Facultad de
Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura

Probabilidad y Estadística

Unidad 6: Vector aleatorio

Lic. Maite San Martín

Junio 2025

Vector aleatorio
Introducción

Hasta el momento trabajamos con variables aleatorias unidimensionales: definimos un experimento aleatorio ε, un espacio muestral S asociado a este, y alguna función X que cuantifica de alguna forma alguna característica observable. Sin embargo, puede haber ocasiones en las que puede ser interesante observar más de una característica a parir de dicha experiencia aleatoria.

Por ejemplo, nuestro experimento podría consistir en seleccionar al azar algún estudiante que ya haya cursado Probabilidad y Estadística en la LCC, y podríamos definir las variables aleatorias X_1: $nota\ del\ primer\ parcial$, X_2: $nota\ del\ segundo\ parcial$, X_3: $nota\ del\ trabajo\ práctico$ y X_4: $ciclo\ lectivo\ de\ cursada$.

Vector aleatorio
Definición

Sea ε un experimento y S un espacio muestral asociado con ε. Sean $X = X(s)$ e $Y = Y(s)$ dos funciones que asignan un número real a cada uno de los resultados $s \in S$. Llamamos a (X, Y) variable aleatoria bidimensional (o vector aleatorio).

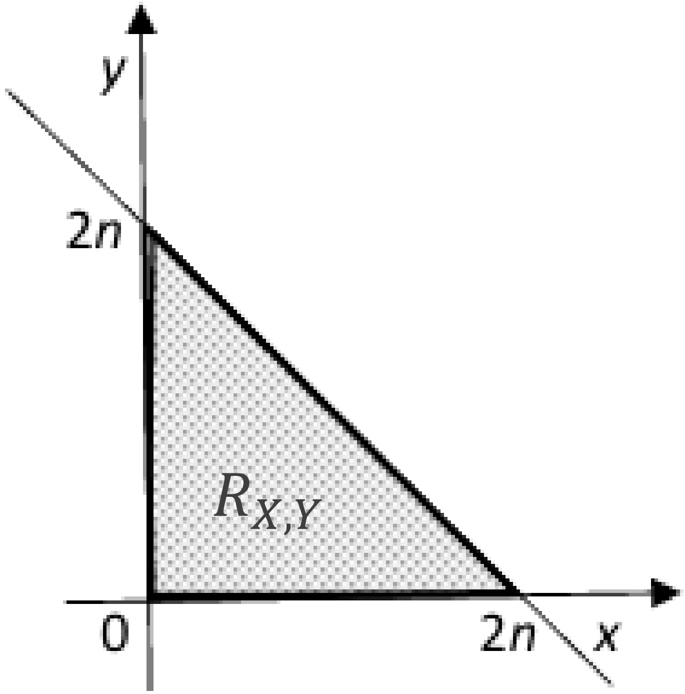
Análogamente, si $X_1 = X_1(s)$, $X_2 = X_2(s), \dots, X_n = X_n(s)$ son n funciones cada una de las cuales asigna un número real a cada resultado $s \in S$, entonces vamos a llamar a $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ variable aleatoria n-dimensional (o vector aleatorio n-dimensional).

Vamos a centrarnos en el caso bidimensional, aunque todo lo expuesto en esta presentación puede extenderse de forma casi directa al caso n-dimensional. Cuando hablemos de una variable aleatoria bidimensional (X, Y) nos vamos a referir al resultado de un experimento en el que se han medido las dos características numéricas X e Y.

Vector aleatorio
Definición

Cuando nos queramos referir a los valores que toman X e Y hablaremos del recorrido de (X, Y), y lo simbolizaremos $R_{X,Y}$. Cabe destacar que $R_{X,Y}$ refiere al conjunto de valores posibles para el par (X, Y).

En el caso bidimensional, por ejemplo, el recorrido de (X, Y) será un subconjunto del plano euclidiano. Cada uno de los resultados X(s), Y(s) se puede representar como un punto (x, y) en el plano.



Vector aleatorio
Definición

Como en el caso unidimensional, podemos distinguir entre dos tipos básicos de vectores aleatorios: los discretos y los continuos.

(X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta si los valores posibles de (X, Y) son finitos o infinitos numerables. Es decir, los valores posibles de (X, Y) se pueden representar como $\left(x_i, y_j\right)$, $i = 1,2, \dots n, \dots;\ \ j = 1,2, \dots, m, \dots$

(X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua si (X, Y) puede tomar todos los valores en un conjunto no numerable del plano euclidiano. Por ejemplo, (X, Y) podría tomar todos los valores en el rectángulo $\{(x, y)\ /\ a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ o todos los valores en el círculo $\{(x, y)\ /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Vector aleatorio discreto
Definición

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, entonces cada resultado posible (x_i, y_j) puede asociarse con un número $\mathrm{p}(x_i, y_j)$ que representa $\mathrm{P}(X = x_i, Y = y_j)$, y que satisface las siguientes condiciones:

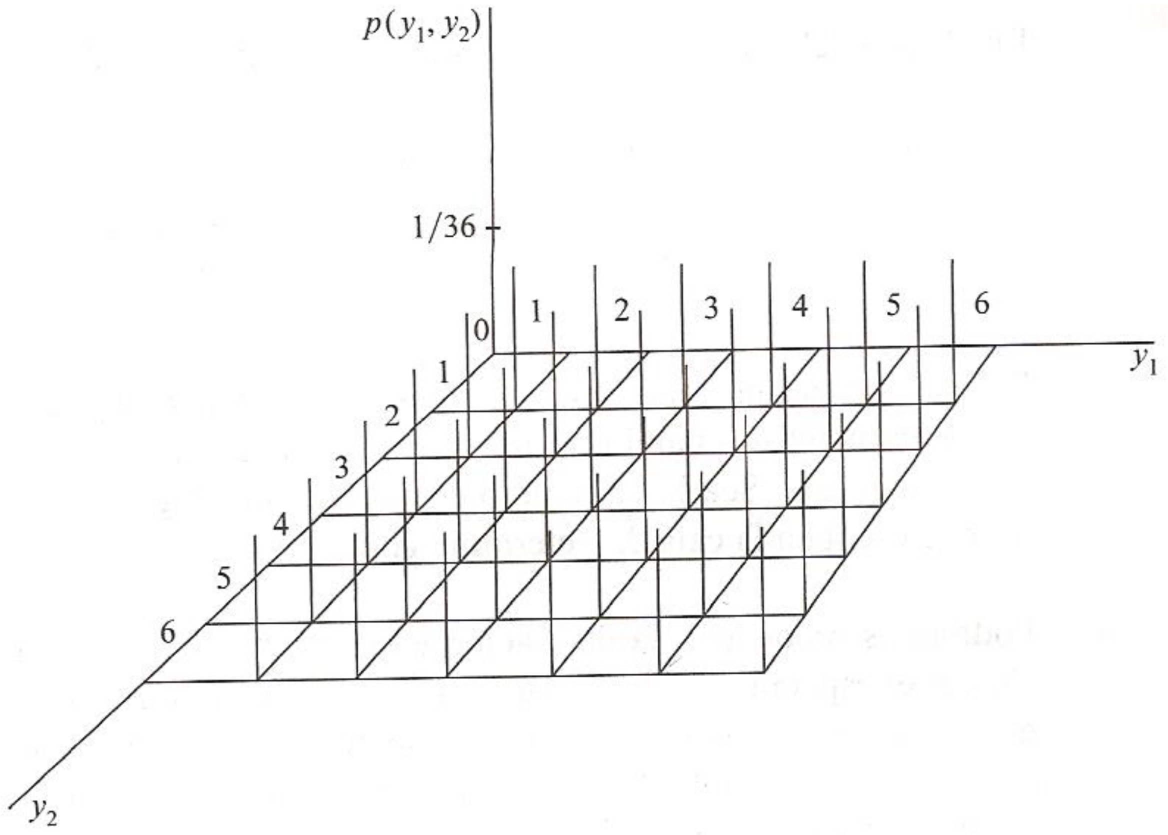
- $\mathrm{p}(x_i, y_j) \geq 0$ para todo (x_i, y_j)
- $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}(x_i, y_j) = 1$
- Si $M \subset R_{X,Y}$, entonces $\mathrm{P(M)} = \sum_{(x,y) \in M} \mathrm{p}(x, y)$

La función p definida para todo $(x_i, y_j) \in R_{X,Y}$ se llama función de probabilidad puntual de (X, Y), y el conjunto de ternas $\left(x_i, y_j, p(x_i, y_j)\right)$, $i, j = 1,2, \dots$ es llamada distribución de probabilidades de (X, Y).

Vector aleatorio discreto

Ejemplo

Si consideramos el experimento aleatorio "tirar dos dados y registrar el número que sale en las caras superiores", y definimos las variables
X: $valor\ en\ la\ cara\ superior\ del\ dado$ 1 e
Y: $valor\ en\ la\ cara\ superior\ del\ dado$ 2,
entonces (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta con una distribución de probabilidades como la graficada.



Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Dos líneas de producción manufacturan cierto tipo de artículo. Supongamos que para cualquier día dado la capacidad de producción máxima es de 5 artículos para la línea I y de 3 artículos para la línea II. Sea (X, Y) la variable aleatoria bidimensional que da el número de artículos producidos por la línea I y por la línea II respectivamente. La distribución de probabilidades conjunta de (X, Y) es:

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

$$p(4,2) = P(X = 4, Y = 2) = 0,05$$

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Y \ X	0	1	2	3	4	5
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05

Si definimos el suceso B: más artículos producidos por la línea I que por la línea II, luego

$$P(B) = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}07 + 0{,}09 + 0{,}04 + 0{,}05 + 0{,}06 \\ +0{,}08 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}06 + 0{,}05 = 0{,}75$$

Vector aleatorio discreto
Definición

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta, entonces la función de distribución acumulada (fda) F de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está definida por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{\substack{u \leq x \\ v \leq y}} p(y, v)$$

Vector aleatorio discreto

Definición

Con cada variable aleatoria bidimensional (X, Y) asociamos dos variables aleatorias unidimensionales, llamadas X e Y respectivamente. Luego, podría interesarnos la distribución de probabilidades de X o la de Y.

Volviendo al ejemplo, si a la tabla de doble entrada que define la distribución de probabilidades conjunta de (X, Y) le agregamos los totales marginales, es decir los totales por fila y los totales por columna, entonces las probabilidades que aparecen en esos vectores de totales son las distribuciones marginales, que refieren exclusivamente a una de las dos variables, sin tomar la otra en consideración.

