Repaso de conceptos de teoría (ver bibliografía: Meyer, Ross)

Experimento aleatorio ε

- es posible repetirlo indefinidamente sin cambiar las condiciones
- no se puede predecir un resultado particular
- se puede describir el conjunto de todos los resultados posibles
- repitiéndolo un gran número de veces aparece un modelo definido de regularidad

Espacio muestral S: es el conjunto de todos los resultados posibles imaginables de ε. Puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Definimos como suceso A, respecto de S asociado a ε, a un subconjunto de resultados posibles del experimento.

Recurriremos al análisis combinatorio o conteo para determinar la cantidad de elementos del espacio muestral o los sucesos definidos para un experimento ε.

		orden	
		importa	no importa
ε	sin reemplazo o sustitución	$A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$
	con reemplazo o sustitución	$A'_{n,r} = n^r$	

Principio de adición: supongamos que un suceso puede ocurrir de n_1 formas y otro suceso puede ocurrir de n_2 formas, y ambos sucesos no pueden ocurrir simultáneamente. Entonces, cualquiera de estos dos sucesos puede ocurrir de n_1+n_2 formas diferentes.
Este principio puede extenderse a casos donde haya más de dos sucesos.

Ejemplo: En una biblioteca hay libros diferentes, 4 matemática y 7 de física. Si selecciono uno de los libros al azar, ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? Pueden obtenerse 4 + 7=11 resultados diferentes.

Principio de multiplicación: supongamos que un experimento puede ser realizado en dos etapas, tal que la primera etapa tiene n_1 resultados posibles y la segunda tiene n_2 resultados posibles. Entonces, el experimento tendrá $n_1 . n_2$ resultados posibles.

Ejemplo: en la biblioteca del ejemplo anterior, ¿de cuántas maneras posibles puedo seleccionar un libro de matemática y uno de física? Pueden seleccionarse de 7 . 4 =28 formas posibles.

Algunos ejercicios resueltos

1. c) En cierto país existe un control de natalidad, con lo cual a las parejas que deciden tener hijos se les impone el siguiente plan familiar: Se pueden tener hijos hasta que ocurra una de estas dos situaciones: tener 3 hijos o que nazca un varón (lo que ocurra primero). ¿Cuál es la probabilidad de tener un hijo varón bajo esta regla?

Definimos los sucesos:
M: “nace mujer”
V: “nace varón”
Suponemos que ambos sucesos son mutuamente excluyentes (m.e.) y son igualmente probables.
Entonces:
$P(V)=1-P(M)$
$P(V)=P(M)=1/2$

De acuerdo al enunciado, el espacio muestral S estará formado por los sucesos
$S=\{(V),(M,V),(M,M,V),(M,M,M)\}$ y $\#S=4$
Definimos el suceso A: “tener un hijo varón”
$A=\{(V),(M,V),(M,M,V)\}$ y $\#A=3$
Es decir: $A= V \cup (M,V) \cup (M,M,V)$
Como los sucesos que constituyen A son m.e.
$P(A)=P(V)+P(M \cap V)+P(M \cap M \cap V)$
Suponiendo que M y V son sucesos independientes:
$P(A)=1/2 + 1/2 . 1/2 + 1/2 . 1/2 . 1/2 = 7/8$

Notar que los sucesos de S no son igualmente probables.

4. En cada uno de los siguientes casos, determinar un espacio muestral (S) asociado a la experiencia y el cardinal del mismo (#S):

b) Extraemos una carta de una baraja española y anotamos el palo.
Primero identificamos los elementos de S:
o: “la carta es oro”
e: “la carta es espada”

b: "la carta es basto"
c: "la carta es copa"
Luego
S={o,e,b,c} y #S=4
Podemos decir que S es finito.

c) Extraemos sendas cartas de dos barajas españolas distintas y anotamos el palo de cada una.
En este caso, S estará formado por pares ordenados donde el primer elemento corresponde al palo de la carta extraída de la primera baraja, y el segundo elemento corresponde a la segunda baraja.
Luego S={(o,o),(o,e),(o,b),(o,c),(e,o),(e,e),(e,b),(e,c),(b,o),(b,e),(b,b),(b,c),(c,o),(c,e),(c,b),(c,c)}
Por inspección directa, #S=16
Podemos decir que S es finito.

