Práctica 2 - Isomorfismos

1. Una propiedad $\mathcal{P}$ se dice una *invariante* vía isomorfismo, si para todo grafo G que cumple la propiedad $\mathcal{P}$ y todo grafo H isomorfo a G, se verifica que H tiene la propiedad $\mathcal{P}$.

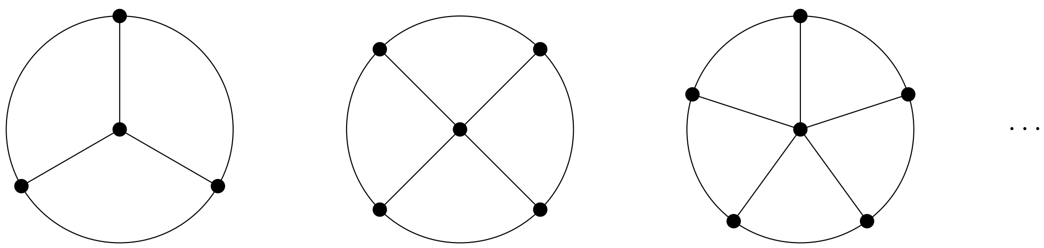
   Pruebe que las propiedades indicadas son invariantes (vía isomorfismo).

   a) Tener n vértices de grado k.
   b) Tener una arista (u, w) donde $d(u) = i$ y $d(w) = j$.
   c) Ser conexo.
   d) Ser bipartito.

2. *a*) Pruebe que si G y H son isomorfos, entonces tienen la misma secuencia de grados.
   b) ¿Es cierta la recíproca?

3. *a*) Dibuje todos los grafos simples de cuatro vértices.
   b) Dibuje todos los grafos simples no isomorfos de cuatro vértices.
   c) Dibuje todos los grafos simples cúbicos (3-regulares) no isomorfos de n vértices, con $n \leqslant 8$.

4. Para $n \geqslant 3$, el grafo rueda con n radios, denotado por W_n es el grafo formado por un ciclo de longitud n y un vértice adicional que es adyacente a los n vértices del ciclo.



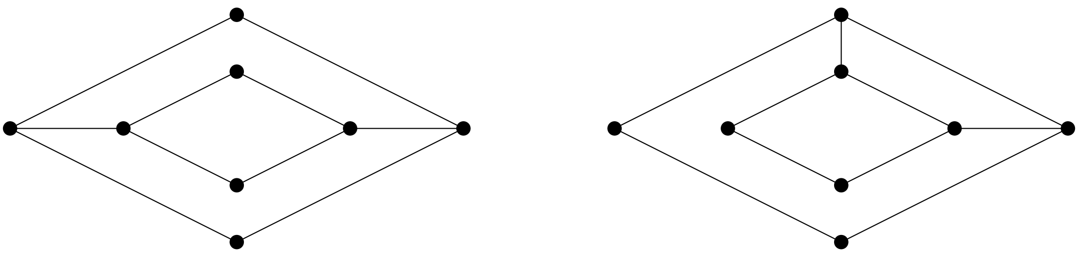
W_3 W_4 W_5

   ¿Es alguno de estos grafos W_n isomorfo a un grafo completo? Si es así, determine todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales se verifica esta condición.

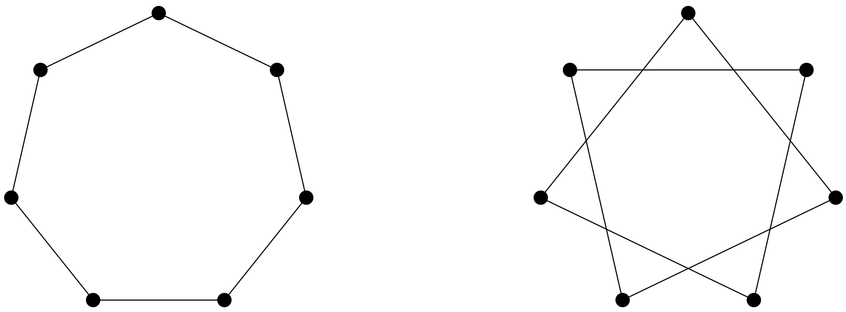
5. Demuestre que dos grafos G_1 y G_2 son isomorfos si y solo si sus vértices pueden ordenarse de manera que sus matrices de adyacencia sean iguales.