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Con cada variable aleatoria bidimensional (X, Y) contará con dos distribuciones marginales, una para cada variable del vector.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

$p(y_j)$
(marginal)

$p(x_i)$
(marginal)

$p(x_i, y_j)$
(conjunta)

Vector aleatorio discreto
Definición

Dado que $X = x_i$ puede ocurrir con $Y = y_1$, con $Y = y_2$, ..., con $Y = y_j$, ... entonces

$$p(x_i) = P(X = x_i) = P\big((X = x_i, Y = y_1) \cup (X = x_i, Y = y_2) \cup \cdots\big) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

Así definida, la función p representa la distribución marginal de probabilidades de X.

Análogamente, definimos $q(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$ como la distribución marginal de probabilidades de Y.

Vector aleatorio discreto
Definición

Entonces:

- (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad conjunta definida por $p(x_i, y_j)$.
- A partir de $p(x_i, y_j)$ puede definirse $p_X: R_X \to \mathbb{R}$, llamada distribución marginal de X y definida como $p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$
- A partir de $p(x_i, y_j)$ puede definirse $p_Y: R_Y \to \mathbb{R}$, llamada distribución marginal de Y y definida como $p_Y(y_j) = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Volviendo al ejemplo de las líneas de producción, imaginemos que queremos estimar la probabilidad de que -en un día cualquiera seleccionado al azar- la primera línea haya manufacturado 2 productos sabiendo que la segunda línea fabricó 2. ¿Cómo podríamos proceder?

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Vector aleatorio discreto
Definición

En términos generales, para el caso discreto, podemos definir la distribución de X condicionada a un valor en particular de Y como

$$p(x\ /y) = p_{X/Y=y}(x) = P(X = x\ /\ Y = y) = \frac{p(x,y)}{p_Y(y)}, \qquad \text{si } p_Y(y) > 0$$

$$p(y\ /x) = p_{Y/X=x}(y) = P(Y = y\ /\ X = x) = \frac{p(x,y)}{p_X(x)}, \qquad \text{si } p_X(x) > 0$$

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Sabiendo que la segunda línea fabricó 2, tenemos:

$$p_{X/Y=2}(0) = \frac{p(0,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,01}{0,25} = 0,04 \qquad p_{X/Y=2}(2) = \frac{p(2,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,20 \qquad p_{X/Y=2}(4) = \frac{p(4,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,20$$

$$p_{X/Y=2}(1) = \frac{p(1,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,03}{0,25} = 0,12 \qquad p_{X/Y=2}(3) = \frac{p(3,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,20 \qquad p_{X/Y=2}(5) = \frac{p(5,2)}{p_Y(2)} = \frac{0,06}{0,25} = 0,24$$

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
0	0	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	0,25
1	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,08	0,26
2	0,01	0,03	0,05	0,05	0,05	0,06	0,25
3	0,01	0,02	0,04	0,06	0,06	0,05	0,24
Total	0,03	0,08	0,16	0,21	0,24	0,28	1

Vector aleatorio discreto
Definición

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional discreta. Entonces X e Y son independientes si y sólo si se cumplen las siguientes proposiciones:

- $p_{X/Y=y_j}(x_i) = p_X(x_i)$ para todo i, j
- $p_{Y/X=x_i}(y_j) = p_Y(y_j)$ para todo i, j
- $p(x_i, y_j) = p_X(x_i)\, p_Y(y_j)$ para todo i, j

Nota: cabe destacar el claro correlato que esto tiene a la independencia entre sucesos definida en la unidad 3.

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

En un anuncio luminoso hay tres lámparas en la primera fila y cuatro lámparas en la segunda fila. Sean X: número de lámparas de la primera fila que se funden en un instante de tiempo t, e Y: número de lámparas de la segunda fila que se funden en el mismo instante de tiempo. La función de probabilidad conjunta viene dada por:

X \ Y	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

Encontrar:

- $p_X(x),\ \forall x \in R_X$
- $p_Y(y),\ \forall y \in R_Y$
- $P(X = 3\ /\ Y = 2)$
- $P(Y = 0\ /\ X = 3)$
- ¿Son X e Y v.a. independientes?

Coeficiente de correlación
Definición

Hasta ahora nos hemos interesado en los parámetros asociados con la distribución de variables aleatorias unidimensionales, tales como $E(X)$ y $V(X)$ que miden ciertas características de una distribución. Si tenemos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) podríamos calcular los valores característicos de cada una de las variables aleatorias unidimensionales que componen el vector, pero podría ser interesante encontrar algún parámetro que mida de alguna manera el grado de relación entre X e Y.

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional, se define ρ_{XY} el coeficiente de correlación lineal entre X e Y como:

$$\rho_{XY} = \frac{E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Coeficiente de correlación
Definición

Si recordamos que la $V(X)$ fue definida como $V(X) = E(X - E(X))^2$, entonces es clara la similitud con el numerador del coeficiente de correlación: $E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$; esta medida es llamada covariancia entre X e Y. Luego:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Algunas propiedades de ρ_{XY}:

- Es una medida adimensional
- Si X e Y son independientes, entonces $Cov(X,Y) = 0 \ \Rightarrow \rho_{XY} = 0$
- $\rho_{XY} = 0 \ \nRightarrow X$ e Y son independientes: ρ_{XY} sólo capta la correlación lineal entre X e Y, y las variables pueden relacionarse mediante otras formas funcionales

Coeficiente de correlación
Definición

Si recordamos que la $V(X)$ fue definida como $V(X) = E(X - E(X))^2$, entonces es clara la similitud con el numerador del coeficiente de correlación: $E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)$; esta medida es llamada covariancia entre X e Y. Luego:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Algunas propiedades de ρ_{XY}:

- $|\rho_{XY}| \leq 1$
- $\rho_{XY} = 1 \iff Y = aX + b, con\ a \in \mathbb{R}^+$
- $\rho_{XY} = -1 \iff Y = aX + b, con\ a \in \mathbb{R}^-$
- $\rho_{XY} = 0 \iff X\ e\ Y\ no\ se\ correlacionan\ linealmente$

Vector aleatorio discreto
Ejemplo

Volviendo al ejemplo del anuncio luminoso, podríamos cuantificar la correlación lineal que existe entre el número de lámparas de la primera fila que se funden en un instante de tiempo t (X) y el número de lámparas de la segunda fila que se funden en el mismo instante de tiempo (Y).

X \ Y	0	1	2	3	4
0	0.08	0.07	0.06	0.01	0.01
1	0.06	0.10	0.12	0.05	0.02
2	0.05	0.06	0.09	0.04	0.03
3	0.02	0.03	0.03	0.03	0.04

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Para poder calcularlo necesitamos:

- $E(X)$ y $V(X)$
- $E(Y)$ y $V(Y)$
- $E(XY)$

$\rho_{XY} = 0{,}2783$

Vector aleatorio continuo
Definición

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua que puede tomar todos los valores de la región R del plano euclídeo, entonces la función de densidad de probabilidades conjuntas f es una función que satisface las siguientes condiciones:

- $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in R$
- $\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = 1$
- Si $M \subset R$, entonces $P(M) = \iint_M f(x, y)\, dx\, dy$

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos que la cantidad de litros de agua consumidos por dos motores en funcionamiento puede modelarse con un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 5000 \leq x \leq 10000 \ \wedge 4000 \leq y \leq 9000 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

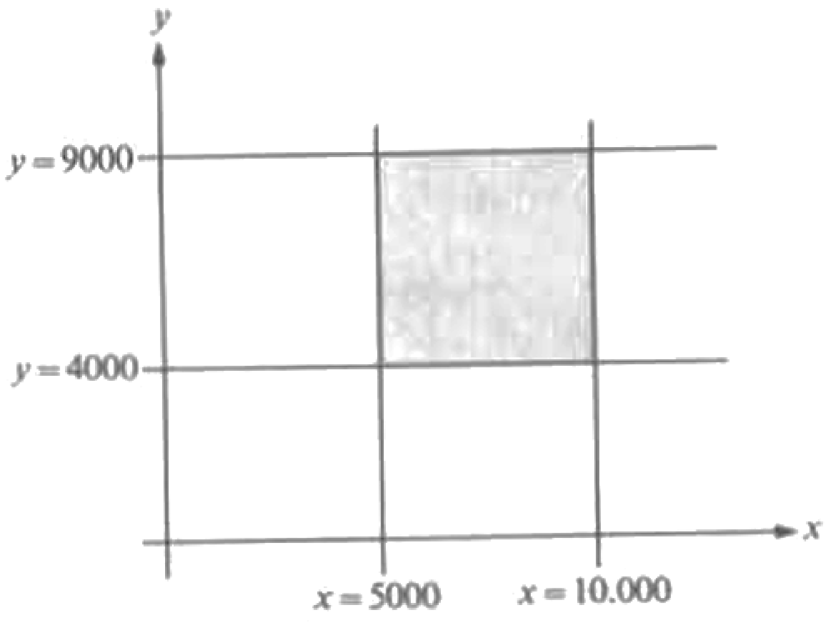
¿Cómo podemos determinar el valor de la constante c?

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos que la cantidad de litros de agua consumidos por dos motores en funcionamiento puede modelarse con un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} c, & 5000 \leq x \leq 10000 \ \wedge 4000 \leq y \leq 9000 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cómo podemos determinar el valor de la constante c?



Primero, podríamos graficar el recorrido del vector bidimensional (X, Y).

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos que la cantidad de litros de agua consumidos por dos motores en funcionamiento puede modelarse con un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & 5000 \leq x \leq 10000 \ \wedge 4000 \leq y \leq 9000 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cómo podemos determinar el valor de la constante c?