Otra forma de calcular #S es usando el principio de multiplicación. Tenemos 2 grupos de 4 elementos diferentes cada uno, la cantidad de resultados diferentes que pueden obtenerse es #S=4 . 4=16

h) Lanzamos tres monedas distintas y anotamos el número de caras.
S={3,2,1,0} y #S=4
Podemos decir que S es finito.

i) Lanzamos una moneda sucesivas veces hasta que salga cara. y anotamos el número de lanzamientos que fueron necesarios.
$S=\{1,2,3,4,\ldots\}=\mathbb{N}$
En este caso S es infinito y numerable.

k) Anotamos el número de llamadas a un teléfono en un intervalo de tiempo [0; t].
Si consideramos que hay un número máximo M de llamadas en ese intervalo, resulta
S={0,1,2,3,…,M} y #S=M+1.
Podemos decir que S es finito.

l) Anotamos el tiempo que media entre dos llamadas a un teléfono.
El tiempo t entre dos llamadas consecutivas es un número real, por lo tanto
$S=\{t/t\geq 0\}=\mathbb{R}_0^+$
También podríamos decir $S=\{t/t>0\}=\mathbb{R}^+$

En este caso S es infinito y no numerable.

8. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S. Determinar si A y B son o no mutuamente excluyentes cuando se cuenta con la siguiente información:
$P(A \cup B)=2/3$; $P(A)=1/4$; $P(B)=1/2$

Sabemos que dos sucesos A y B son m.e. $\Leftrightarrow$ $A \cap B=\emptyset$, es decir, $P(A \cap B)=0$
Calculamos
$P(A \cap B)=P(A)+P(B)- P(A \cup B)=1/12\neq 0 \Rightarrow$ A y B no son m.e.

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S. Sabiendo que $P(A \cup B)=3/4$, $P(\overline{B})=2/3$ y $P(A \cap B)=1/4$; calcular $P(B)$; $P(A)$ y $P(\overline{A} \cap B)$.

$P(B)=1-P(\overline{B})=\ldots$
$P(A \cup B)=P(A)+P(B)- P(A \cap B) \Rightarrow P(A)=P(A \cup B)+ P(A \cap B)-P(B)=\ldots$

Por propiedades de conjuntos (ver material adjunto en el aula virtual):
$B=(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$
donde los sucesos $(A \cap B)$ y $(\overline{A} \cap B)$ son m.e. porque A y $\overline{A}$ son complementarios.

Explicar por qué

Luego
$P(B)=P(A \cap B)+P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B)=P(B)- P(A \cap B)=\ldots$
Sugerencia: usar diagramas de Venn para ayudarse a visualizar las operaciones entre conjuntos, y utilizar las propiedades de conjuntos del material de clase.

10. Analizar la validez de la siguiente afirmación: Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es menor que 1/2, la suma de las probabilidades de ambos por separado no puede ser mayor que 3/2.

Sean dos sucesos A y B, se pide analizar si $P(A \cap B) < 1/2 \Rightarrow P(A)+P(B) \leq 3/2$ es verdadera.
Sabemos que la probabilidad de $A \cup B$ es:
$P(A \cup B)=P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$ porque $P(A \cup B)$ es una probabilidad.
Luego:

Porque $P(A \cap B) < 1/2$

$P(A) + P(B) \leq 1 + P(A \cap B) < 1 + 1/2 = 3/2$

Por lo tanto, la afirmación es verdadera.

12. Se debe formar una comisión de cuatro personas, elegidas al azar entre las siguientes:

Nombre	**Profesión**	**Edad**
Ana	Ingeniera	28
Miguel	Ingeniero	39
Beatriz	Lic. en Letras	42
Carlos	Arquitecto	30
Diana	Arquitecta	33
Pedro	Historiador	53
Juan	Abogado	25
Mónica	Abogada	55

Definimos nuestro experimento ε

ε:"selección de 4 personas de un total de 8 personas"

ε es un experimento sin reposición y no interesa el orden de extracción.
Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman el espacio muestral S será

$\#S=C_{8,4}=\binom{8}{4}=\frac{8!}{(8-4)!4!}=70$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que los integrantes de la comisión sean todos mayores de 31 años?
Definimos nuestro suceso:
A:"los integrantes seleccionados son todos mayores de 31 años"

Inspeccionando la tabla, vemos que hay 5 integrantes que tienen más de 31 años.
Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman A es

