

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 4. Aplicaciones del Cálculo Integral.

1. Curvas en Sistema Polar

Como se sabe, un sistema coordenado en el plano, representa un punto de éste por un par ordenados de números reales, a los cuales se les llama coordenadas del punto. Hasta ahora, se ha venido trabajando con el sistema cartesiano, que establece las coordenadas de un punto utilizando la distancia entre el mismo y dos ejes perpendiculares de referencia. En esta parte se introducirá un nuevo sistema, llamado de coordenadas polares.

En éste, se escoge un punto que se considerará como origen del sistema, o polo, y una semirecta comenzando en él, llamada eje polar. El eje normalmente se dibuja horizontal y dirigido hacia la derecha, coincidiendo con el eje x del sistema cartesiano. Con estos dos elementos entonces, quedan determinados, para un punto P , un par ordenado (r, θ) , siendo r la distancia del punto al polo, y θ , el ángulo orientado desde el eje polar hacia el segmento \overline{OP} . Se conviene que el ángulo será positivo si se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj, y negativo si no, y además que el polo puede ser representado de cualquier forma $(0, \theta)$.

Por comodidad también es útil extender el significado de las coordenadas polares a puntos de coordenada r negativa, acordando para $r > 0$, representar a $(-r, \theta)$ por el punto $(r, \theta + \pi)$. Además, se debe notar que si bien en el sistema cartesiano cada punto tiene una única representación, éste no es el caso en el sistema polar. En general, un punto (r, θ) distinto del polo, puede ser representado también por los infinitos $(r, \theta + 2k\pi)$ y $(-r, \theta + (2k + 1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

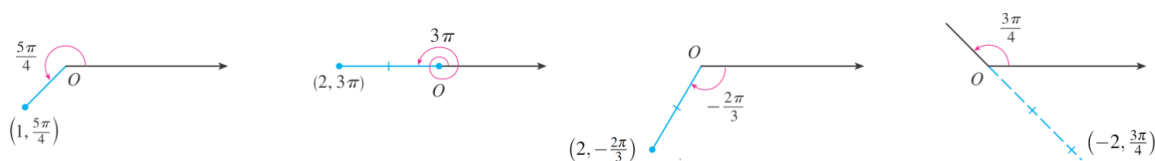
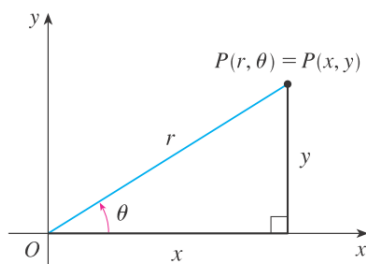


Figura 1: Puntos del Ejemplo 1

Ejemplo 1. En la Figura 1 se representan, en el sistema polar, los puntos $(1, \frac{5\pi}{4})$, $(2, 3\pi)$, $(2, -\frac{2\pi}{3})$ y $(-2, \frac{3\pi}{4})$.

El vínculo entre los sistemas cartesiano y polar puede deducirse sin mayor complicación, observando que bajo la convención usual de hacer coincidir al polo con el origen y al eje polar con el eje de las abscisas, dado un punto diferente del origen, las coordenadas polares (r, θ) y las cartesianas (x, y) verifican las relaciones



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases},$$

donde la expresión de θ vale si $x \neq 0$, y para $x = 0$, quedan los valores $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$, según $y > 0$ o $y < 0$.

En adelante se trabajará en general con la gráfica de una ecuación en forma polar, $r = f(\theta)$, si bien las curvas en este sistema también se pueden representar por ecuaciones explícitas $\theta = g(r)$, o más general, en la forma implícita $F(r, \theta) = 0$. En cualquier caso, ellas consisten en el conjunto de puntos del plano que tienen por lo menos una representación (r, θ) satisfaciendo la correspondiente ecuación.

Ejemplo 2.

- a) Para decidir qué curva representa la ecuación polar $r = 2$, se observa que, como la coordenada r de un punto indica su distancia al polo, la curva resulta ser la circunferencia con centro en el polo, y radio 2. De manera general, la curva $r = a$ (con a no necesariamente positivo) representa a una circunferencia de radio $|a|$ centrada en el polo. En la parte izquierda de la Figura 2 se muestran algunas de éstas.

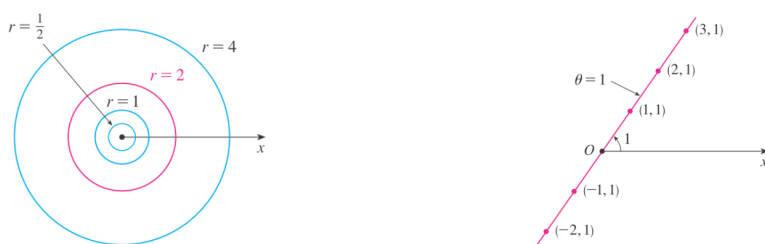


Figura 2: Curvas del Ejemplo 2 a)

En cambio, la ecuación $\theta = 1$ consiste de los puntos de la recta que pasa por el origen, y pendiente $m = \tan 1$. Notar que la curva es la recta completa, ya que se admiten puntos con $r < 0$, como en la parte derecha de la Figura 2.

- b) Dada la ecuación no constante $r = 2 \cos \theta$, para determinar el lugar geométrico que ésta representa en el sistema polar, se trazan algunos rayos de ángulo θ con coseno conocidos, y se marcan sobre ellos los valores de r resultantes. A mayor cantidad de puntos (r, θ) representados, mayor visualización de la curva que la ecuación describe. Se muestran algunos en la Figura 3.

