UNIVERSIDAD NACIONAL
DE ROSARIO

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Licenciatura en Matemática
Profesorado en Matemática
Licenciatura en Cs. de la Computación

Álgebra Lineal

Docentes:

Dra. Elina M. Mancinelli
Dra María Inés López Pujato
Sr. Rolando J. Cardozo

2do semestre - 2024

Página en blanco intencional

Álgebra Lineal

E.M.Mancinelli

19 de agosto de 2024

Índice

1. Matrices - Determinantes - Sistemas Lineales

1.1. Introducción

Claramente como el nombre de la asignatura lo indica, este cuatrimestre vamos a dedicarnos al Álgebra Lineal.

Esta asignatura es una de las bases fundamentales tanto para las distintas áreas de la matemática (geometría, álgebra, análisis funcional, optimización lineal, no lineal y combinatoria) como para las aplicaciones. Todo problema, en cuyo modelo matemático intervengan muchas variables y quiera resolverse utilizando una computadora usará herramientas de álgebra lineal.

Pero a qué nos estamos refiriendo específicamente. Podríamos simplificar y decir que nuestro objetivo es analizar la ecuación

$$Ax = b.$$

Nos preguntamos qué representa esa ecuación.
De qué naturaleza son esos elementos? Podemos convenir que se trata de una ecuación donde desconocemos quien es x y queremos determinarlo para que sea verdadera la igualdad.

Si A y b son números, buscamos un número x tal que al ser multiplicado por A de b.
¿Siempre tiene solución tal ecuación? Si la tiene, es única, hay varias o infinitas?

Aun en este caso tan simple las respuestas dependen de dónde busquemos la solución. Si estamos en el anillo de los números enteros la ecuación $Ax = b$ puede no tener solución (cada vez que A no sea divisor de b).
Si miramos la ecuación en el cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ se observa que:

Si $A \neq 0$, la ecuación siempre tiene solución única dada por $x = b/A$.

Si $A = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación no tiene solución.

Si $A = 0$ y $b = 0$, cualquier número real es solución de la misma.

Generalicemos el marco en el que consideramos la ecuación. Todos ustedes han tenido un curso previo de Álgebra y Geometría Analítica 2, con lo cual están ya familiarizados con los conceptos básicos de sistemas de ecuaciones lineales, matrices y determinantes. (Volveremos en un rato sobre esto).

Es una igualdad, con lo cual si multiplicamos la matriz A por x debemos obtener b. El paso siguiente sería ver la ecuación $Ax = b$, pensando en multiplicar una matriz A por un vector x. En este caso se observa que:

- Ax puede ser un número.
- Puede verse como una combinación lineal de los vectores columnas de la matriz A.
- Puede verse como un vector en el espacio columna de A (generado por los vectores columnas de A).
- Puede verse como la aplicación de la transformación lineal A sobre x.

Nuestros objetivos serán:

- estudiar las estructuras algebraicas de los conjuntos en los cuales buscaremos soluciones a ecuaciones lineales, los espacios vectoriales,
- manejar hábilmente las matrices,
- adquirir conocimientos sobre transformaciones lineales, dualidad, autovalores, autovectores y descomposición matricial.
- adquirir el sustento teórico que nos permita resolver la ecuación $Ax = b$ de manera óptima y extrayendo de la misma toda la información que sea posible.

1.2. Matrices y eliminación gaussiana

Comencemos retomando la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
Supongamos tener un sistema de n ecuaciones con n incógnitas. Habrán visto en los cursos previos de álgebra algún método para resolverlo.
Métodos de eliminación en los cuales sumamos múltiplos de la primera ecuación a las siguientes

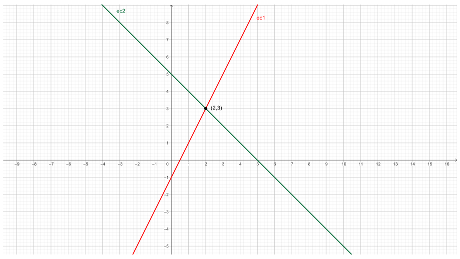
con el objetivo de ir reduciendo la cantidad de incógnitas hasta llegar a una última ecuación con una sola incógnita, resolverla y ahí remontar e ir despejando las restantes.
También deben haber visto el método de Cramer usando determinantes. Este método es muy limitado ya que $n = 4$ es casi el límite de la paciencia humana para calcular un determinante .ª mano”. Aun con ayuda de una PC para realizar las cuentas, cuando n es más grande, resulta un método muy oneroso y poco práctico.
Repasemos el método de la eliminación gaussiana a través de un ejemplo.