$\#A=C_{5,4}=\binom{5}{4}=\frac{5!}{(5-4)!4!}=5$

Finalmente $P(A)=\frac{\#A}{\#S}=\frac{5}{70}=\frac{1}{14}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la comisión no incluya arquitectos?
Definimos suceso B:"ningún integrante seleccionado es arquitecto"

Inspeccionando la tabla vemos que 6 integrantes no son arquitectos.
Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman B es

$\#B=C_{6,4}=\binom{6}{4}=\frac{6!}{(6-4)!4!}=15$

Finalmente P(B)=$\frac{\#B}{\#S} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$

Podríamos resolver el apartado b) buscando la probabilidad del suceso complementario $\overline{B}$. Luego P(B)=1-P($\overline{B}$)

Definimos lo sucesos:
C:"arquitecto Carlos está en la comisión y Diana no"
D:"arquitecta Diana está en la comisión y Carlos no"
E:"Carlos y Diana están en la comisión"

Claramente, P($\overline{B}$)=P(C)+P(D)+P(E)

Explicar por qué

El suceso C estará formado por todas las comisiones posibles formadas por 3 personas que no son arquitectos, porque una persona de la comisión debe ser Carlos. Luego, #C= $C_{6,3}$= …
Análogamente #D=$C_{6,3}$= … y #E=$C_{6,2}$= …
Finalmente $P(B) = 1 - \frac{\#C}{\#S} - \frac{\#D}{\#S} - \frac{\#E}{\#S}$

13. Se forma una comisión constituida por un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero, quienes son elegidos al azar entre las personas de la tabla del ejercicio anterior.

Definimos nuestro experimento $\mathcal{E}$

$\mathcal{E}$:"selección de 4 personas para los puestos de presidente, vicepresidente, secretario y tesorero de un total de 8 personas"

$\mathcal{E}$ es un experimento sin reposición y donde interesa el orden de extracción.
Luego, la cantidad de comisiones posibles que forman el espacio muestral S será

$$\#S = A_{8,4} = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el presidente sea mujer?
Definimos el suceso A:"la presidente es mujer"
Sabemos que hay 4 mujeres en la lista. Como una de ellas es presidente, los 3 puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 7 miembros.
Entonces

$$\#A = 4 \cdot A_{7,3} = 4 \cdot \frac{7!}{(7-3)!} = 840 \quad \text{y} \quad P(A) = \frac{\#A}{\#S}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tesorero sea mayor de 50 años?
Definimos el suceso B:"el tesorero tiene más de 50 años"
Sabemos que hay 2 personas mayores de 50 años. Como una de ellas es tesorera, los 3 puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 7 miembros.
Luego #B=… y P(B)=…

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el secretario sea abogado y el vicepresidente licenciado en letras?
Definimos el suceso
C:"el secretario es abogado y el vicepresidente es licenciado en letras"

Inspeccionando la tabla, vemos que Beatriz siempre debe ser vicepresidente y que hay 2 abogados posibles para ocupar el puesto de secretario. Por lo tanto, los dos puestos restantes serán ocupados por algunos de los otros 6 miembros.
Luego,

$$\#C = 2 \cdot A_{6,2} = 2 \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 60 \quad \text{y} \quad P(C) = \frac{\#C}{\#S}$$

15. Las letras de la palabra CLASE se colocan al azar y en línea. ¿Cuál es la probabilidad de que las vocales queden juntas?

La cantidad de elementos de S es:
#S=5!=120
porque hay 5 resultados posibles para la primera posición, 4 para la segunda, 3 para la tercera, 2 para la cuarta y un único resultado posible para la última posición.
Definimos el suceso J: "dos vocales juntas"
Podemos resumir los posibles resultados que constituyen J en los siguientes grupos:
vvccc cvvcc ccvvc cccvv
donde v representa una vocal (A o E), y c representa una consonante (C, L o S).
Entonces, hay 4 formas diferentes de ordenar 2 vocales y 3 consonantes. Además, hay 2! formas de ordenar las 2 vocales y 3! formas de ordenar las 3 consonantes.
Luego #J= 4 . 2! . 3! = 48

Suponiendo que todos los elementos de S (y de J) tienen la misma probabilidad de ocurrir:
P(J)=#J/#S=48/120=0,4

18. Una caja contiene bolas blancas y negras de tal manera que, al extraer dos simultáneamente, la probabilidad de que sean ambas blancas es 1/2. Determine el número mínimo de bolas que hay en la caja.