Allí puede observarse una curva similar a una circunferencia. Esto se confirma viendo que

$$r = 2 \cos \theta \Rightarrow r = 2 \frac{x}{r} \Rightarrow r^2 = 2x \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x^2 - 2x) + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1,$$

en coordenadas cartesianas, es el lugar geométrico de los puntos que distan en una unidad del punto $(1, 0)$, esto es, la circunferencia de radio 1 con centro en $(1, 0)$.

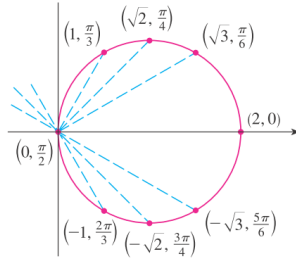


Figura 3: Curva del Ejemplo 2 b)

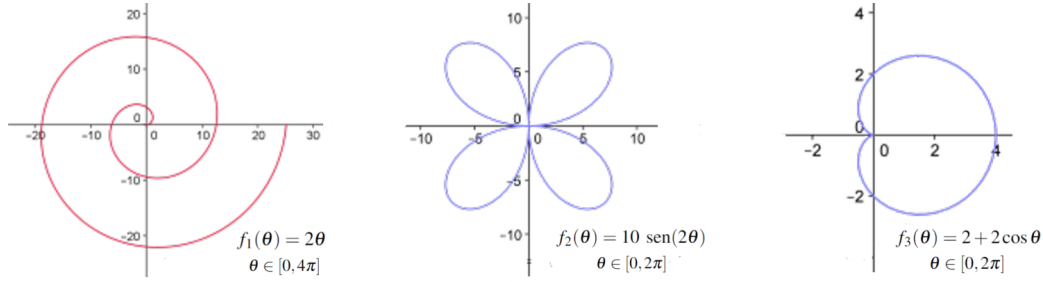


Figura 4: Curvas del Ejemplo 2 c)

c) En la parte izquierda de la Figura 4 se muestran dos vueltas de la curva llamada espiral de Arquímedes, en la parte central, un ejemplo de una rosa de cuatro pétalos, y en la derecha, un ejemplo de una de las conocidas como cardioide. Se deja como ejercicio distinguir puntos representativos sobre estas curvas.

Como puede observarse, algunas de las curvas graficadas se cierran, determinando regiones dentro de sus gráficas, que pueden ser descritas analíticamente como

$$R = \{(r, \theta) : a \leq \theta \leq b, 0 \leq r \leq f(\theta)\}, \quad (1)$$

donde $[a, b]$ es el intervalo de variación de los ángulos que definen la curva cerrada.

Se dará una noción del área de R , aproximándola por áreas de sectores circulares, recordando que el área de un sector circular de radio r que comprende un ángulo θ , es siguiendo una regla de tres, $A = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$.

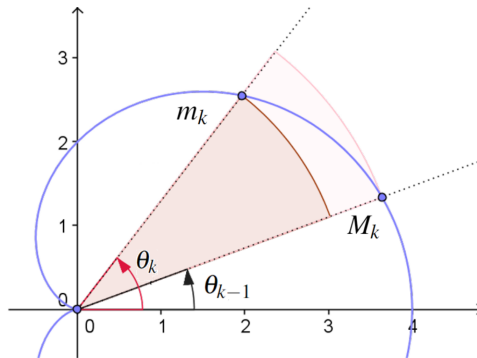


Figura 5: Aproximación de área por sectores circulares

Si $P = \{\theta_0, \dots, \theta_n\}$ es una partición de $[a, b]$, entonces el área A_k de la región de la curva acotada entre los rayos correspondientes a los ángulos polares θ_{k-1} y θ_k puede acotarse inferior y superiormente por las áreas

de los respectivos sectores circulares de radio $m_k = \inf_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} f(\theta)$ y $M_k = \sup_{\theta \in [\theta_{k-1}, \theta_k]} f(\theta)$, como en la Figura 5, que son respectivamente $\frac{1}{2} m_k^2 \Delta\theta_k$ y $\frac{1}{2} M_k^2 \Delta\theta_k$, de modo que sumando sobre k ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k^2 \Delta\theta_k \leq \sum_{k=1}^n A_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} M_k^2 \Delta\theta_k \Rightarrow L\left(\frac{1}{2}f^2, P\right) \leq A \leq U\left(\frac{1}{2}f^2, P\right),$$

ya que m_k^2 y M_k^2 son respectivamente los valores ínfimos y supremos de la función f^2 en cada intervalo de la partición. Queda así, el área total buscada, acotada entre las sumas inferior y superior de la función $\frac{1}{2}f^2$, relativas a cualquier partición genérica del intervalo $[a, b]$.

Definición 1. Si R es la región dada por (1), definida por una curva cerrada expresada en coordenadas polares por la ecuación $r = f(\theta)$, siendo $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, e inyectiva salvo en los extremos del intervalo, se define el área de R , como

$$\text{Área}(R) = \int_a^b \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$

Observación 1. En el Apéndice se probará que la integrabilidad de la función f en el intervalo $[a, b]$ implica la integrabilidad de f^2 , y luego la existencia de la integral en la Definición 1. De la misma manera, las demostraciones del Apéndice van a justificar la integrabilidad de las respectivas integrales en las Definiciones 2 y 3 para el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución, y en las Definiciones 4 y 5 para el cálculo de longitudes de curvas.

Ejemplo 3.