Geometría de las ecuaciones lineales

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 2x & - & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 5 \end{cases}$$

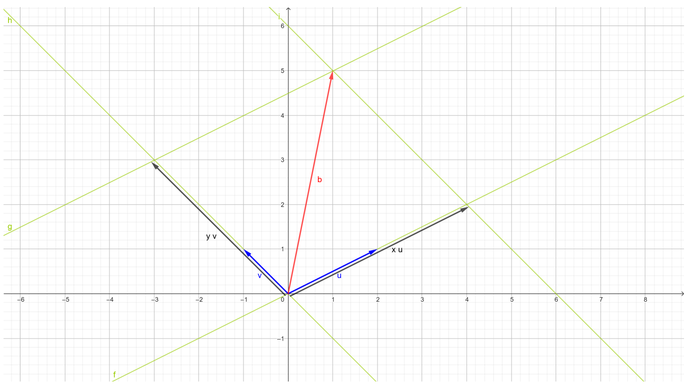
Se obtiene fácilmente que $(x, y) = (2, 3)$ es la solución. Podemos ver este sistema de 2 maneras geométricas.
i) Consideremos cada ecuación separadamente. En este caso son ecuaciones de rectas en el plano x, y. La solución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas es una n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ que satisface simultáneamente todas las ecuaciones. En este caso debe ser un punto (x, y) del plano que satisfaga las ecuaciones de ambas rectas, por lo tanto será el punto de intersección de las mismas.



ii) Veamos un enfoque geométrico menos usual. En lugar de encarar el sistema por fila hagámoslo por columna del siguiente modo

$$x \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

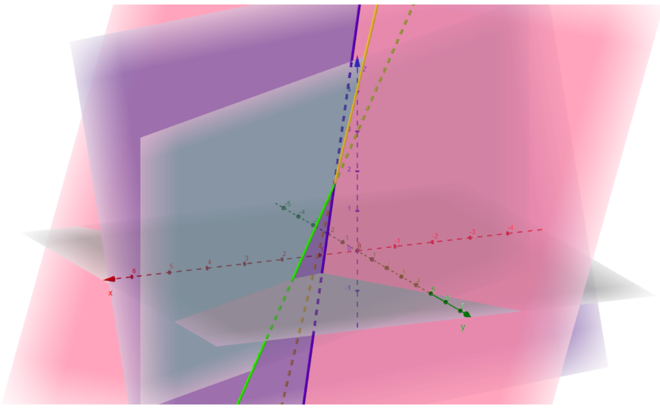
En este las dos ecuaciones se transforman en una sola ecuación vectorial, donde queremos encontrar cual es la combinación lineal de los vectores $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para obtener el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.
Si multiplicamos 2 veces $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y lo sumamos a 3 veces $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ obtenemos el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.



Pasemos a un ejemplo para $n = 3$, analicemos el sistema

$$\begin{cases} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{cases}$$

Nuevamente podemos hacer el análisis por filas o columnas.
Cada ecuación describe un plano en el espacio $\mathbb{R}^3$. Podemos determinar los planos a través de su intersección con con los ejes coordenados.



Si queremos extender esto a n ecuaciones, ya no será posible visualizar la situación, de todos modos la idea es análoga. Cada ecuación representa un ”plano” en en $\mathbb{R}^n$, que se llama ***hiperplano*** , que tiene una ”dimensión” igual a $n-1$.
Si intersecamos 2 de tales hiperplanos se obtiene algo de dimensión $n-2$, y así siguiendo si intesecamos $n-1$ hiperplanos se obtiene una recta y finalmente al intersecar con el último hiperplano se obtiene un punto (en el mejor de los casos). Resulta claro que para que este análisis tenga sentido geométrico se necesitará del álgebra.

