evitable, ni de salto finito o infinito. En el punto no existe uno de los límites laterales, finito ni infinito.

Ejemplo (Discontinuidad esencial)**.** La Función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

es una función discontinua en todo número real.

En efecto, dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para todo a racional, en cualquier entorno $E(a, \delta)$ existen números irracionales, para los cuales

$$|f(x) - f(a)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \ ,$$

mientras que para todo a irracional, en $E(a, \delta)$ existen números racionales, en los que

$$|f(x) - f(a)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon \ .$$

Como en ningún punto la función es continua por no verificarse la condición de límites, siquiera laterales, la función tiene discontinuidades esenciales en todos los puntos.

Ejercicio. Con la función f del ejemplo anterior, mostrar que la función

$$g(x) = x \cdot f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases} \ ,$$

es discontinua en todo $x \neq 0$, pero continua en $x = 0$.

Para la continuidad en 0, recordar el teorema 6, considerar las funciones $f(x)$ acotado en un entorno reducido de cero y la función $h(x) = x$ con límite cero, y para la discontinuidad en $\mathbb{R} - \{0\}$ renegar un poco.

Otros ejemplos clásicos †

1) La función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \ ,$$

cuya gráfica se muestra en la figura 14, tiene una discontinuidad esencial en el punto $a = 0$ pero es continua en todo punto $a \neq 0$.

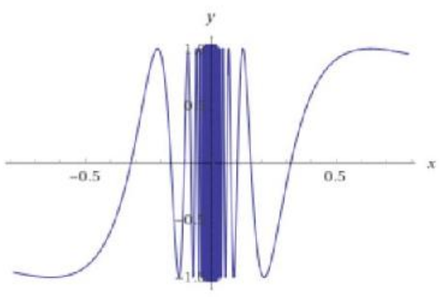


Figura 14: Discontinuidad esencial

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

En efecto, la función f en $a = 0$ no tiene límite finito ni infinitos (pues está acotada). Por otro lado, es continua en todo punto distinto de cero, consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.
2) La función

$$g(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

cuya gráfica se muestra en la figura 15, es continua en todo $\mathbb{R}$.

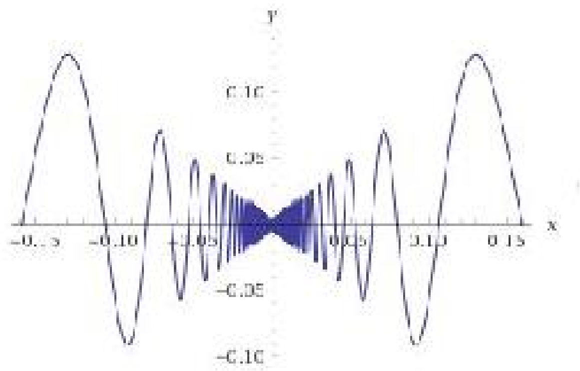


Figura 15: Función continua en todo su dominio

Afirmamos que es continua en $x = 0$, ya que, por el teorema 6,

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0 = g(0)\ .$$

La continuidad en los demás puntos será consecuencia del corolario sobre composición de funciones continuas.

4.3. Algunos Teoremas de Funciones Continuas

Recordando que si una función es continua en un punto, tiene límite en ese punto y coincide con su valor allí, adaptamos dos resultados de la Subsección 1.7 para el caso de funciones continuas.

Proposición 18. *Si f es una función continua en a, entonces existe un entorno de a en el cual f está acotada. Esto es, existen $\delta > 0$ y $M > 0$,*

$$x \in E(a, \delta) \ \Rightarrow\ |f(x)| \leq M\ .$$

Proposición 19. *Si f es una función continua en a y k es un número tal que $f(a) > k$ (respect. $f(a) < k$), entonces existe un entorno de a en el cual f asume valores todos mayores a k (respect. asume valores todos menores a k). Esto es, existe $\delta > 0$ tal que*

$$x \in E(a, \delta) \ \Rightarrow\ f(x) > k \ \text{ (respect. } f(x) < k\text{).}$$

Corolario 11 (Principio de conservación del signo). *Si f es una función continua en a, tal que $f(a) > 0$ (respect. $f(a) < 0$), entonces existe un entorno de a en el cual la función f se mantiene positiva (respect. negativa).*

Corolario 12. *Si f es una función continua en a tal que, en cualquier entorno de a, la función f asume tanto valores positivos como negativos, entonces $f(a) = 0$.*

Demostración: Si suponemos, $f(a) > 0$, existiría un entorno de a donde la función es siempre positiva, que contradice la hipótesis. Luego, $f(a) \leq 0$. Si ahora suponemos que $f(a) < 0$, habría un entorno donde la función es siempre negativa, que también contradice la hipótesis. Concluimos que, necesariamente, como la función efectivamente está definida en a (pues es continua en a), debe ser $f(a) = 0$. Q.E.D.

