PRÁCTICA 1 - Funciones reales - Parte 2

1. Dadas las siguientes expresiones, indicar cuáles de ellas están asociadas a una función lineal de una variable.

   (a) $10x + 5y - 30 = 5x + 2y.$

   (b) $x^2 + y^2 = 0.$

   (c) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 1.$

   (d) $4(t+1) + 5(h+9) = -7.$

   (e) $x^3 + 2y + 1 = x^3 - 6.$

   (f) $\dfrac{(x+2y)^2}{x+2y}$

2. Representar gráficamente las siguientes funciones lineales.

   (a) $f_1(x) = 2x + 1$

   (b) $f_2(x) = -3x + 4$

   (c) $f_5(x) = -\dfrac{2}{3}x + 8$

   (d) $f_7(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

   (e) $f_8(x) = 4(x+1) + 3$

   (f) $f_9(x) = -2(x+3) + 6$

3. Obtenga la ley de cada una de las siguientes funciones lineales.

   (a) La gráfica de f_1 pasa por el origen y por el punto $(3, 2)$.

   (b) La gráfica de f_2 pasa por los puntos $(1, -3)$ y $(2, 0)$.

   (c) La gráfica de f_3 es paralela al eje de las abscisas y pasa por el punto $\left(\dfrac{2}{3}, -5\right)$.

   (d) La gráfica de f_4 tiene pendiente $m = -\dfrac{3}{10}$ y ordenada al origen $h = \dfrac{2}{3}$.

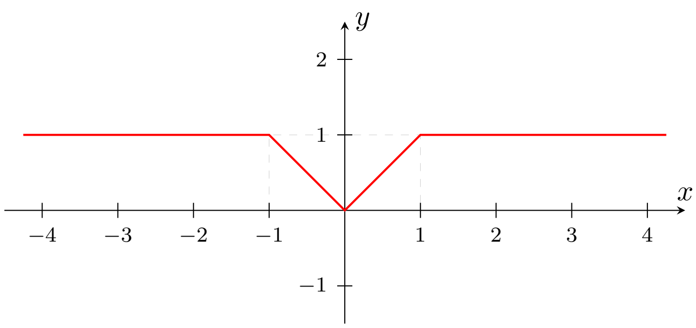
   (e) La gráfica de f_5 corta al eje x en el punto de abscisa 3 y forma con éste un ángulo de $\dfrac{\pi}{3}$.

4. ¿Cuánto debe valer el número real k para que el punto $(-1, 2)$ se encuentre en la gráfica de la función lineal $f(x) = \dfrac{kx+1}{k+2}$?

5. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

   cuya gráfica es la siguiente



   se pide representar gráficamente las funciones definidas de la siguiente manera.

(a) $f_1(x) = f(2x)$
(b) $f_2(x) = 2f(x)$
(c) $f_3(x) = f(x+2)$
(d) $f_4(x) = f(x) + 2$
(e) $f_5(x) = f(x+1)+f(x-1)$
(f) $f_6(x) = |1 - f(x)|$

6. (a) A partir de la gráfica de la función valor absoluto representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

$$f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ donde } f_1(x) = |x+1|, \qquad f_2\colon [-2,3] \to \mathbb{R} \text{ donde } f_2(x) = 1 - |x|.$$

(b) A partir de la gráfica de la función f_2 del ítem anterior, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios y recorridos:

I. $f_3(x) = f_2(x-1)$.
II. $f_4(x) = |f_2(x)|$.
III. $f_5(x) = f_2(-x)$.

(c) Utilizando las gráficas de las funciones $\{f_i : i = 1, ..., 5\}$ obtenidas en (a) y (b) indicar, para cada una:

I. Los conjuntos $A_i = \{x \in \mathbb{R}\colon f_i(x) = 0\}$ y $B_i = \{x \in \mathbb{R}\colon 1 < f_i(x) \leq 5\}$.
II. Los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la ecuación $f_i(x) = k$ admite exactamente dos soluciones reales.

7. Representar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = x^2$
(b) $f_2(x) = 2x^2$
(c) $f_3(x) = 3x^2$
(d) $f_4(x) = \dfrac{1}{2}x^2$
(e) $f_5(x) = \dfrac{1}{3}x^2$
(f) $f_6(x) = -x^2$

8. (a) A partir de la gráfica de la función cuadrática, $f(x) = x^2$, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes.

I. $f_1(x) = (x+3)^2$
II. $f_2(x) = (x-3)^2 + 1$
III. $f_3(x) = -x^2 + 4x - 3$
IV. $f_4(x) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2$
V. $f_5(x) = |x^2 + x - 6|$
VI. $f_6(x) = -x^2 + 1$

(b) Utilizar las representaciones gráficas de f_3 y f_5 para hallar los conjuntos soluciones de las siguientes inecuaciones:

I. $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.
II. $\dfrac{x^2 + x - 6}{-x^2 + 4x - 3} \geq 0$.

9. (a) Hallar los posibles valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$ para que la gráfica de $f(x) = x^2 + mx + 3$ tiene una raíz doble.

(b) Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la función $f(x) = -x^2 + x + 4\alpha$ no posee ceros reales.

(c) Hallar los valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3\alpha x + 4$ interseca a la gráfica de la función $g(x) = x$ en dos puntos distintos.