Resolveremos este problema haciendo pruebas al azar. Identificaremos cada bola como:
bi: bola blanca i
nj: bola negra j

Definimos nuestro experimento ε:"se extraen dos bolas y se anota el color de cada una" y definimos el suceso A:"las dos bolas extraídas son blancas"

a) Supongamos tener 3 bolas: b1 b2 n1
Entonces
S={(b1, b2),(b1,n1),(b2,n1)} #S=3 #A=1

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\#\mathrm{A}}{\#\mathrm{S}} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

b) Supongamos tener 4 bolas: b1 b2 n1 n2
Entonces
S={(b1,b2),(b1,n1),(b1,n2),(b2,n1),(b2,n2),(n1,n2)} #S=6 #A=1

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\#\mathrm{A}}{\#\mathrm{S}} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$$

c) Supongamos tener 4 bolas: b1 b2 b3 n1
Entonces
S={(b1,b2),(b1,b3),(b1,n1),(b2,b3),(b2,n1),(b3,n1)} #S=6 #A=3

$$\mathrm{P(A)} = \frac{\#\mathrm{A}}{\#\mathrm{S}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Luego, la mínima cantidad de bolas que debe haber en la caja es 4.

Es posible encontrar otra distribución de bolas blancas y negras que cumplan con la condición pedida para P(A), pero la cantidad total de bolas no será la mínima.

21. Un estudiante afirma que, si se arroja un dado equilibrado tres veces y se suman los números obtenidos, la probabilidad de que la suma sea 9 es igual a la probabilidad de que la suma sea 10. Basa su afirmación en que, en ambos casos, hay 6 posibilidades de lograr esas sumas:

suma 9	126	135	144	225	234	333
suma 10	136	145	244	226	235	334

Analice la afirmación del estudiante

Definimos nuestro experimento

ε:" se arroja un dado equilibrado tres veces y se suman los números obtenidos"

ε es con reposición (porque un mismo número puede aparecer en más de una tirada del dado) e importa el orden (porque los mismos números en diferente orden son dos resultados diferentes, aunque la suma sea la misma).

Luego:

#S= $6^3 = 216$

Definimos los sucesos:

B: "suma 9"   C:"suma 10"

y analizamos la cantidad de resultados posibles que forman cada suceso.

Para ello definimos sucesos más simples que forman B y C.

B126: "se obtienen los números 1, 2 y 6 en las tres tiradas"

B135: "se obtienen los números 1, 3 y 5 en las tres tiradas"

B144: "se obtiene el número 1 y dos veces el 4 en las tres tiradas"

B225: "se obtiene el número 2 y dos veces el 5 en las tres tiradas"

B234: "se obtienen los números 2, 3 y 4 en las tres tiradas"

B333: "se obtiene el número 3 en las tres tiradas"

Luego, como los sucesos simples anteriores son m.e.:

#B=#B126+#B135+#B144+#B225+#B234+#B333

Recurriendo a las expresiones de análisis combinatorio y conteo

#B=$\mathrm{A}_{3,3} + \mathrm{A}_{3,3} + 3 + 3 + \mathrm{A}_{3,3} + 1 = 25$

Haciendo un análisis similar para C (completar):

#C=#C136+#C145+#C244+#C266+#C235+#C334

#C=$\mathrm{A}_{3,3} + \mathrm{A}_{3,3} + 3 + 3 + \mathrm{A}_{3,3} + 3 = 27$

Finalmente:

P(B)=#B/#S=25/216   P(C)=#C/#S=27/216

Por lo tanto, la afirmación es falsa porque P(B)≠P(C)

22. En un mazo de cartas se han retirado varias de ellas. Entre las que quedan, se sabe que el 15% son reyes, el 30% son bastos, el 60% ni reyes ni bastos.
Definimos nuestro experimento

ε:"se extrae una carta y se anota el valor y el palo"
y los sucesos que nos interesa analizar
R:"la carta es un rey"
B:"la carta es de basto"

Explicar dónde están esos datos

Sabemos que:

P(R)=0,15	probabilidad de extraer un rey
P(B)=0,3	probabilidad de extraer un basto
$P(\overline{R} \cap \overline{B})$=0,6	probabilidad de extraer una carta que no es rey ni basto

a) ¿Está entre ellas el rey de bastos? ¿Qué probabilidad hay de extraerla?
El problema nos pregunta si es posible extraer un rey de basto, o sea si $P(R \cap B) \neq 0$.

