Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Práctica 9: Cálculo diferencial para funciones de varias variables.

---

1. Determine en cada caso el dominio del campo escalar y represéntelo gráficamente

   a) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$

   b) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{y^2 - 1}}$

   c) $f(x, y, z) = \ln(xyz)$

   d) $f(x, y, z) = \arcsin \dfrac{1}{x + y + z}$

2. Sean $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $k \in \mathbb{R}$. Representar gráficamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares:

   a) $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ $\quad k = -6, 0, 6.$

   b) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ $\quad k = -1, 0, 1, 3$

   c) $f(x, y) = x + y^2$ $\quad k = -1, 0, 2.$

   d) $f(x, y, z) = x - 3y - z$ $\quad k = -1, 2, 3.$

   e) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2$ $\quad k = -1, 1, 2$

3. Usando coordenadas polares describir las curvas de nivel de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

4. Determine en cada caso el conjunto de $\mathbb{R}^2$ en el cual f es continua:

   a) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^4 + y^4 - 2x^2y^2}$

   b) $f(x, y) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$

c) $f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$

5. Muestre que la función $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ no posee límite en los puntos de la recta $y+x=0$.

6. Considere la función $f(x,y) = x\sin(1/y) + y\sin(1/x)$ con $x \neq 0, y \neq 0$. ¿Tiene límite en $(0,0)$?

7. Demuestre que las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}^2$. En cada caso se define $f(0,0)$ como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

   a) $f(x,y) = \dfrac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   b) $f(x,y) = y^2\log(x^2+y^2)$

   c) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

8. Sea $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$. Muestre que no existe $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$.

9. Muestre que $g(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$ tiende a cero si (x,y) se aproxima a $(0,0)$ por cualquier recta, y sin embargo g no tiene límite en $(0,0)$.

10. Sea $g(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$.

    a) Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ mediante el cambio a coordenadas polares.

    b) Utilice la trayectoria $y = mx^3$ para demostrar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe.

    Para mentes curiosas: puedes investigar a tu tiempo, el porque de la aparente contradicción entre estos dos apartados. Y tambien buscar bajo que condiciones es válido usar el cambio de coordenadas polares para demostrar la existencia de límites.

11. Analizar la existencia de los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy^3(x+y)^{-1}$

    b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

    c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(xy)}{xy}$

    d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (1-\cos(x^2+y^2))(x^2+y^2)^{-1}$

12. Dar un ejemplo de una función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y un punto en el cual exista f_x, pero no f_y.

13. Demostrar que la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$ es continua en el origen, que las derivadas parciales existen en el origen, pero las derivadas direccionales en todas las demás direcciones no existen.

14. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   a) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x,y)\neq(0,0)$.

   b) Mostrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

   c) Mostrar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$.

   d) Explicar por qué el resultado de *c*).

15. Considerar las funciones

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

   a) Mostrar que son continuas en $(0,0)$.

   b) Calcular sus derivadas parciales de primer orden en $(0,0)$.

   c) Investigar su diferenciabilidad en $(0,0)$.

16. Analizar en qué puntos del plano son diferenciables las funciones:

   a) $f(x,y)=\log(x-y)\exp(x+y)$

   b) $f(x,y)=(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^{-1}$.

   c) $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$

   d) $f(x,y)=|x|+|y|$

17. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

   a) $f(x,y)=e^x\cos(\pi y)$, $(a,b)=(0,-1)$, $v=(1,2)$

   b) $f(x,y,z)=x^2yz$, $(a,b,c)=(1,0,-1)$, $v=(-1,1,0)$

   c) $f(x,y)=\log(\sqrt{x^2+y^2})$, $(a,b)=(1,0)$, $v=(2,1)$.

18. Se afirma que hay una función $f(x,y)$ cuyas derivadas parciales son $f_x(x,y)=x+4y$, $f_y(x,y)=3x-y$. Determinar si esto es posible.

19. Demostrar que las funciones $u(x,y) = e^x \cos(y)$, $v(x,y) = e^x \sin(y)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

20. Demostrar que las funciones del ejercicio anterior satisfacen la ecuación diferencial

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0.$$

$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ es llamado el *Laplaciano* de f. Las funciones cuyo laplaciano es nulo son llamadas *armónicas*. La ecuación $\Delta f = 0$ es la *ecuación de Laplace*. Probar que las siguientes funciones son armónicas:

a) $f(x,y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2})$

b) $f(x,y) = \arctan \dfrac{y}{x}$

21. Suponer que una montaña tiene la forma de un paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$ (a, b, c constantes positivas), x, y son coordenadas en un plano de referencia y z es la altitud. En el punto $(1,1)$, ¿en qué dirección aumenta más rápido la altitud?. Si se suelta una bolilla en $(1, 1, c - a - b)$, ¿en qué dirección comenzará a rodar?.

22. Una partícula se lanza desde la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ en el punto $(1; 1; \sqrt{3})$ en una dirección normala la superficie en el tiempo $t = 0$ con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo cruza el plano xy ?

23. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $z = x \sin \frac{y}{x}$ en el punto $(a, b, a \sin \frac{b}{a})$ (con $a \neq 0$) . Mostrar que ese plano pasa por el origen. Generalizar el resultado para cualquier superficie de la forma $z = xf(\frac{y}{x})$.

24. Se considera el plano $x+2y+3z = 1$ y el elipsoide $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$. Hallar los dos planos tangentes al elipsoide y paralelos al plano dado.