1. El área del círculo de radio a , siendo $a > 0$, descrito por la ecuación polar $r = a$, para $\theta \in [0, 2\pi]$, tiene valor

$$\text{Área}(R) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 (2\pi - 0) = \pi a^2.$$

Se toma este ejemplo para mostrar la necesidad de la hipótesis de inyectividad. En efecto, se podría haber elegido como representación de la circunferencia, a las funciones de misma ley $f(\theta) = a$, pero con dominios en los conjuntos $[0, 3\pi]$ (la circunferencia se recorrería una vuelta y media) o $[0, 4\pi]$ (circunferencia recorrida dos veces), y en esos casos, la aplicación de la fórmula de área daría por resultados los valores $\frac{3\pi}{2}a^2$ y $2\pi a^2$, incorrectos ya que considerarían áreas barridas más de una vez.

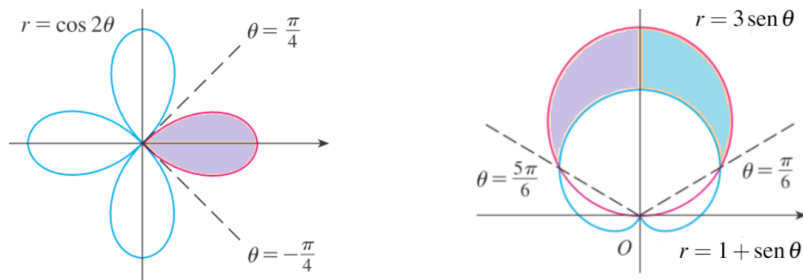


Figura 6: Regiones del Ejemplo 3

2. Para calcular el área encerrada por un pétalo de la gráfica dada por la ecuación polar $r = \cos(2\theta)$, mostrada en la parte izquierda de la Figura 6, se eligen los rayos extremos $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$, y se calcula

$$\begin{aligned} \text{Área}(R) &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} \cos^2(2\theta) d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos^2(2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 + \cos(4\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin(4\theta)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

3. La región exterior a la gráfica de la cardioide de ecuación $r = 1 + \sen \theta$ e interior a la circunferencia de ecuación $r = 3 \sen \theta$, se representa en la parte derecha de la Figura 6. Para calcular su área, se identifican los rayos de intersección, a partir de la ecuación $1 + \sen \theta = 3 \sen \theta$, resultando $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ y $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$, y con estos valores como extremos, resulta

$$\begin{aligned} \text{Área}(R) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left(\frac{1}{2} 9 \sen^2 \theta - \frac{1}{2} (1 + \sen \theta)^2 \right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (9 \sen^2 \theta - (1 + 2 \sen \theta + \sen^2 \theta)) d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (8 \sen^2 \theta - 1 - 2 \sen \theta) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (4(1 - \cos(2\theta)) - 1 - 2 \sen \theta) d\theta = \pi. \end{aligned}$$

2. Volumen de Sólidos de Revolución

De la misma manera que la integral definida permitió dar una definición coherente para el área de regiones delimitadas por curvas, los conceptos de integrales dobles y triples más adelante, permitirán formalizar la magnitud del volumen de un cuerpo, cuando éstos se piensen descriptos por dos variables independientes y una dependiente, o bien por tres variables independientes.

Sin embargo, la integral definida para funciones de una variable es útil para asignar volúmenes a ciertos tipos de cuerpos, que pueden ser descriptos mediante una variable independiente, una dependiente explícitamente por una ley, y una tercera que depende de estas dos, caracterizada por la descripción geométrica del sólido. Este es el caso por ejemplo, de los sólidos de revolución, generados al hacer girar la gráfica de una función de una variable, alrededor de un eje prefijado.

Describiendo de manera más precisa y presentando los elementos para hacer cálculos, se considera una función no negativa genérica f integrable, en un intervalo $[a, b]$, se agrega una tercera dimensión y se hace rotar la gráfica de f en principio alrededor del eje x , y se obtiene un cuerpo W , denominado cuerpo de revolución.

Por ejemplo, rotando la gráfica de la función constante $f(x) = c$, se genera un cilindro, haciendo rotar la gráfica de $g(x) = x$, con $x \in [0, b]$, se obtiene un cono, y haciéndolo con la gráfica de la función definida en $[-r, r]$ por la ley $h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, la esfera de radio r centrada en el origen.

En general, si se considera una sección transversal del cuerpo de revolución, se obtiene un punto o una circunferencia. Para un cilindro cuya base es un círculo de radio r y altura h , se dará por válida en lo que sigue la fórmula para calcular su volumen, igual a $V = \pi r^2 h$, se partirá al cuerpo en varios cilindros transversales, y se analizará si existe algún valor límite del volumen total de los cuerpos aproximantes.

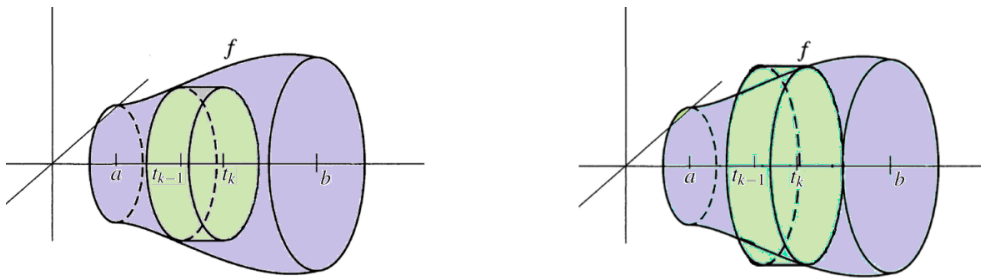


Figura 7: Aproximaciones de volúmenes de revolución

Dada una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, llamando V_k a la porción del cuerpo de revolución delimitado entre t_{k-1} y t_k , resulta, si $m_k = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f$ y $M_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f$, que V_k está acotado inferiormente por el volumen del cilindro cuya base es un círculo de radio m_k y su altura es $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$ (parte izquierda de la Figura 7), y

superiormente por el volumen del cilindro cuya base es un círculo de radio M_k y altura Δt_k (parte derecha de la misma figura). Esto es, para todo k , $\pi m_k^2 \Delta t_k \leq V_k \leq \pi M_k^2 \Delta t_k$, y entonces,

$$\sum_{k=1}^n \pi m_k^2 \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n V_k \leq \sum_{k=1}^n \pi M_k^2 \Delta t_k \Rightarrow L(\pi f^2, P) \leq V \leq U(\pi f^2, P),$$

resultando el volumen buscado acotado entre la suma inferior y la suma superior de la función πf^2 para cualquier partición genérica P de $[a, b]$.