4.3.1. Álgebra de Funciones Continuas y Continuidad de la Función Compuesta

Utilizando los resultados de la Subsección 1.8, correspondientes al álgebra de límites finitos, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 15 (Álgebra de funciones continuas). *Sean f y g dos funciones continuas en a, entonces son continuas en el punto a las funciones $f \pm g$, $c \cdot f$ (si $c \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$.*

Demostración: Solamente probaremos la continuidad de la función suma, que dan como ejercicio las demás. Como f y g son continuas en a, existen $f(a)$ y $g(a)$, luego existe $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$. Además existen los límites de f y g en a y vale
$\lim\limits_{x\to a}(f + g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$. Q.E.D.

Teorema 16 (Límite de la función compuesta). *Sean f y g dos funciones tales que $\mathrm{Rec}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Supongamos que existe el límite*

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell \ ,$$

y que además f es continua en ℓ. Entonces existe el límite

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(\ell) \ .$$

Demostración: Dado $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |(f \circ g)(x) - f(\ell)| = |f(g(x)) - f(\ell)| < \varepsilon \ .$$

Como f es continua en ℓ, dado el valor ε propuesto, existe un valor ρ, para el cual

$$|z - \ell| < \rho \ \Rightarrow \ |f(z) - f(\ell)| < \varepsilon \ . \tag{12}$$

Ahora, como $\lim_{x\to a} g(x) = \ell$, dado el valor $\rho > 0$, existe $\delta > 0$, que hace válido

$$0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |g(x) - \ell| < \rho \ . \tag{13}$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Combinando las implicaciones (12) y (13),

$$\begin{aligned} 0 < |x-a| < \delta \ &\Rightarrow\ |g(x)-\ell| < \rho \\ &\Rightarrow\ |f(g(x)) - f(\ell)| < \varepsilon\ , \end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. *Q.E.D.*

Corolario 13 (Continuidad de la función compuesta)**.** *Con f, g y a como antes, si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces $f \circ g$ es una función continua en a.*

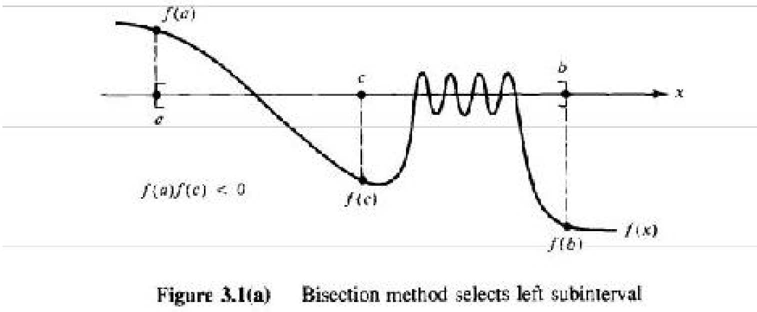
Nota. Recordemos que $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, más aún para todo $a > 0$ es $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$. Si g es una función no negativa tal que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{g(x)} = \sqrt{L}$.

Ejemplo. 1) Si $f(x) = \frac{1}{x-4}$ y $g(x) = x^2$, entonces $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x^2-4}$ es continua en todo $a \neq \pm 2$.

2) Las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ y $g(x) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x})$ son continuas en todo $a \neq 0$.

