ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 3. Métodos de Integración, Integrales Impropias

---

1. Generalidades. Primitivas Directas

En la Unidad 1 se definió el concepto de Integral definida de una función en un intervalo, y se observó la complejidad de calcularla aún para funciones sencillas, ya que hacerlo a partir de su definición lleva a evaluar un comportamiento límite de sumas aproximantes, tedioso desde el punto de vista algebraico. Luego, en la Unidad 2, se presentó el Teorema Fundamental del Cálculo, del cual se concluyó que para evaluar la integral definida de una función, era suficiente conocer una primitiva o antiderivada de ésta. Aún quedó allí pendiente, tratar el tema de cómo encontrar primitivas de una función dada.

En la primera parte de esta unidad se desarrollarán algunos métodos dedicados a hallar primitivas de funciones que puedan expresarse en términos de funciones conocidas como potencias, funciones trigonométricas, logaritmos y exponenciales, a las que usualmente se conoce como funciones elementales. Precisando, una función elemental puede obtenerse a través de suma, multiplicación, división y composición de funciones racionales, trigonométricas, logaritmos y exponenciales y sus inversas.

En primer lugar se harán observaciones respecto de la notación a ser utilizada. Se usará el símbolo $\int$ para designar a las primitivas de una función, que coincide con el de la integral definida, en donde se omiten los extremos. Por otra parte, se sabe que si F es una primitiva de f, entonces $F+c$, con c constante real, también lo será, de manera que cualquier función que admita una primitiva, admitirá automáticamente infinitas primitivas que difieren entre sí en una constante aditiva. Así, si se piensa que la notación $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ representa al conjunto de todas las primitivas de la función f, puede escribirse por ejemplo $\int 2x\ \mathrm{d}x = x^2+c$, pero siendo que para hallar primitivas de f, la constante elegida no juega ningun papel importante, este valor puede directamente omitirse, más aún, cuando se las use para calcular integrales definidas, donde se cancelarán al aplicar la Regla de Barrow.

También debe tenerse en cuenta que, si bien por el Teorema Fundamental del Cálculo, toda función f continua en un intervalo, tiene a la función $F(x) = \int^x f$, integral de f dependiendo del extremo superior, como una primitiva, y ésta es una función bien definida, no toda función continua admite la existencia de una primitiva que pueda expresarse en términos elementales. Algunas veces (como sucedió con la definición de la función logaritmo como primitiva de la función recíproca), si el uso lo amerita, esto lleva a definir nuevas funciones en términos de una integral, como es el caso de las funciones Error de Gauss y Seno Integral, de Dirichlet, de leyes respectivas

$$\operatorname{erf} x \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Si} x \;=\; \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, \mathrm{d}t\ .$$

En una primera instancia se presentan algunas de las primitivas, llamadas directas, denominación que toman dado que no requieren aplicar ningún método de integración porque son muy sencillas, prácticamente por la definición misma de primitiva (en todas se omite la constante aditiva).

- $\int x^n\, \mathrm{d}x \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1},\;\; n \neq -1$
- $\int \operatorname{sen} x\, \mathrm{d}x \;= -\cos x$
- $\int \sec x\, \tan x\, \mathrm{d}x \;=\; \sec x$
- $\int \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x \;=\; \ln\,|x|$
- $\int \cos x\, \mathrm{d}x \;=\; \operatorname{sen} x$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x \;=\; \arctan x$
- $\int e^x\, \mathrm{d}x \;=\; e^x$
- $\int \sec^2 x\, \mathrm{d}x \;=\; \tan x$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x \;=\; \operatorname{arc\,sen} x.$

Es además inmediato, de las propiedades de la derivación, que al obtener primitivas de funciones, se consiguen primitivas de combinaciones lineales de ellas, siendo, para $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int \alpha\, f(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \alpha \int f(x)\, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int (f+g)(x)\, \mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\, \mathrm{d}x + \int g(x)\, \mathrm{d}x\ .$$

Como ejemplo de lo anterior entonces, se afirma que $\int (4x^2 - 5\cos x)\, \mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 - 5\operatorname{sen} x + c$.

Observación 1. *Como se mencionó, la notación $\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + c$ implica que $F'(x) = f(x)$, siendo el valor arbitrario $c \in \mathbb{R}$ producto del hecho de que dos funciones derivables con la misma derivada sobre un intervalo, difieren en una constante. Por otro lado, funciones como $\frac{1}{x}$, que es continua en el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$, que no es un intervalo, puede tener primitivas que no difieran necesariamente en una constante, como por ejemplo*

$$F_1(x) \;=\; \ln|x| \;=\; \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad y \qquad F_2(x) \;=\; \begin{cases} \ln x \,+\, 1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}\ .$$

En este caso, si se consideran integrales en $(0,\infty)$, las primitivas útiles son de la forma $\ln x + c$, mientras que sobre $(-\infty,0)$, las primitivas serán de la forma $\ln(-x) + c$. Observar que derivando ambas formas se obtiene la misma función, y recordar que los números negativos no están en el dominio de la función logaritmo natural.

Usualmente se nota con $\ln|x| + c$ a la familia de primitivas de la función recíproca, pero debe tenerse en mente que ésta expresión no tiene sentido si no se tiene en cuenta dónde serán utilizadas.

2. Métodos de Sustitución e Integración por Partes

Los dos métodos más comunes de integración son los de sustitución e integración por partes, que pueden interpretarse como el proceso inverso de las reglas de derivación de una composición de funciones y de un producto, respectivamente.

Proposición 1. *Si f y g son dos funciones, tales que g es derivable, con g' continua en $[a,b]$ y f continua en el conjunto* $\mathrm{Img} = g([a,b])$*, entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f \;=\; \int_a^b (f\circ g)\, g' \,.$$

<u>**Demostración**</u>. Bajo las hipótesis de regularidad hechas sobre f y g', se tiene la integrabilidad de las funciones en la igualdad de la tesis, y la existencia de una función F, primitiva de f. Luego, usando la Regla de Barrow en (1) y (2), siendo que además $F\circ g$ es una primitiva de $(F\circ g)'$, será

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f \;=\; \int_{g(a)}^{g(b)} F' \;\overset{(1)}{=}\; F(g(b)) - F(g(a)) \;\overset{(2)}{=}\; \int_a^b (F\circ g)' \;=\; \int_a^b (F'\circ g)\, g' \;=\; \int_a^b (f\circ g)\, g' \,.$$

Q.E.D.