Definición 2. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ es una función integrable (no negativa) y W es el cuerpo que se obtiene de rotar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje x , se define el **volumen** de W como

$$\text{Vol}(W) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ejemplos 4.

1. Para el cono generado al rotar la gráfica de la función $f(x) = x$ con dominio en $[0, b]$, que resulta en un cono de radio b y altura b , queda

$$\text{Vol}(W_1) = \pi \int_0^b x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^b = \frac{1}{3} \pi b^3.$$

De modo más general, para un cono recto con radio de la base igual a r y altura h , generado al rotar la recta de ecuación $y = \frac{r}{h}x$, tomando $x \in [0, h]$, queda el valor

$$\text{Vol}(W_2) = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2 x^3}{3h^2} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

2. Respecto de la esfera de radio r , obtenida de rotar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ con dominio en $[-r, r]$, resulta

$$\text{Vol}(W) = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Otra forma de generar cuerpos de revolución es hacer girar la región bajo la gráfica de una función no negativa alrededor del eje y , como en la parte izquierda de la Figura 8, donde además en este caso debe pedirse que el intervalo donde la función está definida esté contenido en \mathbb{R}_0^+ , para que al rotar no se superpongan volúmenes. Siguiendo con el objetivo de calcular volúmenes, si se considera una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$, el volumen V_k de la porción del cuerpo entre t_{k-1} y t_k , se encuentra acotado entre los volúmenes de los cuerpos de revolución c_k y C_k , descriptos como sigue (ver parte derecha de la Figura 8. El cuerpo c_k se obtiene de quitar al cilindro de radio t_k y altura m_k , el cilindro de radio t_{k-1} y altura m_k , resultando de volumen $\pi t_k^2 m_k - \pi t_{k-1}^2 m_k = \pi (t_k^2 - t_{k-1}^2) m_k$, y C_k es el cuerpo interior al cilindro de radio t_k y altura M_k y exterior al cilindro de radio t_{k-1} y altura M_k , quedando de volumen $\pi (t_k^2 - t_{k-1}^2) M_k$. En la figura, c_k se obtiene de rotar respecto del eje y el área sombreada de azul, y C_k , de rotar la unión de las áreas azul y violeta.

De lo anterior, teniendo en cuenta que además es $t_k^2 - t_{k-1}^2 = (t_k + t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) = (t_k + t_{k-1})\Delta t_k$, queda

$$2\pi t_{k-1} m_k \Delta t_k \leq \pi (t_k + t_{k-1}) m_k \Delta t_k \leq V_k \leq \pi (t_k + t_{k-1}) M_k \Delta t_k \leq 2\pi t_k M_k \Delta t_k.$$

En este punto, se nota que, siendo f no negativa, para la función de ley $g(x) = xf(x)$, se tienen los valores

$$\tilde{m}_k = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} g = t_{k-1} m_k \quad \text{y} \quad \tilde{M}_k = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} g = t_k M_k,$$

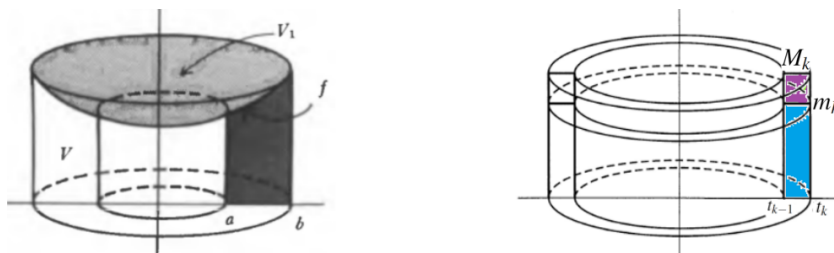


Figura 8: Sólidos alrededor del eje y

de donde, reescribiendo las desigualdades anteriores y sumando sobre k , se llega a

$$2\pi \sum_{k=1}^n \tilde{m}_k \Delta t_k \leq \sum_{k=1}^n V_k \leq 2\pi \sum_{k=1}^n \tilde{M}_k \Delta t_k \Rightarrow L(2\pi g, P) \leq V \leq U(2\pi g, P).$$

quedando ahora el volumen acotado entre la sumas inferior y superior de la función $2\pi g$, independiente de P .