Pasando al foco por columnas, se tiene en este caso tres vectores columna de dimensión 3.

$$u\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Podríamos representar estos vectores en $\mathbb{R}^3$ y buscar los escalares u, v, w por los cuales debemos multiplicar cada vector para, al sumarlos, obtener el vector $(5, -2, 9)^t$.

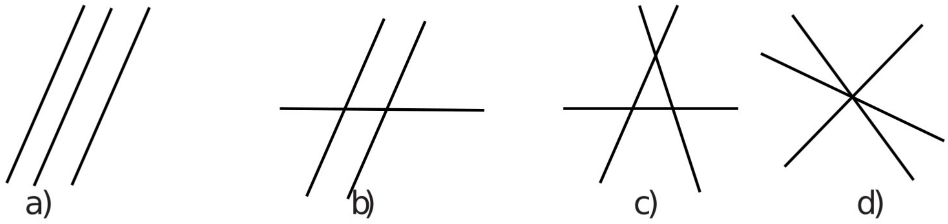
Las operaciones intervinientes son sumas de vectores y multiplicación por escalares.

Si se utilizan $u = 1, v = 1, w = 2$ se obtiene el resultado esperado, es decir que dichos valores son la combinación lineal que buscábamos y es además, $(1, 1, 2)$ el punto de intersección de los tres planos.

Para el caso de n ecuaciones con n incógnitas debemos buscar la combinación lineal de los n vectores de n componentes que permiten obtener el vector b.

Nos preguntamos ahora sobre la existencia o no de soluciones para un sistema. Pensémoslo en 3 dimensiones y en principio en la versión por filas. ¿Cuándo los tres planos no se intersecan?
Podría darse el caso que 2 de los planos sean paralelos, en ese caso tendríamos dos ecuaciones incompatibles

$$\begin{cases} 2u + v + w = 5 \\ 4u + 2v + 2w = 11 \end{cases}$$



Si estuviésemos en $\mathbb{R}^2$ este sería todo el problema que podría presentarse para dos rectas, pero en $\mathbb{R}^3$ pueden aparecer otras situaciones desfavorables. Hagamos un esquema suponiendo que los planos son perpendiculares al plano de la escritura.

En el primer caso, gráfica a), se tienen 3 planos paralelos. En este caso para la mayoría de los términos independientes el sistema no tiene solución, salvo para $b = (0,0,0)^t$, en cuyo caso todos los puntos del plano son solución ya que las tres ecuaciones definen el mismo plano.

En los casos b) y c), el tercer plano es paralelo a la recta intersección de los dos primeros, sería un sistema como el siguiente

$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 6 \end{cases}.$$

El el caso d) los tres planos se intersecan en una recta, por ejemplo

$$\begin{cases} u + v + w = 2 \\ 2u + 3w = 5 \\ 3u + v + 4w = 7 \end{cases}$$

Notemos que este sistema y el anterior tienen la misma matriz de coeficientes pero cambiamos el término independiente $(2,5,6)^t$ por $(2,5,7)^t$, es decir que corrimos el tercer plano de manera paralela a si mismo hasta que interseque la recta a la cual era paralelo.

Nos preguntamos que sucede con el enfoque por columnas cuando el sistema es singular. En este caso buscamos una combinación lineal de tres vectores 3-dimensionales que sea igual a un vector dado b. Si esto no es posible, la razón es que los tres vectores columnas son coplanares y b no está en ese plano. Si b si está en dicho plano, existirán infinitas soluciones.
Consideremos el sistema

$$u\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + w\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = b.$$

Se observa que para $u03, v = -1, w = -2$, la combinación da el vector nulo, luego estos tres vectores son coplanares. Si tomamos como término independiente $b = (2,5,7)^t$, está en el mismo plano y el sistema tiene infinitas soluciones.

Podemos concluir que si un sistema tiene problemas analizado por filas también los tendrá por columnas. Este análisis sobre la existencia y multiplicidad de soluciones de un sistema pueden obtenerse directamente del procedimiento de eliminación de Gauss.