Por la propiedad de cierre de las funciones de densidad: $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$. Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{4000}^{9000}\int_{5000}^{10000} c\,dx\,dy = c \times 5000^2 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{5000^2}$$

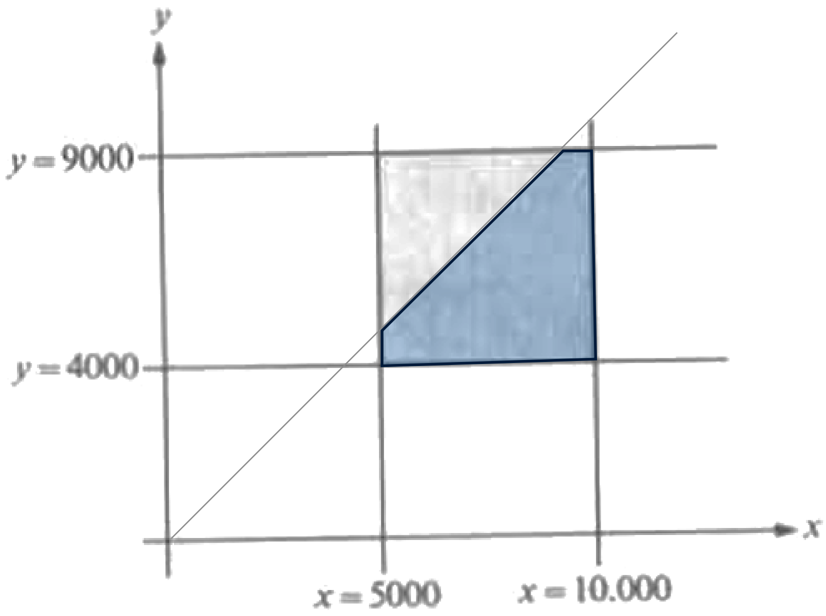
Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos que la cantidad de litros de agua consumidos por dos motores en funcionamiento puede modelarse con un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} 5000^{-2}, & 5000 \leq x \leq 10000 \ \wedge 4000 \leq y \leq 9000 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la $P(X \geq Y)$?

En estos casos, graficar el dominio de integración siempre va a ser útil para ayudarnos a decidir cómo proceder.

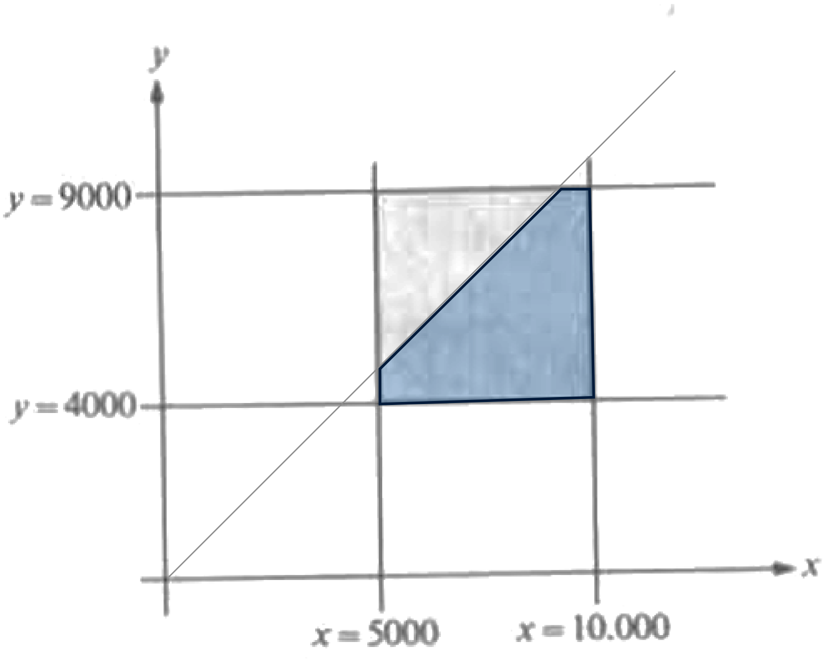


Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos que la cantidad de litros de agua consumidos por dos motores en funcionamiento puede modelarse con un vector aleatorio (X, Y) con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} 5000^{-2}, & 5000 \leq x \leq 10000 \ \wedge \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la $P(X \geq Y)$?



$$P(X \geq Y) = 1 - P(X < Y)$$

$$= 1 - \int_{4000}^{9000} \int_{5000}^{y} 5000^{-2}\, dx\, dy$$

$$= 1 - 5000^{-2} \int_{4000}^{9000} (y - 5000)\, dy = \frac{17}{25}$$

Vector aleatorio continuo
Definición

Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua, entonces la función de distribución acumulada (fda) F de la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está definida por:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(s, t) \; ds \, dt$$

A su vez, si F es fda de una variable bidimensional con fdp conjunta f, entonces:

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y} = f(x, y)$$

en los puntos donde F sea diferenciable.

Vector aleatorio continuo
Definición

Para los vectores aleatorios continuos también es posible definir funciones de densidad marginales. Si f es la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional (X, Y), entonces podemos definir f_X y f_Y las funciones de densidad marginales de X e Y respectivamente como:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy \qquad\qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

Estas funciones de densidad corresponden a las funciones básicas de las variables aleatorias unidimensionales X e Y respectivamente.

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

El empuje X y la razón de mezcla Y son dos características del funcionamiento de un motor a reacción. Supongamos que (X,Y) es una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-2xy), & 0 \le x \le 1 \ \wedge \ 0 \le y \le 1 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Hallemos las funciones de densidad marginales de X e Y.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 2(x+y-2xy)\,dy = 2\left(xy + \frac{y^2}{2} - xy^2\right)\Bigg|_0^1 = 1, \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 2(x+y-2xy)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} + xy - x^2y\right)\Bigg|_0^1 = 1, \qquad 0 \le y \le 1$$

Vector aleatorio continuo
Definición

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con fdp f. Sean f_X y f_Y las funciones de densidad marginales de X e Y respectivamente.

Podemos definir la fdp condicional de X dado $Y = y$ com

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad con\ f_Y(y) > 0$$

Podemos definir la fdp condicional de Y dado $X = x$ com

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad con\ f_X(x) > 0$$

Vector aleatorio continuo
Definición

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \qquad con\ f_Y(y) > 0$$

Una interpretación intuitiva de $f_{X/Y}(x/y)$ se obtiene si consideramos que la superficie representada por la fdp conjunta f es cortada (por así decirlo) por el plano $Y = y$. La intersección del plano con la superficie dará lugar a una fdp unidimensional de, en este caso, la variable X para $Y = y$. Esta función es $f_{X/Y}$.

Una lectura análoga puede realizarse para $f_{Y/X}$.

Vector aleatorio continuo

Definición+Ejemplo

A pesar de lo dicho en la placa anterior, no debe perderse de vista que en el escenario continuo $P(Y = y) = 0$ para cualquier valor y. Sin embargo, la lectura realizada puede ser útil para pensar conceptualmente en el significado de una probabilidad condicional.

Si, por ejemplo, (X, Y) es un vector aleatorio bidimensional continuo que representa la altura (X) y el peso (Y) de una persona con $f(x, y)$ -su fdp conjunta-, f_X y f_Y -sus fdp marginales respectivamente-. Luego, $\int_{150}^{180} f_X(x)\, dx$ representaría la probabilidad del suceso $\{150\ cm \leq X \leq 180\ cm\}$, prescindiendo del peso. Asimismo, $\int_{150}^{180} f_{X/Y}(x/75)\, dx$ podría interpretarse como la probabilidad del suceso $\{150\ cm \leq X \leq 180\ cm\ /\ Y = 75\}$ que, en términos coloquiales refiere a la probabilidad de que la altura de una persona esté entre 150 y 180cm cuando su peso es de 75kg.

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos una variable aleatoria bidimensional (X, Y) con fdp conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xy}{3}, & 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2 \\ o, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Si quisiéramos encontrar $f_{X/Y}$ y $f_{Y/X}$ deberíamos hallar f_X y f_Y para poder aplicar la definición:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad con\ f_Y(y) > 0$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}, \qquad con\ f_X(x) > 0$$

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

$$f_X(x) = \int_0^2 x^2 + \frac{xy}{3}\, dy = 2x^2 + \frac{2}{3}x$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 x^2 + \frac{xy}{3}\, dx = \frac{1}{3} + \frac{y}{6}$$

Luego:

$$f_{X/Y}(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{y}{6}} = \frac{6x^2 + 2xy}{2 + y}, \qquad 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq 2$$

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x^2 + \frac{xy}{3}}{2x^2 + \frac{2}{3}x} = \frac{3x + x}{6x + 2}, \qquad 0 \leq y \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq 1$$

Vector aleatorio continuo
Definición

Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua. Entonces X e Y son independientes si y sólo si se cumple alguna de las tres proposiciones que siguen:

- $f(x, y) = f_X(x)\, f_Y(y)$ para todo x, y
- $f_{X/Y}(x/y) = f_X(x)$ para todo x, y
- $f_{Y/X}(y/x) = f_Y(y)$para todo x, y

donde f es la fdp conjunta, f_X y f_Y son las fdp marginales de X y de Y respectivamente, $f_{X/Y}$ es la distribución de X condicionada al valor $Y = y$ y $f_{Y/X}$ es la distribución de Y condicionada al valor $X = x$.

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Sean X e Y la duración de dos dispositivos electrónicos. Supongamos que la fdp conjunta está dada por

$$f(x, y) = e^{-(x+y)}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

¿Son X e Y independientes?

Teniendo en cuenta que $f_X(x) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\ dy = e^{-x}$ y que $f_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+y)}\ dx = e^{-y}$ y dado que podemos factorizar $f(x, y)$ como

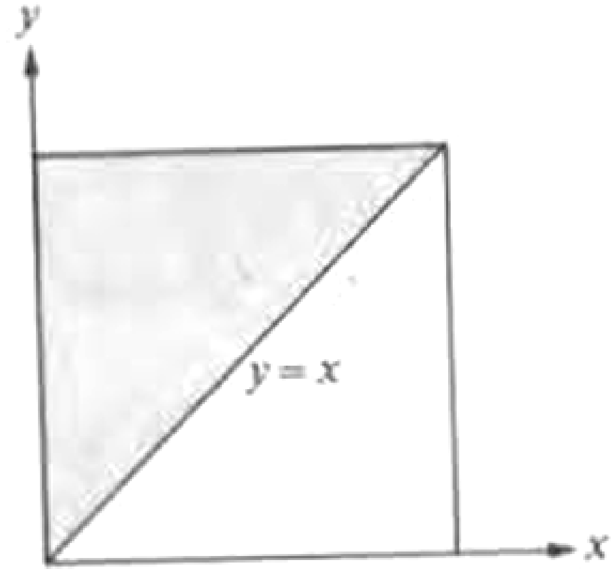
$$f(x, y) = e^{-x}\ e^{-y}, \qquad x \geq 0, \qquad y \geq 0$$

Entonces podemos afirmar que X e Y son independientes.

Vector aleatorio continuo
Ejemplo

Supongamos un vector aleatorio bidimensional continuo con $f(x, y) = 8xy$ para los valores $0 \leq x \leq y \leq 1$. ¿Son X e Y independientes?

No, ya que los valores posibles de Y dependen de X (y viceversa). Para un valor dado $\mathrm{X} = x$, Y sólo puede tomar valores mayores o iguales que x y menores o iguales que 1.



