

ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9)

2024

3.4 Ortogonalidad

Vamos a trabajar con este concepto tan importante y que nos va a permitir obtener bases más amigables para trabajar.

Definición 1 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π .

- $u, v \in V$ se dicen **ortogonales** si $\langle u, v \rangle = 0$.
- $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ se dice **ortogonal** si $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$.
- $S = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ se dice **ortonormal** si es ortogonal y $\|v_i\| = 1$ para todo $i = 1, \dots, r$.

Ejemplos 1 1. La base canónica de \mathbb{R}^n es un conjunto ortonormal.

2. $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{(1, 1), (1, -1)\}$ es un conjunto ortogonal pero no ortonormal (EJERCICIO). El conjunto $S' = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)\}$ es ortonormal (EJERCICIO).

Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Si B es un conjunto ortogonal, la matriz asociada al π es

$$g = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|v_1\|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|v_2\|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|v_n\|^2 \end{pmatrix}.$$

Y si B es ortonormal, $g = Id$. Las bases ortogonales se suelen abreviar con b.o., y las ortonormales con b.o.n.

Si B es b.o.n., el producto interno en V puede describirse en términos de coordenadas de la base B de manera similar al producto interno usual de \mathbb{F}^n . En efecto, si $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i \in V$ entonces

$$\langle u, v \rangle = [u]_B g \overline{[v]_B}^t = [u]_B Id \overline{[v]_B}^t = [u]_B \overline{[v]_B}^t = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}.$$

Luego también la norma se expresa de manera sencilla como en \mathbb{F}^n : $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Sigue que dada una base de un ev (de dimensión finita), existe un único π tq la base dada es bon:

Proposición 1 Sea V un \mathbb{F} -ev, $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Entonces existe un único π $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V tal que la base B es ortonormal respecto de ese π .

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: definir el π a partir de la matriz $g = (\langle v_i, v_j \rangle) = Id$ asociada a la base B .

□

Además, todo conjunto ortogonal de vectores no nulos resulta ser li:

Proposición 2 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π y $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \bar{0}$ $\forall i = 1, \dots, r$. Entonces S es li.

Demostración: Veamos que la cl $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = \bar{0}$ tiene sólo la solución trivial. En efecto, $\forall j = 1, \dots, r$ tenemos que

$$0 = \langle \bar{0}, v_j \rangle = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r, v_j \rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2,$$

de donde por ser S ortogonal y todos sus vectores no nulos sigue que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, r$. Luego S es li. □

Así, si S es un conjunto finito y ortogonal en un ev V , resulta ser una base para $W = \text{span}(S)$, y podemos calcular los coeficientes de los elementos $v \in W$ con ayuda del π :

Proposición 3 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π y $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ortogonal tal que $v_i \neq \bar{0}$ $\forall i = 1, \dots, r$. Sea $W = \text{span}(S)$. Si $v \in W$ ent

$$v = \sum_{j=1}^r \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

Demostración: Supongamos que $v = \sum_{j=1}^r \alpha_j v_j$. Calculemos los coeficientes. Para esto, consideremos $\forall j = 1, \dots, r$

$$\langle v, v_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^r \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2,$$

de donde $\alpha_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$. □

Corolario 1 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π y $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = \text{span}(S)$. Si $v \in W$ ent

$$v = \sum_{j=1}^r \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Corolario 2 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Sea $v \in V$.

$$1. \text{ Si } B \text{ es li entonces } v = \sum_{j=1}^n \frac{\langle v, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j.$$

$$2. \text{ Si } B \text{ es on entonces } v = \sum_{j=1}^n \langle v, v_j \rangle v_j.$$

Corolario 3 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π y $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto ortonormal. Sea $W = \text{span}(S)$. Si $u, v \in W$ ent

$$1. \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^r \langle u, v_i \rangle \overline{\langle v, v_i \rangle}.$$

$$2. \|u\| = \left(\sum_{i=1}^r |\langle u, v_i \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera en un ev de dimensión finita, podemos construir una bon: este es el conocido método de ortonormalización de Gram-Schmidt. El proceso resulta en una base con una cualidad extra:

Teorema 1 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con pi , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$ y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Entonces existe $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ bon de V tal que $\text{pt } k = 1, \dots, n$,

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}.$$

Demostración: En primer lugar construiremos una bo $B'' = \{u_1, \dots, u_n\}$ que verifique lo indicado, luego normalizando esta base otendremos la B' buscada.

- Definimos $u_1 := v_1$. Luego $\text{span}\{v_1\} = \text{span}\{u_1\}$.
- Buscamos ahora $u_2 \in V$ tq $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ y $\text{span}\{v_1, v_2\} = \text{span}\{u_1, u_2\}$. Para esto necesitamos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ tales que $u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2$ y que $\beta \neq 0$ (por qué??). Supongamos spg que $\beta \neq 1$, o sea $u_2 = \alpha v_1 + v_2$. Veamos:

$$0 = \langle u_2, u_1 \rangle = \langle \alpha v_1 + v_2, u_1 \rangle = \alpha \langle v_1, v_1 \rangle + \langle v_2, v_1 \rangle,$$

de donde $\alpha = -\frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$. Así,

$$u_2 := v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

verifica lo requerido.

