# Complementos de Matemática I - Matemática Discreta

2025

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

# Presentación de la materia

# Complementos de Matemática I / Matemática Discreta

**Docentes:**

- Mariana Escalante      mariana@fceia.unr.edu.ar
- Azul Giovagnoli      azul@fceia.unr.edu.ar
- Lucía Moroni      lmoroni@fceia.unr.edu.ar

**Aula Virtual:**

- Nombre: Matemática Discreta/Complementos de Matemática I (Licenciatura en Matemática)
- Contraseña: Euler-1736

**Horarios:**

- Lunes 10:30 a 14:30, Anfiteatro de física
- Miércoles 10:30 a 13:30, Aula 03

**Parciales: (carpeta cerrada)**

- Parcial 1: 01/10
- Parcial 2: 19/11
- Recuperatorio: 26/11

**Condiciones:**

- Regulares: notas mayores o iguales a 5, promedio 6.
- Promovidos: notas mayores o iguales a 7, promedio 8.

# Introducción

# Ejemplos

Juan, María y Constanza son amigos entre sí desde la secundaria. Santino, Facundo y Pedro juegan juntos en un equipo de fútbol de la liga regional. Lourdes estudia inglés en el mismo curso de María y Constanza, y suelen reunirse a estudiar en la casa de Constanza. Ramiro es hermano de Lourdes, y conoció a María en un curso de fotografía. Pedro y Lourdes ingresaron el mismo año a la carrera de LCC en la UNR, y han entregado trabajos prácticos juntos. Santino y Ramiro comparten el gusto musical y han formado una banda.

Aún sin conocerse todos entre sí, lograron organizarse para aprovechar un importante descuento por tarifa grupal en un viaje en colectivo a San Carlos de Bariloche. Debiendo ubicarse en cuatro filas de asientos dobles, ¿cómo pueden sentarse de manera que cada uno lo haga junto a alguno de sus conocidos?

# Ejemplos

Imaginen que estamos en la ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia) en el siglo XVIII.

# Ejemplos

En Königsberg, hay un río llamado Pregolia que divide el plano en cuatro regiones distintas, las cuales están unidas a través de siete puentes,

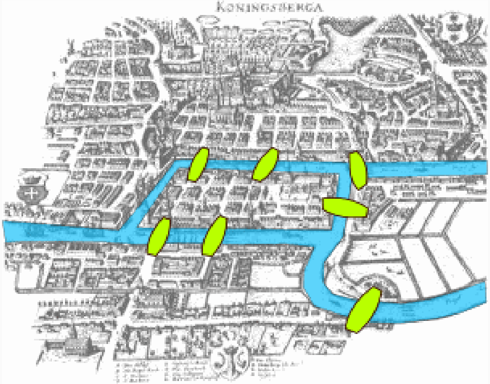


**Figura 1:** Puentes de Königsberg

¿es posible dar un paseo comenzando y terminando en el mismo lugar, cruzando cada puente exactamente una vez?

# Ejemplos

Un matemático llamado Leonhard Euler se hizo la misma pregunta en 1736.

**Figura 2:** Leonhard Euler

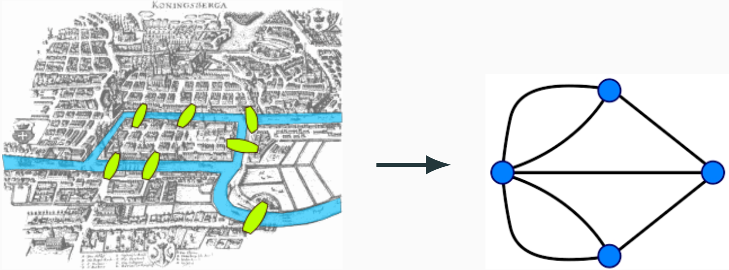
Su gran idea fue darse cuenta de que podía ignorar todos los detalles irrelevantes.

