Caminos, ciclos y recorridos

Complementos de Matemática I - Matemática Discreta

2025

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

Definiciones

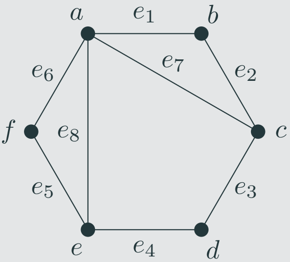
Definición

Dado un grafo G:

- *un camino en G es una lista que alterna vértices y aristas (con extremos en esos vértices) de la forma $v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k$ donde $e_i = v_{i-1}v_i$ para $i \in [k]$. La longitud del camino es la cantidad de aristas que posee.*
- *un recorrido es un camino que no repite aristas.*
- *un camino simple es un camino que no repite vértices (y por lo tanto, un recorrido).*
- *un u, v-camino es un camino cuyos extremos son u y v. Análogamente se definen un u, v-camino simple y u, v-recorrido.*
- *un camino o recorrido es cerrado si sus extremos son iguales.*
- *un circuito es un recorrido cerrado (camino que no repite aristas cuyos extremos son iguales).*
- *un ciclo es un camino simple cerrado (sólo repite los extremos del camino).*

Ejemplo

Ejemplo



$f, e_5, e, e_8, a, e_1, b$ es un f, b-camino simple.
$f, e_5, e, e_4, d, e_3, c, e_7, a$ es un f, a-camino.
$a, e_8, e, e_4, d, e_3, c, e_7, a$ es un ciclo.

Observación

Si el grafo es simple, es suficiente listar solo los vértices del camino: $v_0, v_1, \ldots, v_k$.

Propiedades

Lema

Dado un grafo G, todo u, v-camino en G para $u \neq v$ posee (como subgrafo) un u, v-camino simple.

Demostración.

En clase... $\square$

Propiedades

Observaciones:

- Todo circuito contiene un ciclo. Más aún, si v es un vértice en un circuito, existe (al menos) un ciclo en el circuito que contiene a v.
- Un grafo es conexo sii existe un u, v-camino en G para todo $u \neq v$ vértices de G.

Definición

Una componente conexa de un grafo G es un subgrafo conexo maximal. El número de componentes conexas de un grafo es $\kappa(G)$.

- El agregado de una arista reduce en a lo sumo una unidad el número de componentes conexas de un grafo. Es decir, si G' se obtuvo agregando una arista a G entonces $\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G') \leq \kappa(G)$.
- El borrado de una arista aumenta en a lo sumo una unidad el número de componentes conexas. Es decir, si $G' = G \backslash e$ entonces $\kappa(G') \leq \kappa(G) + 1$.
- El borrado de un vértice puede aumentar el número de componentes conexas hasta en $|V(G)| - 2$, es decir, si $G' = G - v$ entonces $\kappa(G') \leq \kappa(G) + |V(G)| - 2$.

Propiedades

Definición

Dado un grafo G, una arista de corte e de G es una arista tal que $\kappa(G \backslash e) > \kappa(G)$.

Un vértice de corte v de G es un vértice tal que $\kappa(G - v) > \kappa(G)$.

Lema

Dado un grafo G, una arista es de corte sii no pertenece a ningún ciclo.

Demostración.

En clase... $\square$

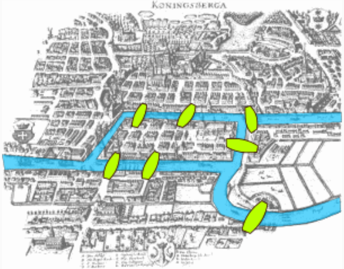
Observación

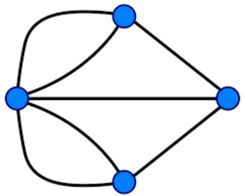
- *Si $e = uv$ es de corte, ¿v es de corte?*
- *Si G no es conexo, ¿$\overline{G}$ es conexo?*
- *Si v es vértice de corte de G, $\overline{G} - v$ es conexo.*
- *Sea G autocomplementario ($G \equiv \overline{G}$). Luego, G tiene un vértice de corte si y solo si G tiene un vértice de grado 1 (vértice pendiente o colgante).*

Circuitos eulerianos

Definición

Un circuito (recorrido) euleriano en un grafo G es un circuito (recorrido) que contiene todas las aristas de G.

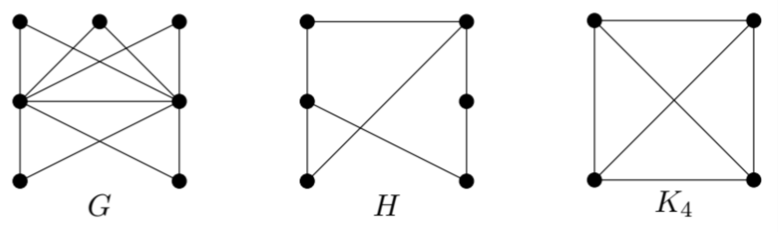




Definición

Un grafo euleriano en un grafo G que posee un circuito euleriano.