Definición 3. Si $a \geq 0$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ es una función integrable y W el cuerpo que se obtiene al hacer girar la región bajo gráfica de f alrededor del eje y, se define el **volumen** de W como

$$\text{Vol}(W) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

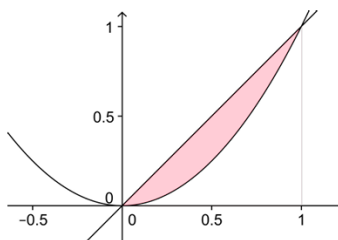


Figura 9: Región para el Ejemplo 5

Ejemplo 5. Dados los cuerpos W_1 y W_2 que se obtienen rotando la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$, representada en la Figura 9, alrededor de los ejes x e y , se observa que ambos sólidos resultan interiores a las regiones que surgen de rotar a la gráfica de f y exteriores a la que se generan rotando la gráfica de g . Notando que los puntos de intersección de las gráficas de f y g son los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ quedan los valores

$$\text{Vol}(W_1) = \pi \int_0^1 (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{2\pi}{15},$$

y

$$\text{Vol}(W_2) = 2\pi \int_0^1 (xf(x) - xg(x)) dx = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx = \frac{\pi}{6}.$$

En este caso, ya que existen las inversas de las funciones involucradas, se podrían haber calculado los volúmenes usando fórmulas respecto de la variable y ,

$$\text{Vol}(W_1) = 2\pi \int_0^1 y(\sqrt{y} - y) dy = \frac{2\pi}{15} \quad \text{y} \quad \text{Vol}(W_2) = \pi \int_0^1 ((\sqrt{y})^2 - y^2) dy = \frac{\pi}{6}.$$

3. Longitud de Curvas

En esta parte se asignará un valor a la longitud de un arco de curva, siguiendo las ideas de aproximaciones hechas para definir área y volúmen. Si C es una curva que viene definida por una ecuación explícita $y = f(x)$, donde $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, puede obtenerse una aproximación poligonal \mathcal{P} de ella, tomando una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, y uniendo cada punto $p_{k-1}(t_{k-1}, f(t_{k-1}))$, con el siguiente $p_k(t_k, f(t_k))$, para $k = 1, \dots, n$, como se muestra en la Figura 10.

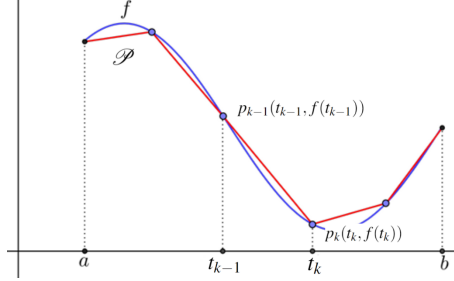


Figura 10: Poligonal sobre gráfica de f

Se observa que la longitud de C se aproxima por la longitud total de la poligonal, aproximación que mejora mientras más puntos haya en la partición, si todas las diferencias Δt_k se aproximan a cero.

En lo que sigue, para explotar lo anterior, se supondrá que la función f es además de continua, derivable y con derivada integrable. La derivada, asegurará, en cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$, la existencia de un valor t_k^* , tal que $f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$, por aplicación del Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, y con estos valores se puede expresar la longitud total de la poligonal aproximante como

$$\ell = \sum_{k=1}^n \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (t_k - t_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{f'(t_k^*)^2 + 1} (t_k - t_{k-1}).$$

Como f' es integrable, está acotada, lo que implica la acotación de la función $g = \sqrt{1 + f'^2}$ y la existencia de los valores m_k y M_k , ínfimo y supremo, de lo que resulta $m_k \leq \sqrt{f'(t_k^*)^2 + 1} \leq M_k$, para todo k , y

$$\sum_{k=1}^n m_k \Delta t_k \leq \ell \leq \sum_{k=1}^n M_k \Delta t_k \Rightarrow L(g, P) \leq \ell \leq U(g, P).$$

Siendo la longitud del arco determinada por cada intervalo de la partición, mayor o igual que la longitud en línea recta que une a los dos puntos extremos, se asigna, por definición, como valor de la longitud de C , al supremo de las longitudes de las poligonales inscriptas en la curva, considerando todas las particiones del intervalo $[a, b]$, que de acuerdo a lo anterior, se formaliza en la definición dada a continuación.

Definición 4. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, con f' integrable y C es la curva dada por la gráfica de f , se define la **longitud** de C como

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} \, dx.$$

Si C viene dada por ecuaciones paramétricas, cada valor t del parámetro, determina las coordenadas de un punto de coordenadas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, y conforme el parámetro varíe en un intervalo $[a, b]$ se obtendrán todos los puntos de la curva. Se supone en lo que sigue que las funciones f y g son derivables, con derivadas integrables, de modo que, dada una partición P de $[a, b]$, si en cada $[t_{k-1}, t_k]$ se aplica el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, se aseguran la existencia de valores t_k^*, t_k^{**} tales que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)(t_k - t_{k-1}) \quad \text{y} \quad g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})(t_k - t_{k-1}),$$

quedando así la longitud total de la poligonal asociada a la partición P ,

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{(f(t_k) - f(t_{k-1}))^2 + (g(t_k) - g(t_{k-1}))^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{f'(t_k^*)^2 + g'(t_k^{**})^2} (t_k - t_{k-1})$$

En este punto no se cuenta con las herramientas para demostrar el Teorema de Bliss, que permite afirmar que esta suma puede ser acotada inferior y superiormente por las sumas inferior y superior asociadas a la partición P , de la función $\sqrt{(f')^2 + (g')^2}$, que no puede hacerse directamente como antes, dado que los puntos intermedios que corresponden al Teorema del Valor Medio, no necesariamente coinciden. Salvando este tecnicismo entonces, se acepta la siguiente definición, razonable desde el punto de vista intuitivo.