# Ejemplos

**Fue la primera persona que pensó en estudiar las propiedades de un objeto definido solo por sus conexiones, independientemente de su forma física.**

Lo único que importaba era:

- Cuántas regiones de tierra había → Vértices
- Cuántos puentes conectaban cada par de regiones → Aristas



# Ejemplos

Ahora pensemos en otro tipo de problema... imaginemos que somos una empresa de logística y tenemos que encontrar la mejor manera de transportar mercancía entre varias ciudades. Supongamos que tenemos 5 ciudades: $A, B, C, D$ y $E$. Las rutas disponibles son:

- Hay una ruta directa de $A$ a $B$.
- Hay una ruta directa de $A$ a $C$.
- Hay una ruta directa de $B$ a $D$.
- Hay una ruta directa de $C$ a $D$.
- Hay una ruta directa de $D$ a $E$.
- Hay una ruta directa de $B$ a $E$.

¿Cómo podríamos representar este problema de rutas? ¿Qué serían los vértices y qué serían las aristas en este caso?

¿Este es el único dibujo posible para representar estas conexiones?

Un grafo no siempre tiene que estar dibujado explícitamente, pero debe estar bien definido.

# Definiciones

**Definición**

*Un* **grafo** $G$ *es un par ordenado* $(V(G), E(G))$ *que consiste en un conjunto* $V(G)$ *de vértices y un conjunto* $E(G)$ *de aristas junto con una función de incidencia* $\psi_G$ *que asigna a cada arista un par no ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de* $G$.

Notación:

- $\psi_G : E(G) \longmapsto V(G) \times V(G)$
- $\psi_G(e) = \{u, v\} := uv$ para $e \in E(G)$ y $u, v \in V(G)$. La arista $e$ es incidente en $u$ y $v$, $u$ y $v$ son extremos de $e$.
- Dos vértices incidentes en una misma arista se dicen adyacentes, lo mismo para dos aristas que tienen un extremo en común.
- Si no hay lugar a confusión sobre el grafo de referencia notamos $V$ en lugar de $V(G)$ y $E$ en lugar de $E(G)$.
- $n = |V(G)|$ es el orden de $G$
- $m = |E(G)|$

# Ejemplos

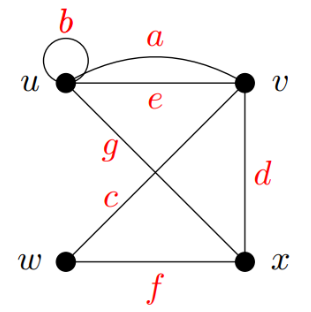
## Ejemplo

$$G = (V(G), E(G))$$

*donde* $V(G) = \{u, v, w, x\},\ E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

*y* $\psi_G$ *está definida por*

$$\psi_G(a) = uv,\ \psi_G(b) = uu,\ \psi_G(c) = vw,\ \psi_G(d) = xv,$$
$$\psi_G(e) = uv,\ \psi_G(f) = wx,\ \psi_G(g) = ux$$



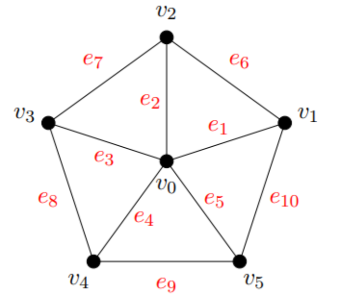
### Ejemplo

$$H = (V(H), E(H))$$

*donde* $V(H) = \{v_i : i = 0, \ldots, 5\},\ E(H) = \{e_i : i \in \{1, \ldots, 10\}\}$

*y* $\psi_H$ *está definida por*

$$\psi_H(e_i) = v_0 v_i,\ i \in \{1, \ldots, 5\}$$
$$\psi_H(e_i) = v_{i-5} v_{i-4},\ i \in \{6, \ldots, 9\}$$
$$\psi_H(e_{10}) = v_5 v_1$$



# Definiciones

**Definición**

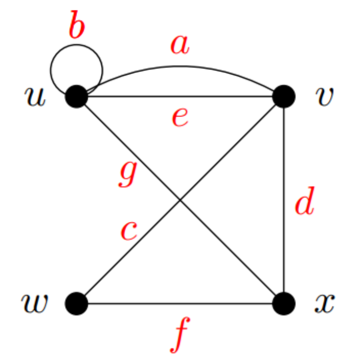
*Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. Llamamos vecindad abierta de $v$ al conjunto $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$. Llamamos vecindad cerrada de $v$ al conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Si $G$ está claro del contexto, notamos $N(v)$ y $N[v]$ respectivamente.*