Coeficiente de correlación
Definición

Para un vector bidimensional (X, Y) continuo, el coeficiente de correlación se define de la misma forma que en el caso discreto:

$$\rho_{XY} = \frac{E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

La diferencia recae en cómo calcular cada una de las componentes necesarias:

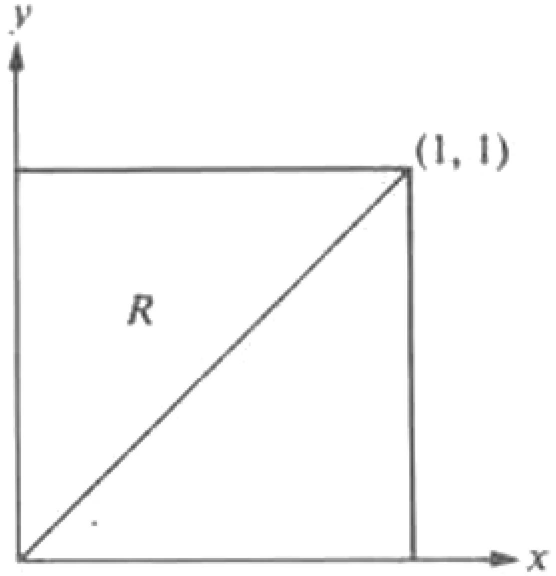
- $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\ dx$ (análogo para Y)
- $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, donde $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)\ dx$
- $E(XY) = \iint_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x, y)\ dx$ dy

Coeficiente de correlación
Ejemplo

Supongamos que la variable aleatoria bidimensional (X, Y) está distribuida uniformemente en la región triangular $R = \{(x, y)\ /\ 0 < x < y < 1\}$.

Luego, la fdp está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$



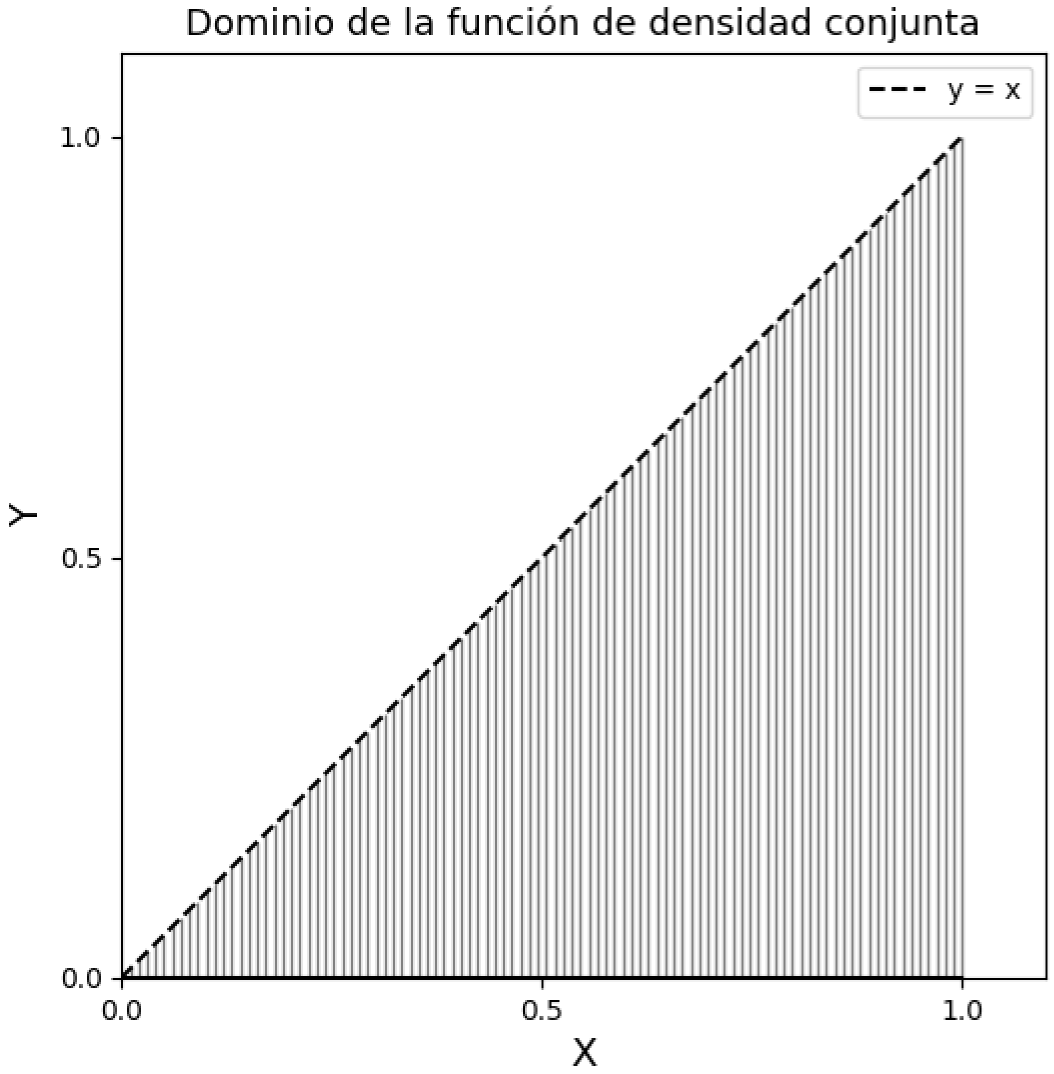
¿Existe correlación lineal entre X e Y? ¿Son independientes?

Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

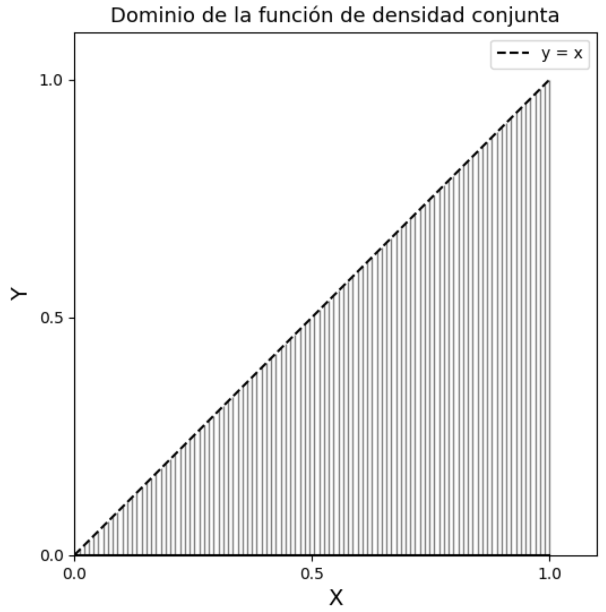
Supongamos la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con fdp dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Primero, podemos graficar el dominio:



Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica



Supongamos la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con fdp dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Podemos verificar que $f(x,y)$ es una fdp:

1. Cumple con la condición de cierre

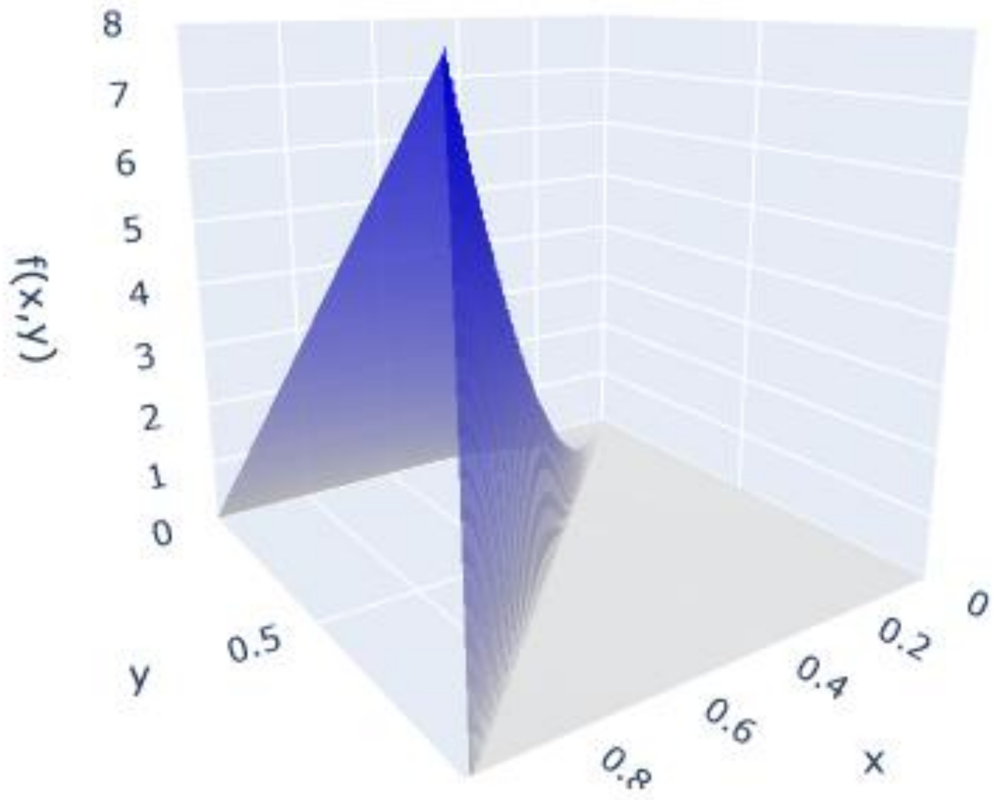
$$\int_0^1 \int_0^x 8xy \ dy\, dx = \int_0^1 (8x\frac{1}{2}y^2)\Big|_0^x \ dx = \int_0^1 8x\frac{1}{2}x^2 \ \ dx = \int_0^1 4x^3 \ \ dx = 1$$

2. Como $f(x,y) = 8xy$ cuando $0 < y < x < 1$, entonces $f(x,y) > 0$ en ese intervalo. A su vez, $f(x,y) = 0$ en cualquier otro caso, por lo que $f(x,y) \geq 0 \ \ \forall x \ \forall y$.

Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

Supongamos la variable aleatoria bidimensional (X, Y) con fdp dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & en\ otro\ caso \end{cases}$$



Pero también podemos graficar la superficie que define $f(x, y)$ sobre dicho dominio:

Nota: se puede encontrar el código para replicar el gráfico 3d interactivo aquí o en el aula virtual.