En la práctica el método de sustitución se utiliza escribiendo, por ejemplo, $u = g(x)$, de lo que resulta $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$, y cambiando, si se trata de una integral definida, los extremos de integración a y b, por los respectivos valores $g(a)$ y $g(b)$. Por otro lado, si bien la Proposición 1 se enuncia para integrales definidas, la demostración justifica el método para la búsqueda de primitivas, omitiendo los extremos de la integral, pero haciendo necesaria la vuelta a la variable de integración original.

Ejemplo 1.

1. *Para calcular primitivas $\int x^3\cos(2-x^4)\,\mathrm{d}x$, se elige hacer la sustitución $u = 2-x^4$, de donde queda el diferencial $\mathrm{d}u = -4x^3\,\mathrm{d}x$. Se observa que el factor -4 que aparece no es problema, ya que puede generarse multimplicando y dividiendo, de manera que*

$$\int x^3\cos(2-x^4)\,\mathrm{d}x \;=-\frac{1}{4}\int \cos(2-x^4)(-4x^3)\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{4}\int \cos u\,\mathrm{d}u \;=-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,u + c \;=-\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(2-x^4)+c\,.$$

   Si el objetivo de la búsqueda de estas primitivas resulta el cálculo de una integral definida, además es necesario chequear que con los extremos, las funciones que intervienen en la sustitución se encuentran en las condiciones de la Proposicón 1, en el correspondiente intervalo.

2. *Con el fin de hallar el valor de la integral definida $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, se propone la sustitución $u = g(x) = 1+x^2$, que resulta continua en $\mathbb{R}$, y es siempre no nula, de manera que componiendo con la función de ley $f(x) = \frac{1}{x}$ se estará en las hipótesis de la Proposición 1. Queda además $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, y en consecuencia*

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\int_{1+0^2}^{1+2^2} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{1}{2}\ln u\,\Big|_1^5 \;=\; \frac{\ln 5}{2}\,.$$

3. *En ocasiones, la sustitución no es tan aparente, y se puede generar el diferencial de ésta operando los símbolos diferenciales, como en el cálculo de* $\int \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$*, donde se propone hacer* $u=\sqrt{e^x-1}$*, y así*
$$\mathrm{d}u \;=\; \frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x \;=\; \frac{2\sqrt{e^x-1}}{e^x}\,\mathrm{d}u \;=\; \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u\;,$$
$$\text{luego}\quad \int\sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int\frac{2u^2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \;=\; \int\frac{2u^2+2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u-\int\frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \;=\; 2u-2\arctan u+c\;,$$
donde sólo queda volver a la variable original y obtener a las funciones $2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+c$.

Observación 2. *Para calcular primitivas de la función de ley* $\tan x$*, puede procederse realizando la sustitución* $u=\cos x$*, de manera que quede* $\mathrm{d}u=-\operatorname{sen}x\,\mathrm{d}x$*, y luego*
$$\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \;=-\int\frac{\mathrm{d}u}{u}\;=-\ln|u|\;=-\ln|\cos x|+c\;.$$
Sin embargo, si el propósito del cálculo de esta primitiva es el de evaluar una integral definida, utilizando la Regla de Barrow debe tenerse en cuenta si estas primitivas son útiles o no. El Segundo Teorema Fundamental del Cálculo establece que la integral definida de una función en un intervalo puede evaluarse utilizando primitivas, si la función original es integrable en el intervalo. Si se hubiera planteado la misma sustitución para el cálculo de la integral definida de la función de este ejemplo en el intervalo $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{3}]$*, el trabajo habría conducido al valor*
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{3}}\tan x\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}^{\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \;=-\ln|u|\,\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\ln 2}{2}\;.$$
pero esto habría sido incorrecto, ya que la función de ley $\tan x$ *no está acotada en* $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{3}]$*, y por lo tanto no es allí integrable. En efecto, la sustitución hecha no verifica las condiciones de la Proposición 1, ya que allí, siendo la composición de* $f(u)=\frac{1}{u}$ *con* $g(x)=\cos x$*, queda* $\frac{1}{\cos x}$ *que no es continua en el intervalo propuesto.*

El método que se describe a continuación, llamado de integración por partes, es útil para encontrar primitivas de un producto de funciones en términos de la integral de sus derivadas y primitivas.

Proposición 2. *Si* f *y* g *son dos funciones derivables tales que* f' *y* g' *son continuas en un entorno abierto que contenga a* $[a,b]$*, entonces*
$$\int_a^b f\,g'=(fg)\,\Big|_a^b-\int_a^b f'\,g\;.$$

<u>**Demostración**</u>. Como las funciones f y g son derivables, el producto es continuo y derivable, y vale
$$(fg)' \;=\; f'g+gf' \quad\Rightarrow\quad fg' \;=\; (fg)'-f'g\;.$$
Como además las continuidades que se tienen implican las de las funciones $(fg)'$ y fg' y $f'g$, queda, justificando la igualdad en el primer término de (1) por la Regla de Barrow siendo la función fg primitiva de $(fg)'$.
$$\int_a^b fg' \;=\; \int_a^b (fg)'-\int_a^b f'g \;\overset{(1)}{=}\; (fg)\,\Big|_a^b-\int_a^b f'\,g\;.$$

Q.E.D.

Del mismo modo que con el método de sustitución, puede resultar más fácil recordar y trabajar la fórmula, con la notación de variables y sus diferenciales, haciendo $u = f(x)$ y $v = g(x)$, de modo que se tengan los diferenciales $\mathrm{d}u = f'(x)\ \mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}v = g'(x)\ \mathrm{d}x$, reescribiendo la fórmula de la tesis, para las primitivas,

$$\int u\ \mathrm{d}v \ = \ uv - \int v\ \mathrm{d}u \ .$$

En caso de que ambas funciones pudieran actuar como la g' en el teorema, no hay una regla para decidir cuál usar. También, habiendo decidido qué función usar como g', se tiene libertad de elegir cualquiera de sus primitivas para ser usada como g. No hay una regla general para las elecciones, la práctica ayudará para afinar el ojo e intuir qué escoger para simplificar el cálculo de la nueva integral.

Ejemplo 2.