Justificar

$$P(\overline{R} \cap \overline{B}) = P(\overline{R \cup B}) = 1 - P(R \cup B) = 0{,}6 \Rightarrow P(R \cup B) = 0{,}4$$

$$P(R \cap B) = P(R) + P(B) - P(R \cup B) = 0{,}05 = \frac{1}{20} > 0$$

Por lo tanto, podemos decir que hay un rey de basto y la probabilidad de extraerlo es de 0,05.

b) ¿Cuántas cartas quedan en el mazo?
Suponiendo que no hay cartas repetidas, el suceso $R \cap B$ corresponde a una sola carta. Suponiendo que todas las cartas tienen igual probabilidad de ser extraídas, se concluye que en el mazo quedan 20 cartas.

23. En un centro hay 1000 alumnos repartidos del siguiente modo:

	Chicos	**Chicas**
Usan anteojos	187	113
No usan anteojos	413	287

Se elige al azar uno de ellos.

Definimos nuestro experimento y los sucesos de interés
ε:"se elige un alumno y se anota si es varón o mujer, y si usa o no lentes"

ε es sin reposición.
V:"el alumno en varón"　　M:"el alumno es mujer"
A:"el alumno usa lentes"
Lógicamente $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{M}}$

Reescribimos la tabla en función de los sucesos definidos, agregando algunos datos más que podemos deducir.

	V	**M**	**Totales**
A	187	113	300
Ā	413	287	700
Totales	600	400	1000

Los totales calculados nos permiten afirmar, por ejemplo, que en el establecimiento hay 1000 alumnos, de los cuales 400 son mujeres y 300 usan lentes.

a) Se sabe que el alumno elegido resultó una chica, ¿cuál es la probabilidad de que use anteojos?
Por definición de probabilidad condicional:

$$\mathrm{P(A/M)} = \frac{\mathrm{P(A \cap M)}}{\mathrm{P(M)}} = \frac{\frac{113}{1000}}{\frac{400}{1000}} = \frac{113}{400}$$

Otra forma es evaluar la proporción de alumnas con lentes en el universo de las mujeres. Es decir

$$\mathrm{P(A/M)} = \frac{113}{400}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido resulte una chica, dado que usa anteojos?
Por definición de probabilidad condicional:

$$\mathrm{P(M/A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap M)}}{\mathrm{P(A)}} = \frac{\frac{113}{1000}}{\frac{300}{1000}} = \frac{113}{300}$$

De manera similar al punto anterior, podemos calcular esta probabilidad como …

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el alumno elegido resulte un chico, dado que usa anteojos?
Podemos calcular esta probabilidad por definición, como en los puntos anteriores. Otra forma es, considerando que $\mathrm{V} = \overline{\mathrm{M}}$,
$\mathrm{P(V/A)} = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{M}}/\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P(M/A)}$

Es posible usar esta forma porque estamos calculando la probabilidad sobre el mismo espacio muestral que es A (alumnos que usan lentes).

d) Se sabe que el alumno elegido no usa anteojos, ¿cuál es la probabilidad de que resulte un chico?

Explicar por qué

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}/\overline{\mathrm{A}}) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{V})}{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})} = \frac{413}{700} \neq 1 - \mathrm{P(V/A)}$$

24. En un lote de 100 artículos se sabe que hay 75 buenos y 25 defectuosos. Se extraen de ese lote 2 artículos al azar en forma sucesiva y sin reposición.

ε:”se extraen de un lote 2 artículos en forma sucesiva sin reposición”

De acuerdo al enunciado, ε es sin reposición.
Definimos los sucesos:
D1: “el primer artículo es defectuoso”
D2: “el segundo artículo es defectuoso”
Suponiendo que cada artículo tiene la misma probabilidad de ser extraído, podemos calcular
P(D1)=25/100

El cálculo de P(D2) está al final del ejercicio.

a) Sabiendo que el primer artículo resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo sea bueno?
Para resolver este problema, vamos a pensar en el espacio muestral S’ formado por las piezas restantes luego de la primera extracción. Como la primera extracción fue de un artículo defectuoso, tendremos 99 artículos en total de los cuales 24 son defectuosos. Es decir:
#S’=99
#D2=24
#$\overline{\mathrm{D2}}$=99-24=75 que son los 75 artículos no defectuosos originales