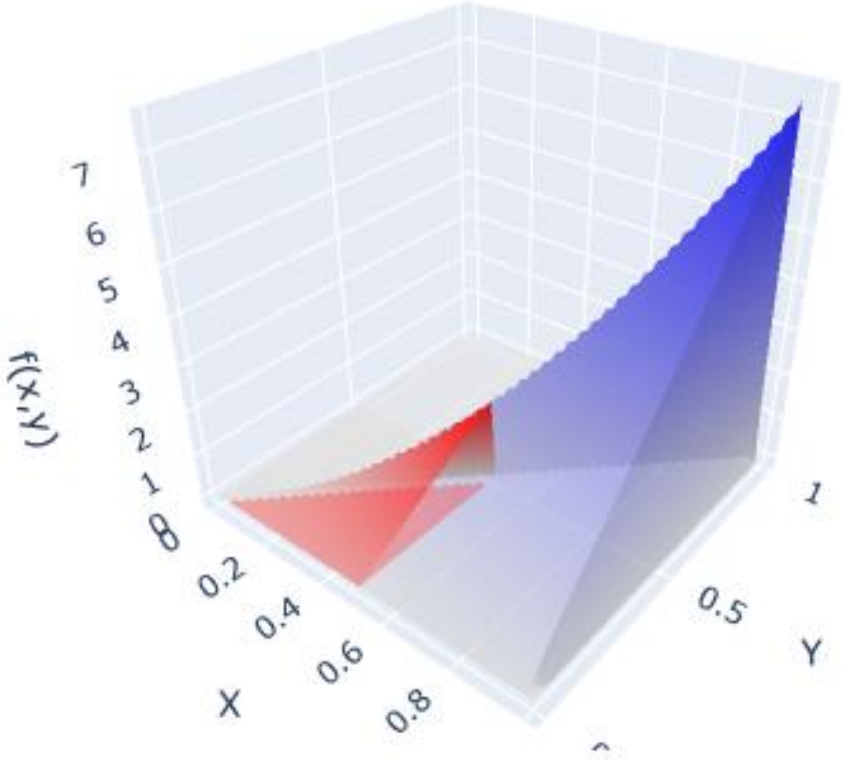
Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

A su vez, si quisiéramos calcular una probabilidad, por ejemplo la $P(X < 0{,}5, Y < 0{,}5)$ deberíamos calcular el volumen comprendido entre la superficie $f(x, y)$, el plano $Z = 0$, el plano $X = Y$ y el plano $X = 0{,}5$. Para ello:

$$P(X < 0{,}5, Y < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \int_y^{0{,}5} 8xy \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{0{,}5} 8y \left. \frac{x^2}{2} \right|_y^{0{,}5} dy = \int_0^{0{,}5} 8y \left(\frac{1}{8} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= \int_0^{0{,}5} y - 4y^3 \, dy = \left(\frac{y^2}{2} - y^4 \right) \Bigg|_0^{0{,}5} = 0{,}0625$$



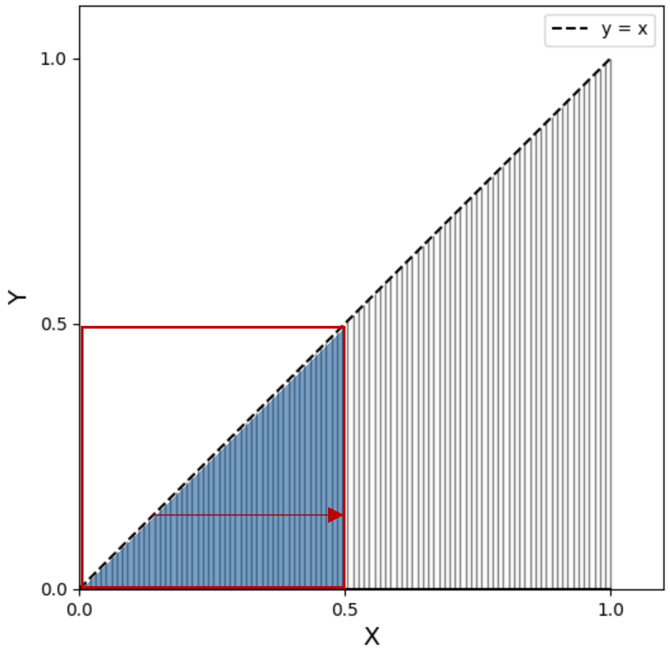
Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

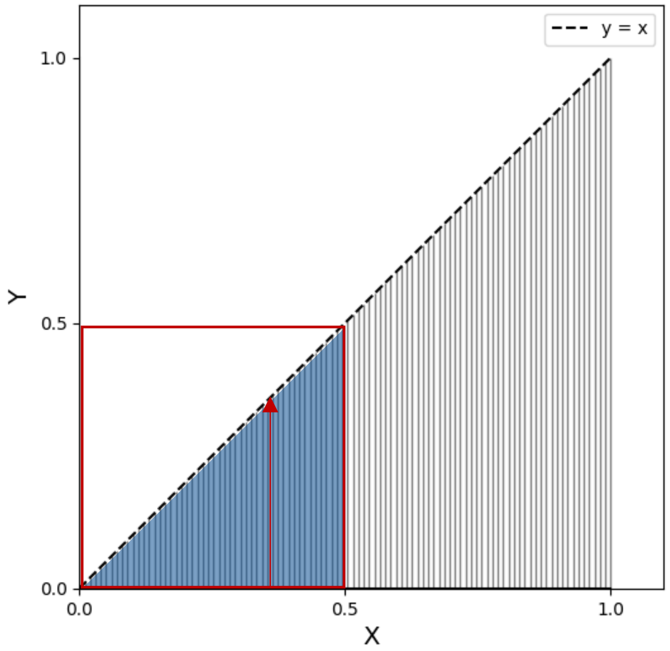
<u>Observación sobre los límites de integración</u>

La forma en que se definió el recorrido del vector (X, Y) las relaciona directamente: $0 < y < x < 1$

En esta resolución elegimos integrar primero sobre X y luego sobre Y (figura superior), pero podría haberse escogido el orden inverso (figura inferior). En el segundo caso, puede notarse que los valores de Y varían entre 0 y la recta $\mathrm{Y} = X$, por lo que la integral que podríamos haber resuelto es

$$P(X < 0{,}5, Y < 0{,}5) = \int_0^{0{,}5} \int_0^{x} 8xy \, dy \, dx$$





Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

También podemos calcular las funciones de densidad marginales y condicionales:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy\,dy = 8x\,\frac{y^2}{2}\bigg|_0^x = 4x^3, \qquad 0 < x < 1$$

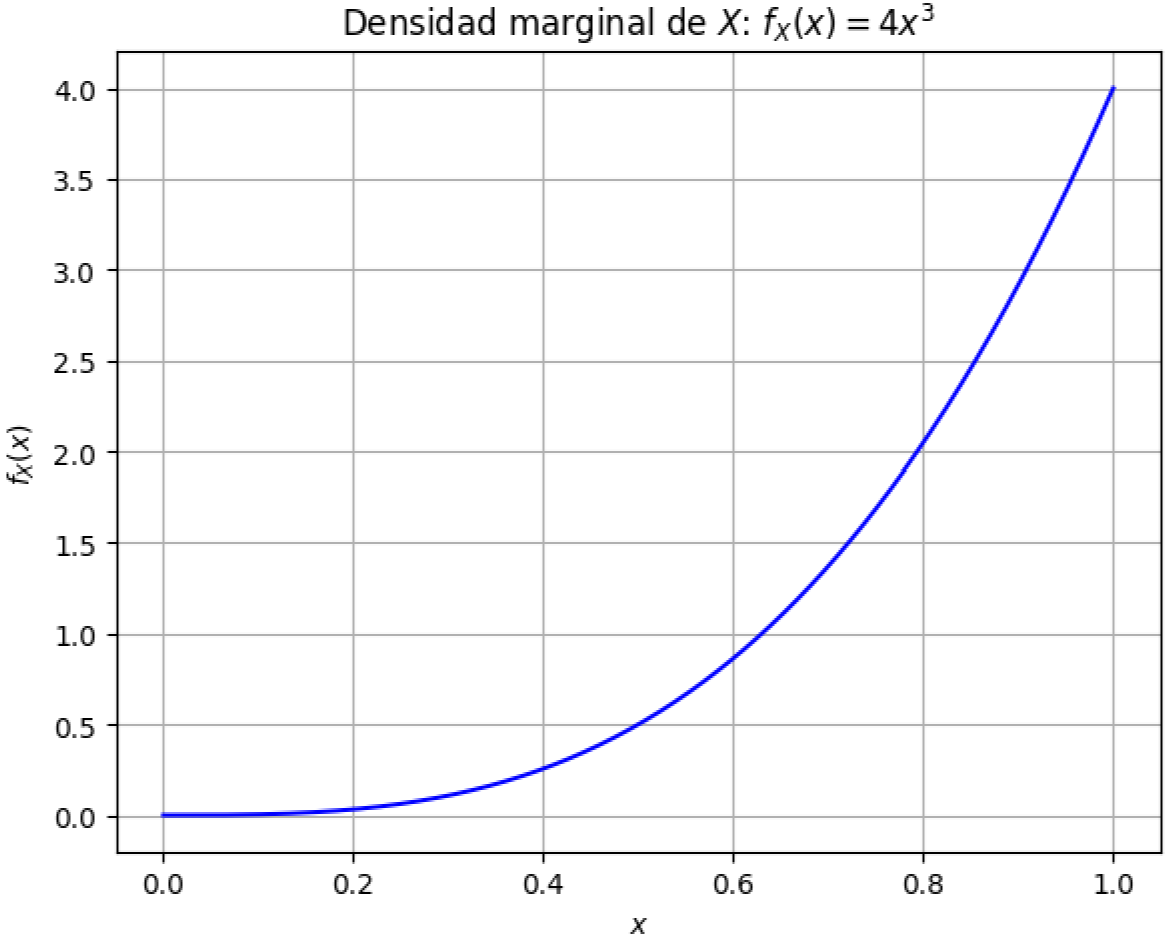
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^x 8xy\,dy = 8y\,\frac{x^2}{2}\bigg|_y^1 = 4y(1-y^2), \qquad 0 < y < 1$$

