Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal - LCC, LM, PM - 2024

Primera Evaluación Parcial - 22/04/2024

Apellido y nombre: Carrera:

---

1. Sean

   un conjunto $V = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \text{ donde } x, y \in \mathbb{R} \right\}$,

   una función $T : \mathbb{R}_2[x] \to V$ definida por $T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} c & -a-b \\ a+b & c \end{pmatrix}$.

   (a) Pruebe que V es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con la suma y producto por escalar usuales de matrices.

   (b) Dé una base $\mathfrak{B}$ de V y su dimensión. Justifique su respuesta.

   (c) Pruebe que T es una transformación lineal.

   (d) Calcule $\ker T$ y $\operatorname{Im} T$. Determine si T es un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo. Justifique su respuesta.

   (e) Dadas las bases $\mathcal{C} = \{1, 1+x, 1+2x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ (pruebe que es base) y $\mathfrak{B}$ (del ítem 1b), calcule $[T]_{\mathcal{C}\mathfrak{B}}$.

2. Sea la base de $\mathbb{R}^3$ (no justifique esto)

   $\mathfrak{B}_1 = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$,

   y la función $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

   $\langle x, y \rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$.

   (a) Pruebe que la función $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define un producto interno en $\mathbb{R}^3$. Dé su matriz en la base $\mathfrak{B}_1$.

   (b) Sea $S = \operatorname{span}\{(1,0,0), (1,1,0)\}$. Calcule $S^\perp$ y dé una base ortonormal de S y $S^\perp$, para el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

   (c) Calcule la proyección de $v = (3,1,4)$ sobre S.

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) Sea V un F-ev de dimensión 3. Sean U y W dos subespacios de V de dimensión 1 con intersección trivial. Entonces $(U \oplus W)^0 = U^0 \oplus W^0$.

   (b) Sea V un espacio vectorial real con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sean B_1 y B_2 bases de V, sea g_2 la matriz del producto interno con respecto a la base B_2 y sea $A = C_{B_1 \to B_2} g_2$. Entonces $\langle x, y \rangle = [x]_{B_1} A [y]^t_{B_2}$.

   (c) Si U y W son dos subespacios de un espacio euclídeo V de dimensión finita que se suman de manera directa entonces son ortogonales.

   (d) Sea $T \in L(\mathbb{R})$. Entonces la función $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $b(x,y) = T(x)T(y)$ es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^2$.