Algunas convenciones:

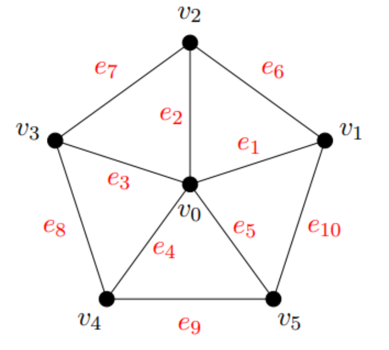
- Dos vértices adyacentes se dicen vecinos.
- Si $N[v] = V$ decimos que $v$ es un vértice universal.
- una arista $uu$ es un loop o bucle.
- Dos aristas con mismo extremos se dicen paralelas.
- Un grafo es simple si no tiene aristas paralelas ni bucles. En este caso, queda identificada la arista y el par de vértices distintos.
  Además resulta, $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.
- Llamamos grafo nulo al grafo $G = (V, E)$ si $V = \emptyset$ y grafo trivial si $|V| = 1$.
- En general, trabajaremos con grafos simples, no nulos y finitos.

# Ejemplo

¿Qué características tienen $G$ y $H$?




**(a)** G




**(b)** H

# Algunos grafos FAMOSOS

Consideremos $n \in \mathbb{N}$.

- Grafo completo $K_n$: Grafo simple con $n$ vértices donde todo par de vértices son adyacentes.
  $V(K_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(K_n) = \{v_i v_j : i, j \in [n], i \neq j\}$.
- Grafo vacío: un grafo que no posee aristas.
- Grafo camino $P_n$ $(n \geq 2)$:
  $V(P_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in [n-1]\}$.
  $m = |E(P_n)| = ?$
- Grafo ciclo $C_n$ $(n \geq 3)$:
  $V(C_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in [n-1]\} \cup \{v_1 v_n\}$.

# Grafos bipartitos

**Definición**

*Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si existe una bipartición $(X, Y)$ de $V$ tal que toda arista de $E$ tiene un extremo en $X$ y otro en $Y$.*
*Notación: $G[X, Y]$.*

Ejemplos:

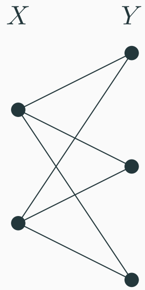
- Los caminos $P_n$ son grafos bipartitos.
- Los ciclos $C_{2k}$ con $k \in \mathbb{N}$ son grafos bipartitos.
- Los ciclos $C_{2k+1}$ no son bipartitos.
- Los grafos completos $K_n$ con $n \geq 3$ no son grafos bipartitos.

# Grafos bipartitos

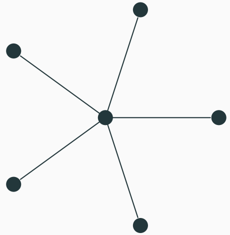
**Definición**

*Consideremos* $n, m \in \mathbb{N}$, $X = \{v_i, i \in [n]\}$ *e* $Y = \{u_j, j \in [m]\}$.

*El grafo* ***bipartito completo*** $K_{n,m}$ *tiene conjunto de vértices* $V(K_{n,m}) = X \cup Y$ *y como aristas al conjunto* $E(K_{n,m}) = X \times Y$. *En particular, al grafo bipartito completo* $K_{1,m}$ *se lo denomina grafo estrella.*




$K_{2,3}$



$K_{1,5}$

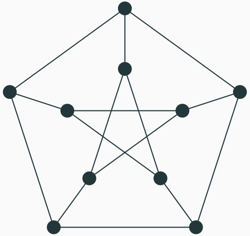
# Grafos conexos

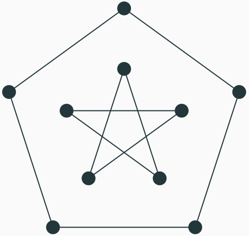
**Definición**

*Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para toda bipartición $(X, Y)$ de su conjunto de vértices $V$ con $X \neq \emptyset \neq Y$, existe al menos una arista con un extremo en cada conjunto, i.e. $\psi(E) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$.*

*En caso contrario, el grafo es disconexo.*

Es una propiedad del grafo.