Ejemplos:



- G es euleriano.
- H tiene recorrido euleriano.
- K_4 no tiene recorrido euleriano.

Circuitos eulerianos

Lema

Dado un grafo G con $\delta(G) \geq 2$, entonces G contiene un ciclo.

Demostración.

En clase... $\square$

Teorema

Un grafo conexo es euleriano si y sólo si todos sus vértices tienen grado par.

Demostración.

En clase... $\square$

Corolario

Todo grafo conexo par se puede descomoner en ciclos.

Circuitos eulerianos

Dado un grafo conexo par, ¿cómo hallar un circuito euleriano?

Algoritmo de Fleury

1. Considerar cualquier vértice $u \in V(G)$.
    - $W \leftarrow u$
    - $x \leftarrow u$
    - $F \leftarrow G$
2. Mientras $\mathsf{d}_F(x) > 0$, seleccionar una arista $e = xv$ (incidente en x), donde e no es de corte de F, salvo que tal arista no exista.
    - $W \leftarrow uev$
    - $x \leftarrow v$
    - $F \leftarrow F \setminus e$
3. W es un circuito euleriano.

Teorema

Si G es conexo y par entonces el camino que devuelve el Alg. de Fleury es un circuito euleriano.

Circuitos eulerianos

Teorema

Un grafo conexo G tiene un recorrido (no cerrado) euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Grafos dirigidos (digrafos)

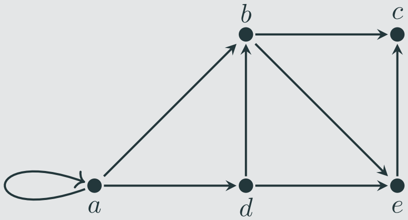
Definición

Un grafo dirigido o digrafo G es un par ordenado (V, A) donde V es el conjunto de vértices y A es el conjunto de sus arcos o aristas dirigidas. Podemos pensar que hay una función ψ_G que asigna a cada arco un par ordenado de vértices. Es decir, para cada $e \in A$, existe un par ordenado $(i, j) \in V \times V$ tal que $\psi_G(e) = (i, j)$.

Un **bucle** *en un digrafo es una arista cuyos extremos coinciden, es decir, $\psi_G(e) = (i, i)$ para algún $i \in V$.* **Aristas múltiples** *o* **repetidas** *son aristas distintas $e, e' \in A$ tales que $\psi_G(e) = \psi_G(e')$.*

Ejemplo

Consideremos el grafo dirigido $G = (V, A)$, donde $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, c), (b, e), (d, b), (e, c)\}$.



Grafos dirigidos (digrafos)

Definición

El grafo subyacente de un digrafo D es el grafo G obtenido considerando los arcos como pares no ordenados.

Observación

Las definiciones sobre digrafos, de subdigrafo, isomorfismos, etc. son análogas a las de grafos.

- Matriz de adyacencia $A(D) = \{a_{ij}\}$ donde a_{ij} es la cantidad de arcos $(v_i, v_j) \in E(D)$.
- Matriz de incidencia $M(D) = \{m_{ve}\}$ donde:

$$m_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{si } e = (v, u), \\ -1 & \text{si } e = (u, v), \\ 0 & \text{si } e = (u, w),\ u \neq v \neq w. \end{cases}$$

Grafos dirigidos (digrafos)

Definición

Sea D un digrafo y $v \in V(D)$. El grado de salida de v es la cantidad de aristas de la forma (v, u), i.e. que tienen a v como origen. Notación $d_D^+(v)$.

El grado de entrada de v es la cantidad de aristas de la forma (u, v), i.e. que tienen a v como final. Notación $d_D^-(v)$.

Ejercicio: Sea D un digrafo,

$$\sum_{v \in V(D)} d_D^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d_D^-(v)$$

Observación

Se definen de manera análoga camino dirigido, recorrido dirigido, camino simple dirigido, etc., respetando el orden de los arcos y nodos en la lista.

Definición

Un circuito (recorrido) euleriano dirigido en un digrafo es un circuito (recorrido) dirigido que contiene todas las aristas.

Lema

Sea D un digrafo. Si $d^+(v) \geq 1$ $\forall v \in V(D)$ entonces D contiene un ciclo.

Demostración.

En clase... $\square$

Teorema

Un digrafo D es euleriano si y sólo si $d^+(v) = d^-(v)$ $\forall v \in V(D)$ y el grafo subyacente tiene a lo sumo una componente conexa no trivial.

Demostración.

Ejercicio. $\square$