4.3.2. Ceros de Funciones Continuas y Teorema de Bolzano

Teorema 17 (Teorema de Bolzano)**.** *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (i.e. $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo). Entonces, existe un punto $\xi \in (a, b)$, donde $f(\xi) = 0$.*



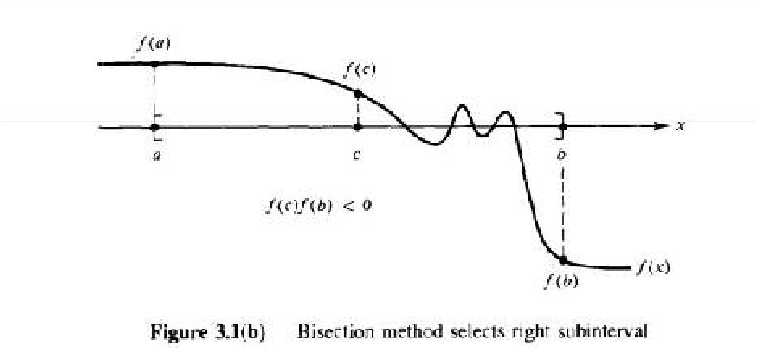


Figura 16: Ceros de una función

Nota. Para la intuición geométrica, el resultado es trivial, pues afirma que una curva continua (la gráfica de una función continua) que comienza debajo del eje x y termina por encima de él (o al revés), debe intersecarlo, al menos una vez.

Para la prueba de este importante teorema, pueden consultar la bibliografía sugerida, donde también encontrarán muchas aplicaciones del teorema que permiten encontrar ceros de funciones, por ejemplo el **El Método de Bisección**; es uno de los procedimientos más sencillos para aproximar (o encontrar) las raíces de una función real. Esto es, resolver ecuaciones del tipo

$$f(x) = 0 \ ,$$

y se basa en la prueba del Teorema de Bolzano.

Allí, dada una función continua en un intervalo, que asuma valores de diferente signo en los extremos, sucesivamente se calculan los valores de dos sucesiones a_n y b_n que convergen a un cero de la función f. Conocidos a_n y b_n, se calcula el valor del punto medio $c_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, y se tendrá que el valor c_{n+1} aproxima al valor ξ de un cero, con cota

$$|c_{n+1} - \xi| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} \ .$$

O sea, dada una tolerancia ε, buscamos n para el cual $\frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$, encontraremos un valor c_{n+1} a distancia de ξ menor a ε.

Observemos que este cero de f puede no ser único. El método de bisección aproxima (o encuentra) un cero, dado un par inicial a, b. Sin embargo, utilizando otros puntos a y

b, pueden encontrarse ceros diferentes, si los hubiera. En la figura se muestran algunas situaciones.

Teorema 18 (Propiedad de los Valores Intermedios)**.** *Sea f una función continua en $[a,b]$, donde $f(a) \neq f(b)$ y k un valor comprendido estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces, existe un punto $\xi \in (a,b)$ para el cual resulta $f(\xi) = k$.*

Demostración: Sea f una función continua en un intervalo $[a,b]$, supongamos que $f(a) < f(b)$ (si $f(b) < f(a)$ el razonamiento es análogo) y un número real k tal que $f(a) < k < f(b)$. Definimos la función sobre el intervalo $[a,b]$ por la ley $g(x) = f(x) - k$, se tiene

- *g es continua en $[a,b]$, por ser resta de funciones continuas.*
- *$g(a) = f(a) - k < 0$,*
- *$g(b) = f(b) - k > 0$.*

Tenemos entonces que g verifica las hipótesis del Teorema de Bolzano, entonces existe un valor $\xi \in (a,b)$, para el cual $0 = g(\xi) = f(\xi) - k$, en consecuencia $f(\xi) = k$. Q.E.D.

Nota. En la Unidad 2 hemos hecho un ”acto de fé” al aceptar que, por ejemplo, el recorrido de las funciones potencias $f(x) = x^m$, con m impar es $\mathbb{R}$ y con m par es $\mathbb{R}_0^+$.
En realidad, en ese momento, sólo podíamos afirmar que $\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathbb{R}$, o $\mathrm{Rec}(f) \subseteq \mathbb{R}_0^+$, pero no sabíamos si efectivamente, todo número real (real positivo) era imagen de algún otro por la función potencia. Ahora podemos hacer eso utilizando el Teorema de los valores intermedios, ya que hemos probado que las potencias son funciones continuas.

Por ejemplo, si $m = 2$, dado $y \in \mathbb{R}_0^+$, si $0 < y < 1$ por PVI existe $0 < x < 1$ tal que $f(x) = y$; si $y \geq 1$, por Propiedad Arquimedeana, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $y < n$. Pero entonces $f(1) = 1 \leq y < n \leq n^2 = f(n)$. Aplicando PVI, existe $1 \leq x < n$, tal que $f(x) = y$.