1. *El método de integración por partes es útil para la búsqueda de primitivas que involucren a una potencia, que al derivar haga decrecer su grado una unidad, como $\int x\ e^x\ \mathrm{d}x$. En este caso, pueden elegirse $u = x$ y $\mathrm{d}v = e^x\ \mathrm{d}x$, quedando $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ y eligiendo $v = e^x$, de modo que*

   $$\int xe^x\ \mathrm{d}x \ = \ \int u\ \mathrm{d}v \ = \ uv - \int v\ \mathrm{d}u \ = \ xe^x - \int e^x\ \mathrm{d}x \ = \ xe^x - e^x + c \ .$$

   Si se hubieran elegido $u = e^x$ y $\mathrm{d}v = x\ \mathrm{d}x$, sería $\int xe^x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x\ \mathrm{d}x$, fórmula que es correcta, pero poco práctica, porque en principio, empeora la situación llevando a buscar una integral más complicada. Trabajando de manera similar, eligiendo en ambos casos $u = x$, se pueden obtener también

   $$\int x \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x \ = -x\cos x + \operatorname{sen} x + c \qquad \text{e} \qquad \int x\cos x\ \mathrm{d}x \ = \ x\ \operatorname{sen} x + \cos x + c \ .$$

2. *Al principio puede resultar antiintuitivo, pero al revés de lo anterior, en lugar de derivar a una x para obtener un 1 multiplicando, en ocasiones es útil a partir de un factor 1, integrarlo y hacer aparecer una variable x. Este es el caso cuando se buscan primitivas de las funciones $\ln x$ y $\arctan x$.*

   En el primer caso, haciendo $u = \ln x$ y $\mathrm{d}v = 1\ \mathrm{d}x$, de donde queda $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ y se elige $v = x$, se obtiene

   $$\int \ln x\ \mathrm{d}x \ = \ x\ln x - \int \frac{x}{x}\ \mathrm{d}x = \ x\ln x - x + c \ .$$

   En el otro caso, escogiendo $u = \arctan x$ y $\mathrm{d}v = 1\ \mathrm{d}x$, quedará $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ y una posible $v = x$, resultando

   $$\int \arctan x\ \mathrm{d}x \ = \ x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \ = \ x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \ ,$$

   donde la última integral se calculó usando la sustitución $w = 1 + x^2$.

3. *También puede utilizarse el método de integración por partes una o más veces, para hallar una integral en términos de la original que se pretende calcular, y despejando de la expresión resultante.*

   Es el caso en la búsqueda de las primitivas $\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$. *Aquí, haciendo* $u = e^x$ *y* $\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$, *se tienen* $\mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$ *y una posible* $v = -\cos x$. *Con esos elementos, una primera aplicación del método conduce a*

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x - \int e^x(-\cos x) \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \, ,$$

   donde en principio, la integral del lado derecho tiene la misma complejidad que la del izquierdo, de valor desconocido. Llegado a este punto, se sigue calculando $\int e^x \cos x$, *usando* $u = e^x$ *y* $\mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x$, *con las consecuentes* $\mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$ *y* $v = \operatorname{sen} x$, *que, operando, llevan a*

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + \left(e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x \right) \Rightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

   y despejando el 2 que multiplica, se obtiene $\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x - \cos x) + c$. *Del mismo modo, aplicando dos veces el método, se obtienen las primitivas* $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\operatorname{sen} x + \cos x) + c$.

   Comentario en principio sonso, pero que en este punto merece ser hecho. Si en la primera aplicación se eligieron $u = e^x$ *y* $\mathrm{d}v = \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$, *en la segunda deben escogerse* $u = e^x$ *y* $\mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x$. *Caso contrario, con* $u = \cos x$ *y* $\mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x$, *se volvería atrás, obteniendo la identidad* $\int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x = \int e^x \operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x$.

3. Método de Reducción a Fracciones Simples

El método de descomposición en fracciones simples, que va más allá de su uso para el cálculo de primitivas, consiste en descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado. Es una condición necesaria para poder usarlo que el grado del polinomio en el denominador sea estrictamente mayor que el del numerador, lo cual a los fines del cálculo de integrales no es importante. Si se pretende calcular las primitivas $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, \mathrm{d}x$, con q distinto del polinomio nulo, usando el Algoritmo de la División, se obtiene

$$p(x) = c(x)q(x) + r(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \, ,$$

donde r es el polinomio nulo, o bien tiene grado estrictamente menor que el del polinomio $q(x)$, mientras que $c(x)$ al ser un polinomio, tiene integral estudiada. El resultado en el que se basa este método, que no será demostrado, establece que el cociente de dos polinomios en las condiciones dichas, siempre puede ser expresado como una suma de términos de la forma $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$ y $\frac{Bx+C}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}$, en función de las raíces del polinomio $q(x)$.

Si el denominador tiene sólo raíces reales, con lo cual se descompone en potencias de factores lineales, cada factor $(x-\alpha)^k$ trae asociados a la expresión en fracciones simples, k términos de la forma

$$\frac{A_1}{(x-\alpha)} \, , \quad \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} \, , \, \ldots \, , \, \frac{A_k}{(x-\alpha)^{k-1}} \, ,$$

y si además $q(x)$ tiene raices complejas, que resultan en factores $((x-\alpha)^2+\beta^2)^m$, cada uno de éstos trae asociado en la descomposición en fracciones simples m términos descriptos como

$$\frac{B_1+C_1x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)}\ ,\quad \frac{B_2+C_2x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^2}\ ,\quad \cdots\quad ,\ \frac{B_m+C_mx}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{m-1}}\ .$$

Ejemplo 3.

1. *De la factorización $x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$, para calcular las primitivas*

$$\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x\ ,$$

observando que el grado del numerador es menor que el del denominador, y no es necesario realizar la división previa, se expresa, con coeficientes a determinar, la descomposición en fracciones simples

$$\begin{aligned}\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1)+B(x+1)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)}\\ &= \frac{(A+C)x^2+(B-2C)x+(-A+B+C)}{(x-1)^2(x+1)}\ .\end{aligned}$$

A partir de allí, multiplicando a los miembros extremos por el polinomio denominador, e igualando coeficientes homólogos, se obtiene el sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas,

$$\left\{\begin{aligned} A+C &= 0\\ B-2C &= 4\\ -A+B+C &= 0\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{aligned} A &= 1\\ B &= 2\\ C &= -1\end{aligned}\right. \quad ,\quad \text{y con éstos,}$$

$$\int \frac{4x}{x^3-x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-1|-\frac{2}{x-1}-\ln|x+1|+c\ .$$