Definición 5. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones derivables, con f' y g' integrables y C es la curva que se describe por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ e $y = g(t)$, para $t \in [a, b]$, se define la **longitud** de C como

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

Notar que para una representación explícita $y = f(x)$, una posible representación paramétrica es a través de las ecuaciones $x = t$, $y = f(t)$, con $t \in [a, b]$, de donde es fácil comprobar derivando que las definiciones son compatibles. Si por otro lado, C es la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$, para $\theta \in [a, b]$, ésta resulta en la parametrización, en función del ángulo polar, $x(\theta) = f(\theta) \cos \theta$ e $y(\theta) = f(\theta) \sin \theta$, resultando, si f es derivable,

$$x'(\theta)^2 + y'(\theta)^2 = (f(\theta) \cos \theta)' ^2 + (f(\theta) \sin \theta)' ^2 = f(\theta)^2 + f'(\theta)^2.$$

De ello, si además es f' integrable, se tiene el valor para la longitud de la curva C ,

$$\text{Long}(C) = \int_a^b \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta.$$

Ejemplo 6.

1. Para calcular la longitud de la curva frontera de la región en la Figura 9, se calcula la suma de integrales, para C_1 y C_2 las respectivas parte superior e inferior,

$$\begin{aligned} \text{Long}(C_1) + \text{Long}(C_2) &= \int_0^1 \sqrt{1 + 1^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = \sqrt{2} + \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \end{aligned}$$

La integral restante es más complicada. Para ella se trabaja con la ingeniosa sustitución de Euler, $u = \sqrt{1 + 4x^2} + 2x$, de modo que

$$(u - 2x)^2 = 1 + 4x^2 \Rightarrow u^2 - 4xu + 4x^2 = 1 + 4x^2 \Rightarrow x = \frac{u^2 - 1}{4u} = \frac{u}{4} - \frac{1}{4u}.$$

Así, para el extremo inferior, $x = 0$ implica $u = 1$, para el extremo superior, $x = 1$ implica $u = \sqrt{5} + 2$, y dentro del símbolo integral, se sustituyen

$$\sqrt{1 + 4x^2} = u - 2x = u - \frac{u}{2} + \frac{1}{2u} = \frac{u^2 + 1}{2u} \quad \text{y} \quad dx = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4u^2} \right) du = \frac{u^2 + 1}{4u^2} du,$$

quedando la integral definida buscada igual a

$$\int_1^{\sqrt{5}+2} \frac{(u^2 + 1)^2}{8u^3} du = \frac{1}{8} \int_1^{\sqrt{5}+2} \left(u - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^3} \right) du = \frac{u^2}{16} - \frac{1}{16u^2} - \frac{\ln u}{4} \Big|_1^{\sqrt{5}+2} \approx 1,4789$$

En general, primitivas de la forma $\int \sqrt{1+a^2x^2} \, dx$, pueden resolverse utilizando una sustitución similar, $u = \sqrt{1+a^2x^2} + ax$, o también una de la forma $x = \frac{1}{a} \sec \theta$, en ambos casos eligiendo $a > 0$. Se deja como ejercicio hacer los cálculos para hallar el valor de la integral definida con la segunda sustitución.

2. Usando, para describir a la circunferencia de radio $r > 0$, la parametrización $x = r \cos t$ e $y = r \sin t$, para $t \in [0, 2\pi]$, queda su longitud igual a la integral definida

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \, dt = \int_0^{2\pi} r \, dt = 2\pi r.$$

3. La longitud de la cardioide de ecuación $r = 2 + 2 \cos \theta$ representada en la parte derecha de la Figura 4 se calcula por la integral definida

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{(2+2\cos\theta)^2 + (-2\sin\theta)^2} \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta} \, d\theta \\ \int_0^{2\pi} \sqrt{8+8\cos\theta} \, d\theta &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos\theta} \, d\theta \stackrel{(1)}{=} 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}} \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \, d\theta = 8 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} \, d\theta = 16 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 16, \end{aligned}$$

donde en (1) se usó la identidad $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$, justificada al sumar miembro las igualdades $1 = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}$ y $\cos \theta = \cos(2\frac{\theta}{2}) = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

4. Ejercicios

1. En cada caso, esbozar la curva dada por cada ecuación polar $r = f(\theta)$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$$a) f(\theta) = 1 + \cos \theta, \quad b) f(\theta) = 4 |\sin \theta| \quad y \quad c) f(\theta) = \sqrt{|\cos \theta|}.$$

2. a) Determinar el área encerrada por cada una de las curvas del Ejercicio 1.
 b) Calcular el área encerrada entre la primera y la segunda vuelta de la espiral de ecuación polar $r = \theta$.
 c) Hallar el área de la región interior a la curva $r = 2 \cos(2\theta)$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y exterior a la circunferencia de radio 1 centrada en el origen.

3. Determinar el volumen del cuerpo generado, al hacer girar la región

- a) entre la parábola $y = \sqrt{x}$ y el eje y , con $0 \leq x \leq 4$, alrededor del eje x .
 b) acotada por la parábola $y = \sqrt{x}$ y las rectas $y = 1$, $x = 4$, alrededor de la recta $y = 1$.
 c) comprendida entre el eje y y el arco de hipérbola $x = 2/y$, para $1 \leq y \leq 4$, alrededor del eje y .
 d) entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$, alrededor de la recta $x = 3$.
 e) del primer cuadrante acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x$, alrededor del eje y .

4. La superficie conocida como la Trompeta (o el Cuerno) de Gabriel, ver Figura 11, se forma haciendo girar la restricción de la gráfica de la función $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de ley $f(x) = \frac{1}{x}$, alrededor del eje x .

- a) Mostrar que el volumen del cuerpo acotado por esta superficie es finito, e igual a π .

- b) Puede demostrarse (ver por ejemplo los libros de Cálculo de M. Spivak o J. Stewart), que si se hace girar la gráfica de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrable, respecto del eje x , el área del cuerpo generado tiene valor

$$\text{Área}(W) = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx ,$$

y la misma cantidad se acepta para el área de conjuntos no acotados, si la correspondiente integral impropia es convergente.