- Procedemos a construir inductivamente: si suponemos que ya tenemos contruidos $u_1, \dots, u_r \in V$, con $r < n$, tales que
 - $\langle u_i, u_j \rangle = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$,
 - $\text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_r\}$.

Definimos entonces el vector

$$u_{r+1} := v_{r+1} - \sum_{k=1}^r \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k.$$

Así, para $1 \leq j \leq r$,

- Calculemos los pi entre el nuevo vector y los anteriores:

$$\begin{aligned} \langle u_{r+1}, u_j \rangle &= \langle v_{r+1} - \sum_{k=1}^r \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} u_k, u_j \rangle = \langle v_{r+1}, u_j \rangle - \sum_{k=1}^r \frac{\langle v_{r+1}, u_k \rangle}{\|u_k\|^2} \langle u_k, u_j \rangle \\ &= \langle v_{r+1}, u_j \rangle - \frac{\langle v_{r+1}, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} \langle u_j, u_j \rangle = 0, \end{aligned}$$

puesto que $\langle u_j, u_k \rangle = 0$ si $k \neq j$.

- $u_{r+1} \in \text{span}\{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ y $v_{r+1} \in \text{span}\{u_1, \dots, u_{r+1}\}$ de donde ambos spans son iguales.

Así construimos hasta obtener una bon que verifica lo requerido. Para terminar basta considerar $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ donde $w_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$, $k = 1, \dots, n$. □

Corolario 4 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con pi , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev no trivial ($U \neq \{0\}$) ents existe una bon de V que contiene una bon de U .

Demostración: Sea $B_U = \{v_1, \dots, v_r\}$ base de U . Completamos a $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V . Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos una base $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$, y esta base es tal que $\text{span}\{v_1, \dots, v_r\} = \text{span}\{w_1, \dots, w_r\}$, luego $B'_U = \{w_1, \dots, w_r\}$ es bon de U . □

Ejemplo 1 Sea $B = \{(1, 0, i), (1, 1, 2 + i), (0, 0, 1)\}$ base de \mathbb{C}^3 . B es una base (EJERCICIO). Aplicando el proceso de Gram-Schmidt obtenemos la siguiente bon:

$$B' = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}i \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}i, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right) \right\}.$$

Complemento ortogonal

Definición 2 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con pi . Sea $S \subset V$ un conjunto. Definimos el complemento ortogonal de S como el conjunto

$$S^\perp = \{v \in V : \langle v, s \rangle = 0 \text{ para todo } s \in S\}.$$

Proposición 4 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con pi . Sea $S \subset V$. Entonces S^\perp es un sev de V .

Demostración: EJERCICIO. □

Observar que $\bar{0} \in S^\perp$ para todo $S \subset V$.

Ejemplo 2 $V = \mathbb{R}^2$. Consideremos el conjunto $S = \{(1, 1)\}$. Tenemos que

$$S^\perp = \{(1, 1)\}^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \langle (x, y), (1, 1) \rangle = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = \text{span}\{(1, -1)\}.$$

Cuando S es además sev de V , se tiene una descomposición de V en sev ortogonales:

Proposición 5 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con pi , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces:

1. $U \cap U^\perp = \{\bar{0}\}$,
2. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.

Luego resulta $U \oplus U^\perp = V$.

Demostración:

1. Sea $u \in U \cap U^\perp$. Veamos que $u = \bar{0}$. Puesto que $u \in U$ y $u \in U^\perp$, resulta $\langle u, u \rangle = 0$. Luego $u = \bar{0}$.
2. Sea $B_U = \{v_1, \dots, v_r\}$ base de U , $r = \dim U$. Completamos a una base de V : $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Aplicamos el proceso de Gram-Schmidt y obtenemos $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ bon de V tal que $B'_U = \{w_1, \dots, w_r\}$ bon de U . Luego, $\{w_{r+1}, \dots, w_n\}$ bon de U^\perp . En efecto: si $j > r$, $w_j \in U^\perp$, puesto que si tomamos $v \in \text{span} B'_U$, $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i$, de donde

$$\langle w_j, v \rangle = \langle w_j, \sum_{i=1}^r \alpha_i w_i \rangle = \sum_{i=1}^r \bar{\alpha}_i \langle w_j, w_i \rangle = 0,$$

por ser B' bon. Esto nos dice que $\text{span}\{w_{r+1}, \dots, w_n\} \subset U^\perp$. Pero como $n - \dim U = n - r = \dim \text{span}\{w_{r+1}, \dots, w_n\} \leq \dim U^\perp$ resulta $n \leq \dim U + \dim U^\perp \leq n$ (pues $U \cap U^\perp = \{\bar{0}\}$). Concluimos así que $\text{span}\{w_{r+1}, \dots, w_n\} = U^\perp$ y $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$. □

Ejemplos 2

$V = \mathbb{C}^3$. $S = \{(1, i, 1 + i)\}$. Entonces

$$S^\perp = \text{span}\{(-i, 1, 0), (i - 1, 0, 1)\}.$$

EJERCICIO!