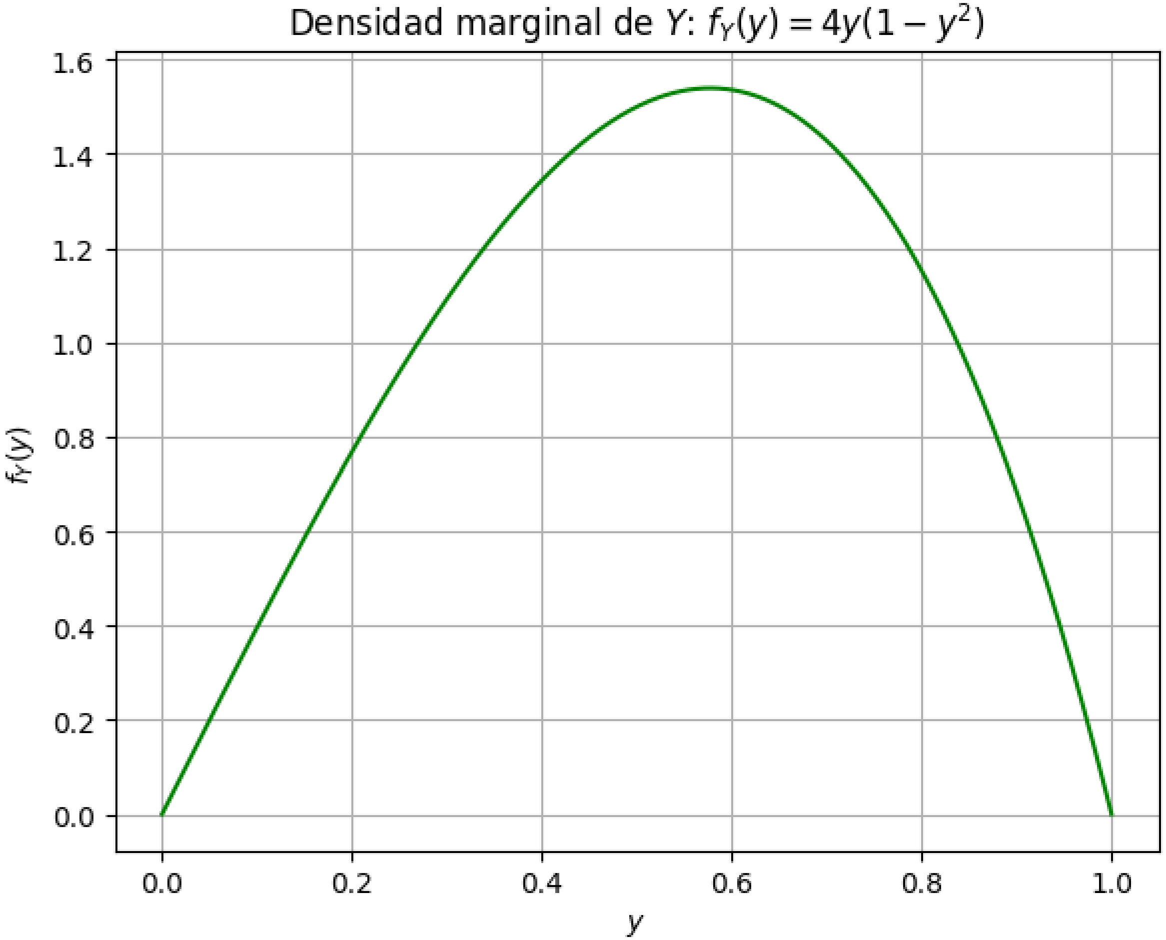
$$f_{X\,/\,Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{8xy}{4y(1-y^2)} = \frac{2x}{1-y^2}, \qquad y < x < 1$$

$$f_{Y\,/\,X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{8xy}{4x^3} = \frac{2y}{x^2}, \qquad 0 < y < x$$

Vector aleatorio continuo

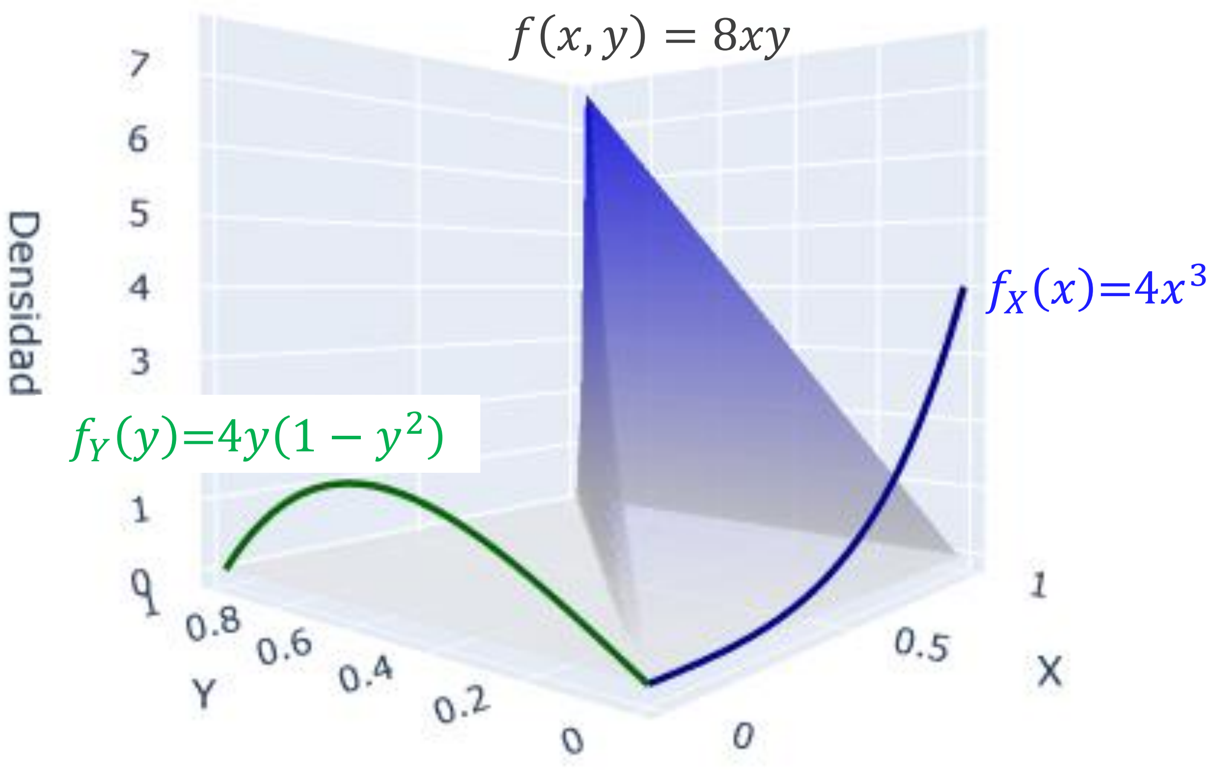
Ejemplo e interpretación geométrica





Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

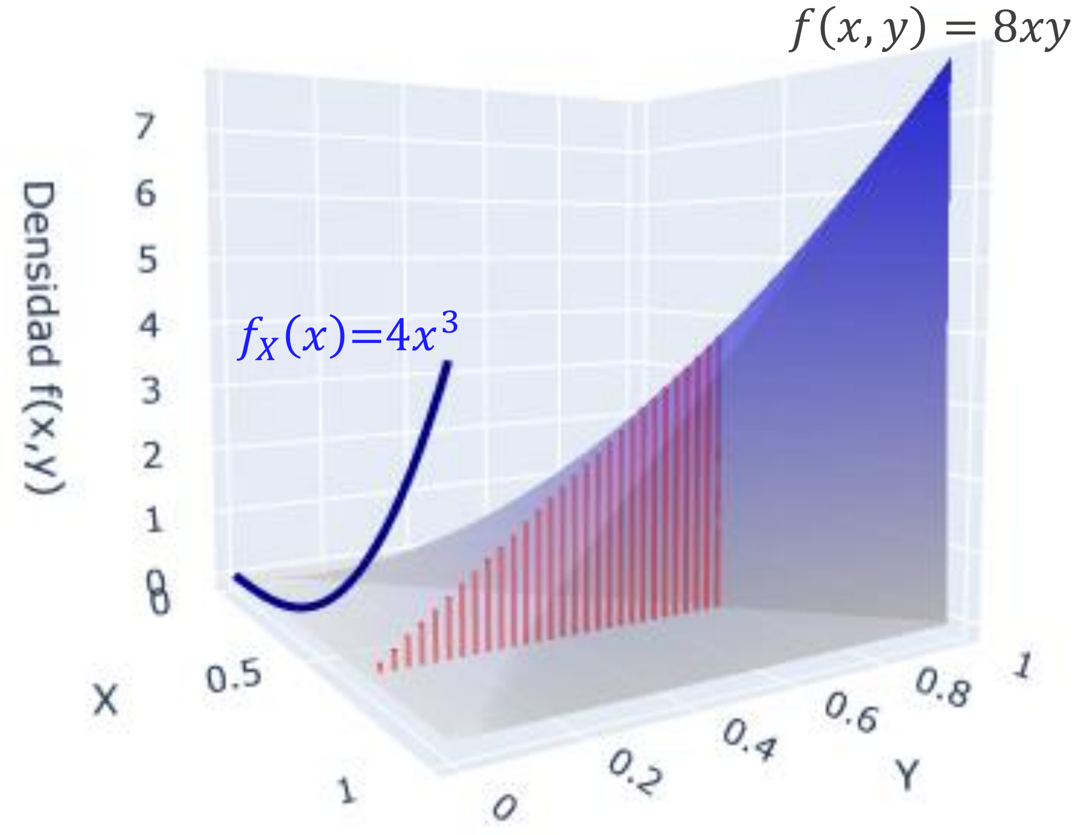
Y si quisiéramos, también podríamos graficar sobre un mismo recurso visual la función de densidad conjunta $f(x,y)$ y las marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Cabe destacar que $f(x,y)$ pertenece al universo 3d, mientras que $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ pertenecen al universo 2d, por lo que, más allá de que las graficamos en los ejes $X = 0$ e $Y = 0$, esto no implica que –por ejemplo- $f_X(x)$ se observa para $Y = 0$, por lo que podría graficarse sobre cualquier punto $Y = y$ (ya que en realidad en ese universo 2d no existe Y.



Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

Podríamos pensar que $f_X(x)$ es la proyección de la superficie definida por $f(x, y)$ sobre el plano XZ, donde $z = f_X(x)$. ¿Por qué?

Para un valor fijo de x, integrar $f(x, y)$ respecto a y significa "sumar" todas las contribuciones de la densidad que hacen conjuntamente (X, Y) a través de todos los valores que puede tomar Y para ese valor fijo x a lo largo del intervalo $0 < y < x$. Podríamos imaginarnos que para cada $X = x$ hay una serie de "columnas" de probabilidad (una para cada valor $Y = y$) de altura $f(x, y)$.

