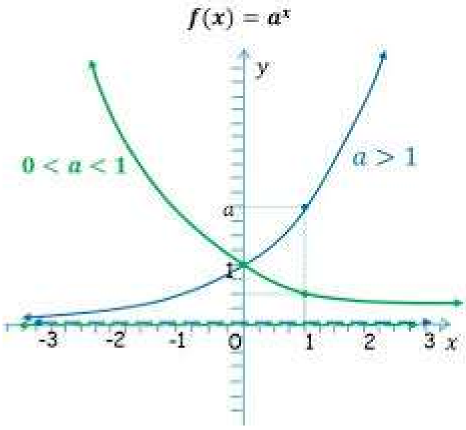
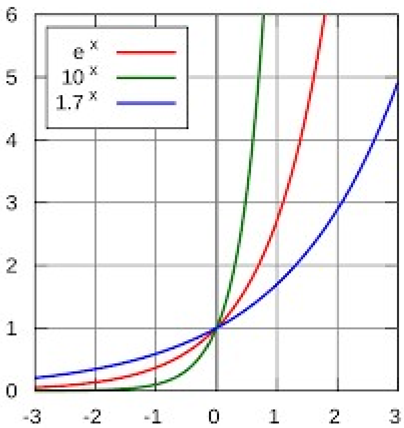
- **Función exponencial** Las funciones de las forma $f(x) = a^x$ donde la base *a* es una constante positiva y $a \neq 1$ se llaman funciones *exponenciales*. $\mathrm{Dom}(f) = R$ y $\mathrm{Rec}(f) = R^+$.
  - $a^x \neq 0 \ \forall x$
  - $a^0 = 1 \ \forall a$
  - $a^1 = a$
  - En particular si $a = e$, tenemos $f(x) = e^x$.
  - Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.





El número *e*, conocido como número de Euler o constante de Napier:

El número de Euler puede definirse de distintas formas, una de ellas es mediante la serie ("suma infinita")

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Este valor es aproximadamente 2,718281828459045. El número e es irracional. Más aún, es un número trascendente, i.e. no es solución de ninguna ecuación algebraica a coeficientes racionales. Observemos que, por ejemplo, el número $\sqrt{2}$ es irracional pero no es trascendente, ya que es solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$. Para la lectura de una demostración de la trascendencia de e recomendamos la lectura del capítulo 20 del libro Cálculo Infinitesimal, segunda edición, de Michael Spivak.

- **Función logarítmica** Son funciones de la forma $f(x) = \log_a x$ donde la base *a* es una constante positiva y $a \neq 1$. Se trata de las funciones *inversas* de las exponenciales (las estudiaremos en detalle más adelante). En cada caso $\mathrm{Dom}(f) = R^+$ y $\mathrm{Rec}(f) = R$

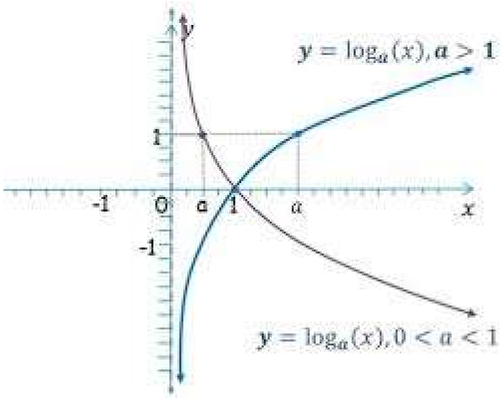
$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

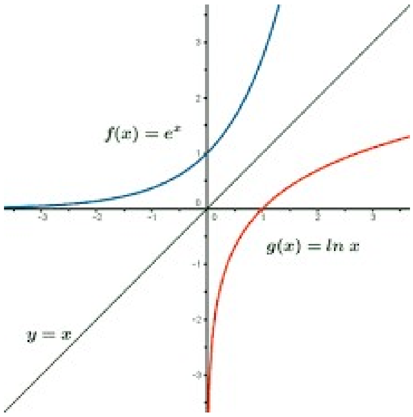
En particular, $f(a) = \log_a a = 1$ pues $a^1 = a$.

Además $f(1) = \log_a 1 = y \Leftrightarrow a^y = 1 \Leftrightarrow y = 0$ pues $a \neq 1$

Cuando $a = e$ notamos $\log_e x = \ln x$ y lo llamamos *logaritmo natural de x*.

Son funciones crecientes si $a > 1$ y decrecientes si $0 < a < 1$.





