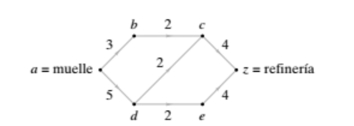
Complementos de Matemática I
Matemática Discreta

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

2025

Flujo en redes

Ejemplo



Definición

Una red de transporte es un grafo dirigido, con peso en los arcos, simple que satisface:

1. *Un vértice designado a, origen o fuente, que no tiene arcos entrantes;*
2. *Un vértice designado z, destino o sumidero, que no tiene arcos salientes;*
3. *El peso c_{ij} del arco (i, j), la capacidad del arco y es no negativo.*

Definición

Un flujo en la red G con fuente a y sumidero z, asigna a cada arco (i,j) un número no negativo F_{ij} tal que

1. $F_{ij} \leq C_{ij}$
2. *Para cada $j \neq a, z$, vale conservación de flujo*

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji}$$

F_{ij} *flujo de la arista ij,*

$$\sum_i F_{ij}$$

flujo que entra a j

$$\sum_i F_{ji}$$

flujo que sale de j.
Si $(i,j) \notin A$ se toma $F_{ij} = 0$.

EJEMPLO

Ejemplo 10.1.4

TEOREMA

Dado un flujo en una red $a-z$ $G=(V,A)$, el flujo que sale de a es igual al flujo que entra a z.

PROOF.

Si V es el conjunto de vértices

$$\sum_{e\in A} = \sum_{j\in V}\sum_{i\in V} F_{ij} = \sum_{i\in V}\sum_{j\in V} F_{ji}.$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j\in V}(\sum_{i\in V} F_{ij} - \sum_{i\in V} F_{ji}) \\ &= (\sum_{i\in V} F_{iz} - \sum_{i\in V} F_{zi}) + (\sum_{i\in V} F_{ia} - \sum_{i\in V} F_{ai}) + \\ &\quad \sum_{j\in V, j\neq a,z}(\sum_{i\in V} F_{ij} - \sum_{i\in V} F_{ji}) \\ &= (\sum_{i\in V} F_{iz} - \sum_{i\in V} F_{ai}) \end{aligned}$$

Esto permite definir el valor del flujo como

$$\sum_{i \in V} F_{ai} = \sum_{i \in V} F_{iz}$$

Ejemplo

Valor del flujo del ejemplo anterior es 5.

EJEMPLO

Red de bombeo

La figura 10.1.3 representa una red de bombeo en la que se entrega agua para dos ciudades, A y B, desde tres pozos w_1, w_2 y w_3. Las capacidades de los sistemas intermedios se muestran en las aristas. Los vértices b, c y d representan las estaciones de bombeo intermedias. Modele este sistema como una red de transporte.

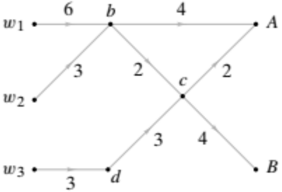


Figura 10.1.3 Red de bombeo. El agua para las ciudades A y B se entrega desde los pozos w_1, w_2 y w_3. Las capacidades se indican en las aristas.

EJEMPLO (CONT.)

Para obtener el origen y destino designados, se puede obtener una red de transporte equivalente uniendo los orígenes en un **superorigen** y los destinos en un **superdestino** (vea la figura 10.1.4). En ésta, ∞ representa una capacidad ilimitada.

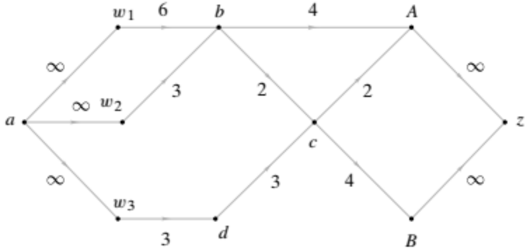


Figura 10.1.4 Red de la figura 10.1.3 con origen y destino designados.

◀

EJEMPLO

Una red de flujo de tráfico

Es posible ir de la ciudad A a la ciudad C directamente o pasando por la ciudad B. Durante el periodo de 6:00 PM a 7:00 PM, los tiempos de viaje promedio son

A a B	15 minutos
B a C	30 minutos
A a C	30 minutos.