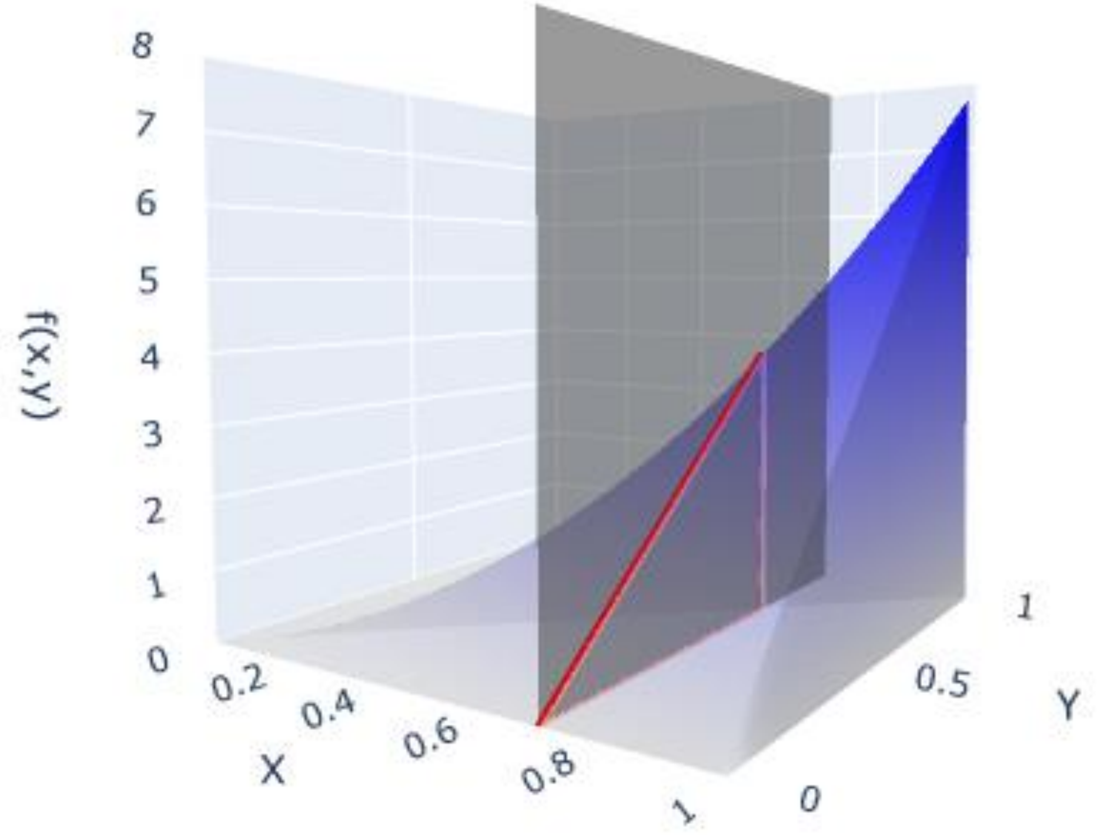


Vector aleatorio continuo

Ejemplo e interpretación geométrica

La integración respecto a y, con x fijo, "suma" esas columnas a través de los distintos valores de Y en ese punto x. Luego, el resultado de la integral, $f_X(x)$, puede pensarse como la cantidad total de densidad de probabilidad para $X = x$. Podríamos pensar que $f_X(x)$ es el área que surge de intersectar el plano $X = x$ con el volumen bajo la curva de $f(x, y)$.

Una lectura análoga puede hacerse para $f_Y(y)$.

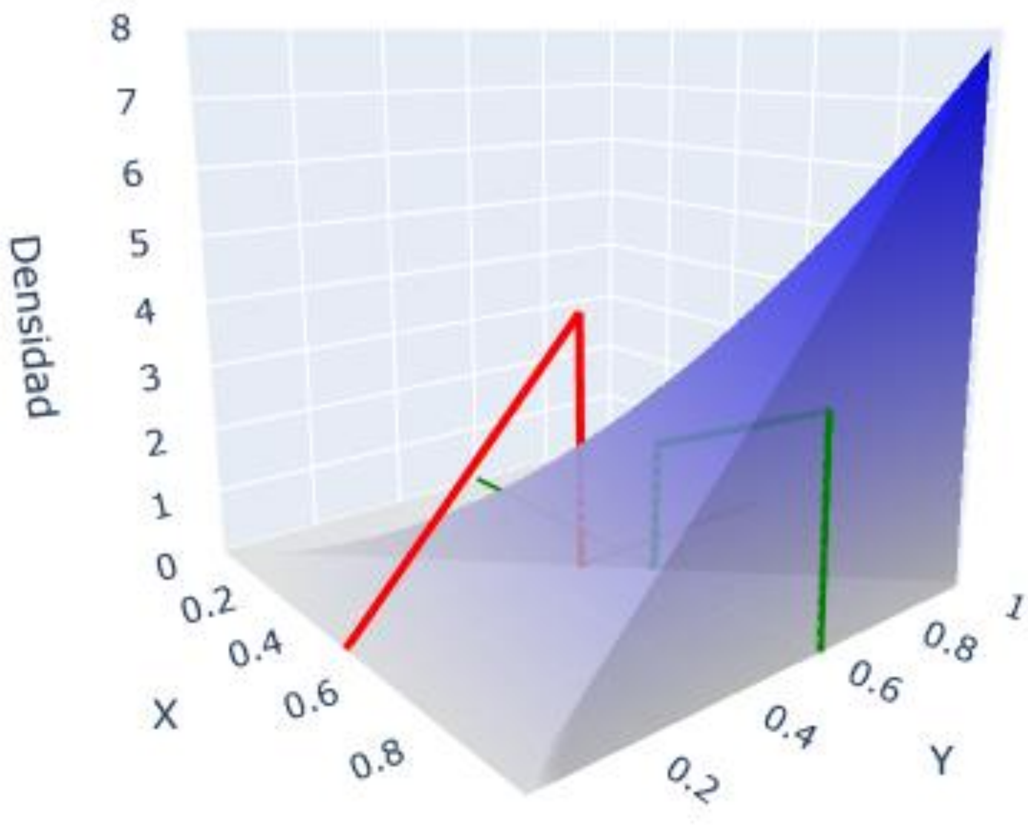


Vector aleatorio continuo
Ejemplo e interpretación geométrica

También podríamos querer ver las funciones de densidad condicionales $f_{X\ /\ Y=y}(x)$ para algún valor de y en particular ($y = 0{,}6$, por ejemplo) y $f_{Y\ /\ X=x}(y)$ para algún valor de x (por ejemplo, $x = 0{,}5$).

$$f_{X\ /\ Y=0,6}(x) = \frac{25}{8}x, \qquad 0{,}6 < x < 1$$

$$f_{Y\ /\ X=0,5}(y) = 8y, \qquad 0 < y < 0{,}5$$

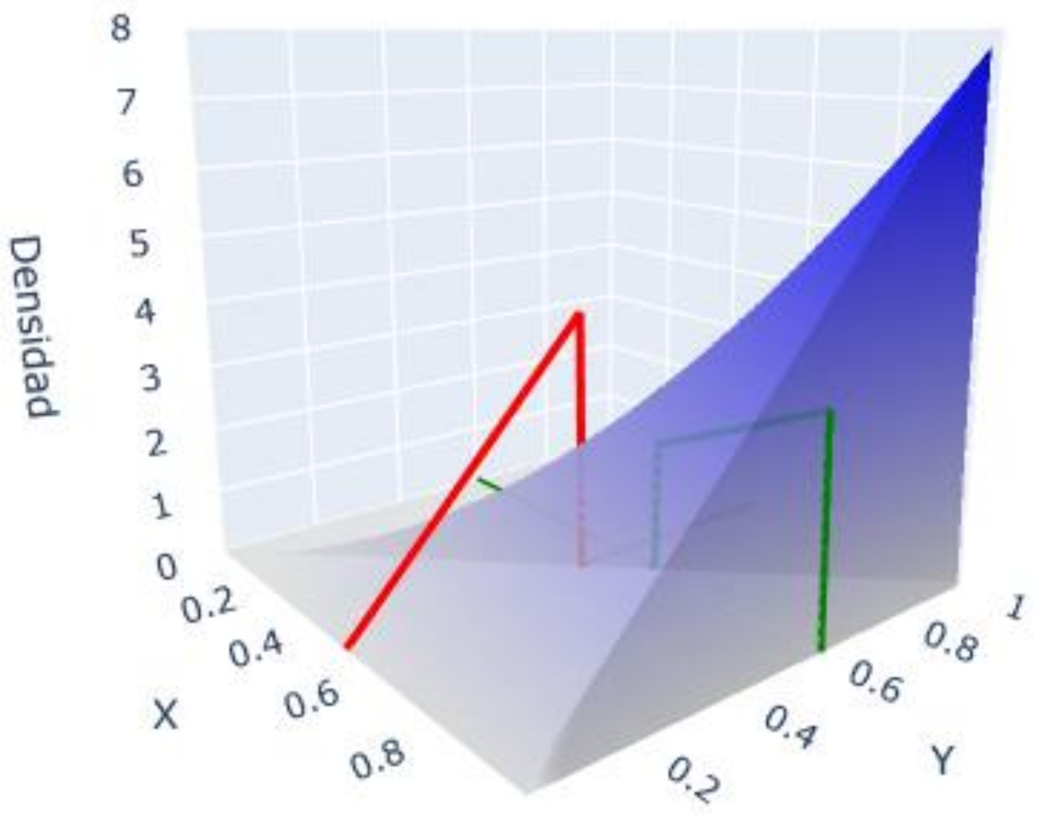


$f_{Y\ /\ X=0,5}(y) = 8y$ $\qquad$ $f_{X\ /\ Y=0,6}(x) = \frac{25}{8}x$

Vector aleatorio continuo

Ejemplo e interpretación geométrica

Si pensamos que el plano $X = 0{,}5$ corta la $f(x, y)$, entonces la línea que surge de intersectar $f(x, y)$ con dicho plano es una función que muestra cómo es la distribución de probabilidad de los valores de Y cuando $X = 0{,}5$. Luego, esa función se normaliza para que el área bajo la curva sea igual a 1, obteniendo así $f_{Y\,/\,X=0{,}5}(y)$. Es como una "rebanada" de $f(x, y)$ partida por $X = 0{,}5$ y reescalada.



$$f_{Y\,/\,X=0{,}5}(y) = 8y \qquad f_{X\,/\,Y=0{,}6}(x) = \frac{25}{8}x$$

Variables aleatorias n-dimensionales
Introducción

Hasta ahora el material se centró en variables aleatorias bidimensionales. Sin embargo, tal como indicamos al comienzo de la unidad, podrían interesarnos tres o más características numéricas simultáneas. Los conceptos dados (función de densidad conjunta, distribuciones marginales, distribuciones condicionales, independencia) pueden extenderse de forma casi directa al caso n-dimensional, agregando algo de complejidad en los cálculos en los casos de integraciones múltiples. No vamos a entrar en esos detalles, sino que nos vamos a trabajar con algunos casos particulares de vectores aleatorios n-dimensionales.