Analicemos un ejemplo.

$$\begin{array}{lrcrcrcr} ① & 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ ② & 4u & - & 6v & & & = & -2 \\ ③ & -2u & + & 7v & + & 2w & = & 9 \end{array}$$

La ***eliminación gaussiana*** consiste en aplicar operaciones elementales para llevar el sistema a una forma escalonada.
El coeficiente 2 será el primer ***pivote gaussiana*** . Así puede reemplazarse la ecuación ② por ②$-2$①

y ③ por ③ + ① para obtener

$$\begin{array}{lrcrcrcr} ① & 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ ②' & & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ ③' & & & 8v & + & 3w & = & 14 \end{array}.$$

El -8 será el segundo pivote y cambiamos la ecuación ③' por ③' + ②' y se obtiene el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2u & + & v & + & w & = & 5 \\ & - & 8v & - & 2w & = & -12 \\ & & & & w & = & 2 \end{array}.$$

Haciendo una sustitución hacia arriba fácilmente se puede resolver el sistema obteniéndose $u = 1, v = 1, w = 2$ como solución. Se utilizan sucesivamente los pivotes $2, -8$ y 1.

A través de este procedimiento se obtiene un sistema de ecuaciones lineales equivalente al original (pues tiene las mismas soluciones), pero que tiene una matriz de coeficientes triangular superior y por lo tanto es más sencillo de resolver.

La matriz y la matriz ampliada del sistema original son

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Luego de la eliminación se obtiene

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Cuestión importante a tener en cuenta: los pivotes no pueden ser nulos.
Si en el desarrollo de la eliminación aparece un 0 en el lugar de un pivote, esto puede ser un problema evitable o no.
En el primer caso, la solución consiste en permutar filas, por ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 6v & + & 8w & = \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & & 3w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \end{array}$$

En este caso podemos permutar las ecuaciones ② y ③ y obtener el sistema

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & 2v & + & 4w & = \\ & & & & 3w & = \end{array}$$

que ya es triangular con pivotes $1, 2$ y 3.
Otro caso sería por ejemplo

$$\begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ 2u & + & 2v & + & 5w & = \\ 4u & + & 4v & + & 8w & = \end{array} \qquad \rightarrow \qquad \begin{array}{rcrcrc} u & + & v & + & w & = \\ & & & & 3w & = \\ & & & & 4w & = \end{array}$$

No hay posible intercambio de filas que permita evitar la aparición de un 0 como segundo pivote.

Queremos escribir en forma matricial el procedimiento de eliminación de Gauss.

Definición 1.1 *Notaremos $E_{ij}(-l)$ a la **matriz elemental** o de **eliminación** que es igual a la matriz identidad cambiando el 0 por $-l$ en la posición ij. Al hacer el producto $E_{ij}(-\alpha)A$, se resta α veces la fila j de A a la fila i de A.*

Ejemplo 1.1

$$E_{31}(-\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad E_{31}(-\alpha)b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - \alpha b_1 \end{bmatrix}$$

Cuando se realiza la eliminación gaussiana se premultiplica tanto a la matriz A como al término independiente b. Es decir pasamos de un sistema $Ax = b$ a uno de la forma $EAx = Eb$.

Nota 1.1 *Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times q}(\mathbb{K})$ luego $B = [B_1, \cdots, B_q]$ con B_j vectores columna, luego*

$$AB = [AB_1, AB_2, \cdots, AB_q].$$

De este modo toda columna de la matriz AB es una combinación lineal de las columnas de A.

Ejemplo 1.2 *Sean*

$$E_{21}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix},$$

luego

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 1 & 1 \\ & E_{21}A & & 4 & -6 & 0 \\ & & & -2 & 7 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 7 & 2 \end{array}$$

El intercambio de filas en una matriz también puede realizarse matricialmente. Sea $P_i j$ la matriz que se obtiene a partir de la identidad intercambiando las filas i y j, por lo tanto será una matriz cuadrada.

