PRÁCTICA 5 - Introducción al Cálculo Integral

PRIMITIVAS DE FUNCIONES ELEMENTALES.

1. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $f_1(x) = 3x - 5$
b) $f_2(x) = x^3 + 4x - 2$
c) $f_3(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2}$
d) $f_4(x) = \dfrac{e^x}{2} + 3\cos x$
e) $f_5(x) = 1 - \tan^2 x$
f) $f_6(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$
g) $f_7(x) = 2\sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$
h) $f_8(x) = 2e^x - 2^x - x^2$
i) $f_9(x) = \dfrac{3}{\sin^2 x}$

REGLA DE SUSTITUCIÓN.

2. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{1}{3 - 5x}$
b) $(4 - 7x)^2$
c) $\dfrac{1}{x^2 - 2x + 1}$
d) $e^{3x} + \cos 2x$
e) $x^2 \cos(x^3)$
f) $\tan x$
g) $(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 1}$
h) $\dfrac{2x - 7}{(x^2 - 7x + 4)^3}$
i) $\dfrac{3}{1 + 9x^2}$
j) $\dfrac{2}{\sqrt{1 - (2x)^2}}$

3. Probar que integrales de la forma $\int R(e^x)\, dx$, mediante la sustitución $u = e^x$, se reducen a integrales de la forma $\int \dfrac{R(u)}{u}\, du$. Hallar las primitivas de las siguientes funciones:

a) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 1}$
b) $(1 + e^x)^{-1}$
c) $\dfrac{e^x\sqrt{e^x - 1}}{e^x - 1}$

INTEGRACIÓN POR PARTES.

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{-2x}{e^x}\, dx$
b) $\displaystyle\int 3x^2 \ln x\, dx$
c) $\displaystyle\int x \sin x\, dx$
d) $\displaystyle\int e^{2x} \cos x\, dx$
e) $\displaystyle\int x^2 \cos 5x\, dx$
f) $\displaystyle\int e^{-x} \sin 3x\, dx$
g) $\displaystyle\int (x^2 + 5x - 3)e^x\, dx$
h) $\displaystyle\int \frac{x^2 + 5x - 3}{e^x}\, dx$
i) $\displaystyle\int \sin(\ln x)\, dx$
j) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\, dx$
k) $\displaystyle\int x(2 + \ln x)\, dx$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

PRIMITIVAS DE FUNCIONES RACIONALES.

5. Halle las primitivas de las siguientes funciones racionales usando el método de fracciones simples.

   a) $\dfrac{1}{7-8x}$
   b) $\dfrac{1}{(3x-4)^2}$
   c) $\dfrac{1}{x^2-1}$
   d) $\dfrac{1}{(x+1)(2x+1)^2}$
   e) $\dfrac{8x^3+7}{(x+1)(2x+1)^2}$
   f) $\dfrac{1}{x^3-x}$
   g) $\dfrac{1}{(x^3-x)^2}$
   h) $\dfrac{2x+1}{(x^3-x)}$
   i) $\dfrac{1+\sinh x}{1+\cosh x}$

LA REGLA DE BARROW.

6. Aplicando la regla de Barrow calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^1 2x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x})\,dx$
   b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{x}-2x^2+5}{x^2}\,dx$
   c) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$
   d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |x-x^2|\,dx$
   e) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx+\int_2^4(x-2)\,dx$
   f) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{3-5x}$
   g) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{dx}{(4-7x)^2}$
   h) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

7. Dada la función $f(x)=-3x$, se pide calcular:

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$
   b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |f(x)|\,dx$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN EN INTEGRALES DEFINIDAS.

8. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{8x^3-1}{(2x^4-x)^2}\,dx$
   b) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin x\cos x\,dx$
   c) $\displaystyle\int_2^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

9. Si m y n son números positivos, demostrar que:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

10. Probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ valen las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,dx = 0$

b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES EN INTEGRALES DEFINIDAS.

11. Calcular las siguientes integrales, en caso de que existan:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-2x}{e^x}\,dx$ *b*) $\displaystyle\int_1^3 3x^2 \ln x\,dx$ *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$ *d*) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,dx$

12. Verificar las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ *b*) $\displaystyle\int_{\pi}^{3\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$ *c*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119