Finalmente

$$P(\overline{D2}/D1) = \frac{\#\overline{D2}}{\#S'} = \frac{75}{99}$$

b) Sabiendo que el primer artículo resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que el segundo también lo sea?
En este caso, podemos proceder de manera similar al ítem a, calculando #D2/#S'

Otra forma de resolver el problema, es pensar que D2 y $\overline{D2}$ forman una partición del espacio S'. Entonces, podemos decir

$$P(D2/D1) = 1 - P(\overline{D2}/D1) = \frac{24}{99}$$

porque ambas probabilidades condicionales se calculan respecto del mismo suceso condicionante D1.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos artículos resulten defectuosos?
Usando la definición de probabilidad condicional:

$$P(D1 \cap D2) = P(D2/D1)\,.\,P(D1) = \frac{24}{99} \cdot \frac{25}{100} = \cdots$$

Ítem adicional:
Como ejercicio adicional, calcularemos P(D2). Para ello usaremos el resultado del teorema 1.13 de las propiedades de conjuntos. De esta manera, podemos decir que
$D2 = (D1 \cap D2) \cup (\overline{D1} \cap D2)$ siendo $(D1 \cap D2)$ y $(\overline{D1} \cap D2)$ m.e.
Luego

$$P(D2) = P(D1 \cap D2) + P(\overline{D1} \cap D2) = P(D2/D1)\,.\,P(D1) + P(D2/\overline{D1})\,.\,P(\overline{D1})$$

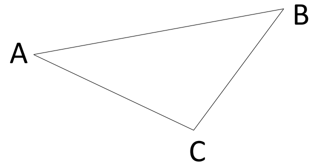
$$P(\overline{D1}) = 1 - P(D1) = 75/100$$
$$P(D2/\overline{D1}) = 25/99$$

Explicar por qué

Finalmente

$$P(D2) = P(D2/D1)\,.\,P(D1) + P(D2/\overline{D1})\,.\,P(\overline{D1}) = \frac{24}{99} \cdot \frac{25}{100} + \frac{25}{99} \cdot \frac{75}{100} = \frac{25}{100}$$

26. El sistema de líneas que une dos centrales telefónicas A y B está representado en el siguiente diagrama, donde C es una central intermedia.



En ciertos horarios las líneas pueden saturarse por exceso de llamadas. Sean los sucesos siguientes:

E1: “la línea AB se encuentra libre“,
E2: “la línea AC se encuentra libre“ y
E3: “la línea CB se encuentra libre“.

Se conoce que P(E1) = 2/5 , P(E2) = 3/4 , P(E3) = 2/3 , P(E3/E2) = 4/5 y P(E1/(E2 ∩ E3)) = 1/2. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) la línea ACB se encuentre libre?
P(E2 ∩ E3)=P(E3/E2) . P(E2)=4/5 . 3/4=3/5

Ley asociativa de las intersecciones

b) las tres líneas estén libres?
P(E1 ∩ E2 ∩ E3)= P(E1 ∩ (E2 ∩ E3))=P(E1/(E2 ∩ E3)) . P(E2 ∩ E3)=3/10

c) una llamada que llega a A pueda ser transmitida a B?
Definimos el suceso L: “una llamada que llega a A pueda ser transmitida a B“
Luego, L=E1 ∪ (E2 ∩ E3)
P(L)=P(E1)+P(E2 ∩ E3) - P(E1 ∩ E2 ∩ E3)=2/5+3/5-3/10=7/10

27. Una central recibe mensajes de dos fuentes A y B. Se conoce que:

- La probabilidad de recibir un mensaje proveniente de A es 0.2.
- La probabilidad de que un mensaje posea una longitud superior a k caracteres si proviene de A es 0.1.
- La probabilidad de que un mensaje posea una longitud superior a k caracteres si proviene de B es 0.15.

¿Cuál es la probabilidad de recibir un mensaje de más de k caracteres?
Definimos los sucesos
A : “el mensaje recibido proviene de la fuente A”
B : “el mensaje recibido proviene de la fuente B”
K : “el mensaje recibido posee una longitud superior a k caracteres”

De acuerdo al enunciado
P(A)=0,2 P(K/A)=0,1 P(K/B)=0,15
Como solamente hay dos fuentes de mensajes (A y B): P(B)=1-P(A)=0,8
Notar que A y B forman una partición del espacio muestral formado por las fuentes de mensajes.