Ejemplo 1.3

$$P_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad P_{23}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Si consideramos una matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

proveniente de una eliminación gaussiana en la cual debemos intercambiar filas resulta

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 2 & 4 & 1 \\ & P_{23}A & & 0 & 0 & 3 \\ & & & 0 & 6 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}$$

Premultiplicando por P_{23} intercambiamos las filas y llegamos a una matriz escalonada

Ejemplo 1.4 *Veamos otro ejemplo de eliminación gaussiana. Supongamos tener el sistema $Ax = b$*

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \\ \hline 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \\ \hline & 0 & -4 & -4 \end{array}$$

Primer paso: $\textcircled{2} \to \textcircled{2} - 2\textcircled{1}$, $\textcircled{3} \to \textcircled{3} + \textcircled{1}$.
Segundo paso: $\textcircled{3}' \to \textcircled{3}' + 3\textcircled{2}'$.
Se llega a la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix},$$

donde la matriz de coeficientes es una matriz triangular superior llamada U. Este sistema equivalente al original se resuelve haciendo sustitución hacia atrás.
Matricialmente, se usaron en el primer paso $E_{21}(-2)$ y $E_{31}(1)$ y en el segundo paso $E_{32}(3)$. En resumen realizamos las operaciones

$$E_{32}E_{31}E_{21}Ax = E_{32}E_{31}E_{21}b$$

Nos preguntamos quien es la matriz E que premultiplica a A y la lleva a U.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} & E_{32}E_{31} & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & -5 & 3 & 1 \end{array} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cómo recuperamos A si tenemos U? Si $E_{32}E_{31}E_{21}A = U$, luego $A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U$. Llamamos

$$L = (E_{32}E_{31}E_{21})^{-1} = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = E^{-1}.$$

En este caso se tiene que

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = L.$$

Observación 1.1

- *No realizamos ningún intercambio de filas.*
- *Las componentes de L debajo de la diagonal son los opuestos de los multiplicadores de la eliminación.*
- *La diagonal de U tiene los pivotes.*
- *La matriz L tiene 1 en la diagonal.*
- *La matriz A quedó representada como $A = LU$, esquemáticamente $A =$ ◺◹.*

La matriz L puede obtenerse fácilmente conociendo los multiplicadores de las eliminaciones necesarias. Notemos que L tiene 1 en la diagonal y U tiene los pivotes no nulos. Puede definirse una nueva factorización $A = LDU$, donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{\lambda_1} & \cdots & \frac{u_{1n}}{\lambda_1} \\ 0 & & & \\ \cdots & 1 & \cdots & \frac{u_{(n-1)n}}{\lambda_{n-1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Tener una descomposición LU de la matriz de coeficientes A es beneficioso pues permite resolver el sistema en dos pasos

- $Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad LUx = b$, llamemos $Ux = c$. Resolvamos el sistema de ecuaciones lineales triangular inferior
$$Lc = b.$$
- Utilizando el vector c encontrado en el primer paso, resolvamos el sistema de ecuaciones lineales triangular superior
$$Ux = c.$$

Ejemplo 1.5 *Volviendo al ejemplo*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = LU.$$

Consideremos el siguiente sistema $Ax = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = b.$
Usando la factorización resolvemos en dos pasos:
1) $Lc = b$, *se obtiene que* $c = (7, -4, -10)^t$.
2) $Ux = c$, *se obtiene que* $x = \left(\frac{11}{4}, -1, \frac{5}{2}\right)^t$

Notemos que podríamos resolver de manera sencilla cualquier sistema $Ax = b$, variando b gracias a la factorización LU de A.

Teorema 1.1 *Si A puede factorizarse, sin intercambio de filas, si tiene que: A no singular, entonces la factorización LDU es única.*

Demos: Supongamos que $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$.
L_1^{-1} es una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal.
U_2^{-1} es una matriz triangular superior con 1 en la diagonal.
D_1^{-1} es una matriz diagonal y los elementos diagonales son los recíprocos de los elementos diagonales de D_1.
Luego

$$\begin{aligned} L_1D_1U_1 &= L_2D_2U_2 \\ D_1U_1 &= L_1^{-1}L_2D_2U_2 \\ U_1 &= D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2U_2 \\ U_2^{-1}U_1 &= (D_1^{-1}L_1^{-1}L_2)D_2 \\ ◹ &= ◺ \end{aligned}$$