Comparando con una integral impropia divergente adecuada, y usando la parte b del ejercicio 9 de Unidad 3, mostrar que ésta no tiene área finita.

- c) Razonar sobre la siguiente supuesta paradoja. *Sería necesaria una cantidad infinita de pintura para cubrir la superficie interior de la Trompeta de Gabriel, mientras que sería posible rellenar toda la figura con una cantidad finita de pintura y así cubrir la superficie que la bordea.*

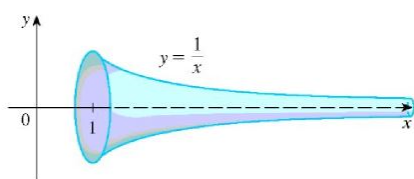


Figura 11: Trompeta de Gabriel

5. Hallar la longitud de la gráfica de cada función f , definida en el correspondiente dominio $[a, b]$.

$$a) f(x) = \frac{x^2}{4}, [1, 4], \quad b) f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, [1, 2] \quad y \quad c) f(x) = \int_1^x \sqrt{\cos(2t)} \, dt, [0, \frac{\pi}{4}].$$

6. Obtener en cada caso la longitud de la curva dada por las correspondientes ecuaciones paramétricas, todas definidas en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

$$a) \begin{cases} x = \cos t \\ y = t + \sin t \end{cases}, \quad b) \begin{cases} x = t^3 \\ y = \frac{3t^2}{2} \end{cases}, \quad c) \begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = \frac{2(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3} \end{cases} \quad y \quad d) \begin{cases} x = 8 \cos t + 8t \sin t \\ y = 8 \sin t - 8t \cos t \end{cases}$$

7. Plantear las integrales que permitan calcular las longitudes de las curvas presentadas en el Ejercicios 1 y cuando sea posible, terminar el cálculo.

Anexo. Sobre la Integrabilidad de las Composiciones

Lema 1. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, también son integrables las funciones $g = f^2$ y $h = \sqrt{1 + f^2}$.

Más aún, si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función integrable, y $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, con $\text{Im} f \subseteq [c, d]$, es una función continua, entonces la composición $g = \varphi \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

Demostración. Como f es una función integrable en $[a, b]$, es allí acotada. Siendo K una cota de $|f|$, resulta, para cualesquiera $x, y \in [a, b]$,

$$|g(x) - g(y)| = |f^2(x) - f^2(y)| = |f(x) + f(y)| |f(x) - f(y)| \leq 2K |f(x) - f(y)|.$$

Dada una partición $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, se verá que lo anterior implica una desigualdad similar para los valores extremos en cada $[t_{k-1}, t_k]$. Para ello, se comienza notando

$$m_k^f = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} f, \quad M_k^f = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} f, \quad m_k^g = \inf_{[t_{k-1}, t_k]} g \quad \text{y} \quad M_k^g = \sup_{[t_{k-1}, t_k]} g,$$

de donde en primer lugar, manipulando desigualdades y sumando miembro a miembro, se obtiene

$$\begin{cases} f(x) \leq M_k^f \\ m_k^f \leq f(y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq M_k^f \\ -f(y) \leq -m_k^f \end{cases} \Rightarrow f(x) - f(y) \leq M_k^f - m_k^f,$$

y de la misma manera, intercambiando los roles de x y de y quedará $f(y) - f(x) \leq M_k^f - m_k^f$, concluye la desigualdad con valor absoluto, $|f(x) - f(y)| \leq M_k^f - m_k^f$. Por el momento entonces, para $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$,

$$|g(x) - g(y)| \leq 2K|f(x) - f(y)| \leq 2K(M_k^f - m_k^f).$$

Si en este punto, primero se deja y fijo, queda, para todo $x \in [t_{k-1}, t_k]$, la desigualdad

$$g(x) - g(y) \leq |g(x) - g(y)| \leq 2K(M_k^f - m_k^f) \Rightarrow g(x) \leq g(y) + 2K(M_k^f - m_k^f),$$

de donde resulta el número $g(y) + 2K(M_k^f - m_k^f)$ una cota superior del conjunto $\{g(x) : x \in [t_{k-1}, t_k]\}$, debiendo ser ese número, mayor o igual que el supremo M_k^g , por ser el supremo la menor cota superior,

$$M_k^g \leq g(y) + 2K(M_k^f - m_k^f) \Rightarrow M_k^g - 2K(M_k^f - m_k^f) \leq g(y),$$

siendo ahora el número $M_k^g - 2K(M_k^f - m_k^f)$ una cota inferior del conjunto $\{g(y) : y \in [t_{k-1}, t_k]\}$, que pasa a ser un número menor o igual que el ínfimo m_k^g , y así

$$M_k^g - 2K(M_k^f - m_k^f) \leq m_k^g \Rightarrow M_k^g - m_k^g \leq 2K(M_k^f - m_k^f).$$

Como consecuencia de esas desigualdades para todo k , vale entonces, siendo $\Delta t_k \geq 0$ para todo k , que

$$\begin{aligned} U(g, P) - L(g, P) &= \sum_{k=1}^n M_k^g \Delta t_k - \sum_{k=1}^n m_k^g \Delta t_k = \sum_{k=1}^n (M_k^g - m_k^g) \Delta t_k \leq 2K \sum_{k=1}^n (M_k^f - m_k^f) \Delta t_k \\ &= 2K \left(\sum_{k=1}^n M_k^f \Delta t_k - \sum_{k=1}^n m_k^f \Delta t_k \right) = 2K (U(f, P) - L(f, P)). \end{aligned}$$

Con lo anterior, dado $\varepsilon > 0$, por la integrabilidad de f y la [Unidad 1, Proposición 2], se afirma la existencia de una partición P de $[a, b]$ tal que $U(f, P) - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{2K}$, y luego para ésta será $U(g, P) - L(g, P) < \varepsilon$, implicando la integrabilidad de g , de nuevo por la [Unidad 1, Proposición 2].