Las capacidades máximas de la rutas son

A a B	3000 vehículos
B a C	2000 vehículos
A a C	4000 vehículos.

Represente el flujo de tráfico de A a C durante el periodo de 6:00 PM a 7:00 PM como una red.

Un vértice representará una ciudad en un tiempo específico (vea la figura 10.1.5). Una arista conecta X, t_1 con Y, t_2 si se puede salir de la ciudad X a las t_1 PM y llegar a la ciudad Y a las t_2 PM. La capacidad de una arista es la capacidad de la ruta. Las aristas de capacidad infinita conectan a A, t_1 con A, t_2 y B, t_1 con B, t_2 para indicar que cualquier número de autos puede esperar en las ciudades A o B. Por último, se introduce un superorigen y un superdestino.

EJEMPLO (CONT.)

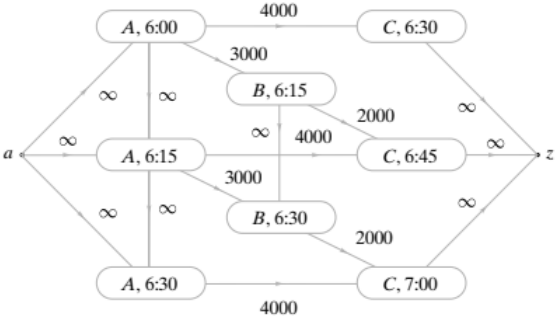


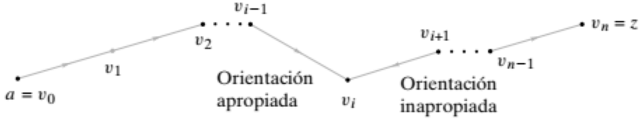
Figura 10.1.5 Red que representa el flujo de tráfico de la ciudad *A* a la ciudad *C* durante el periodo de 6:00 PM a 7:00 PM.

Sea G una red $a-z$ y pensemos sin dirección (grafo subyacente).

Sea $P = (v_0, \ldots, v_n)$ un camino no dirigido con $v_0 = a$ y $v_n = z$. Decimos que $e \in P$ tal que $e = v_{i-1}v_i$

1. tiene orientación apropiada con respecto a P si en G tiene el sentido v_{i-1} a v_i,
2. de lo contrario, tiene orientación inapropiada con respecto a P.

Si es posible encontrar un camino en el grafo subyacente a una red $a-z$ en la que todas las aristas tengan orientación apropiada y flujo menor que la capacidad en cada una de ellas, es posible aumentar el flujo por ese camino $a-z$.



Trayectoria P

Ejemplo

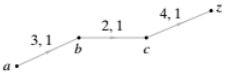


Figura 10.2.2 Una trayectoria cuyas aristas tienen la orientación apropiada.

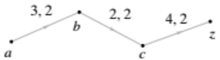
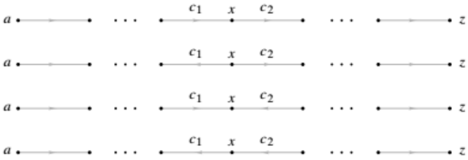


Figura 10.2.3 Después de aumentar en 1 el flujo de la figura 10.2.2.

También puede aumentarse el flujo aunque haya aristas con orientaciones apropiadas e inapropiadas. Hay cuatro posibilidades para la orientación de las aristas e_1 y e_2 incidentes en x:



Para modificar un flujo en valor δ y mantener factibilidad en un flujo, qué debemos hacer? Cómo debería ser el flujo original?

EJEMPLO

Considere la trayectoria de a a z en la figura 10.2.5. Las aristas (a, b), (c, d) y (d, z) tienen la orientación apropiada y la arista (c, b) tiene la orientación inapropiada. Se disminuye en 1 el flujo de la arista con orientación inapropiada (c, b) y se aumenta en 1 el flujo de las aristas orientadas apropiadamente (a, b), (c, d) y (d, z) (vea la figura 10.2.6). El valor del nuevo flujo es 1 unidad mayor que el original.

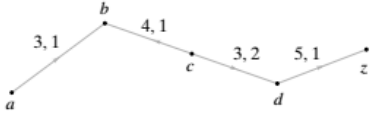


Figura 10.2.5 Una trayectoria con una arista orientada inapropiadamente: (c, b).