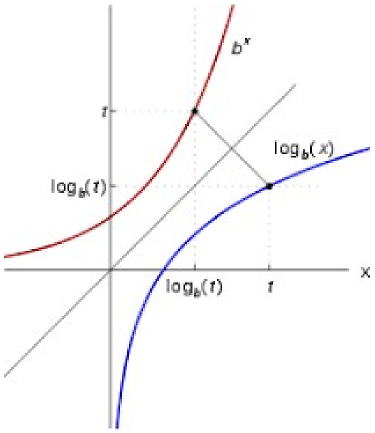
- ***Función logaritmo y exponencial***: Si $a>0$ y $a\neq 1$ la función exponencial $f(x)=a^x$ es creciente o decreciente, luego es inyectiva, entonces para cada $y\in R^+=\mathrm{Re}\,c(f)$ hay una función inversa $f^{-1}(y)=\log_a y = x \Leftrightarrow f(x)=a^x=y$ llamada función logaritmo en base a.

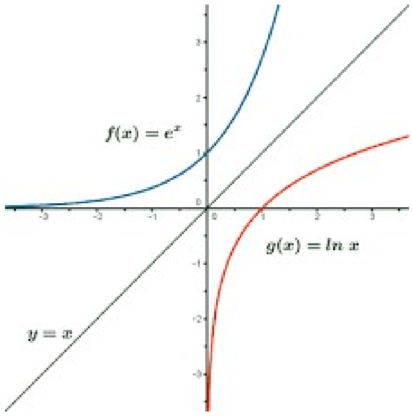
$$\mathrm{Dom}(\log_a x)=\mathrm{Rec}(a^x)=R^+ \quad \text{y} \quad \mathrm{Rec}(\log_a x)=\mathrm{Dom}(a^x)=R$$

La composición de logaritmo y la exponencial nos da la identidad, tenemos:

$$\log_a a^x = x \quad \forall x\in R$$
$$a^{\log_a x}=x \quad \forall x\in R^+$$

$$\log_e x=\ln x \quad \forall x\in R$$





En particular cuando $a=e$

Propiedades: Si $a>1$, la funciones $\log_a x$ y a^x son inyectivas y crecientes, entonces:

i) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \quad \forall x\in R^+ \quad y \quad a^x a^y=a^{x+y} \quad \forall x\in R$

ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a x-\log_a y \quad \forall x\in R^+ \quad y \quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y} \quad \forall x\in R$

iii) $\log_a(x^y)=y\log_a x \quad \forall x\in R^+ \quad y \quad (a^x)^y=a^{xy} \quad \forall x\in R$

Función potencia x^a , $a\in R$

A partir de $\ln(x^y)=y\ln x \quad \forall x\in R^+$, podemos definir $x^a=e^{\ln(x^a)}=e^{a\ln x} \quad \forall x\in R^+$

- **Funciones trigonométricas inversas**

Las funciones trigonométricas son periódicas por lo tanto no son inyectivas, pero si restringimos el dominio a un conjunto donde sean inyectivas podemos definir sus respectivas funciones inversas.

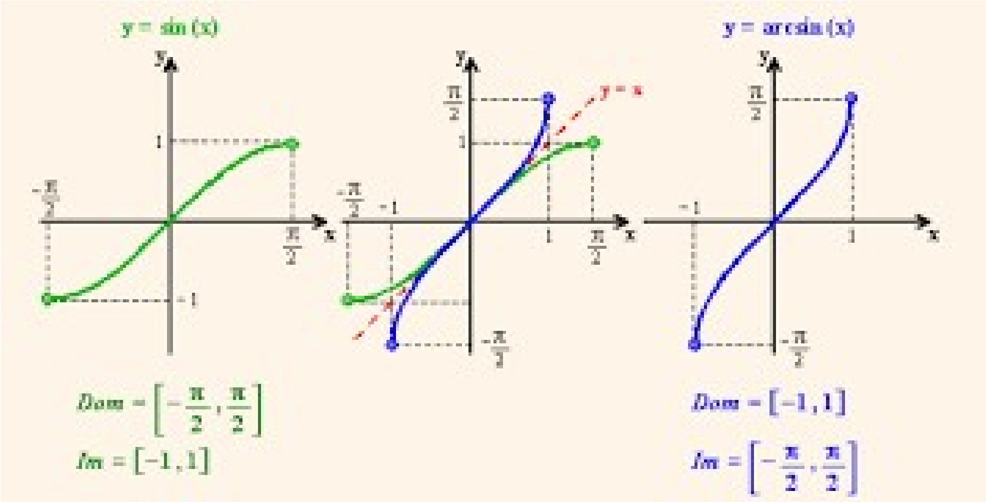
- **Inversa del seno:**

$$\mathrm{arcsen}\ x=\mathrm{sen}^{-1}(x)=y \Leftrightarrow \mathrm{sen}\, y=x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$$

Así, si $x\in[-1,1]=\mathrm{Rec}(\mathrm{sen}\, x)$, $\mathrm{arcsen}\ x=\mathrm{sen}^{-1}(x)$ es el número *y* entre $-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}$ cuyo seno es *x*.