2. *Teniendo el polinomio x^5+2x^3+x, raíz 0, simple y raíces complejas $\pm i$ dobles, se obtiene la descomposición $x^5+2x^3+x=x(x^2+1)^2$, que se usará para determinar las primitivas*

$$\int \frac{-x^3+2x^2-3x+1}{x^5+2x^3+x}\,\mathrm{d}x.$$

Como antes, siendo el grado del polinomio denominador mayor que el del numerador, no es necesario realizar la división previa, al haber raíces reales y no reales, quedará

$$\frac{-x^3+2x^2-3x+1}{x^5+2x^3+x} = \frac{-x^3+2x^2-3x+1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}\ .$$

Llegado a este punto, el trabajo es similar al caso anterior, resultando

$$\frac{A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x}{x(x^2+1)^2} = \frac{(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A}{x(x^2+1)^2}\ ,$$

de lo cual, $\quad A+B=0\ ,\quad C=-1\ ,\quad 2A+B+D=2\ ,\quad C+E=-3\quad \text{y}\quad A=1\ ,$

$$\Rightarrow \quad A = 1\,, \quad B = -1\,, \quad C = -1\,, \quad D = 1 \quad \text{y} \quad E = -2\,.$$

Luego,

$$\int \frac{-x^3+2x^2-3x+1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{(1)}{=} \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan x - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} - \arctan x - \frac{x}{x^2+1} + c$$

$$= -\frac{2x+1}{2x^2+2} + \ln|x| - 2\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$$

en donde la última integral en (1) se realiza integrando por partes luego de sumar y restar x^2, como sigue

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x - \int x\,\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \arctan x - \left(\frac{-x}{2(x^2+1)} + \int \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$$

4. Integrales Impropias

Al presentar a la Integral Definida de Riemann, se exigió que la función considerada estuviese definida y sea acotada en un intervalo cerrado y acotado. Si se eliminan o bien la restricción de intervalo acotado, o bien la de acotación impuesta a la función, se puede generalizar el concepto de integral definida mediante las llamadas Integrales Impropias, de primera y segunda especie, respectivamente.

En el primer caso, para funciones acotadas sobre intervalos no acotados, la idea será obtener un valor a partir de la integral definida en intervalos acotados, que se aproximen en algún sentido al intervalo original.

Por ejemplo, dadas las funciones $f,g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por las leyes $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, ambas son integrables en el intervalo $[1,b]$, para cualquier número real $b \geqq 1$, y valen

$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\bigg|_1^b = 1 - \frac{1}{b} \qquad \text{y} \qquad \int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln b\,.$$

En estos casos, la funciones $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2 : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ definidas por las integrales $\mathbf{I}_1(b) = \int_1^b f$ e $\mathbf{I}_1(b) = \int_1^b g$, tienen distinto comportamiento en el infinito, siendo

$$\lim_{b\to\infty} \mathbf{I}_1(b) = \lim_{b\to\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{b\to\infty} \mathbf{I}_2(b) = \lim_{b\to\infty} \ln b = +\infty\,.$$

En casos como el primero, cuando el límite planteado es finito, tiene sentido asignar ese valor a la generalización de la integral al conjunto no acotado.

Definición 1. *Si $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función real, tal que para todo $b \geqq a$ existe el número $\mathbf{I}(b) = \int_a^b f$, a la función $\mathbf{I} : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ así definida se la llama integral impropia de primera especie de f.*
Si existe el límite $\lim\limits_{b\to\infty} \mathbf{I}(b)$ se dice que la integral impropia es convergente y se lo indica con el símbolo $\int_a^\infty f$. Si por el contrario el límite no existe, se dirá que la integral impropia es divergente.

Observación 3. *Denominar como integral impropia a la función $\mathbf{I}$ de la definición anterior es una formalidad. En adelante será costumbre llamar directamente integral impropia al valor límite, si ésta es convergente.*

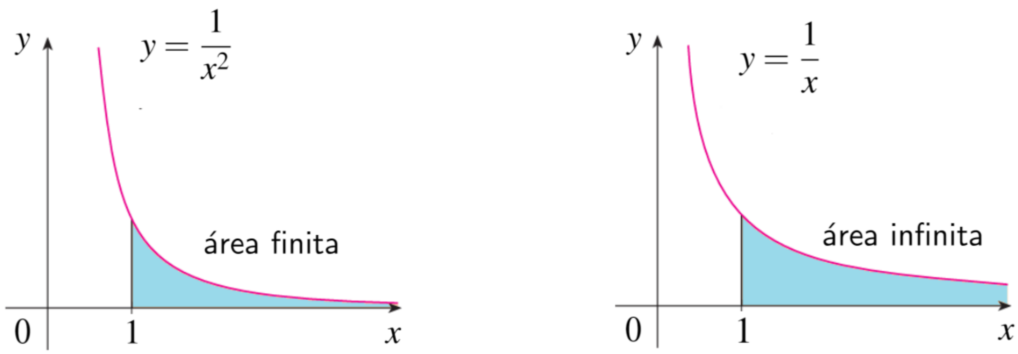

Figura 1: Integrales impropias de primera especie

Observación 4. *Si la integral impropia $\int_a^\infty f$ de una función no negativa resulta convergente, ésta sirve como una definición coherente del área de la región no acotada*

$$R = \{(x,y)\ :\ a \leqq x < \infty\ ,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\}\ ,$$

como un valor límite de áreas de recintos acotados, las cuales pueden resultar de área total finita, si la gráfica de la función se pega suficientemente rápido al eje x, o infinita, y así se define el área cuando la integral es divergente a infinito, como se presentan en la Figura 1 que ilustra las gráficas y las regiones definidas por las funciones de los ejemplos introductorios a las integrales impropias de primera especie.

Ejemplo 4.

