Nombre y Apellido:

Examen Final

Los grupos son una estructura algebraica ampliamente estudiada en matemática por su relación con la simetría. Las estructuras algebraicas no son más que conjuntos dotados de una o más operaciones con ciertas propiedades. Es común que al definir qué propiedades tienen que cumplir las operaciones respecto a los elementos del conjunto emerjan elementos distinguidos.
Los **grupos** son conjuntos **cerrados** por una operación **asociativa**. Es decir, operar cualesquiera dos elementos da como resultado un elemento que pertenece al conjunto y además es irrelevante de qué manera se parentiza una expresión que aplica la operación sucesivas veces.
Por otro lado, los grupos se caracterizan por distinguir un elemento **neutro**, también llamado identidad, y contener **inversos**.
Algunos ejemplos de grupos son

- $(\mathbb{Z}, 0, +)$ Los enteros con 0 como neutro y la suma como operación: la suma es asociativa y cerrada en los enteros, $x + 0 = 0 + x = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$ y además para todo entero existe su inverso.
- $(\{[0], [1], [2], [3]\}, 0, op(a, b) = (a + b) \,\%\, 4)$ El conjunto de representantes de los posibles restos de dividir por 4, el 0 como neutro y la operación de sumar y luego calcular el resto de dividir por 4. Los corchetes hacen referencia a que el elemento del conjunto representado con 1 en realidad contiene todos los números cuyo resto de dividir por 4 es 1. Otros elementos de [1] son 5,9,-1,-5, etc.
- $(\{0, 1\}, 0, \texttt{XOR})$ Los booleanos con la operación de disyunción exclusiva y el 0 de elemento neutro.
- $(\{0, 1\}, 1, \texttt{AND})$ Los booleanos con la operación de conujnción y el 1 de elemento neutro.

1. Defina una estructura de datos para representar conjuntos. Para esto, tenga en cuenta las operaciones que se piden a continuación.

2. Implemente inserción sobre la estructura de datos propuesta.

3. Implemente una función pertenece que determine si un elemento pertenece a un conjunto.

4. Implemente una función es_grupo que dado un conjunto, un elemento de dicho conjunto que es candidato a elemento neutro y una operación de enteros determine si el conjunto dotado de la operación es un **grupo**.
Un conjunto G con un elemento distinguido e y una operación $*$, también notado $(G, e, *)$, es un grupo si

- e es elemento neutro del grupo. Es decir, $e * x = x * e = x$ para todo $x \in G$. Notar que no asumimos que la operación es conmutativa por tanto tenemos que probar $e * x = x$ y $x * e = x$ para todo $x \in G$.
- Para todo $x \in G$, existe un elemento inverso. Es decir, para todo $x \in X$ existe un elemento x^{-1} tal que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$. Nuevamente, no podemos asumir que la operación sea conmutativa.

Notar que vamos a suponer que la operación es cerrada, es decir, no vamos a verificar que para cada par de elementos el producto de los mismos pertenezca al conjunto. Y además, vamos a suponer que la operación es asociativa. Es decir, no vamos a considerar relevante el orden en el que se resuelve una sucesión de operaciones.
Importante: Asegúrese de incluir en su entregable el fragmento de código con el que testea las funcionalidades pedidas.