Con las funciones trigonométricas pasa algo similar. En su momento, para la función seno, sólo fuimos capaces de afirmar $\mathrm{Rec}(f) \subseteq [-1,1]$ (si no se ha hecho aún con argumentos geométricos la otra inclusión).

Ahora, por PVI (ya conocemos que la función seno es continua) sabemos que dado $y \in [-1,1]$, existe $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, (e infinitos otros x fuera de ese intervalo) tal que $f(x) = y$. Afirmación que utilizamos para definir la función arcoseno.

Razonamientos análogos pueden realizarse con los recorridos de las funciones coseno, tangente, y las funciones homográficas.

4.3.3. Continuidad de la Función Inversa

Hemos visto que una función biyectiva admite una función inversa, y que ésta también es biyectiva. Recordemos que una función f definida sobre un conjunto A se dice creciente, si para todos $x_1, x_2 \in A$,

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)\ .$$

Una función monótona es inyectiva, y luego, al restringir el codominio de ser necesario, será biyectiva y existirá la función inversa.

Teorema 19 (Continuidad de la función inversa). *Si f es creciente y continua en un intervalo $[a, b]$, entonces*

1. *existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(a), f(b)]$,*
2. *f^{-1} es creciente en $[f(a), f(b)]$ y*
3. *f^{-1} es continua en $[f(a), f(b)]$.*

Demostración:

1. *Como ya observamos, f creciente, implica f inyectiva, o biyectiva restringiendo el codominio. Ahora bien, $\mathrm{Rec}(f) = [f(a), f(b)]$, ya que, por PVI, como f es continua sobre $[a, b]$, dado un $z \in [f(a), f(b)]$, existe un $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = z$. Luego, f admite inversa, f^{-1} y $Dom f^{-1} = \mathrm{Rec}(f) = [f(a), f(b)]$.*

2. *Sean y_1 e y_2 dos puntos cualesquiera de $[f(a), f(b)]$ y sean $x_1, x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$ (las correspondientes preimágenes). Para mostrar que f^{-1} es creciente, habrá que ver*

$$y_1 < y_2 \ \Rightarrow \ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \ .$$

De manera equivalente,

$$\begin{aligned} &\left(y_1 < y_2 \ \Rightarrow \ f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)\right) \\ \Leftrightarrow \quad &\left(f(x_1) < f(x_2) \ \Rightarrow \ f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))\right) \\ \Leftrightarrow \quad &\left(f(x_1) < f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 < x_2\right) \end{aligned}$$

Argumentamos la validez de esta implicación suponiendo que si existiesen dos valores x_1 y x_2, tales que

$$x_1 \geq x_2 \quad \text{y} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

Si $x_1 > x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, esto llevaría a contradecir que f sea creciente y si $x_1 = x_2$ con $f(x_1) < f(x_2)$, contradice que f sea función. Luego, f^{-1} es monótona creciente sobre $[f(a), f(b)]$.

3. *Mostratremos primero que f^{-1} es continua en $(f(a), f(b))$.*
Sea $y_0 = f(x_0) \in (f(a), f(b))$; f^{-1} será continua y_0, si dado $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $\delta > 0$ tal que

$$|y - y_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon \ ,$$

o equivalente a la proposición

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \ \Rightarrow \ |x - x_0| < \varepsilon \ .$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \varepsilon \ &\Rightarrow \ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \\ &\Rightarrow \ f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \ . \end{aligned}$$

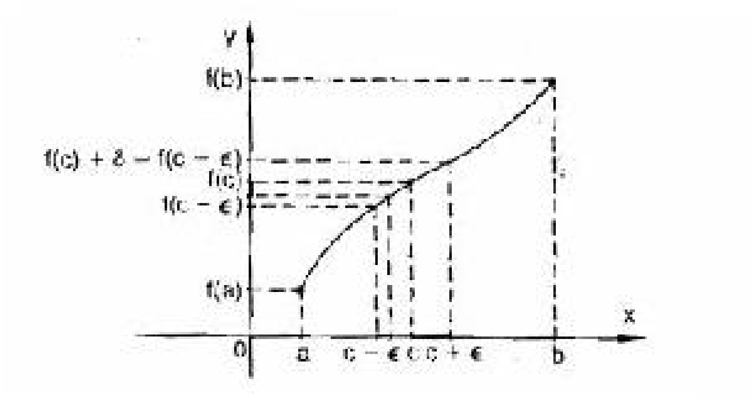
Sea δ un número positivo, elegido de manera que el entorno $E(y_0, \delta) = E(f(x_0), \delta)$ esté incluido en el intervalo $(f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$, así, si

$$\delta \leq \text{mín}\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\} ,$$

será

$$(f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \subseteq (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)) .$$

La gráfica de la figura muestra los elementos mencionados, nombrando c a nuestro x_0.