El término de la izquierda es una matriz triangular superior con 1 en la diagonal, y el término de la derecha es una matriz triangular inferior con 1 en la derecha. La única posibilidad es que ambas sean la matriz identidad, con lo cual usando la penúltima igualdad prueba que $U_1 = U_2$.
Análogamente se tiene que $L_1 = L_2$ y finalmente que $D_1 = D_2$. ■

Corolario 1.1 *La factorización LU de una matriz cuadrada inversible es única (sin pivotes nulos).*

Demos: $A = L_1U_1 = L_2U_2$. Si no hay pivotes nulos $A = L_1D_1\tilde{U}_1 = L_2D_2\tilde{U}_2$ entonces por el teorema anterior se tiene que $L_1 = L_2$ y $U_1D_1\tilde{U}_1 = D_2\tilde{U}_2 = U_2$. ■

Definición 1.2 *Recordemos que una* **matriz simétrica** *es una matriz tal que $A = A^t$. Es decir, para una $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, A es simétrica si y solo si $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = 1, \cdots, n$.*

Teorema 1.2 *Si A es simétrica y puede factorizarse sin intercambio de filas en LDU, entonces $U = L^t$.*

Demos: Sea $A = LDU = A^t = U^tD^tL^tU^tDL^t$. Luego por la unicidad de la descomposición se tiene que $L = U^t$. ■

¿Qué se hace cuando hay pivotes nulos? Veamos un ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando la eliminación

$$E_{31}(-1)E_{21}(-3)A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

En este caso debemos intercambiar filas. Lo hacemos premultiplicando por la matriz de permutación P_{32} y así llegamos a una matriz U triangular superior

$$P_{32}E_{31}(-1)E_{21}(-3)A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definición 1.3 *Una* **matriz de permutación** *es una matriz P_{ij} con $i > j$ que se obtiene al intercambiar las filas i y j en la matriz identidad.*
Una **matriz de permutación de orden** n *es una matriz cuadrada con exactamente una componente igual a 1 en cada fila y en cada columna y el resto iguales a 0.*

Observación 1.2 *Estas matrices se obtienen como producto de matrices de permutación.*
Las matrices P_{ij} tienen la particularidad que $P_{ij}^{-1} = P_{ij}^t = P_{ij}$.

Definición 1.4 *Una matriz cuadrada es* **no singular** *si puede transformarse en U, matriz triangular superior sin pivotes nulos, con posibles intercambio de filas.*
A es una matriz **singular** *si, aun con intercambio de filas, hay pivotes nulos en la matriz obtenida por la eliminación gaussiana.*

Lema 1.1 *Para $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, sean las funciones*

$$\begin{array}{rcccl} \pi_{ij}: & \{1,\cdots,n\} & \to & \{1,\cdots,n\} & \\ & r & \mapsto & \pi_{ij}(r) & = \begin{cases} r & i \neq r \neq j, \\ i & r = j, \\ j & r = i. \end{cases} \end{array}$$

Entonces

$$P_{ij}E_{kl}(m) = E_{\pi_{ij}(k)\pi_{ij}(l)}(m)P_{ij}.$$

Es decir que si multiplicamos una matriz de permutación por una de eliminación dicho producto podremos obtenerlo como el producto de otra matriz de eliminación por la misma matriz de permutación.

Demos: Si k y l son distintos de i y j, $P_{ij}E_{kl} = E_{kl}P_{ij}$.
Si $k = i, l = j, \pi_{ij}(k) = j, \pi_{ij}(l) = i$ y $P_{ij}E_{ij} = E_{ji}P_{ij}$.
Si $k = i, l \neq j, \pi_{ij}(k) = j, \pi_{ij}(l) = l$ y $P_{ij}E_{il} = E_{jl}P_{ij}$. ■

¿Cómo hacemos la factorización LU cuando hay pivotes nulos?
Supongamos que

$$E_2P_2E_1P_1A = U.$$

Por el lema previo sabemos que existirá una matriz de eliminación E_1' tal que

$$E_2E_1'P_2P_1A = E_2E_1'PA = U.$$

De este modo llegamos a la factorización LU de la matriz PA. La idea es realizar primero todas las permutaciones necesarias y luego hacer la factorización LU.
Sabemos que si A es no singular, hay un reordenamiento de las filas de A que una vez factorizada obtenemos una matriz U sin pivotes nulos. Si A es singular, ningún reordenamiento nos llevará a una matriz sin pivotes nulos.