6. Para cada par de grafos, determine si los grafos son o no isomorfos.

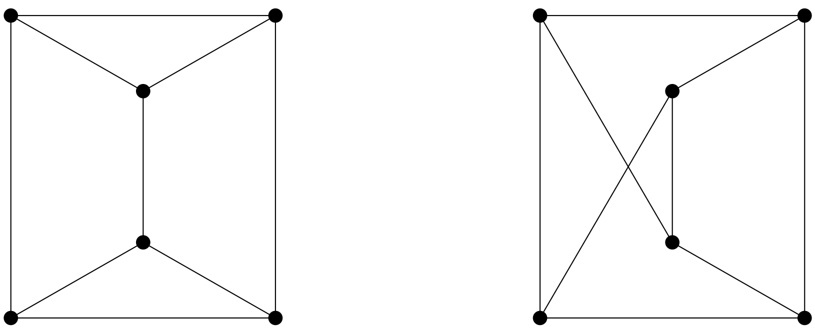
a)



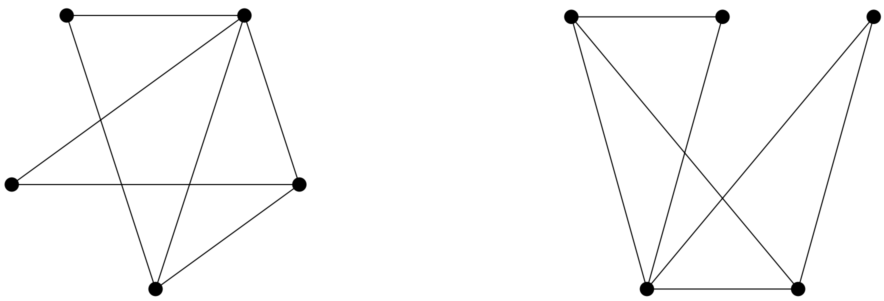
b)



c)

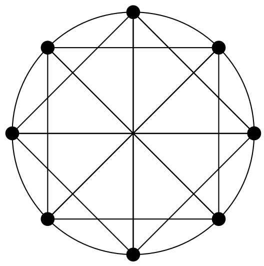
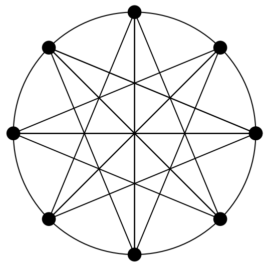


d)



7. *a*) Si G_1 y G_2 son grafos simples, demuestre que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si $\overline{G_1}$ y $\overline{G_2}$ son isomorfos.

   b) Determine si los grafos siguientes son isomorfos.

8. *a*) Sea G un grafo con n vértices. Si G es isomorfo a su propio complemento $\overline{G}$, ¿cuántas aristas debe tener G? (Un grafo con esta propiedad, se dice *autocomplementario*).

   b) Pruebe que si G es autocomplementario, entonces G es conexo.

   c) Encuentre un ejemplo de grafo autocomplementario de cuatro vértices y otro de cinco vértices.

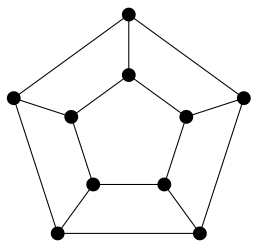
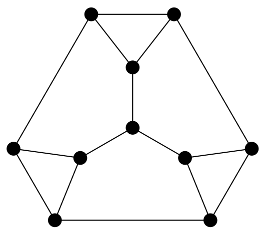
   d) Si G es un grafo autocomplementario con n vértices, donde $n > 1$, demuestre que $n = 4k$ o $n = 4k + 1$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.

   e) Si G es un ciclo simple de n vértices, demuestre que G es autocomplementario si y sólo si $n = 5$.

9. Sea G un grafo simple. Pruebe que si θ es un automorfismo de G, entonces también lo es de $\overline{G}$.

10. *a*) Sea G un grafo. Muestre que la relación *es similar a* es una relación de equivalencia en $V(G)$.

    b) Las clases de equivalencia con respecto a la relación del ítem anterior se llaman *órbitas* del grafo. Determine las órbitas de los siguientes grafos.

11. Pruebe que si G es un grafo vértice-transitivo, entonces G es un grafo regular.

12. *a*) Pruebe que el grafo de línea del grafo completo K_5 es isomorfo al complemento del grafo de Petersen.

    b) Pruebe que el grafo de línea del grafo bipartito completo $K_{3,3}$ es autocomplementario.

13. Pruebe que el grafo estrella $K_{1,3}$ y el grafo rueda W_5 no son los grafos de línea de ningún grafo.

14. Sean n y k dos números naturales tal que $n > 2k$. El *grafo de Kneser* $K(n, k)$ es el grafo cuyo conjunto de vértices es $\binom{[n]}{k}$, y dos vértices son adyacentes si su intersección es vacía.

    a) Pruebe que $K(n, 1) \cong K_n$, para cada $n \geqslant 3$.

    b) Pruebe que $K(n, 2)$ es isomorfo al complemento del grafo de línea $L(K_n)$, para cada $n \geqslant 5$.