Variables aleatorias n-dimensionales
Introducción

Una de las aplicaciones más importantes de las variables aleatorias n-dimensionales aparece cuando tratamos con medidas repetidas de una variable aleatoria X. Supongamos que se pide información acerca de la duración X de lámparas led. Un fabricante produce un gran número de estas lámparas, de los cuales probamos n. Sea X_i la duración de la i-ésima lámpara que probamos, $i = 1, \ldots, n$, entonces $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ es una variable aleatoria n-dimensional. Si podemos suponer que todas las X_i tiene la misma distribución de probabilidades (ya que todas las lámparas se producen de la misma manera) y que las X_i son todas variables aleatorias independientes (ya que tomamos una muestra aleatoria de lámparas), entonces la variable aleatoria n-dimensional $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ está formada por las componentes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independientes e idénticamente distribuidas.

Variables aleatorias n-dimensionales

Propiedad reproductiva

Hay varias distribuciones de probabilidad que tienen una propiedad muy curiosa y útil: si dos o más variables aleatorias independientes distribuidas bajo ese modelo se suman, la variable aleatoria que resulta tiene una distribución del mismo tipo que la de las variables sumandos.

En este curso vamos a ver dos distribuciones que gozan de esta propiedad: la distribución Normal y la distribución Poisson.

Variables aleatorias n-dimensionales

Propiedad reproductiva: definición

Distribución Normal

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$,

$i = 1, 2, \dots, n$. Sea $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Luego, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, donde $\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ y $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Distribución Poisson

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución $Po(\lambda_i)$,

$i = 1, 2, \dots, n$. Sea $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Luego, $Y \sim Po(\lambda_Y)$, donde $\lambda_Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Variables aleatorias n-dimensionales

Propiedad reproductiva: ejemplo

Un desarrollo informático consta de 7 etapas. El tiempo de desarrollo de cada etapa (en días) es una variable aleatoria Normal con $E(X) = 5\ días$ y $V(X) = (1{,}25\ días)^2$. Se supone que los tiempos de desarrollo de cada etapa son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de que el desarrollo tarde más de 42 días?

X_i: tiempo de desarrollo de la i-ésima etapa del desarrollo (en días), $i = 1, . . , 7$.

Como $X_i \sim N(5, 1{,}25^2)$, $i = 1, \dots, 7$ y los tiempos de desarrollo de cada etapa pueden considerarse independientes, entonces:

$$Y = X_1 + \cdots + X_7, \qquad Y \sim N(35, 7 \times 1{,}25^2)$$

$$P(Y > 42) = P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} > \frac{42 - 35}{\sqrt{7 \times 1{,}25^2}}\right) = P(Z > 2{,}12) = 0{,}0170$$

Variables aleatorias n-dimensionales
Propiedad reproductiva: ejemplo

El número de fracturas que sufre una persona durante sus primeros 15 años de vida es una variable aleatoria con distribución de Poisson de promedio 0,40 fracturas. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccionando al azar 4 personas, contabilicen entre todas entre 5 y 7 fracturas?

X_i: número de fracturas que tuvo una persona durante sus primeros 15 años, $i = 1{:}4$.

Como $X_i \sim Po(0{,}40)$, $i = 1{:}4$, y suponiendo que la cantidad de fracturas que tuvo una persona cualquiera es independiente de la cantidad de fracturas que presentó otra persona cualquiera, entonces:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4, \qquad Y \sim Po(1{,}6)$$

$$P(5 \leq Y \leq 7) = \sum_{k=5}^{7} \frac{e^{-1{,}6} 1{,}6^k}{k!} = 0{,}0176 + 0{,}0047 + 0{,}0011 = 0{,}0234$$

Variables aleatorias n-dimensionales
Propiedad reproductiva: ejemplo

Supongamos que el número de llamadas que llegan a una central telefónica entre las 9 a.m. y las 10 a.m. es una variable aleatoria $X_1 \sim Po(3)$. Análogamente, el número de llamadas que llegan entre las 10 a.m. y las 11 a.m. es una variable aleatoria $X_2 \sim Po(5)$. Si X_1 y X_2 son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que se reciban más de 5 llamadas entre las 9 a.m. y las 11 a.m.?

Si definimos $Y = X_1 + X_2,$ entonces $Y \sim Po(\lambda_Y)$, $\lambda_Y = 3 + 5 = 8$. Luego:

$$P(Y > 5) = 1 - P(Y \leq 5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} \frac{e^{-8} 8^k}{k!} = 1 - 0{,}1912 = 0{,}8088$$

Variables aleatorias n-dimensionales

Teorema Central del Límite

Si bien estas propiedades reproductivas son muy útiles, solo aplican para variables aleatorias n-dimensionales con distribución Normal o Poisson. Hay muchas situaciones, sin embargo, en las que los vectores aleatorios están compuestos por variables aleatorias que no siguen una distribución de este tipo o, incluso, no se conoce cuál es el modelo probabilístico que las genera.

Sin embargo, la suma de variables aleatorias goza de una propiedad importantísima: si se cumplen ciertas condiciones, entonces esta suma seguirá una distribución Normal, cualquiera sea el modelo que siguen las variables que se suman.

Variables aleatorias n-dimensionales
Teorema Central del Límite

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes cualesquiera con $\mathrm{E}(X_i) = \mu_i$ y $\mathrm{V}(X_i) = \sigma_i^2$ finitas, $i = 1, 2, \dots, n$. Sea $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Entonces, cuando $n \to \infty$, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene una distribución aproximadamente Normal con parámetros $\mu_Y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$ y $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

$$Y \underset{n \to \infty}{\sim} N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$$

En la práctica, aplicamos el TCL cuando $n \geq 30$ en términos generales, aunque si las variables X_i siguen una distribución simétrica se alcanza la normalidad aproximada más rápido, a la vez que para variables marcadamente asimétricas puede ser necesario un n mayor.

Variables aleatorias n-dimensionales
Teorema Central del Límite

¿Qué pasa si X_i son igualmente distribuidas?

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes cualesquiera idénticamente distribuidas con $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ y $\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ finitas, $i = 1, 2, \dots, n$.

Entonces, cuando $n \to \infty$, $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ tiene una distribución aproximadamente Normal con parámetros $\mu_Y = n\mu$ y $\sigma_Y^2 = n\sigma^2$

$$Y \underset{n \to \infty}{\sim} N(n\mu, n\sigma^2)$$

Variables aleatorias n-dimensionales

Teorema Central del Límite

¿Qué pasa con la media aritmética?

Si definimos la variable suma o total como $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, luego $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{Y}{n}$. Luego, dado que la media aritmética es una transformación lineal del total, el TCL también se aplica a esta variable aleatoria.

Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ variables aleatorias independientes cualesquiera idénticamente distribuidas con $\mathrm{E}(X_i) = \mu$ y $\mathrm{V}(X_i) = \sigma^2$ finitas, $i = 1, 2, \dots, n$.

Entonces, cuando $n \to \infty$, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene una distribución aproximadamente Normal

con parámetros $\mu_Y = \mu$ y $\sigma_Y^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

$$\bar{X} \underset{n \to \infty}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Variables aleatorias n-dimensionales
Teorema Central del Límite

¿Qué pasa si las X_i son variables indicadoras?

Sea A un evento de interés. Si trabajamos con variables independientes

$$X_i = \begin{cases} 1, & si\ se\ presenta\ A \text{ en la i−ésima repetición} \\ 0, & si\ no\ se\ presenta\ A \text{ en la i−ésima repetición} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n$$

entonces la variable $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ será una variable binomial con parámetros n y $p = P(A)$. Si bien el modelo binomial es un modelo discreto, cuando $n \to \infty$ la variable Y así definida tiene una distribución aproximadamente Normal con parámetros $\mu_Y = np$ y $\sigma_Y^2 = np(1-p)$

Variables aleatorias n-dimensionales
Teorema Central del Límite: ejemplo

El peso del equipaje de los pasajeros de cierta línea aérea tiene una media igual a 9 kg y una desviación estándar igual a 1.8 kg. Si el peso límite de la carga total es igual a 960 kg y se puede considerar que el peso del equipaje es independiente entre pasajeros, ¿cuál es la probabilidad de que 100 pasajeros excedan el límite de la carga total?

X_i: peso del equipaje del i-ésimo pasajero, $i = 1:100$.

$$E(X_i) = 9\ kg\ y\ V(X_i) = (1{,}8\ kg)^2, \qquad i = 1:100$$

Dado que n es lo suficientemente grande, $\text{Y} = \sum_{i=1}^{100} X_i \underset{n \to \infty}{\sim} N(900, 324)$. Luego

$$P(Y > 960) = P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} > \frac{960 - 900}{\sqrt{324}}\right) = P(Z > 3{,}33) = 0{,}0004$$

Variables aleatorias n-dimensionales
Teorema Central del Límite: ejemplo

Sea X el número semanal de accidentes de tránsito en una esquina dada de la ciudad. Supongamos que $\mathrm{E}(X) = 2{,}2$ accidentes y que $\sqrt{\mathrm{V}(X)} = 1{,}4$ accidentes.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio semanal de accidentes en un año sea menor a 2?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la cantidad total de accidentes en un año sea mayor a 100?

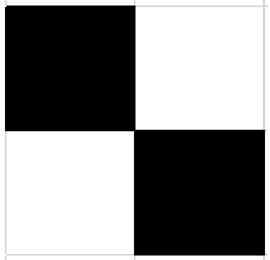
a) La probabilidad de que el promedio semanal de accidentes en un año sea menor a 2 es igual a 0,1515.
b) La probabilidad de que la cantidad total de accidentes en un año sea mayor a 100 es igual a 0,8389.

Variables aleatorias n-dimensionales
Ejemplo

Las imágenes en blanco y negro pueden representarse con matrices cuyas celdas representan la intensidad en cada pixel.

0	1
1	0

=



Cuando un dispositivo toma imágenes con interferencia, podemos utilizar las propiedades vistas para la suma de variables aleatorias para "limpiar" dicha interferencia de la imagen.

(script R)