Con esta elección y recordando que al ser f creciente también lo es f^{-1},

$$\begin{aligned}
|y - y_0| < \delta \ &\Rightarrow \ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \\
&\Rightarrow \ f(x_0) - \delta < y < f(x_0) + \delta \\
&\Rightarrow \ f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \ f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) \\
&\Rightarrow \ x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \ \Rightarrow \ |x - x_0| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon .
\end{aligned}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$, que hace válida la condición de continuidad de la función f^{-1} en el punto y_0.

A continuación, mostraremos la continuidad por derecha de la función f^{-1} en el punto $f(a)$, y dejamos como ejercicio la demostración de continuidad por izquierda en el punto $f(b)$.

Dado $\varepsilon > 0$, como f es una función continua por derecha en a, podemos elegir $\delta > 0$ tal que el intervalo $(f(a), f(a)+\delta)$ esté incluido en el intervalo $(f(a), f(a+\varepsilon))$, haciendo

$$\delta \leq \text{mín}\{f(a + \varepsilon) - f(a)\} .$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f(a) < y < f(a) + \delta \ &\Rightarrow \ f(a) < y < f(a + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \ f(a) < f(x) < f(a + \varepsilon) \\
&\Rightarrow \ f^{-1}(f(a)) < f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(a + \varepsilon)) \\
&\Rightarrow \ a < x < a + \varepsilon \ \Rightarrow \ |x - a| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \ |f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))| < \varepsilon ,
\end{aligned}$$

y dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$, que hace válida la condición de continuidad por derecha de la función f^{-1} en el punto $f(a)$. *Q.E.D.*

El resultado análogo al anterior si f es decreciente es el siguiente:

Teorema 20. *Si f es decreciente y continua en un intervalo $[a, b]$, entonces*

1. *existe la función inversa f^{-1} definida sobre el intervalo $[f(b), f(a)]$,*
2. *f^{-1} es decreciente en $[f(b), f(a)]$, y,*
3. *f^{-1} es continua en $[f(b), f(a)]$.*

Ejemplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que la función

$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$

$$f(x) = x^n$$

es creciente y continua en su dominio. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$$

también es creciente y continua en su dominio.

Ejemplo.

1. La función

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

es creciente y continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f^{-1}(x) = \arcsin x$$

también es creciente y continua en $[-1, 1]$.

2. La función

$$f : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$f(x) = \cos x$$

es decreciente y continua en $[0, \pi]$. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

$$f^{-1}(x) = \operatorname{arc} \cos x$$

también es decreciente y continua en $[-1, 1]$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

3. La función

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \tan x$$

es creciente y continua en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Por lo tanto su función inversa

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$
$$f^{-1}(x) = \arctan x$$

también es creciente y continua en $\mathbb{R}$.

Ejemplo. Combinando los ejemplos anteriores con el corolario 13, valen las siguientes afirmaciones.

1. Con $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 4$, la función $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ es continua en $[-2, 2]$.
2. Con $f(x) = \frac{1}{x-1}$ y $g(x) = \arcsin x$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\arcsin x - 1}$ es continua en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

4.3.4. Valores Extremos y Teoremas de Weierstrass

Definición. (Máximos y mínimos) Sea f una función definida sobre un conjunto A. Diremos que el valor M es el máximo de la función f en el conjunto A, si existe un número $x^* \in A$, para el cual,

$$M = f(x^*) \geq f(x) \ , \quad \text{para todo } x \in A \ ,$$

y en ese caso, decimos que f alcanza el máximo en x^*.

Análogamente, diremos que m es el mínimo de la función f en el conjunto A, si existe $x^* \in A$, donde vale

$$m = f(x^*) \leq f(x) \ , \quad \text{para todo } x \in A \ ,$$

y en ese caso, decimos que f alcanza el mínimo en x^*.
Cuando existen estas cantidades, notaremos,

$$M = \max_{x \in A} f(x) \qquad \text{y} \qquad m = \min_{x \in A} f(x) \ .$$

Nota.

$$\max_{x \in A} f(x) = -\min_{x \in A}(-f)(x) \qquad \text{y} \qquad \min_{x \in A} f(x) = -\max_{x \in A}(-f)(x) \ .$$

En efecto, $f(x^*) = \max\limits_{x \in A} f(x)$ luego $\forall x \in A$, $f(x) \leq f(x^*)$, o sea, $\forall x \in A$, $(-f)(x^*) = -f(x^*) \leq -f(x) = (-f)(x)$.