# Grado

**Definición**

*Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. El grado de $v$ es la cantidad de aristas incidentes en $v$ (un bucle cuenta dos al grado de cada vértice) y se lo nota $d_G(v)$ (o $d(v)$ si $G$ está claro del contexto).*

*Si $d_G(v) = 0$ decimos que $v$ es un vértice aislado.*

Observemos que si $G$ es un grafo simple entonces $d(v) = |N(v)|$.

- $\delta(G)$ es el grado mínimo de todos los vértices de $G$.
- $\Delta(G)$ es el grado máximo de todos los vértices de $G$.
- $d(G)$ es el grado promedio de todos los vértices de $G$.

# Primeras propiedades

**Teorema**

*Sea* $G = (V, E)$ *un grafo. Luego*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

**Demostración.**

Surge de la definicion de grado de un vértice y del hecho que cada arista aporta 2 unidades a la suma $\sum_{v \in V} d(v)$. $\square$

# Primeras propiedades

**Corolario**

*Sea* $G = (V, E)$ *un grafo. La cantidad de vértices de grado impar es par.*

**Demostración.**

Definimos los conjuntos: $I = \{v \in V : d(v) \text{ es impar}\}$ y $P = \{v \in V : d(v) \text{ es par}\}$.

Por el teorema anterior, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Separando la suma sobre los vértices de grado par y los de grado impar, tenemos:

$$\sum_{v \in I} d(v) + \sum_{v \in P} d(v) = 2m.$$

Observemos que:

- Cada término en $\sum_{v \in P} d(v)$ es par, por lo que la suma total sobre $P$ es par.
- Como $2m$ es par, se deduce que $\sum_{v \in I} d(v)$ también debe ser par.

Ahora, cada término en $\sum_{v \in I} d(v)$ es impar. La suma de una cantidad impar de números impares es impar, mientras que la suma de una cantidad par de números impares es par. Por lo tanto, para que $\sum_{v \in I} d(v)$ sea par, el número de términos (es decir, $|I|$) debe ser par.

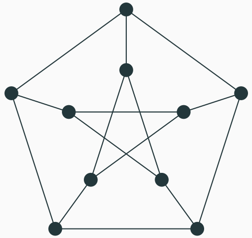
En consecuencia, el número de vértices de grado impar en $G$ es par. $\square$

# Grafos regulares

**Definición**

*Un grafo $G = (V, E)$ es $k$-regular si $d(v) = k$ para todo $v \in V$ y $k$ entero positivo fijo.*

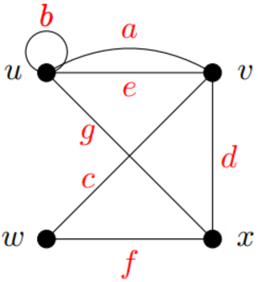
- El grafo $K_n$ es $(n-1)$-regular.
- El grafo completo bipartito $K_{k,k}$ es $k$-regular.
- El grafo $C_n$ es $2$-regular.
- Los grafos 1,2-regulares son simples de caracterizar, sin embargo no es así con los grafos cúbicos o 3-regulares.
- El grafo de Petersen es 3-regular:



# Otras formas de representar grafos

**Definición**

*Dado $G = (V, E)$, la matriz de incidencia de $G$ es la matriz $n \times m$, $M_G = (m_{ve})$ tal que $m_{ve} \in \{0, 1, 2\}$ cuenta el número de veces en que $v$ y $e$ son incidentes.*

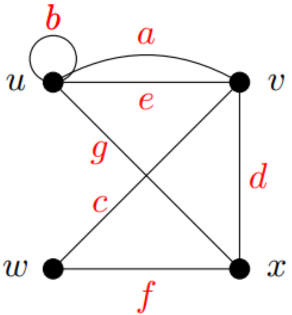



$$M_G = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ u \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

# Otras formas de representar grafos

**Definición**

*Dado $G = (V, E)$, la matriz de* adyacencia *de $G$ es la matriz $n \times n$, $A_G = (a_{uv})$ tal que $a_{uv} \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ cuenta el número de aristas que unen los nodos $u$ y $v$. Un bucle cuenta dos unidades.*




$$M_G = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} u & v & w & x \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ v \\ w \\ u \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

## Ventajas y desventajas

- En general, los grafos tienen menos vértices que aristas. Por ello la matriz de adyacencia requiere menos espacio de almacenamiento.
- También se puede usar una lista de adyacencia: $(N(v) : v \in V)$, donde en $N(v)$ podemos tener multisets, es decir, listas no ordenadas de vértices, y así representar grafos no simples.
- ¿Qué podemos hacer en un grafo bipartito para ahorrar almacenamiento?

