Práctica 4: Lógica de Predicados, Sintaxis

1) Encuentre una formalización en lógica de predicados para las siguientes oraciones. Tenga en cuenta que $P(x,y), M(x,y), H(x,y), E(x,y)$ significan, respectivamente, que x es padre, madre, hermano, esposo de y y $Mj(x), V(x)$ significan que x es mujer o varón, respectivamente.

a) Todas las personas tienen madre.

b) Todas las personas tienen madre y padre.

c) Quien tiene una madre tiene un padre.

d) Juan es abuelo.

e) Nadie que sea tío es tía.

f) Nadie que sea abuela de alguien es padre de alguien.

g) Juan y Lisa son marido y mujer.

h) Carlos es el cuñado de Mónica.

2) Defina el principio de inducción primitiva para $\textsc{Term}$ y $\textsc{Form}$.

3) Sea $\phi \in \textsc{Form}$ y las constantes a y b.

a) Demuestre que para dos variables x e y distintas,

$$\phi[a/x][b/y] = \phi[b/y][a/x]$$

b) Demuestre que lo anterior no es válido para el caso $x = y$.

4) Defina la función $BV : \textsc{Form} \to 2^{\textsc{Var}}$ que, dada una fórmula ϕ, devuelve el conjunto de variables ligadas de ϕ.

5) Realizar la sustitución $\varphi[t/x]$ para los siguientes valores de φ y t:

a) $\varphi = \forall x\ P(x), \quad t = g(x)$

b) $\varphi = \forall z\ P(x), \quad t = h(y)$

c) $\varphi = \forall z\ P(x), \quad t = f(y,z)$

d) $\varphi = B(x,y) \to \exists x\ C(x), \quad t = s(y)$

e) $\varphi = \neg(\exists y\ (\forall x\ P(x,y,z)) \wedge (\exists z\ G(z,y,x))) \to B(a), \quad t = g(z)$

f) $\varphi = \exists y\ pow(y,x) = x, \quad t = dos$

6) Se puede demostrar por inducción el siguiente lema:

$$t \text{ está libre para } x \text{ en } \phi \iff \text{Toda variable de } t \text{ no se encuentra ligada al realizar la sustitución } \phi[t/x]$$

Decida, para cada caso, si el término t está libre para la variable x en la fórmula ϕ:

a) x para la variable x en $(x = x)$

b) y para la variable x en $(x = x)$

c) $x + y$ para la variable y en $(z = c)$

d) $c + y$ para la variable y en $\exists x(y = x)$

e) $x + w$ para la variable z en $\forall w(x + z = c)$

f) $x + y$ para la variable z en $\forall w(x + z = c) \wedge \exists y(z = x)$

g) $x + y$ para la variable z en $\forall u(u = v) \to \forall z(z = y)$

7) Sea $\phi = \forall x(\forall y R(y, x, z)) \vee \exists z S(x, z)$, donde R es un símbolo de predicado de aridad 3 y S un símbolo de predicado de aridad 2.

a) Calcule los conjuntos $FV(\phi)$ y $BV(\phi)$.

b) Sea $t = f(f(z, z), g(z))$ un término. Realice las sustituciones $\phi[t/x]$, $\phi[t/y]$, $\phi[t/z]$.

c) ¿Está t libre para x en ϕ? ¿Para y? ¿Para z?