La integrabilidad de la función h sigue notando que para cualesquiera $x, y \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= \left| \sqrt{1 + f(x)^2} - \sqrt{1 + f(y)^2} \right| = \frac{|1 + f(x)^2 - (1 + f(y)^2)|}{\sqrt{1 + f(x)^2} + \sqrt{1 + f(y)^2}} \\ &\leq \frac{|f(x)^2 - f(y)^2|}{2} \leq \frac{2K}{2} |f(x) - f(y)| = K |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

y a partir de allí se trabaja como antes, trasladando las desigualdades a los valores extremos en cualquier partición, y las sumas inferiores y superiores de las funciones, y dado $\varepsilon > 0$, eligiendo una partición P tal que $U(f, P) - L(f, P) \leq \frac{\varepsilon}{K}$, para que sea $U(h, P) - L(h, P) \leq \varepsilon$, y luego resultará h integrable.

Observación 2. Se puede concluir de la parte referida a la integrabilidad del cuadrado de una función integrable, la [Unidad 1, Proposición 6], y la identidad $fg = \frac{1}{2}((f+g)^2 - (f^2 + g^2))$, que el producto de funciones integrables, es una función integrable.

Observación 3. Se dice que una función $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ es lipschitziana, o de Lipschitz, si existe una constante $L > 0$, tal que para cualesquiera $x, y \in A$, resulta $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$.

De la definición sigue que una función lipschitziana es uniformemente continua, y luego continua. Se propone repetir casi textualmente los pasos de las dos demostraciones anteriores, mostrar que si f es integrable en $[a, b]$ y φ es lipschitziana, con $\text{Im } f \subseteq \text{Dom } \varphi$, entonces $\varphi \circ f$ es integrable en $[a, b]$.

La demostración del caso general, se puede encontrar en el Capítulo 6 de Principios de Análisis Matemático, de W. Rudin, y se detalla a continuación. Como φ es continua en el intervalo $[c, d]$, cerrado y acotado, es allí uniformemente continua (ver [Unidad 1, Anexo]), de modo que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que para uso futuro, se asume además $\delta < \varepsilon$, tal que $|x - y| < \delta$ implica $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$, y como f es integrable en $[a, b]$, existe una partición P de ese intervalo tal que $U(f, P) - L(f, P) < \delta^2$.

Se notarán, como en la primera parte m_k^f, m_k^g, M_k^f y M_k^g a los respectivos valores extremos en cada intervalo, y se dividirá al conjunto de índices $\{1, \dots, n\}$ en dos subconjuntos. El conjunto A , para los cuales vale $M_k^f - m_k^f < \delta$ y el conjunto B , formado por los demás, esto es, los índices para los que es $M_k^f - m_k^f \geq \delta$.

Si $k \in A$, entonces, para $x, y \in [t_{k-1}, t_k]$, dos valores cualesquiera, se tiene

$$f(x) - f(y) \leq M_k^f - m_k^f < \delta \Rightarrow g(x) - g(y) = \varphi(f(x)) - \varphi(f(y)) < \varepsilon.$$

En este punto, se imita lo hecho en la primera parte: fijando $y \in [t_{k-1}, t_k]$, resulta para todo x en el mismo conjunto, $g(x) \leq \varepsilon + g(y)$, de donde $\varepsilon + g(y)$ es cota superior de los valores de g en el intervalito, y se concluye por definición de supremo que $M_k^g \leq \varepsilon + g(y)$, y a continuación, siendo $M_k^g - \varepsilon \leq g(y)$ para todo y , queda el número $M_k^g - \varepsilon$ una cota inferior de los valores de g , de modo que $M_k^g - \varepsilon \leq m_k^g$, y luego, resumiendo

$$k \in A \Rightarrow M_k^g - m_k^g \leq \varepsilon.$$

Por otro lado, si $k \in B$ y K una cota de $|\varphi|$, luego cota de $|g|$, será entonces $M_k^g - m_k^g \leq |M_k^g| + |m_k^g| = 2K$, y como se eligió la partición P tal que $U(f, P) - L(f, P) \leq \delta^2$, y para $k \in B$ es $M_k^f - m_k^f \geq \delta$, queda

$$\delta \sum_{k \in B} \Delta t_k \leq \sum_{k \in B} (M_k^f - m_k^f) \Delta t_k \leq U(f, P) - L(f, P) < \delta^2 \Rightarrow \sum_{k \in B} \Delta t_k < \delta.$$

Finalmente, juntando lo anterior, se obtiene la desigualdad

$$\begin{aligned} U(g, P) - L(g, P) &= \sum_{k=1}^n M_k^g \Delta t_k - \sum_{k=1}^n m_k^g \Delta t_k = \sum_{k=1}^n (M_k^g - m_k^g) \Delta t_k \\ &= \sum_{k \in A} (M_k^g - m_k^g) \Delta t_k + \sum_{k \in B} (M_k^g - m_k^g) \Delta t_k \leq \varepsilon(b-a) + 2K\delta < ((b-a) + 2K)\varepsilon, \end{aligned}$$

resultando la integrabilidad de la función g de la arbitrariedad de ε y la [Unidad 1, Proposición 2].

Observación 4. Existen contraejemplos que permiten afirmar que la composición de una función integrable, con otra integrable (no continua), en sentido de Riemann, en general no es una función integrable.