A partir de esta restricción:

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{sen}\ x)=\mathrm{Rec}(\mathrm{arcsen}\ x)=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad y \quad \mathrm{Rec}(\mathrm{sen}\ x)=\mathrm{Dom}(\mathrm{arcsen}\ x)=[-1,1]$$

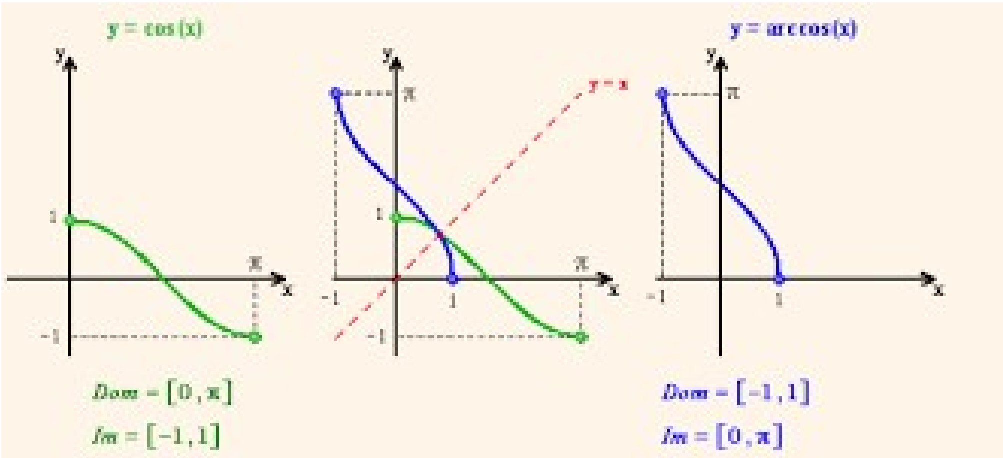


- **Inversa del coseno:**

$$\arccos\ x = \cos^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x \quad \text{para} \quad 0 \leq y \leq \pi$$

Así, si $x \in [-1,1] = \text{Rec}(\cos)$, $\arccos\ x = \cos^{-1}(x)$ es el número *y* entre $0 \leq y \leq \pi$ cuyo coseno es *x*.
A partir de esta restricción:

$$\text{Dom}(\cos\ x) = \text{Rec}(\arccos\ x) = [0, \pi] \quad \text{y} \quad \text{Rec}(\cos\ x) = \text{Dom}(\arccos\ x) = [-1,1]$$



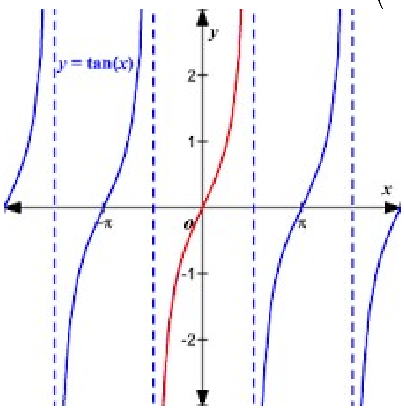
- **Inversa de la tangente:**

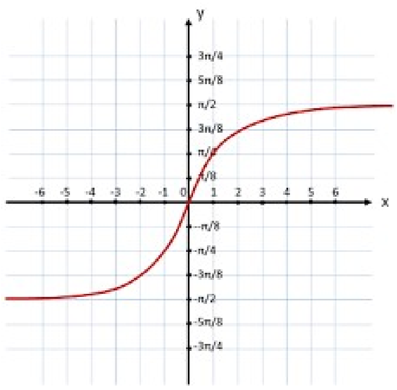
$$\arctan\ x = \tan^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x \quad \text{para} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

Así, si $x \in R = \text{Rec}(\tan x)$, $\arctan\ x = \tan^{-1}(x)$ es el número *y* entre $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ cuya tangente es *x*.

A partir de esta restricción:

$$\text{Dom}(\tan\ x) = \text{Rec}(\arctan\ x) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{y} \quad \text{Rec}(\tan\ x) = \text{Dom}(\arctan\ x) = R$$





➢ Funciones hiperbólicas.

Definiciones: Para $x \in R$ definimos las funciones *seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica de x* como

$$\operatorname{senh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\operatorname{senh}\ x}{\cosh\ x}$$

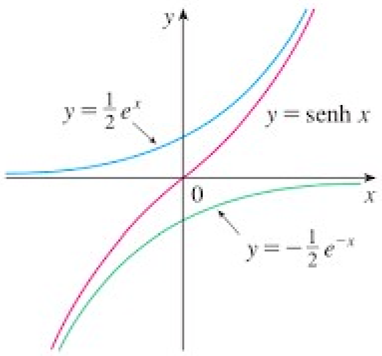


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

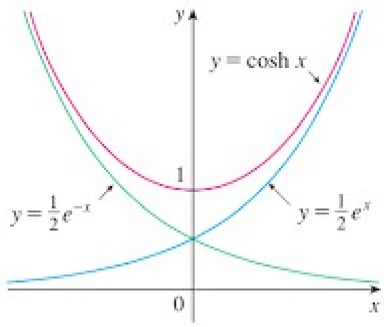


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$