# Isomorfismo de grafos

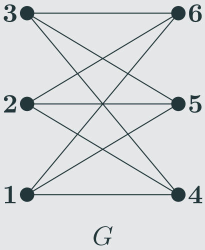
**Definición**

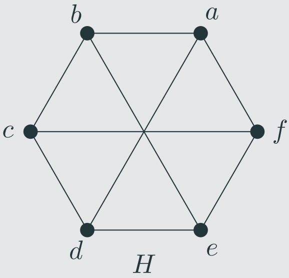
*Dos grafos simples $G$ y $H$ son isomorfos (y escribimos $G \equiv H$) si existe una función biyectiva $\theta : V(G) \to V(H)$ tal que*

$$uv \in E(G) \iff \theta(u)\theta(v) \in E(H)$$

*Una tal función es un isomorfismo.*

## Ejemplo




*¿$H$ y $G$ son isomorfos?*

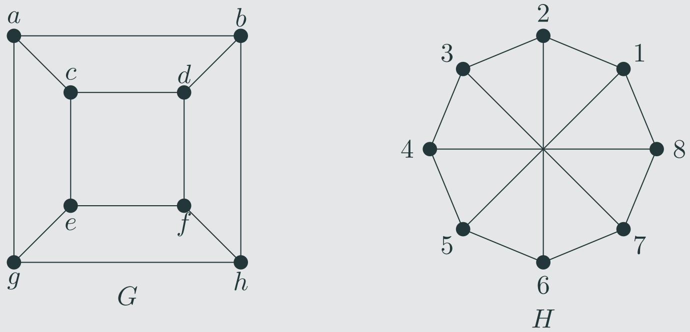
$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}$$

## Observación

*Dos grafos isomorfos poseen el mismo número de vértices y de aristas. Pero esta condición no es suficiente.*

# Isomorfismo de grafos

## Ejemplo




*¿$H$ y $G$ son isomorfos?*

*Ambos grafos tienen 8 vértices y 12 aristas, pero no son isomorfos, ya que, por ejemplo, los vértices $b, c, f, g$ son mutuamente no adyacentes pero en $H$ no existen 4 vértices no adyacentes.*

# Isomorfismo de grafos

**Observación**

*La relación "es isomorfo a "define una relación de equivalencia en la familia de los grafos simples finitos.*

*Cuando representamos a un grafo, tomamos un representante de la clase de todos los grafos de su clase, bajo esta relación.*

# Automorfismos

**Definición**

*Un automorfismo es un isomorfismo de un grafo (simple) en si mismo. Es decir, es una permutación de los vértices que preserva adyacencias.*

**Observación**

*Los automorfismos reflejan simetrías entre los vértices.*

- Dos vértices $u$ y $v$ son similares si existe un automorfismo $\theta$ de $G$ tal que $\theta(u) = v$.
- Un grafo se dice vértice transitivo si todo par de vértices son similares.

**Ejemplo**

- $K_n, K_{n,n}$ *y* $C_n$ *son grafos vértice transitivos.*
- *El grafo de Petersen es vértice transitivo.*

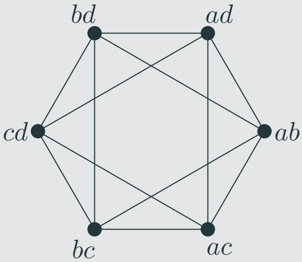
# Grafos de intersección

**Definición**

*Sea $V$ un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(V)$. El* grafo de intersección *de $\mathcal{F}$ es un grafo que tiene un vértice por cada elementos de $\mathcal{F}$ y dos vértices son adyacentes si su inteserccción es no vacía.*

**Ejemplo**

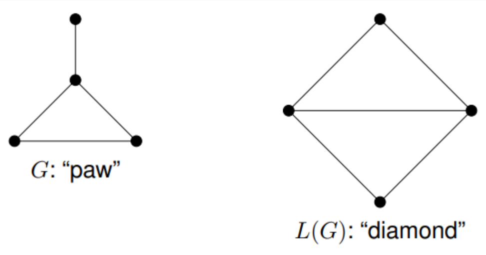
$V = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(V) : |X| = 2\}$.