Teorema 1.3 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
a) Si A puede transformarse en U (triangular superior sin 0 en la diagonal) entonces $Ax = b$ tiene solución única $\forall b \in \mathbb{R}^n$.
b) Si no, $\forall b \in \mathbb{R}^n, Ax = b$ tiene infinitas soluciones o ninguna.

Demos: a) $EPAx = EPb \to Ux = \tilde{b}$, tenemos el sistema equivalente a $Ax = b$. Como U tiene pivotes no nulos, existe solución única que se obtiene por sustitución hacia atrás.
De otro modo, como U es triangular superior con elementos diagonales no nulos, se tiene que su determinante es el producto de dichos elementos diagonales. Así $|a| \neq 0$ por lo tanto existe U^{-1} y resulta $x = U^{-1}\tilde{b}$.
b) Si hay un pivote nulo, con 0 debajo de la diagonal, el sistema $A'x = d$ tiene la forma

$$A' = \left[\begin{array}{ccc|c|c} \diagdown & & U' & & \\ & \diagdown & & c & M_1 \\ 0 & & \diagdown & & \\ \hline & 0 & & 0 & M_2 \\ \hline & & & & \\ & 0 & & 0 & M_3 \\ & & & & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \\ w \\ \\ \hline x_r \\ \hline \\ z \\ \\ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \\ d_1 \\ \\ \hline d_r \\ \hline \\ d_2 \\ \\ \end{array}\right]$$

Donde $A' = EA$ y $d = Eb$. Así el sistema puede reescribirse como

$$\begin{array}{rcl} U'w + cx_r + M_1z & = & d_1 \\ M_2z & = & d_r \\ M_3z & = & d_2 \end{array}$$

i) Si $M_3z = d_2$ no tiene solución, luego no hay solución del sistema general.
ii) Si $M_3z = d_2$ tiene solución, sea $\tilde{z}$ una tal solución, entonces si $M_2\tilde{z} \neq d_r$, entonces no hay solución.
Si para algún $\tilde{z}$, $M_2\tilde{z} = d_r$, resulta entonces que

$$\begin{array}{rcl} U'w + cx_r + M_1\tilde{z} & = & d_1 \\ U'w & = & d_1 - M_1\tilde{z} - cx_r \\ U'w & = & \tilde{d_1} - cx_r \end{array}$$

esto tiene solución única para cualquier $x_r \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, si hay solución hay infinitas. ■

Definición 1.5 *Recordemos que una matriz A es inversible si y solo si existe una matriz B tal que $AB = BA = I$.*

Teorema 1.4 *A no singular si y solo si A es inversible*

Demos: $\Rightarrow$) A no singular, luego $\forall b, Ax = b$ tiene solución única. En particular para $b = e_j$, el j-ésimo versor. Sea X_j tal que $AX_j = e_j$, llamemos $B = [X_1, \cdots, X_n]$ la matriz cuyas columnas son los vectores X_j. Resulta

$$AB = [AX_1, \cdots, AX_n] = [e_1, \cdots, e_n] = I.$$

Por otro lado $AX_j = e_j \Rightarrow EAX_j = Ae_j$, sea $U = EA$, es U triangular superior sin ceros en la diagonal, por lo tanto inversible. Así

$$B = [X_1, \cdots, X_n] = U^{-1}E[e_1, \cdots, e_n] = U^{-1}E.$$

Resulta entonces

$$BA = U^{-1}EA = U^{-1}U = I$$

Por lo tanto es $AB = BA = I$, y B es la matriz inversa de A que resulta inversible.
) $\Leftarrow$) A inversible, luego para $b \in \mathbb{R}^n$ resulta $Ax = b$ tiene solución única $x = A^{-1}b$.
Si suponemos que A no tiene n pivotes no nulos, esto implicaría que por eliminación podemos llevarla a una matriz con una fila con todos 0. Supongamos que esa eliminación se realiza a través de una matriz E (triangular inferior con 1 en la diagonal). Así EA tiene una fila de 0.
Como existe la inversa de A resulta $AA^{-1} = I$, luego $EAA^{-1} = E$. La fila de ceros de la matriz EA multiplicada por A^{-1} da por resultado una fila de ceros en E.
Esto no es posible pues E es inversible. Luego concluimos que A tiene n pivotes no nulos. ■