(d) Demostrar la siguiente proposición:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow 4x^2 - x \geq -\frac{1}{16}.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

10. Representar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = x^3$
   (b) $f_2(x) = 2x^3$
   (c) $f_3(x) = 3x^3$
   (d) $f_4(x) = \dfrac{1}{2}x^3$
   (e) $f_5(x) = \dfrac{1}{3}x^3$
   (f) $f_6(x) = -x^3$

11. Representar en un mismo sistema de coordenadas las gráficas de las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = x^{\frac{1}{2}}$
   (b) $f_2(x) = x^{\frac{1}{3}}$
   (c) $f_3(x) = x^{\frac{1}{4}}$

12. A partir de la gráfica de la función parte entera, representar gráficamente las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{2}[x]$.
   (b) $f_2(x) = \left[\frac{1}{2}x\right]$.
   (c) $f_3(x) = [x] + \frac{1}{2}$.
   (d) $f_4(x) = \left[x + \frac{1}{2}\right]$.

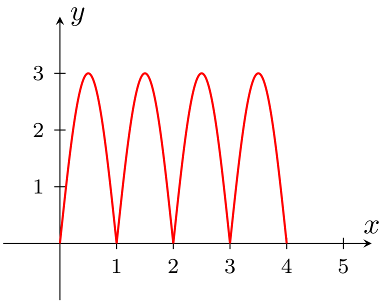
13. A partir de la gráfica de la función mantisa, representar gráficamente las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{2}mant(x)$.
   (b) $f_2(x) = mant\left(\frac{1}{2}x\right)$.
   (c) $f_3(x) = mant(x) + \frac{1}{2}$.
   (d) $f_4(x) = mant\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

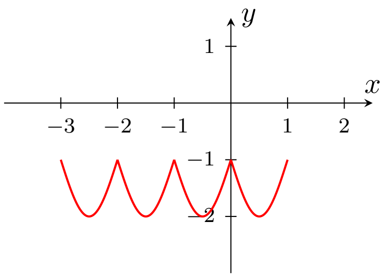
14. A partir de la gráfica de la función signo, representar gráficamente las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = sgn(x)\, x^2$.
   (b) $f_2(x) = sgn(x)\, \cos(x)$.
   (c) $f_3(x) = -sgn(x)\, x^3$.
   (d) $f_4(x) = sgn(-x)\, x^2$.

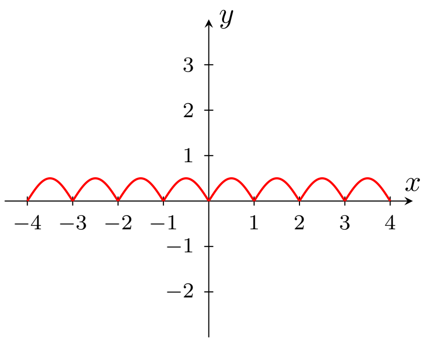
15. (a) A partir de la gráfica de la función homográfica $f(x) = \frac{1}{x}$, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes e indicar cuáles son (si existen) sus asíntotas horizontales y verticales.
   I. $f_1(x) = \dfrac{1}{x} + 2$
   II. $f_2(x) = \dfrac{1}{x+2}$
   III. $f_3(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$
   IV. $f_4(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$
   V. $f_5(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|$
   VI. $f_6(x) = -\dfrac{4x+1}{4x-1}$

   (b) Determinar los conjuntos:
$$A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq f_3(x) < 3\}\ , \qquad y \quad B = \{x \in \mathbb{R} : f_5(x) \geq 1\}.$$

16. Sea $f(x) = |\operatorname{sen}(\pi x)|$ definida en el intervalo $[-2, 2]$. Se pide:
   (a) Graficar f y analizar paridad, inyectividad y periodicidad.
   (b) Dar la ley de las siguientes funciones como corrimientos de la función f:







17. Representar gráficamente las siguientes funciones, indicando en cada caso dominio e imagen.

    (a) $f_1(x) = 2\cos(x+5)$.
    (b) $f_2(x) = 3 - \tan(x)$.
    (c) $f_3(x) = \operatorname{sen}(2x) - 3$.
    (d) $f_4(x) = \operatorname{sen}(1 - 2\pi x)$.
    (e) $f_5(x) = |3\cos(x)|$.
    (f) $f_6(x) = |\tan(x) - 1| + 1$.

18. Hallar el período de las siguientes funciones reales.

    (a) $f_1(x) = |\cos(x)|$.
    (b) $f_2(x) = \operatorname{sen}(5x+2)$.
    (c) $f_3(x) = \tan(\pi x)$.
    (d) $f_4(x) = \cos(x)\operatorname{sen}(x)$.

19. Se arroja una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $30\,m/seg$ por lo que la altura h que alcanza t segundos después está dada por la expresión

    $$h = (30t - 4{,}9t^2)m.$$

    Determinar la altura máxima que alcanza la pelota, representando la gráfica de la altura h como función del tiempo t.

20. Entre todos los pares de números reales x e y tales que $x + y = 1$, hallar aquellos para los cuales el producto $x.y$ es máximo.

21. Un granjero posee L metros de alambre para cercar un terreno de pastoreo rectangular, adyacente a un muro de piedra. ¿Qué dimensiones deberá dar a dicho terreno para que posea el área máxima?

22. En una cartulina rectangular de dimensiones 10 por 24 cm se cortan cuadrados iguales de lado x en cada esquina, con el fin de doblarla y hacer una caja sin tapa.

    (a) Realizar un dibujo para explicar el procedimiento.
    (b) Expresar el volumen de la caja en función de x. ¿Cuál es el dominio de esta función?
    (c) ¿Para cuál valor de x la superficie lateral de la caja es máxima? Definir adecuadamente la función que se utiliza.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119