1. *La integral impropia $\int_1^\infty x^{-s}\,\mathrm{d}x$ converge si $s > 1$ y diverge si $s \leqq 1$. Para mostrarlo se calcula*

$$\mathbf{I}(b) \ = \ \int_1^b x^{-s}\,\mathrm{d}x \ = \ \begin{cases} \ln b & \text{si} \quad s \ = \ 1 \\ \frac{b^{1-s}-1}{1-s} & \text{si} \quad s \ \neq \ 1 \end{cases} \ ,$$

   de donde se observa que para $\mathbf{I}(b)$, para $b \to \infty$, tiende a un límite finito si y sólo si $s > 1$, y en tal caso, al valor

$$\int_1^\infty x^{-s}\,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{s-1}\ .$$

2. *La integral impropia* $\int_0^\infty p(x)\,\mathrm{d}x$ *donde* p *es un polinomio no nulo, es divergente. En efecto,*

$$\int_0^b p(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \text{otro polinomio}\,\Big|_0^b \;\longrightarrow\; \pm\infty$$

3. *Las integrales impropias* $\int_0^\infty e^{-x}$ *y* $\int_0^\infty xe^{-x}$ *son ambas convergentes a 1, siendo, para* $b \to \infty$*,*

$$\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x \;=-e^{-x}\,\Big|_0^b = \;1-e^{-b}\;\to\;1 \quad \text{e} \quad \int_0^b xe^{-x}\,\mathrm{d}x \;=-xe^{-x}-e^{-x}\,\Big|_0^b = \;1-(b+1)e^{-b}\;\to\;1\;,$$

donde en el último límite se uso el resultado del [Unidad 2, Ejercicio 14]. Este ejemplo se generaliza en el Ejercicio 14, mostrando que para todo $n \in \mathbb{N}$*, la integral impropia* $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}$ *es convergente, a* $(n-1)!$*.*

En ocasiones no es posible encontrar el valor exacto de una integral impropia convergente, o simplemente porque la tarea así lo requiere, sólo interesa saber si ella converge o diverge. En base a la interpretación geométrica de la integral impropia de funciones no negativas, se puede observar un criterio de convergencia para integrales de funciones de este tipo, que establece que si f y g son dos funciones tales que $0 \leqq g \leqq f$, entonces, la convergencia de la integral de f implica la convergencia de la integral de g, y al revés, la divergencia de la integral de g implica divergencia de la integral de f (nada puede asegurarse de las recíprocas de estas afirmaciones). Este criterio puede visualizarse en la Figura 2 y se deja su demostración como parte del Ejercicio 9.

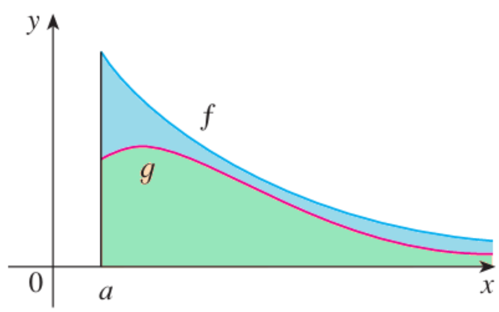

Figura 2: Comparación de integrales impropias

Las integrales impropias $\int_{-\infty}^b f$ se definen de manera análoga, tomando límites cuando $a \to -\infty$ de integrales definidas sobre $[a,b]$, y si además para algún c existen $\int_{-\infty}^c f$ y $\int_c^\infty f$, se dirá que la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f$ es convergente, al valor $\int_{-\infty}^c f + \int_c^\infty f$.

Para generalizar el concepto de integral definida al caso de funciones no acotadas, puede prodecederse de manera análoga, evaluando integrales definidas sobre intervalos en donde uno o los dos extremos se encuentren arbitrariamente cerca de puntos donde la función presente asíntotas verticales.

En este caso, tomando a las funciones $f,g:(0,1] \to \infty$, de leyes $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, que no están acotadas en su dominio, pero sí son integrables en los intervalos de la forma $[c,1]$, siempre que $c > 0$, resulta, para $c \to 0^+$,

$$\mathbf{J}_1(c) \;=\; \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\sqrt{x}\,\Big|_c^1 \;=\; 2(1-\sqrt{c}) \;\to\; 2 \quad \text{y} \quad \mathbf{J}_2(c) \;=\; \int_c^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=-\ln c \;\to\; \infty\,.$$

Definición 2. *Si $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es una función real tal que para todo $c \geqq a$ existe la integral definida $\mathbf{J}(c) = \int_c^b f$, a la función $\mathbf{J} : (a,b] \to \mathbb{R}$ así definida se la llama integral impropia de segunda especie de f, y cuando existe el límite $\lim\limits_{c \to a^+} \mathbf{J}(c)$ se dice que la integral impropia es convergente y se lo indica con el símbolo $\int_{a^+}^b f$, o $\int_a^b f$.*

Observación 5.

1. *Si f es seccionalmente continua (o de modo más general, integrable en el sentido de Riemann) en el intervalo $[a,b]$, entonces la integral impropia de segunda especie coincide con la integral definida.*

2. *Para funciones no negativas, las integrales impropias de segunda especie, si son convergentes, sirven para asignar áreas a regiones de la forma*

$$R = \{(x,y) \ : \ a < x \leqq b \ , \ 0 \leqq y \leqq f(x)\} \ ,$$

similares a las que se acostumbraba anteriormente, donde f no es necesariamente una función acotada. En estos casos se observa que la integral impropia es convergente, si sus gráficas se pegan convenientemente a sus asíntotas verticales, como se ilustra con las funciones trabajadas, inversas de las usadas para presentar a las integrales impropias de primera especie, en la Figura 3

3. *Las integrales impropias de la forma $\int_a^{b^-} f$ e $\int_{a^+}^{b^-} f$ se definen de manera análoga, y si para todo c convergen las integrales impropias $\int_{a^+}^{c^-} f$ e $\int_{c^+}^{b^-} f$, entonces la integral $\int_{a^+}^{b^-} f$ converge a $\int_{a^+}^{c^-} f + \int_{c^+}^{b^-} f$.*

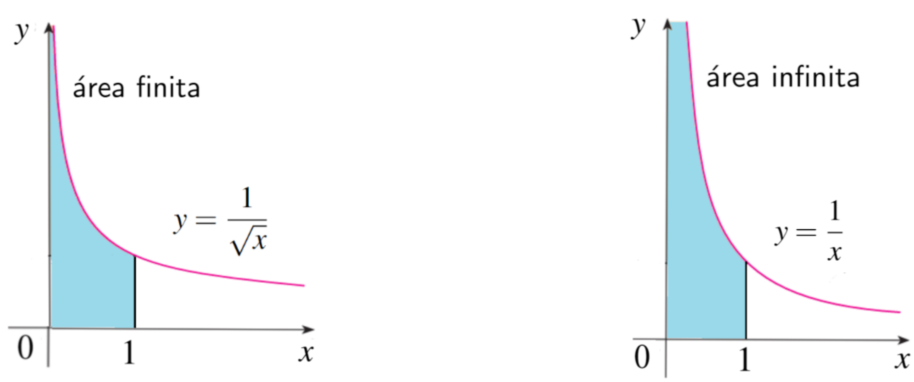

Figura 3: Integrales impropias de segunda especie

Ejemplo 5.