$V = \mathbb{C}^4$. $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0, (1 - i)x_2 + x_3 = 0\}$. Para calcular S^\perp observamos que

- $x_1 + ix_2 + x_3 - x_4 = 0$ es lo mismo que $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (1, -i, 1, -1) \rangle$ y
- $(1 - i)x_2 + x_3 = 0$ se puede escribir como $\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (0, 1 + i, 1, 0) \rangle$.

Entonces

$$S^\perp = \text{span}\{(1, -i, 1, -1), (0, 1 + i, 1, 0)\}.$$

Asociado a un sev siempre existe una función muy importante, la proyección. Cuando tenemos π , la proyección nos dará una herramienta muy útil para las aplicaciones que veremos en la sección próxima. Nos centraremos en el siguiente problema que podremos resolver:

Problema: Dado un sev U de un ev V de dimensión finita con π y un punto $v \in V$, encontrar si es posible el punto de U que se encuentra a menor distancia de v .

Aquí es necesario interpretar qué se entiende por distancia de un punto a un conjunto. Hacemos la siguiente definición, y luego definimos la función proyección:

Definición 3 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π , sea $S \subset V$ subconjunto y $v \in S$. Definimos la distancia de v a S como

$$d(v, S) = \inf\{d(v, s) : s \in S\} = \inf\{\|v - s\| : s \in S\}.$$

Definición 4 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. La función $p_U : V \rightarrow V$ definida por $p_U(v) = v$ si $v \in U$ y $p_U(v) = \bar{0}$ si $v \in U^\perp$ se llama **proyección ortogonal sobre U** .

Veamos algunas propiedades de la proyección:

1. p_U es una tl. EJERCICIO.
2. $\ker p_U = U^\perp$. EJERCICIO.
3. Si $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bon de V tal que $B_U = \{v_1, \dots, v_r\}$ bon de U , entonces

$$p_U(v) = p_U\left(\sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i\right) = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle p_U(v_i) = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle v_i.$$

4. $p_U + p_{U^\perp} = id_V$. EJERCICIO.

Estamos en condiciones de resolver el problema:

Proposición 6 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con π , $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces para $v \in V$ tenemos que

$$d(v, U) = \|v - p_U(v)\|.$$

Es decir, el punto de U más cercano a v es, como podíamos intuir, $p_U(v)$.

Demostración: Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bon de V tq $B_U = \{v_1, \dots, v_r\}$ bon de U . Sea $v \in V$, luego $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$ y $p_U(v) = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle v_i$. Si $u \in U$, $u = \sum_{i=1}^r \langle u, v_i \rangle v_i$. Luego,

$$\begin{aligned} v - u &= \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i - \sum_{i=1}^r \langle u, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^r (\langle v, v_i \rangle - \langle u, v_i \rangle) v_i + \sum_{i=r+1}^n \langle v, v_i \rangle v_i, \text{ luego} \\ \|v - u\|^2 &= \langle v - u, v - u \rangle = \sum_{i=1}^r |\langle v - u, v_i \rangle|^2 + \sum_{i=r+1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2 \geq \sum_{i=r+1}^n |\langle v, v_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

y la igualdad se da sii $\sum_{i=1}^r |\langle v - u, v_i \rangle|^2 = 0$, es decir, si $\langle v - u, v_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \dots, r$, que es lo

mismo que $\langle v, v_i \rangle = \langle u, v_i \rangle$ para todo $i = 1, \dots, r$. Es decir, para $u = \sum_{i=1}^r \langle u, v_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle v_i = p_U(v)$.

Tomando ínfimo resulta $d(v, U) = \|v - p_U(v)\|$.

□

Corolario 5 Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{F} -ev con $\dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $U \subset V$ sev. Entonces para $v \in V$ tenemos que

$$d(v, U) = \|p_{U^\perp}\|.$$

Demostración: EJERCICIO. Ayuda: $v = id(v) = p_U(v) + p_{U^\perp}(v)$.

□

Ejemplo 3 Sean $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$, $P(1, -1, 2)$ y $Q(1, 1, 2)$. Calculemos $d(P, S) = \|p_{S^\perp}(P)\|$. Tenemos que $S = (\text{span}\{(2, 2, -1)\})^\perp$, de donde $\{(2, 2, -1)\}$ es una base (ortogonal) de S^\perp . Normalizamos y obtenemos que $\{(2/3, 2/3, -1/3)\}$ es una base de S^\perp . Esto nos permite calcular $p_{S^\perp}(P)$:

$$\begin{aligned} p_{S^\perp}(1, -1, 2) &= \langle (1, -1, 2), (2/3, 2/3, -1/3) \rangle (2/3, 2/3, -1/3) = (-4/9, -4/9, 2/9), \\ \|p_{S^\perp}(1, -1, 2)\|^2 &= 4/9, \end{aligned}$$

de donde sigue que $d(P, S) = 2/3$. EJERCICIO: completar los cálculos. EJERCICIO: Calcular $d(Q, S)$.