Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

1.2 Espacios Vectoriales

Recordemos un poco lo visto en Álgebra y Geometría Analítica II sobre espacios vectoriales:

- $F = \mathbb{R}$ ó $F = \mathbb{C}$. $\alpha \in F$ escalar.
- El vectorial espacio de las $n-$uplas de escalares de F: $\mathbb{F}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{F}, i = 1, \ldots, n\}$
  - Elementos: $\overline{u} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{v} = (y_1, \ldots, y_n)$ n-uplas o vectores. Igualdad: componente a componente.
  - Suma: $\overline{u} + \overline{v} = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
  - Producto por escalar: $\alpha\overline{v} = \alpha(x_1, \ldots, x_n) := (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.
- El espacio vectorial de las matrices $m \times n$ de escalares de F: $F^{m\times n} = ...$
  - Elementos: $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrices $m \times n$ a coeficientes en F. Igualdad: ...
  - Suma: $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$.
  - Producto por escalar: $\alpha A = \alpha(a_{ij}) := (\alpha a_{ij})$.
- El espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n con coeficientes en F: $F_n[X]$...
  - Elementos: ...
  - Suma: ...
  - Producto por escalar: ...
- ¿qué otros conocemos?
- **Ejercicio 1** *Recordar los axiomas...*
  - ...
  - ...
  - ...

Definición 1 *Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de escalares. Sea un conjunto V dotado de dos operaciones, una llamada suma, denotada por el símbolo $+$, que a un par de elementos v y w de V les asigna un elemento que denotamos $v+w$, y otra llamada producto por escalar denotada por el símbolo $\cdot$ que a un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un elemento $v \in V$ le asigna un elemento que denotamos $\alpha \cdot v$. Diremos que la terna $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{F}-$espacio vectorial si se verifican los siguientes axiomas:*

1. *Clausura de la suma: si $v, w \in V$ entonces $v + w \in V$.*
2. *Asociatividad de la suma: si $v, w, u \in V$ entonces $(v + w) + u = v + (w + u)$.*
3. *Existencia de elemento neutro para la suma: existe $\overline{0} \in V$ tal que $v + \overline{0} = \overline{0} + v = v$.*
4. *Existencia de opuestos para la suma: dado $v \in V$ existe $w \in V$ tal que $v + w = w + v = \overline{0}$.*
5. *Conmutatividad de la suma: si $v, w \in V$, entonces $v + w = w + v$.*
6. *Clausura del producto por escalar: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $\alpha \cdot v \in V$.*
7. *Asociatividad del producto por escalar: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$.*
8. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma de escalares: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ entonces $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.*
9. *Distributiva del producto por escalar con respecto a la suma: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v, w \in V$ entonces $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$.*
10. *Unitariedad del producto por escalar: si $v \in V$, entonces $1 \cdot v = v$.*

A los elementos v de un espacio vectorial V se los denomina vectores.

Proposición 1 *En un F-ev $(V, +, \cdot)$ se verifican:*

(a) El elemento neutro para la suma es único.

(b) Dado un vector $v \in V$, existe un único opuesto, que denotaremos $-v$.

(c) Dado un vector $v \in V$, se tiene que $0 \cdot v = \overline{0}$.

(d) Dado un escalar $\alpha \in F$, se tiene que $\alpha \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

(e) Dado un vector $v \in V$, se tiene que $(-1) \cdot v = -v$.

(f) Dados un escalar $\alpha \in F$ y un vector $v \in V$ que verifican que $\alpha \cdot v = \overline{0}$, se tiene que o bien $\alpha = 0$ o bien $v = \overline{0}$ (sin excluír que ambas puedan ocurrir en simultáneo).

Desafío 1 *Intentar hacer las pruebas!*

Ejercicio 2 ***Hacer** las pruebas.*

Ejemplos 1

1. *A los sospechosos de siempre ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$) le agregamos $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}_2^n$, etc.*
2. *De la misma forma, si F es un cuerpo, tenemos que $F^{n\times m}, F[X]$ son F-ev con las sumas y productos habituales.*
3. *Sea X es un conjunto no vacío y F un cuerpo. Definimos el conjunto $\mathcal{F}^X = \{f : X \to F\}$. ¿Qué operaciones suma y producto son naturales definir? ¿Obtenemos un F-ev?*
4. *Pensemos ahora lo siguiente:*
   a) *$\mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}$-ev y no es $\mathbb{C}$-ev (¿por qué?).*
   b) *$\mathbb{C}$ es un $\mathbb{R}$-ev y un $\mathbb{C}$-ev.*
   c) *$\mathbb{Q}$ es .... y no es ....*
5. *$\emptyset$ no es ev sobre ningún cuerpo F (¿por qué?).*
6. *El espacio de las sucesiones de escalares: dado un cuerpo F definimos el conjunto F^∞ cuyos elementos son sucesiones de escalares de F: $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x_i \in F$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos*

una suma y un producto por escalar de la forma natural: componente a componente. Así, resulta F^∞ un F-ev. (Ejercicio: probar todas las afirmaciones).

Desafío 2 *Pensar en cómo justificar esto sin probar todos los axiomas de ev.*

7. $\mathbb{R}^{[0,1]} = \{f : .... \to ....\}$ *es un* $\mathbb{R}$*-ev con la suma y producto por escalar habituales.* $\sin(x), x^{23} - \sqrt{3}x^5, e^{2x-1}$ *son funciones de este ev, y hay muchas más. Pero hay más, hay funciones que tienen un salto o funciones que tienen infinitos saltos.*

   $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : \ f \text{ es continua } \}$ *es un* $\mathbb{R}$*-ev con la suma y producto por escalar habituales.*

   Tenemos que $C([0,1]) \subset \mathbb{R}^{[0,1]}$*, y la suma y el producto por escalar son las mismas, y ambas resultan ser* $\mathbb{R}$*-ev. Esto no es casual, en la próximas sección formalizaremos el concepto de subespacio vectorial luego de ver algunos ejemplos más.*