¿Todo grafo simple es grafo de intersección de alguna familia $\mathcal{F}$?

# Grafos de intersección

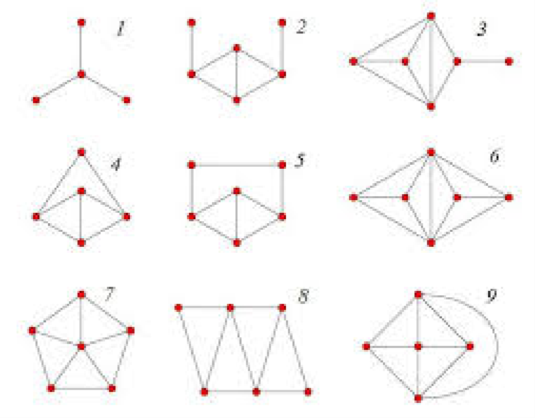
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y consideremos $\mathcal{F} = E$. El grafo de interseción de $\mathcal{F}$ se denomina grafo de línea de $G$, notado $L(G)$ y tiene por vértices las aristas y conecta dos "aristasçuando tienen un extremo en común.



# Grafos de intersección

¿Cualquier grafo es grafo de línea?

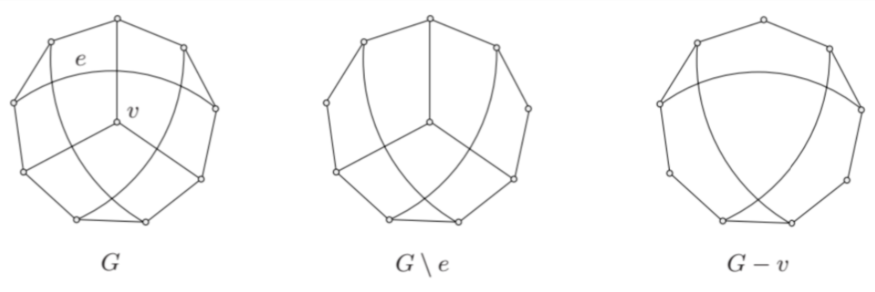
Grafos prohibidos para los grafos de línea:




- Sea $V = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = I_{\mathbb{R}}$ el conjunto de intervalos cerrados de la recta real. Su grafo de intersección es llamado grafo de intervalos y tiene por vértices los intervalos y conecta dos "intervalosçuando tienen algún elemento en común.

Sea $G = (V, E)$, $e \in E$ y $v \in V$

- Borrado de arista: $G \setminus e$ es el grafo con $V$ como conjunto de vértices y $E \setminus \{e\}$ como conjunto de aristas.
- Borrado de vértice: $G - v$ es el grafo con conjunto de vértices $V \setminus \{v\}$ y como conjunto de aristas, todas las de $E$ en la que $v$ no es un extremo.



# Operaciones en grafos - Subgrafos

**Definición**

*Un grafo $H$ es subgrafo de $G$ si puede ser obtenido de $G$ aplicando borrados de vértices y/o aristas. Convenimos que un grafo es subgrafo de sí mismo.*

*Notación: $H \subseteq G$.*

*Un subgrafo de $G$ se dice subgrafo inducido si puede ser obtenido de $G$ por borrado solamente de vértices.*

