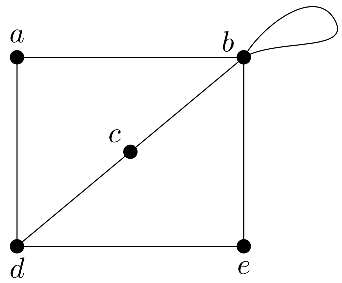
Práctica 4 - Caminos, ciclos y recorridos

1. Considerar el grafo de la figura. En cada uno de los siguientes ítems, determinar si el camino indicado es un camino simple, un recorrido, un ciclo y/o un circuito. Además, determinar la longitud de cada camino.



   a) (a, b, c, d, e)
   b) (b, b)
   c) (d, c, b, e, d)
   d) $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
   e) (a, d, c, b, e)

2. En cada caso, determinar si K_4 contiene un camino con la característica indicada.

   a) Un camino que no es un recorrido.
   b) Un recorrido que no es cerrado y que no es un camino simple.
   c) Un circuito que no es un ciclo.

3. Sea G un grafo. Demostrar que si C es un circuito que contiene a un vértice v, entonces existe un ciclo contenido en C al cual v pertenece.

4. Sea G un grafo conexo. La *distancia* entre dos vértices v y w en G, que notaremos $\operatorname{dist}(v, w)$, es la menor longitud de un v, w-camino. El *diámetro* de G es

$$\operatorname{diam}(G) = \max \left\{ \operatorname{dist}(v, w) : v, w \in V(G) \right\}$$

   a) Determinar el diámetro del grafo del ejercicio $(8a)$.
   b) Determinar el diámetro del grafo de Petersen.
   c) Determinar el diámetro del n-cubo Q_n.
   d) Determinar el diámetro del grafo completo K_n.

5. Para un grafo G, denotamos por $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de G. Sea $v \in V(G)$.

   a) Probar que $\kappa(G) - 1 \leqslant \kappa(G - v) \leqslant \kappa(G) + d(v) - 1$.
   b) Probar que si G es conexo, entonces $d(v) \geqslant \kappa(G - v)$.
   c) Concluir del ítem anterior que si v es vértice de corte de un grafo G, entonces $d(v) \geqslant 2$.
   d) Probar que si $d(v) \geqslant 2$ y $\kappa(G - v) = \kappa(G)$, entonces G tiene un ciclo que contiene a v. ¿Es cierta la recíproca?

6. *a*) Sea G un grafo simple. Probar que una arista $e \in E(G)$ es de corte si y solo si no pertenece a ningún ciclo.

   b) Dar un ejemplo de un grafo conexo donde toda arista sea una arista de corte.

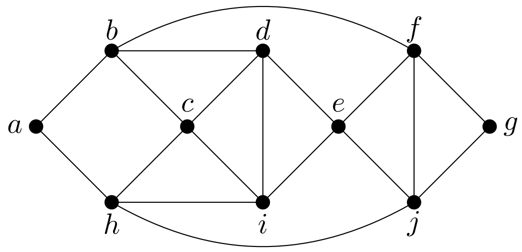
7. Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Si un grafo G tiene una arista de corte, entonces tiene un vértice de corte.

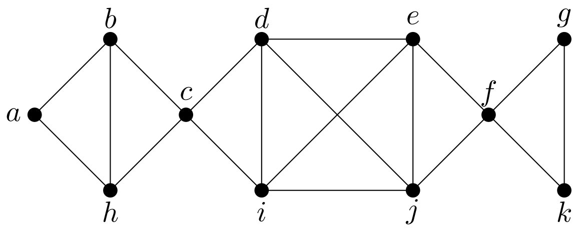
   b) Si un grafo G tiene un vértice de corte, entonces tiene una arista de corte.

8. En cada uno de los siguientes ítems, determinar si el grafo tiene un circuito euleriano. Si lo tiene, mostrar uno. Si no lo tiene, determinar si tiene un recorrido euleriano.

   a)



   b)



9. Determinar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Todo grafo bipartito euleriano tiene una cantidad par de aristas.

   b) Todo grafo simple euleriano con una cantidad par de vértices, tiene una cantidad par de aristas.

   c) Si todos los vértices de un grafo G tienen grado par, entonces todo recorrido maximal en G es un circuito euleriano.

10. Probar que un grafo conexo tiene un recorrido (no cerrado) euleriano ssi tiene exactamente dos vértices de grado impar.

11. *a*) Dar un grafo conexo con más de 8 vértices y exactamente 4 vértices de grado impar.

    b) Sea G un grafo conexo que tiene exactamente cuatro vértices de grado impar. Demostrar que existen dos caminos sin aristas repetidas cuyos extremos son los cuatro vértices de grado impar, de manera que cada arista en G está en exactamente una de los caminos.

    c) Ilustrar el ítem ($11b$) con el grafo dado en el ítem ($11a$).

    d) Enunciar y demostrar una generalización del ítem ($11b$) para un grafo con un número arbitrario de vértices de grado impar.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

12. Demostrar que si D es un digrafo entonces $\sum_{v \in V(D)} d^+(v) = \sum_{v \in V(D)} d^-(v)$.

13. Demostrar que un digrafo D es euleriano ssi $d^+(v) = d^-(v),\ \forall v \in V(D)$ y el grafo subyacente de D tiene a lo sumo una componente no trivial.