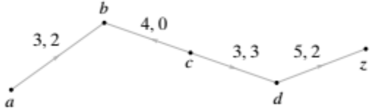


Figura 10.2.6 Después de aumentar en 1 unidad el flujo de la figura 10.2.5.

Teorema

Sea F un flujo en una red $a-z$ y P un camino $a-z$ en la red que satisface:

1. *Para cada arco (i,j) con orientación apropiada en P, $F_{ij} < C_{ij}$.*
2. *Para cada arco (i,j) con orientación inapropiada en P, $0 < F_{ij}$.*

Sea $\Delta = \min X$ donde

$$X = \{C_{ij} - F_{ij} : (i.j) \text{ apropiada en } P\} \cup \{F_{ij} : (i.j) \text{ inapropiada en } P\}.$$

Si F^* es tal que

$$F^*_{ij} = \begin{cases} F_{ij} & (i,j) \notin P \\ F_{ij} + \Delta & (i,j) \text{ apropiada en } P \\ F_{ij} - \Delta & (i,j) \text{ inapropiada en} P \end{cases}$$

entonces $val(F^*) = val(F) + \Delta$.

Proof.

Apunte $\square$

Algoritmo de Ford-Fulkerson

Idea. Iniciar con un flujo factible (por ejemplo, flujo $f(e) = 0$ para toda arista e). Buscamos un camino f-aumentante y aumentamos el flujo Δ unidades (donde Δ es la tolerancia del camino). Repetimos hasta que no haya caminos f-aumentantes, en ese momento el flujo es máximo.

A lo largo de la ejecución del algoritmo iremos etiquetando cada vértice u con etiquetas de la forma (x, α), donde diremos que x es predecesor de u y $\alpha = \varepsilon(u)$.

Entrada. G red con fuente a, sumidero z, capacidades $c(e)$ para $e \in E(G)$.

Salida. Un flujo máximo para G.

Inicialización. Consideramos un flujo factible f de G (puede ser flujo cero).

Iteración.

Paso 1. Etiquetar a con $(-, \infty)$. $U = \{a\}$.

Paso 2. Mientras z no fue etiquetado

Si $U = \emptyset$, entonces el algoritmo termina. Si no, elijo $v \in U$.

Para todo vértice x no etiquetado aún tal que $vx \in E(G)$, si $f(vx) < c(vx)$, entonces agrego x a U y lo etiqueto con

$$(v, \text{mín}\{\varepsilon(v), c(vx) - f(vx)\})$$

Para todo vértice x no etiquetado aún tal que $xv \in E(G)$, si $f(vx) > 0$, entonces agrego x a U y lo etiqueto con

$$(v, \text{mín}\{\varepsilon(v), f(vx)\})$$

A continuación, borramos a v de U.

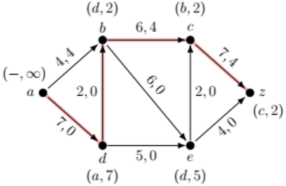
Paso 3. Si z está etiquetado, sea $\Delta = \varepsilon(z)$. Construyo un a, z-camino P "de atrás hacia adelante", de la siguiente manera: $w_0 = z$, y para $i > 0$, w_i es el predecesor de w_{i-1}, hasta llegar a $w_k = a$. De esta manera, $P : w_k, w_{k-1}, \ldots, w_0$ es un a, z-camino. Para cada arista $e = w_i w_{i-1}$ de P, actualizamos el flujo f. Si e es una arista propia, $f(e) \leftarrow f(e) + \Delta$, y si e es una arista impropia, $f(e) \leftarrow f(e) - \Delta$.

A continuación, borramos todas las etiquetas y volvemos al Paso 1.

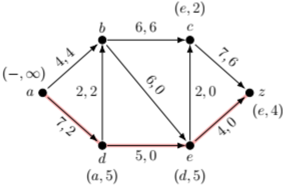
Ejemplo

Apunte

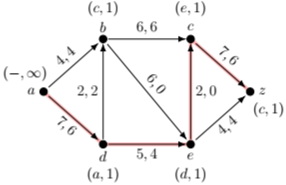
Iteración 2.



Iteración 3.



Iteración 4.



Iteración 5.