Observación 1.3 *i) En esta prueba calculamos B tal que $BA = AB = I$, es decir la inversa de A resolviendo los sistemas $AX_j = e_j, j = 1, \cdots, n$.*
ii) ¿Qué pasa si hay pivotes nulos?
En tal caso buscamos en esa columna hacia abajo. Si son todos nulos, la matriz es singular. Si hay algún elemento distinto de cero, usamos una matriz de permutación, intercambiando filas, y luego continuamos con la eliminación.
Si estamos interesados en encontrar la factorización LU, primero realizamos todas las permutaciones necesarias y luego a través de eliminación encontramos la factorización LU de la matriz PA.

GAUSS-JORDAN

Como ya mencionamos las matrices elementales pueden invertirse con facilidad. Si E resta a una fila un múltiplo de otra, su inversa lo vuelve a sumar. Si P intercambia las filas i y j, su inversa vuelve a intercambiarlas. Si D es una matriz diagonal, su inversa también es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los elementos recíprocos de D (tienen que ser no nulos obvio).
Aprovechemos estas cuestiones para calcular de manera optimizada la inversa de una matriz A, es decir buscamos una matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = I$. Como vimos en la última demostración, esto puede resolverse a través de n sistemas usando como término independiente cada una de las columnas de I.
Existe una manera más práctica realizando eliminaciones hacia abajo y luego hacia arriba, esto resuelve los n sistemas en simultáneo. Normalmente las matrices ampliadas en el método de eliminación de Gauss agregan una columna a la matriz dada por el termino independiente siendo la misma $[A\, b]$ en este caso agreguemos los n términos independientes todos a la vez, obteniendo una matriz $[A\, e_1 \cdots e_n] = [A\, I]$. Una vez terminado el proceso de eliminación de Gauss estaremos en una situación

$$E[A\, I] = [U\, A']$$

con U triangular superior y K la matriz que resulte de aplicar las eleminaciones a la parte de la identidad. Hasta acá Gauss terminaría la resolución por sustitución hacia arriba. El aporte de Jordan es seguir realizando eliminaciones para transformar en 0 las componentes que están sobre la diagonal de U. Así obtenemos una nueva matriz que será de la forma $[D\,A'']$ donde en la matriz D están los pivotes. El último paso de Gauss-Jordan es dividir cada fila por el pivote correspondiente llegando a $[I\,A^{-1}]$.
El proceso completo de Gauss-Jordan resumido en una línea sería

$$\textit{multiplicar } [A\,I] \textit{ por } A^{-1} \textit{ para obtener } [I\,A^{-1}].$$

Para terminar busquemos la inversa de la matriz A que usamos en los ejemplos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = [U\,L^{-1}]$$

Sigamos con la eliminación para arriba

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente dividiendo por los pivotes obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

de donde concluimos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Índice alfabético

REFERENCIAS

[1] Apostol T., *Calculus*, Tomo 2 (2da edición, Reverté S.A., Barcelona. 1979.

[2] Axler S., *Linear Algebra done right*, (3era edición), Springer, 2015.

[3] Friedberg S.H., Insel A.J., Spence L.E., *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York,1989.

[4] Hoffman K., Kunze R., *Linear algebra*, Prentice Hall, México 1971.

[5] Lankham I., Nachtergaele B., Schilling A., *Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, World Scientific, 2016.

[6] Lay D.C., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Pearson Educación, México 2007.

[7] Strang G., *Linear algebra and its applications, 3rd ed*, Harcourt College Publishers. 1988.

[8] Strang G., *Introduction to linear algebra, 4th ed.*, Wellesley. Cambridge Press, 2009.