PRÁCTICA 2 - Números reales

1. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de cuerpo, demostrar las siguientes propiedades de los números reales.

   (a) $-a = (-1) \cdot a$.

   (b) El número 0 no tiene recíproco, y $1^{-1} = 1$.

   (c) $\dfrac{a}{1} = a$; y si $a \neq 0$, $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$.

   (d) Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces:

      (i) $(b\ d)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$.

      (ii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{b\ d}$.

      (iii) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a\ c}{b\ d}$.

   (e) Si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{a^{-1}}{b^{-1}}$.

   (f) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

2. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Utilizando los axiomas de orden, demostrar las siguientes propiedades de los números reales.

   (a) Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

   (b) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

   (c) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.

   (d) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

   (e) Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (a^2 indica el producto aa).

   (f) $1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$.

   (g) Si $a < b$, entonces $-b < -a$.

   (h) Si $a < 0$ entonces $-a > 0$.

   (i) $ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.

   (j) $a > 0$ si y solo si $\dfrac{1}{a} > 0$.

   (k) Si $0 < a < b$, entonces $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.

   (l) Si $ab < 0$, entonces o bien a es positivo y b negativo o bien a es negativo y b positivo.

3. Probar que $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

4. Probar que dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$, vale: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ si y solo si $ad = bc$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

5. Resolver cada una de las siguientes inecuaciones o sistema de inecuaciones. Proporcionar el conjunto solución tanto en forma de intervalo como gráficamente.

(a) $4x > 8$

(b) $6y < 18$

(c) $2m \leq -6$

(d) $-r \leq -7$

(e) $3r + 1 \geq 16$

(f) $2m - 5 \geq 15$

(g) $-3(z-6) > 2z - 5$

(h) $-2(y+4) \leq 6y + 8$

(i) $-3 < x - 5 < 6$

(j) $-19 \leq 3x - 5 \leq -9$

(k) $-16 < 3t + 2 < -11$

(l) $-4 \leq \dfrac{2x-5}{6} \leq 5$

(m) $(x-3)\sqrt{x+1} \geq 0$

(n) $3x < \dfrac{1+6x}{2} < \dfrac{9x-8}{3}$

(ñ) $x \leq x + 1 \leq x + 5$

(o) $\begin{cases} 4x - 8 > -6, \\ \dfrac{x}{2} + 2 > 0. \end{cases}$

(p) $\begin{cases} 5x + \dfrac{1}{4} \geq 0, \\ 2x - 10 < 0, \\ 7x - 14 \leq 0. \end{cases}$

(q) $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{3}{x-1} < 0$

(r) $\dfrac{4x-3}{3-x} > 0$

(s) $\dfrac{4-9x}{5x+7} \leq 3$

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar analíticamente los siguientes enunciados a partir de la definición de valor absoluto.

(a) $|x| \geq 0$. Además, $|x| = 0$ si y solo si $x = 0$.

(b) $|x| = |-x|$.

(c) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(d) Dado $a > 0$, se tiene:

  (I) $|x| < a$ si y solo si $-a < x < a$.

  (II) $|x| > a$ si y solo si $x < -a$ o bien $x > a$.

(e) Desigualdad triangular: $|x+y| \leq |x| + |y|$.

(f) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

(g) Si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

7. Interpretar geométricamente los ítems (a)-(d) del ejercicio anterior.

8. (a) ¿A qué distancia está 7 de 4? ¿Y -3 de -19? ¿Y -24 de 49?

(b) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 3 en menos de 2.

(c) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al -1 en menos de 4.

(d) Encontrar gráfica y analíticamente los puntos que distan al 0 en más de 1.

9. Representar en la recta numérica el conjunto solución de las siguientes ecuaciones e inecuaciones. Decidir si cada uno está acotado inferior y/o superiormente. Indicar en cada caso (si es posible) el ínfimo, supremo, mínimo y/o máximo.

(a) $|x| = 4$.

(b) $|x-1| < 1$.

(c) $|x+1| > 1$.

(d) $|x-4| < 1$.

(e) $|x+2| \geq 1$.

(f) $|x-3| < 7$.

(g) $|x^2 - 3x - 2| \leq 2$.

(h) $\dfrac{3}{|3x+1|} \leq 2$.