Entonces $-f(x^*) = \min\limits_{x \in A}(-f)(x) \rightarrow f(x^*) = -\min\limits_{x \in A}(-f)(x)$. La segunda afirmación, se muestra de manera similar.

Teorema 21 (Primer Teorema de Weierstrass)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$ entonces f está acotada en dicho intervalo.*

Consultar los videos disponibles y la bibliografía para ver una prueba del primer teorema de Weierstrass.

Teorema 22 (Segundo Teorema de Weierstrass)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $[a, b]$, entonces alcanza sus valores máximo y mínimo en $[a, b]$.*

Demostración: Por el Primer Teorema de Weierstrass, la función f está acotada en $[a, b]$. Mostremos que f alcanza su valor máximo.
Como el recorrido de la función f está acotado, lo está en particular superiormente. Sea M el supremo del conjunto de números reales $\mathrm{Rec}(f)$.
Entonces,

$$f(x) \leq M \ \forall x \in [a, b].$$

El número M puede o no pertenecer $\mathrm{Rec}(f)$.

Si $M \in \mathrm{Rec}(f)$, existe $x^* \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $f(x^*) = M$ y la existencia de máximo está probada.

Ahora supongamos que no existe dicho punto. Esto es $f(x) < M, \ \forall x \in [a, b]$, es decir $M - f(x) > 0, \ \forall x \in [a, b]$. Queda bien definida entonces en el intervalo $[a, b]$ la función

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \ .$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Luego, g es una función continua (por ser la recíproca de una función continua que no se anula en $[a,b]$). Nuevamente, por el Primer Teorema de Weierstrass, la función g está acotada en el intervalo $[a,b]$. Por lo tanto, existe un valor $M' > 0$ tal que $g(x) < M'\ \forall x \in [a,b]$. En consecuencia, para todo $x \in [a,b]$ se tiene

$$\begin{aligned} & 0 < g(x) < M' \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad & 0 < \frac{1}{M - f(x)} < M' \Rightarrow 0 < \frac{1}{M'} < M - f(x) \\ \Rightarrow \quad & f(x) < M - \frac{1}{M'} < M. \end{aligned}$$

Resumiendo tenemos

$$f(x) < M - \frac{1}{M'} < M\ ,\ \forall x \in [a,b].$$

Esto quiere decir que $\mathrm{Rec}(f)$ admite una cota superior estrictamente menor que el número M, asumido como supremo de ese conjunto. Esta contradicción nos lleva a afirmar que existe al menos un punto $x^* \in [a,b]$, para el cual $f(x^*) = M$, y luego M es el máximo absoluto de la función f en el intervalo $[a,b]$.
La existencia de mínimo se deja como ejercicio. *Q.E.D.*

Habiendo probado el Segundo Teorema de Weierstrass, podemos enunciar el Teorema de los Valores Intermedios del siguiente modo:

Teorema 23 (Teorema de los Valores Intermedios)**.** *Sea f una función definida en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ y supongamos que f es continua en $[a,b]$, con m y M sus respectivos valores mínimo y máximo absolutos, respectivamente.*
Entonces, f alcanza todos los valores entre m y M. Es decir, $\mathrm{Rec}(f) = [m, M]$.

Nota. Las hipótesis del Teorema de Weierstrass son imprescindibles.

1. La función f dada por
$$f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}\ / \quad f(x) = x^2,$$
es continua en el conjunto no acotado $[0, +\infty)$, pero allí no alcanza un valor máximo.

2. La función g dada por
$$g : (0,1] \to \mathbb{R}\ / \quad g(x) = \frac{1}{x},$$
es continua en el intervalo abierto a izquierda $(0,1]$, pero no alcanza su valor máximo en este intervalo.

3. La función h dada por
$$h : [0,1] \to \mathbb{R}\ / \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & x \in (0,1] \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$
está definida en el intervalo cerrado y acotado $[0,1]$, allí no es continua, y no alcanza su valor máximo en ese intervalo.