1. *La integral impropia $\int_0^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x$ converge si $s < 1$ y diverge si $s \geqq 1$, hecho que se observa de las expresiones*

$$\int_c^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x \ = \ \begin{cases} -\ln c & \text{si} \quad s \ = \ 1 \\ \frac{1-c^{1-s}}{1-s} & \text{si} \quad s \ \neq \ 1 \end{cases} \ ,$$

que tiende a un límite finito conforme $c \to 0^+$ si y sólo si $s < 1$, y en tal caso, al valor $\int_0^1 x^{-s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}$.

2. *Dado el comportamiento* $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, *se sabe que la función logaritmo natural tiene una asíntota vertical en el origen. Por esto, el símbolo* $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$, *no tiene sentido como una integral definida, pero sí como una integral impropia de segunda especie. Para ver su carácter, usando la primitiva encontrada en el Ejemplo 2, haciendo* $c \to 0^+$, *y usando la Regla de L'Hôpital en el segundo término del límite,*

$$\int_c^1 \ln x \, \mathrm{d}x \;=\; x\ln x - x \,\Big|_c^1 \;=-1-c\ln c+c \;\to\; -1-0+0 \;=-1$$

se concluye que el valor de la integral impropia $\int_{0^+}^1 \ln x \, \mathrm{d}x = -1$.

Observar que si bien se trabajaron por un lado las integrales impropias de primera especie y luego las de segunda, ambas definiciones no son excluyentes. Por ejemplo, asociada a la función definida en $\mathbb{R}^+$ por la ley

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & 0 < x \leqq 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geqq 1 \end{cases} ,$$

queda la integral impropia $\int_{0^+}^{\infty} f$, convergente a 3.

5. Ejercicios

1. Encontrar funciones satisfaciendo simultáneamente las condiciones en cada caso.

   a) $f'(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$ y $f(1) = \frac{18}{7}$ *b*) $f'(x) = (5^x - x^5))$ y $f(0) = \ln 5$
   c) $f'(x) = (\sqrt{x}-3)(\sqrt[3]{x}-\sqrt{x})$ y $f(1) = \frac{35}{44}$ *d*) $f'(x) = (e^x + e^{-x})^2$ y $f(-2) = 10$.

2. Hallar las siguientes primitivas, utilizando los métodos de integración por sustitución y por partes.

   a) $\int x(x^2-1)^{10} \, \mathrm{d}x$ *b*) $\int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \, \mathrm{d}x$ *c*) $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$ *d*) $\int \operatorname{sen}^3 x \, \mathrm{d}x$ *e*) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$
   f) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}} \, \mathrm{d}x$ *g*) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}x$ *h*) $\int \frac{\arctan^3 x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x$ *i*) $\int \frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}} \, \mathrm{d}x$ *j*) $\int \frac{3x}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$
   k) $\int x \operatorname{sen} x \cos x \, \mathrm{d}x$ *l*) $\int e^x \cos(3x) \, \mathrm{d}x$ *m*) $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$ *n*) $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, \mathrm{d}x$ *o*) $\int x \operatorname{senh} x \, \mathrm{d}x$
   p) $\int \sec^2(3x) \, \mathrm{d}x$ *q*) $\int \operatorname{sen}\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$ *r*) $\int x^2 e^{-2x} \, \mathrm{d}x$ *s*) $\int x^2 \operatorname{sen}(2x) \, \mathrm{d}x$ *t*) $\int \cos^5 x \, \mathrm{d}x$.

3. Obtener las primitivas $\int \operatorname{sen}^n x \, \mathrm{d}x$ y $\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$, para $n = 2, \ldots, 6$. Sugerencia para n par: de las identidades $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$ y $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos(2x)$, despejar $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$.

4. Calcular los valores de las integrales definidas que siguen.

   a) $\int_{-1}^1 2x \operatorname{sen}(1-x^2) \, \mathrm{d}x$ *b*) $\int_0^\pi \tan^2(\frac{x}{3}) \, \mathrm{d}x$ *c*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+3\operatorname{sen}^2 x}} \, \mathrm{d}x$ *d*) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\sqrt{2\sec x}} \, \mathrm{d}x$ *e*) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^6 x \, \mathrm{d}x$.

5. Demostrar que si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es una expresión racional en las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, entonces la sustitución $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, conduce a la igualdad (que después se puede trabajar pasando a fracciones simples),

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x) \, \mathrm{d}x \;=\; 2\int R\left(\frac{2u}{u^2+1} \,,\, \frac{1-u^2}{u^2+1}\right) \frac{1}{u^2+1} \, \mathrm{d}u \, .$$

6. Usando sustituciones adecuadas y expresando en fracciones simples, encontrar las siguientes primitivas.

a) $\int \frac{1}{(9x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{4x-3}{3x^2+3x+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{5x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$ h) $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}\,\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{\ln\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ j) $\int \frac{x^2}{(x+4)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$
k) $\int \frac{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$ l) $\int \frac{2x+3\sqrt{x+1}}{2x-3\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ m) $\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ n) $\int \frac{1}{4\operatorname{sen}x+3\cos x}\,\mathrm{d}x$ o) $\int \frac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}\,\mathrm{d}x$.

7. Verificar la validez de las afirmaciones

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \pi \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0^-}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \;=\; -\pi\,,$$

y analizar la veracidad de las identidades

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{1}\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0^-}\int_{-1}^{1}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{1}\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{x^2+h^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

8. Probar que si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y la integral $\int_a^\infty f$ es convergente, debe ser $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

9. Si f y g son funciones no negativas definidas en $[a,\infty)$, demostrar que valen las siguientes afirmaciones.

   a) La integral $\int_a^\infty f$ converge si y sólo si existe una constante $M>0$ tal que $\int_a^b f \leqq M$ para todo $b \geqq a$.

   b) Suponiendo que se verifica la desigualdad $g(x) \leqq f(x)$ para todo $x \geqq a$,

   i) si la integral $\int_a^\infty f$ converge, entonces también es convergente la integral $\int_a^\infty g$, y

   ii) si la integral $\int_a^\infty g$ es divergente, también lo es la integral $\int_a^\infty f$.

   c) De modo más general, si existe $c>0$ tal que $g(x) \leqq cf(x)$ para todo $x \geqq a$, siguen siendo válidos los enunciados del apartado b).

   d) Si $g>0$ y existe el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$, entonces las integrales $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$ comparten carácter.

