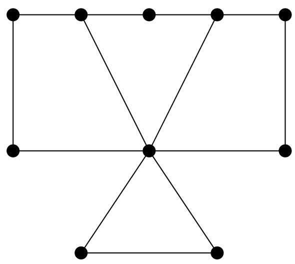
Práctica 5 - Ciclos hamiltonianos

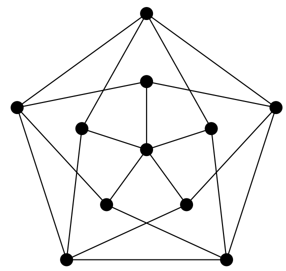
Selección: 1,2,4-7,11-13.

1. Encontrar un ciclo hamiltoniano, si existe, para cada uno de los grafos siguientes. Si el grafo no tiene un ciclo hamiltoniano, determinar si tiene un camino hamiltoniano.

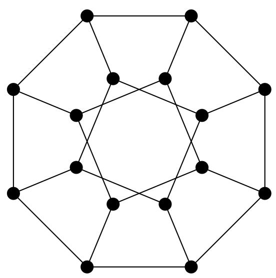
a)



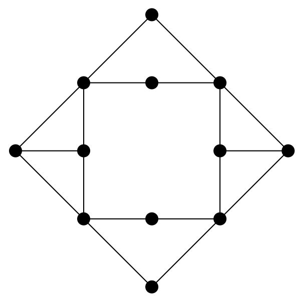
c)



b)



d)



2. Dar un ejemplo de un grafo conexo tal que
   - *a*) no tenga circuitos eulerianos ni ciclos hamiltonianos;
   - *b*) tenga un circuito euleriano pero no tenga ciclos hamiltonianos;
   - *c*) tenga un ciclo hamiltoniano pero no tenga circuitos eulerianos;
   - *d*) tenga un circuito euleriano y un ciclo hamiltoniano que sean distintos;
   - *e*) tenga un circuito euleriano y un ciclo hamiltoniano que sean iguales.

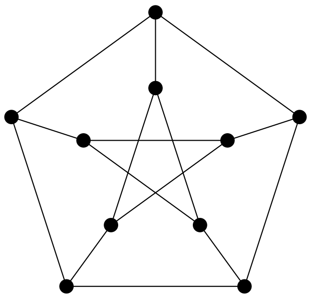
3. *a*) Caracterizar el tipo de grafo en que un circuito euleriano es también un ciclo hamiltoniano.
   b) Caracterizar el tipo de grafo en que un recorrido euleriano es también un camino hamiltoniano.

4. *a*) Dar un grafo G tal que para todo $\emptyset \neq S \subseteq V(G)$ el grafo $G - S$ posee a lo sumo $|S|$ componentes conexas y que no sea hamiltoniano.
   b) ¿Contradice esto la condición necesaria que hemos visto para la existencia de ciclos hamiltonianos?

5. *a*) Dar un grafo G tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v vale $d(u) + d(v) < |V(G)|$ y que sea hamiltoniano.

b) ¿Contradice esto la condición suficiente que hemos visto para la existencia de ciclos hamiltonianos?

6. Considerar el *grafo de Petersen*.



   a) Mostrar que el grafo de Petersen no tiene ciclos hamiltonianos pero si tiene un camino hamiltoniano.

   b) Mostrar que si se elimina cualquier vértice (y las aristas incidentes en él) del grafo de Petersen, entonces el subgrafo resultante tiene un ciclo hamiltoniano.

7. Sea $G[X, Y]$ un grafo bipartito conexo, con X e Y no vacíos.

   a) Probar que si G tiene un ciclo hamiltoniano, entonces $|X| = |Y|$.

   b) Probar que si G tiene un camino hamiltoniano, entonces $-1 \leqslant |X| - |Y| \leqslant 1$.

   c) ¿Son ciertas las recíprocas de los ítems anteriores?

8. Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ (o de $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ si corresponde) los siguientes grafos admiten un ciclo o un camino hamiltoniano.

   a) El grafo completo K_n.

   b) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.

   c) El n-cubo Q_n.

   d) El grafo *grilla* $P_m \square P_n$.

   e) El grafo *prisma apilado* $C_m \square P_n$.

   f) El grafo $G \square P_n$, donde G es un grafo hamiltoniano.

9. *a*) Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$, mostrar que la cantidad de ciclos hamiltonianos distintos en el grafo bipartito completo $K_{n,n}$ es
$$\frac{1}{2}(n-1)!n!$$

   b) ¿Cuántos caminos hamiltonianos distintos tiene $K_{n,n}$ con $n \geqslant 1$?

10. Probar que un grafo G tiene un camino hamiltoniano ssi el grafo $G \vee K_1$ es hamiltoniano.

11. Demostrar la siguiente *condición necesaria* para la existencia de caminos hamiltonianos:

    Si G es un grafo que tiene un camino hamiltoniano entonces para todo $\varnothing \neq S \subset V(G)$ vale que $\kappa(G - S) \leqslant |S| + 1$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

12. Demostrar la siguiente *condición suficiente* para la existencia de caminos hamiltonianos:

    Si G es un grafo simple con $n = |V(G)| \geqslant 2$ tal que para todo par de vértices no adyacentes u y v se tiene $d(u) + d(v) \geqslant n - 1$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

13. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n \geqslant 2$. Demostrar que si $d(v) \geqslant \frac{n-1}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

14. *a*) Modelar el siguiente problema utilizado grafos.

    ¿Pueden arreglarse las permutaciones de los primeros n números naturales en una sucesión de manera que las permutaciones adyacentes

    $$p: \ p_1, \dots, p_n \qquad \text{y} \qquad q: \ q_1, \dots, q_n$$

    satisfagan $p_i \neq q_i$ para todo $i = 1, \dots, n$?

    b) Resolver el problema del ítem anterior para $n = 1, 2, 3, 4$.

15. Sea $G = (V, E)$ un grafo y S un conjunto independiente en G. Para cada $a \in S$ y cualquier ciclo hamiltoniano C de G, habrá $d(a) - 2$ aristas en E incidentes en a que no están en C. Por lo tanto, habrá al menos

    $$\sum_{a \in S} (d(a) - 2) = \sum_{a \in S} d(a) - 2|S|$$

    aristas en E que no están en C.

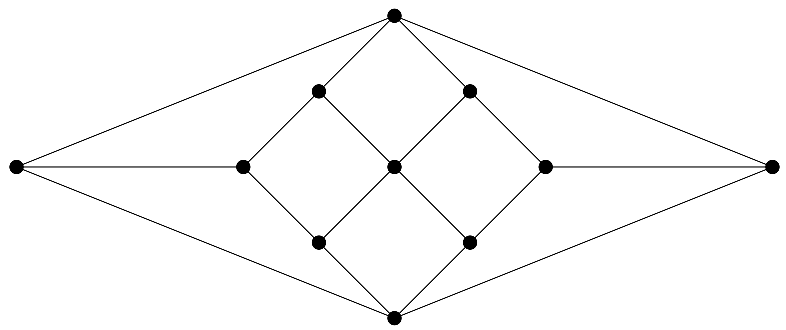
    a) ¿Por qué son distintas las $\sum_{a \in S} d(a) - 2|S|$ aristas mencionadas?

    b) Si denotamos por $n = |V|$ y $m = |E|$, demostrar que si

    $$m - \sum_{a \in S} d(a) + 2|S| < n$$

    entonces G no tiene ningún ciclo hamiltoniano.

    c) Demostrar, utilizando el ítem anterior que el siguiente grafo no admite ciclos hamiltonianos.



16. Probar que si G y H son hamiltonianos entonces $G \square H$ es hamiltoniano.

17. En un tablero de ajedrez, un caballo puede mover de un casillero a otro que difiere en uno en una coordenada y en dos en la otra. Probar que en un tablero de $4 \times n$ no existe un tour hípico: un recorrido del caballo que pase por todos los casilleros exactamente una vez y retorne al casillero inicial.