**Ejemplo**

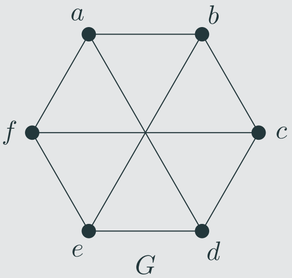


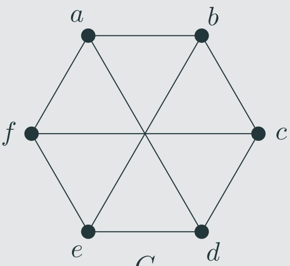

**Figura 4:** $P_4$ es subgrafo de $G$ pero no es subgrafo inducido de $G$.

# Operaciones en grafos - Subgrafos

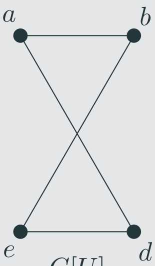
## Definición

*Dado $G = (V, E)$ y $U \subseteq V$, el* *subgrafo inducido* *por $U$, notado $G[U]$, es el subgrafo de $G$ obtenido borrando los vértices de $V \backslash U$.*

## Ejemplo

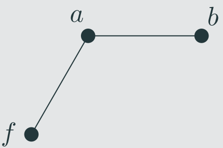



$G$




$G[U]$

$U = \{a, b, d, e\}$




$G[U']$

$U' = \{a, b, f\}$

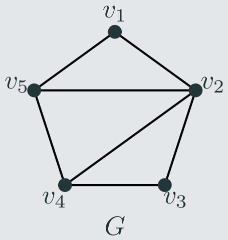
## Definición

*Dado $G = (V, E)$, decimos que $H$ es subgrafo inducido de $G$ si existe $U \subseteq V$ tal que $H = G[U]$.*

### Definición

*Dado $G$, decimos que $H$ es supergrafo de $G$ si $G$ se obtiene de $H$ por borrado de un conjunto de sus vértices y/o aristas. Es decir, $G \subseteq H$.*

### Ejemplo




- $K_4 \subseteq G$ ?
- $P_3 \subseteq G$ ?
- $P_5 \subseteq G$ ?
- *Algún supergrafo de $G$?*

Hemos visto (en la práctica) que si $G$ es bipartito, entonces $C_{2k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ no es subgrafo inducido de $G$.

En este caso se dice que $G$ es libre de $C_{2k+1}$ o también $C_{2k+1} - free$ $(k \in \mathbb{N})$.

En general, si un grafo $H$ no es subgrafo inducido de $G$, se dice que $G$ es libre de $H$ o $H$-free.

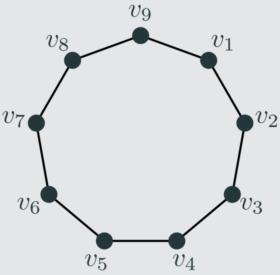
- Si $G$ es libre de $C_{2k+1}$ $(\in \mathbb{N})$, entonces ¿$G$ es bipartito? Es decir, ¿la familia de grafos $C_{2k+1}$-free, es la familia de grafos bipartitos?
- Sea $G$ un grafo libre de $K_{1,3}$. ¿Vale que $\Delta(G) \leq 2$?

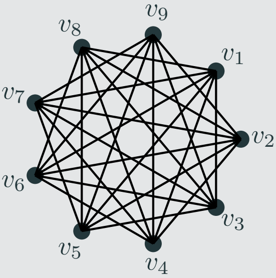
# Grafo complemento

## Definición

*Dado $G$ grafo simple, su complemento es el grafo simple $\overline{G}$ donde $V(\overline{G}) = V(G)$ y $E(\overline{G})$ es el conjunto de pares de vértices no adyacentes en $G$, es decir,* $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V : u \neq v\} \setminus E(G)$.

## Ejemplo



# Grafo complemento - Propiedades

Algunas propiedades:

- $|E(\overline{G})| = \binom{|V(G)|}{2} - |E(G)|$
- $d_{\overline{G}}(v) = |V(G)| - d_G(v) - 1$
- $\delta(G) = n - \Delta(G) - 1$ y $\Delta(\overline{G}) = n - \delta(G) - 1$
- $\overline{\overline{G}} \equiv G$
- $\overline{G - v} \equiv \overline{G} - v$

# Algunos parámetros combinatorios

**Definición**

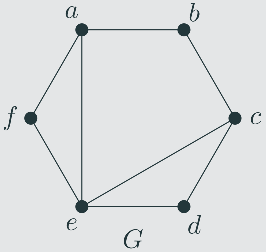
*Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $W \subseteq V$ es una clique de $G$ si $G[W]$ es un subgrafo completo de $G$,i.e. todos los vértices de $W$ son adyacentes dos a dos.*