9'. Se dice que una función $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ tiene integral absolutamente convergente en $[a,\infty)$, si es integrable en todo intervalo contenido en $[a,\infty)$, y la integral impropia $\int_a^\infty |f|$ es convergente. Mostrar que si f es absolutamente convernegte en $[a,\infty)$, entonces es convergente en $[a,\infty)$.

10. Si bien se afirmó que las funciones error (erf) y seno integral (Si) definidas en la Sección 1 no cuentan con una expresión en funciones elementales, mostrar que convergen las integrales impropias asociadas,

$$\lim_{b\to\infty}\operatorname{erf} b \;=\; \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \lim_{b\to\infty}\operatorname{Si} b \;=\; \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}x}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Con más elementos de Análisis, se demuestra que los límites son respectivamente 1 y $\frac{\pi}{2}$.

11. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ \ln^2 x}\,\mathrm{d}x$	*b*) $\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$	*c*) $\int_0^\infty e^{-kx}\,\mathrm{d}x$	*d*) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$	*e*) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
f) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+9}\,\mathrm{d}x$	*g*) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$	*h*) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,\mathrm{d}x$	*i*) $\int_{-1}^3 \frac{1}{(1-x)^3}\,\mathrm{d}x$	*j*) $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+\cos x}\,\mathrm{d}x$
k) $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen}(2x)\,\mathrm{d}x$	*l*) $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4}\,\mathrm{d}x$	*m*) $\int_{0^+}^{1^-} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$	*n*) $\int_{0^+}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{x}\ \ln x}\,\mathrm{d}x$	*o*) $\int_2^\infty \frac{1}{x\ \ln^s x}\,\mathrm{d}x$
p) $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{e^x}}\,\mathrm{d}x$	*q*) $\int_0^\infty \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$	*r*) $\int_{0^+}^{1^-} \frac{\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x$	*s*) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{2+e^x}\,\mathrm{d}x$	*t*) $\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

12. En cada uno de los casos siguientes, determinar el o los valores reales del parámetro C, para que resulte convergente la integral impropia correspondiente, y para ellos calcular el valor de cada integral.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \left(\frac{Cx}{x^2+1} - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$ *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{C}{3x+1}\right)\mathrm{d}x$ *c*) $\displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - \frac{C}{x+2}\right)\mathrm{d}x$.

13. Mostrar que $\lim\limits_{h\to\infty} \int_{-h}^h \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 0$ y $\lim\limits_{h\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-h} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_h^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = 0$ y decidir si las integrales impropias $\int_{-\infty}^\infty \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$ y $\int_{-1}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ son o no convergentes.

14. Se define la función Gamma, $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, para cada $s \in \mathbb{R}^+$, como el valor de la integral impropia

$$\Gamma(s) = \int_{0^+}^\infty \exp(-x)\, x^{s-1}\,\mathrm{d}x\ .$$

a) Mostrar que esta función está bien definida. Esto es, que para todo $s \in \mathbb{R}^+$, la integral impropia expresada en su ley, es convergente.

b) Demostrar que para $s \in \mathbb{R}^+$ vale la ecuación $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$. En consecuencia, habiendo mostrado en el Ejemplo 4 que $\Gamma(1) = 1$, verificar que resulta para $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. Así, la función Gamma puede pensarse como una generalización del factorial a valores no naturales de la variable.

Apéndice. Soluciones de los Ejercicios 8, 9 y 9’

Ejercicio 8. Probar que si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y la integral $\int_a^\infty f$ es convergente, debe ser $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Prueba. Por contradicción, sabiendo que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ se supone en principio $\ell > 0$, por definición de límite en el infinito, dado $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, debe existir $H \geqq a$, tal que

$$x > H \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| < \varepsilon = \frac{\ell}{2} \;\Rightarrow\; 0 < \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3\ell}{2} \;\Rightarrow\; \frac{\ell}{2} < f(x)\ ,$$

y haciendo $b \to \infty$ al final de las desigualdades que sigue, más el uso de la [Unidad 1, Proposición 7], queda

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^H f + \int_H^b f \;>\; \int_a^H f + \frac{\ell}{2}(b-H) \;\to\; \infty,$$

resultando la integral $\int_a^\infty f$ divergente. De modo similar, si se asume $\ell < 0$, existirá $H \geqq a$, tal que

$$x > H \;\Rightarrow\; |f(x)-\ell| < \varepsilon = \frac{-\ell}{2} \;\Rightarrow\; \frac{3\ell}{2} < f(x) < \frac{\ell}{2} < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < \frac{\ell}{2} < 0$$

y de nuevo, usando la [Unidad 1, Proposición 7] y tomando $b \to \infty$ al final, se concluye la divergencia de $\int_a^\infty f$,

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^H f + \int_H^b f \;<\; \int_a^H f + \frac{\ell}{2}(b-H) \;\to\; -\infty,$$

Ejercicio 9. Si f y g son dos funciones reales no negativas definidas en $[a,\infty)$, entonces valen las siguientes afirmaciones.

a) La integral $\int_a^\infty f$ converge si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que $\int_a^b f \leqq M$ para todo $b \geqq a$.

Prueba. Notar primero que si f es no negativa, entonces la función de ley $\mathbf{I}(b) = \int_a^b f$ es no decreciente. En efecto, si $a \leqq b_1 \leqq b_2$, entonces $\int_{b_1}^{b_2} f \geqq 0$, y queda $\mathbf{I}(b_1) = \int_a^{b_1} f \leqq \int_a^{b_1} f + \int_{b_1}^{b_2} f = \int_a^{b_2} f = \mathbf{I}(b_2)$.

Ahora el si y sólo si. Por un lado, si la integral impropia $\int_a^\infty f$ converge a M, para $b \geqq a$,

$$\int_a^b f \;=\; \mathbf{I}(b) \;\overset{(1)}{\leqq}\; \lim_{\beta\to\infty} \mathbf{I}(\beta) \;\overset{(2)}{=}\; \int_a^\infty f \;=\; M\ .$$

donde en (1) se usa la monotonía de $\mathbf{I}$ y el límite en (2) existe dada la convergencia de $\int_a^\infty f$.