(i) $\dfrac{|5x-5|}{|x+1|} \leq 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

10. Dados los siguientes conjuntos.

A $= \{1,2,3,4,5\}$

B $= \{x \in \mathbb{R} \,/ -3 \leq x \leq 6\}$

C $= [2,8)$

D $= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 2k,\ k \in \mathbb{N}\}$

E $= \mathbb{Z} - \mathbb{N}$

F $= \{0\}$

G $= \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x = 1 - \dfrac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}\right\}$

H $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$

I $= \emptyset$

(a) Decidir si cada uno de los conjuntos está acotado, acotado superiormente o acotado inferiormente.

(b) En los casos en que los conjuntos están acotados superior y/o inferiormente, determinar el supremo y/o ínfimo;

(c) Establecer si los supremos e ínfimos obtenidos en el ítem anterior son máximos y mínimos, respectivamente, del conjunto considerado.

11. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Probar que A está acotado si y sólo si existe un número real positivo L tal que $|x| < L$ para todo $x \in A$.

12. Demostrar que si α y β son dos números reales tales que ambos son mínimo del mismo conjunto A, entonces $\alpha = \beta$.

13. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Se define el conjunto siguiente

$$-A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, -x \in A\}\,.$$

(a) Siendo A_1, A_2 y A_3 los conjuntos encontrados en los ejercicios 9(a), 9(b) y 9(c), hallar los conjuntos $-A_1$, $-A_2$ y $-A_3$.

(b) Mostrar que $-A$ es un conjunto no vacío y que $-(-A) = A$.

(c) Hallar las condiciones bajo las cuales se tiene que $-A = A$.

(d) Mostrar que si A es un conjunto acotado superiormente (inferiormente) entonces $-A$ es un conjunto acotado inferiormente (superiormente).

(e) Mostrar que si A posee supremo entonces $-A$ posee ínfimo y se verifica que $\inf(-A) = -\sup(A)$, y análogamente, si A posee ínfimo entonces $-A$ posee supremo y se verifica que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

(f) Utilizar los resultados de los ítems anteriores para mostrar que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo.

14. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales, se define el conjunto siguiente

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}\,.$$

(a) Siendo A_4, A_5 y A_6 los conjuntos encontrados en los ejercicios 9(d), 9(e) y 9(f), obtener los conjuntos $A_4 + A_5$ y $A_4 + A_6$.

(b) Indicar, cuando sea posible, las cotas superiores e inferiores, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los conjuntos hallados en el ítem (a).

(c) En el caso de que existan $\sup(A)$, $\inf(A)$, $\sup(B)$, $\inf(B)$, conjeturar y demostrar sus relaciones con $\sup(A+B)$ e $\inf(A+B)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

(d) Demostrar que el conjunto $A + B$ posee máximo (mínimo) si y sólo si los conjuntos A y B poseen máximo (mínimo).

(e) Analizar si $A + B$ coincide con $B + A$.

15. Si A es un conjunto no vacío de números reales y c es un número real, se define el conjunto

$$cA = \{cx \,:\, x \in A\}.$$

(a) Si $A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \geq 2\}$ y $B = [-1, 2)$, determinar $2A$ y $-3B$. Analizar las cotas superiores e inferiores de estos conjuntos.

(b) Conjeturar las relaciones entre $\sup(A)$, $\text{ínf}(A)$, $\sup(c\,A)$ e $\text{ínf}(c\,A)$.

16. Si A y B son dos conjuntos no vacíos de números reales tales que

$$a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a \leq b.$$

(a) Demostrar que el conjunto A es acotado superiormente y el conjunto B es acotado inferiormente.

(b) ¿Existe alguna relación entre el $\sup(A)$ y el $\text{ínf}(B)$? Hacer una conjetura sobre tal relación.

(c) Demostrar lo conjeturado en el ítem anterior.

17. Probar que:

(a) si $|x| < \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x = 0$.

(b) si $|x| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$ entonces $x = 0$.

18. Deducir a partir de la Propiedad Arquimediana de los números reales las siguientes afirmaciones.

(a) Para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < n$.

(b) $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

(c) Si $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < x$.

(d) Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $z > 0$. Si se verifica:

$$x \leq y < x + \frac{z}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

entonces $x = y$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119