Explicar por qué

El suceso K puede expresarse como
K=(K ∩ A) ∪ (K ∩ B) donde (K ∩ A) y (K ∩ B) son sucesos m.e.
P(K)=P(K ∩ A) + P(K ∩ B)=P(K/A) . P(A) + P(K/B) . P(B)=0,14

28. Tres empresas A, B y C licitan un contrato para la construcción de un puente. Las probabilidades de que A, B y C obtengan el contrato son respectivamente 0.5, 0.3 y 0.2. Si el contrato es obtenido por A, ésta contratará a su vez a la empresa E con probabilidad 0.8. Si el contrato es obtenido por B, ésta contratará a E con probabilidad 0.4. Si el contrato es obtenido por C, E será contratada con probabilidad 0.1.

Definimos nuestro experimento ε y los sucesos de interés

ε:"empresa gana un contrato de trabajo"

A:"empresa A gana el contrato"
B:"empresa B gana el contrato"
C:"empresa C gana el contrato"
E:"empresa E es subcontratada"

Como al contrato solo lo puede ganar la empresa A, la B o la C exclusivamente, los sucesos A, B y C forman una partición del espacio muestral S.
Por lo tanto:
- A, B y C son mutuamente excluyentes entre si y P(A)+P(B)+P(C)=1.
- E puede descomponerse como la unión de sucesos mutuamente excluyentes

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la empresa E obtenga un subcontrato en la construcción del puente?

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap A) + P(E \cap B) + P(E \cap C) = \\ &= P(E/A) \cdot P(A) + P(E/B) \cdot P(B) + P(E/C) \cdot P(C) \end{aligned}$$

b) ¿Cuál es la probabilidad que la empresa A haya ganado el contrato dado que la empresa E fue subcontratada?

Sabemos que $\quad P(E \cap A) = P(E/A) \cdot P(A) = P(A/E) \cdot P(E)$

Luego

$$P(A/E) = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E)} = \frac{P(E/A) \cdot P(A)}{P(E/A) \cdot P(A) + P(E/B) \cdot P(B) + P(E/C).P(C)}$$

Otra forma: Como habíamos dicho, A, B y C forman una partición del espacio muestral.

Siendo E un suceso asociado al mismo espacio muestral, puedo usar el teorema de Bayes para calcular

$$P(A/E) = \frac{P(E/A)\cdot P(A)}{P(E/A)\cdot P(A) + P(E/B)\cdot P(B) + P(E/C).P(C)}$$

32. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral S. Si P(A)=1/4, P(B|A)=1/2 y P(A|B)=1/4, analice la veracidad de las siguientes proposiciones:

a) A y B son mutuamente excluyentes,
A y B son m.e. $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cap B)=0$
$P(A \cap B)=P(B/A) \,.\, P(A)=1/8 \neq 0 \Rightarrow$ A y B no son m.e.

b) $A \subset B$,
Que el suceso A esté incluido en el suceso B, significa que todos los sucesos elementales pertenecientes a A también pertenecen a B. Por lo tanto, la ocurrencia de un suceso de A significa que también ocurre B.
Entonces, podemos decir que : $A \subset B \Leftrightarrow P(B/A)=1$
Del enunciado : $P(B/A)=1/8 \neq 1 \Rightarrow A \not\subset B$

c) $P(\overline{A}|\overline{B})=1/4$,

Justificar

$$P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\overline{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} \qquad (32.1)$$

Para calcular P(B) :

$$P(A \cap B) = P(B/A)\,.\,P(A) = P(A/B)\,.\,P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{P(B/A)\,.\,P(A)}{P(A/B)} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{8}$$

Reemplazando P(B) y P(AUB) en (32.1)
$P(\overline{A}/\overline{B})=3/4 \neq 1/4$

d) $P(A|B) + P(A|\overline{B})=1$.
Del enunciado: P(A/B)=1/4
Por otra parte, sabemos que
$P(A/\overline{B})+P(\overline{A}/\overline{B}) = 1$ porque estamos calculando la probabilidad de A y $\overline{A}$ en el espacio muestral restringido por el suceso $\overline{B}$.
Luego :
$P(A/\overline{B}) = 1 - P(\overline{A}/\overline{B}) = 1 – 3/4 = 1/4$

Finalmente

$P(A/B) + P(A/\overline{B}) = 1/4 + 1/4 = 1/2 \neq 1$

34. Pruebe que, si A y B son sucesos independientes de un mismo espacio muestral S, entonces

a) A y $\overline{B}$ son independientes,

Por teorema 1.13 de propiedades de conjuntos: $A=(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$

Luego

$P(A) = P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B)$

Justificar

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) =$$
$$= P(A) \cdot P(\overline{B})$$

Como $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$, podemos afirmar que A y $\overline{B}$ son independientes

b) $\overline{A}$ y B son independientes,

Por teorema 1.13 de propiedades de conjuntos: $B=(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap A)$

Terminar demostración.