**Definición**

*El número de clique de $G$ es el tamaño máximo de una clique de $G$, y se nota $\omega(G)$, i.e.*

$$\omega(G) = \{|W| : \text{ es una clique de } G\}$$

**Ejemplo**




$W = \{a, b\}$ es una clique de $G$
$W = \{c, d, e\}$ es una clique de $G$
$\omega(G) = 3$

# Algunos parámetros combinatorios

**Definición**

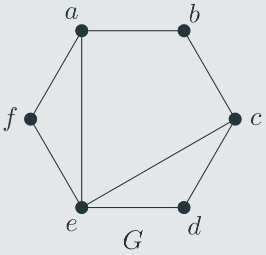
*Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto estable (o independiente) de $G$ si todos sus vértices son mutuamente no adyacentees, i.e. $E(G[S]) = \emptyset$.*

$S \subseteq V(G)$ es un conjunto estable si y sólo si $G[S]$ es un subgrafo nulo de $G$.

**Definición**

*El número de estabilidad de $G$ es el tamaño máximo de un conjunto estable de $G$ y se lo nota $\alpha(G)$, i.e. $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ estable en } G\}$.*

**Ejemplo**




$S = \{a, d\}$ *es un estable de* $G$.
$S = \{b, d, f\}$ *es un estable de* $G$.
$\alpha(G) = 3$.

## Ejemplo

- $\omega(K_n) = n, \quad \alpha(K_n) = 1.$
- $\omega(K_{n,m}) = 2, \quad \alpha(K_{n,m}) = \max\{n, m\}.$
- $\omega(C_n) = \begin{cases} 3 & \textit{si } n = 3 \\ 2 & \textit{si } n \geq 4 \end{cases}, \quad \alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$
- $\omega(P_n) = 2, \quad \alpha(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$
- $\omega(W_n) = \begin{cases} 4 & \textit{si } n = 3 \\ 3 & \textit{si } n \geq 4 \end{cases}, \quad \alpha(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *si* $n \geq 4.$
- *Sea* $H$ *subgrafo inducido de* $G$*, entonces* $\omega(H) \leq \omega(G)$ *y* $\alpha(H) \leq \alpha(G)$.
- *relación entre los parámetros de estabilidad entre* $G$ *y* $\overline{G}$*?*

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}) \qquad \alpha(G) = \omega(\overline{G})$$

# Operaciones en grafos

Consideremos dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.

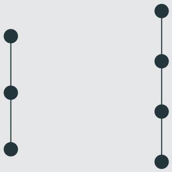
**Definición**

*El grafo* ***unión disjunta*** *de $G_1$ y $G_2$, notado $G_1 + G_2$ se define como:*

$$V(G_1 + G_2) = V_1 \cup V_2$$

$$E(G_1 + G_2) = E_1 \cup E_2$$

**Ejemplo**



$P_3 + P_4$

**Ejercicio:** $\alpha(G_1 + G_2) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$, $\omega(G_1 + G_2) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$.

# Operaciones en grafos

Consideremos dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.

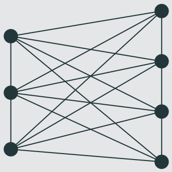
**Definición**

*El grafo* join *de $G_1$ y $G_2$, notado $G_1 \vee G_2$ se define como:*

$$V(G_1 \vee G_2) = V_1 \cup V_2$$

$$E(G_1 \vee G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$$

**Ejemplo**



$$P_3 \vee P_4$$

**Ejercicio:** $\alpha(G_1 \vee G_2) = \max\{\alpha(G_1), \alpha(G_2)\}, \ \omega(G_1 \vee G_2) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$.

# Algunas operaciones en grafos

**Definición**

**Definición**

*Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$,el* *producto cartesiano* *de $G_1$ y $G_2$, notado $G_1 \square G_2$ se define como:*

$$V(G_1 \vee G_2) = V_1 \cup V_2$$

$$E(G_1 \vee G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$$

**Ejemplo**