Recíprocamente, si existe $M > 0$ tal que $\int_a^b f \leqq M$ para todo $b \geqq a$, entonces la función $\mathbf{I}$ es acotada superiormente, y en consecuencia existirá $\ell = \sup\{\mathbf{I}(b), b \geqq a\}$. De ello, dado $\varepsilon > 0$, existirá H para el cual $\ell - \varepsilon \leqq \mathbf{I}(H) \leqq \ell < \ell + \varepsilon$, pero siendo la función $\mathbf{I}$ no decreciente quedará, para $b \geqq H$,

$$\ell-\varepsilon \;\leqq\; \mathbf{I}(H) \;\leqq\; \mathbf{I}(b) \;\leqq\; \ell \;<\; \ell+\varepsilon \quad\Rightarrow\quad \ell-\varepsilon \;\leqq\; \mathbf{I}(b) \;\leqq\; \ell+\varepsilon \quad\Rightarrow\quad |\mathbf{I}(b)-\ell| \;\leqq\; \varepsilon\ ,$$

lo que expresa la definición del símbolo $\lim\limits_{b\to\infty} \mathbf{I}(b) = \ell$, y la convergencia de la integral impropia buscada.

b) Suponiendo que se verifica la desigualdad $g(x) \leqq f(x)$ para todo $x \geqq a$, mostrar que

i) si la integral $\int_a^b f$ converge, entonces también es convergente la integral $\int_a^b g$,

Prueba. En este caso, para $b \geqq a$, será por el [Unidad 1, Corolario 1],

$$\int_a^b g \;\leqq\; \int_a^b f \;=\; \mathbf{I}(b) \;\overset{(3)}{\leqq}\; \lim_{\beta\to\infty} \mathbf{I}(\beta) \;=\; \int_a^\infty f \;=\; M\ ,$$

donde de nuevo en (3) se usa la monotonía de $\mathbf{I}$, y el enunciado es consecuencia del apartado anterior.

ii) si la integral $\int_a^\infty g$ es divergente, también lo es la integral $\int_a^\infty f$

Prueba. Aquí el argumento es por contradicción. Si la integral impropia $\int_a^\infty f$ no divergiera, entonces convergería, pero esta convergencia aseguraría la de la integral $\int_a^\infty g$, que por hipótesis es divergente. Luego, necesariamente, resulta $\int_a^\infty f$ divergente.

c) Si existe $c>0$ tal que $g(x)\leqq cf(x)$ para todo $x\geqq a$, siguen valiendo los enunciados del apartado *b*).

Prueba. Para la parte de convergencia, sigue modificando lo hecho en *b*), notando que para $b\geqq a$ queda

$$\int_a^b g \;\leqq\; c\int_a^b f \;=\; c\,\mathbf{I}(b) \;\leqq\; c\lim_{\beta\to\infty}\mathbf{I}(\beta) \;=\; c\int_a^\infty f \;=\; c\,M\,,$$

y se sigue como en *b*). Lo referido a divergencia de nuevo se hace por contradicción.

d) si $g>0$ y existe el límite $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell>0$, entonces $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$ comparten carácter.

Prueba. Primero hay que convencerse que los apartados *b*) y *c*) son válidos, si las desigualdades se toman no desde a en adelante, sino a partir de un valor $H>a$, consecuencia de la propiedad aditiva de la integral,

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^H f+\int_H^b f\,.$$

Pasado esto, consecuencia de la hipótesis del apartado, existe $H>0$ de manera que para $x\geqq H$,

$$\left|\,\frac{f(x)}{g(x)}-\ell\,\right| \;\leqq\; \frac{\ell}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\ell}{2}\,g(x) \;\leqq\; f(x) \;\leqq\; \frac{3\ell}{2}\,g(x) \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} g(x) \;\leqq\; \frac{2}{\ell}f(x) \\ f(x) \;\leqq\; \frac{3\ell}{2}g(x) \end{cases}.$$

Llegado a este punto, resta observar que por el apartado *c*), las primera y segunda desigualdades, implican respectivamente las llaves siguientes

$$\begin{cases} \int_a^\infty f \ \text{ converge } \;\Rightarrow\; \int_a^\infty g \ \text{ converge} \\ \int_a^\infty g \ \text{ diverge } \;\Rightarrow\; \int_a^\infty f \ \text{ diverge} \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \int_a^\infty g \ \text{ converge } \;\Rightarrow\; \int_a^\infty f \ \text{ converge} \\ \int_a^\infty f \ \text{ diverge } \;\Rightarrow\; \int_a^\infty g \ \text{ diverge} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, mirando primeras y segundas implicancias de cada llave respectivamente,

$$\int_a^\infty f \ \text{ converge } \;\Leftrightarrow\; \int_a^\infty g \ \text{ converge } \quad\text{e}\quad \int_a^\infty f \ \text{ diverge } \;\Leftrightarrow\; \int_a^\infty g \ \text{ diverge}\,.$$

Ejercicio 9'. Se dice que una función $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ tiene integral impropia absolutamente convergente en $[a,\infty)$, si es integrable en todo intervalo contenido en $[a,\infty)$, y la integral impropia $\int_a^\infty |f|$ es convergente. Mostrar que si f es absolutamente convernegte en $[a,\infty)$, entonces es convergente en $[a,\infty)$.

Prueba. Por definición, f es integrable en cada conjunto de la forma $[a,b]$, con $b>a$, y luego, mostrar la convergencia de la integral impropia de f es equivalente a mostrar la existencia de límite de la función de ley $\mathbf{I}(b)=\int_a^b f$. En este punto, se hace notar que las funciones, en $[a,\infty)$, de leyes

$$f^+(x) \;=\; \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad f(x)\geqq 0 \\ 0 & \text{si} \quad f(x)<0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f^-(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x>0 \\ -f(x) & \text{si} \quad f(x)<0 \end{cases},$$

son ambas no negativas, integrables en cualquier conjunto $[a,b]$, y acotadas superiormente por la función $|f|$. Luego, cada una de ellas se encuentra en las hipótesis del Ejercicio 9 *c*), y en consecuencia, como $|f|$ tiene integral impropia convergente en $[a,\infty)$, también serán convergentes las integrales $\int_a^\infty f^+$ e $\int_a^\infty f^-$, resultando la integral de f convergente, del cálculo, siendo que cada límite a la derecha de (1) existen,

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f \;=\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b (f^+-f^-) \;\overset{(1)}{=}\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b f^+ - \lim_{b\to\infty}\int_a^b f^- \;=\; \int_a^\infty f^+ - \int_a^\infty f^-\,.$$