Justificar

c) $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) . P(B) =$$
$\ldots = P(\overline{A}) . P(\overline{B})$ Completar demostración

35. Si A, B y C son sucesos independientes, demostrar que

a) A y (B U C) son independientes,

Por primera ley distributiva de conjuntos (teorema 1.6)
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$P(A \cap (B \cup C)) = P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))$

Aplicando las propiedades conmutativa y asociativa de la intersección (t 1.3 y 1.4)
$(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$

Justificar

Luego

$P(A \cap (B \cup C)) = P(A) . P(B) + P(A) . P(C) - P(A) . P(B) . P(C) = \ldots$

$= P(A) . [P(B) + P(C) - P(B) . P(C)] = P(A) . [P(B) + P(C) - P(B \cap C)] = \ldots$ completar

Como B y C son independientes $\Rightarrow P(B) . P(C) = P(B \cap C)$

b) A y (B ∩ C) son independientes,

P(A ∩ (B ∩ C)) = P(A ∩ B ∩ C) = P(A) . P(B) . P(C) = P(A) . P(B ∩ C)

Justificar

Por ley asociativa de las intersecciones A ∩ (B U C)= A ∩ B ∩ C

Como A, B y C son independientes

Finalmente:

P(A ∩ (B ∩ C)) = P(A) . P(B ∩ C) ⇒ A y (B ∩ C) son independientes

36. Pruebe que si A y B son sucesos de un mismo espacio muestral y P(A) > P(B), entonces P(A/B) > P(B/A).

Por definición de probabilidad condicional :

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})} \qquad (36.1)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})} \qquad (36.2)$$

con P(A)>0 y P(B)>0

P(A) > P(B)

Suponiendo P(A/B) > 0

De (36.1) y (36.2)

P(A ∩ B)=P(A/B) . P(B) = P(B/A) . P(A) $\Rightarrow \frac{\mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})}{\mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B})} = \frac{P(B)}{P(A)} < 1 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{A}/\mathrm{B}) > \mathrm{P}(\mathrm{B}/\mathrm{A})$

37. Un número binario está formado por n dígitos. La probabilidad de que aparezca un dígito incorrecto es *p*. Si los errores en dígitos diferentes son independientes uno de otro, ¿cuál es la probabilidad de formar un número incorrecto?

Definimos nuestro experimento $\mathcal{E}$ y los sucesos de interés

$\mathcal{E}$:"se seleccionan n dígitos de un conjunto de 2 dígitos binarios para formar un número"

$\mathcal{E}$ es un experimento con reposición donde importa el orden.

La cantidad total de números que se pueden formar con n dígitos es:

$\#\mathrm{S} = \mathrm{A}'_{2,\mathrm{n}} = 2^{\mathrm{n}}$

Definimos el suceso

D_i:"dígito *i* correcto" *i*=1,⋯, n

$P(D_i)=1-p$

De las hipótesis del enunciado

D_i y D_j son independientes para todo $i \neq j$ con $i, j = \overline{1, \mathrm{n}}$

$\overline{1, \mathrm{n}}$ significa que se recorre el **rango completo** de valores entre 1 y n.

Un número será incorrecto si al menos uno de sus dígitos binarios es incorrecto. Definimos el suceso E:"número incorrecto", y podemos decir

Justificar

$$\mathrm{E} = \overline{\mathrm{D}}_1 \cup \overline{\mathrm{D}}_2 \cup \overline{\mathrm{D}}_3 \cup \cdots \cup \overline{\mathrm{D}}_{\mathrm{n}} = \bigcup_{i=1}^{\mathrm{n}} \overline{\mathrm{D}}_i = \overline{\bigcap_{i=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D}_i}$$

Justificar

Luego

$$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D}_i}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{D}_i\right) = 1 - (1 - p)^{\mathrm{n}}$$