Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2022

Unidad 5: Integrales Impropias

Cuando en la Unidad 1 definimos la integrabilidad de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ consideramos antes que nada dos condiciones:

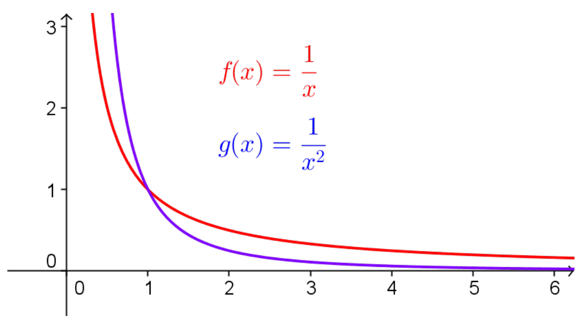
1. que el dominio de f sea un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$;

2. que f sea una función acotada en su dominio.

Veremos en esta unidad que ambas condiciones pueden ser debilitadas, dando lugar a un nuevo tipo de integrales, denominadas *integrales imprópias*.

Consideremos algunos ejemplos.

Sean $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$.



Para cada $x > 1$, las funciones f y g son continuas, y por lo tanto integrables, en el intervalo $[1, x]$. Además tenemos

$$\int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t}dt = \ln(x), \quad \int_1^x g(t)dt = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = -\left.\frac{1}{t}\right|_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Tanto f como g son funciones acotadas en $[1, \infty)$. Sin embargo, tenemos:

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty} \int_1^x g(t)dt = \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Por lo tanto tendrá sentido definir una "integral entre 1 e ∞" de g, pero esto no será posible para f.

Estos ejemplos motivan la siguiente definición

Definición 66. *Sea f una función integrable en $[a,x]$ para cada $x>a$. Si existe*

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt = I$$

denominamos a este límite integral impropia de f en $[a,\infty)$ *y la denotamos*

$$\int_a^\infty f(x)dx = I.$$

Se dice también en este caso que la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ *es* convergente. *En caso que el límite anterior sea $\pm\infty$ o no exista, suele decirse que la integral impropia* $\int_a^\infty f(x)dx$ *es* divergente.

Si f es integrable en $[x,a]$ para cada $x<a$ y existe el límite

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)dt = I'$$

denominamos a este límite integral impropia de f en $(-\infty,a]$ *y la denotamos*

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = I'.$$

Se dice también en este caso que la integral impropia $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *es* convergente. *En caso que el límite anterior sea $\pm\infty$ o no exista, suele decirse que la integral impropia* $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ *es* divergente.

Si f es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ y existen las integrales impropias de f en $(-\infty,0]$ y en $[0,\infty)$ denotamos por

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^\infty f(x)dx.$$

Volviendo a los ejemplos anteriores, tenemos que

$$\int_1^\infty g(x)dx = 1$$

pero la integral impropia de f en $[1,\infty)$ es divergente.

Observación 67. *Antes de continuar, hagamos una observación sobre las integrales impropias en $(-\infty,\infty)$. Consideremos la función $f(x)=x$. Entonces f es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a,b]$. Consideremos la integral de f en intervalos de la forma $[-x,x]$. Tenemos:*

$$\int_{-x}^x f(t)dt = 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\int_{-x}^x f(t)dt = 0.$$

Esto nos puede hacer pensar que existe la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty xdx = 0$. Sin embargo esto es ***falso****, pues un simple cálculo muestra que las integrales impropias de f en $[0,\infty)$ y en $(-\infty,0]$ son ambas divergentes.*

Observación 68. *Si existe* $\lim_{x\to\infty} f(x)$*, una condición necesaria para que exista la integral impropia de* f *en* $[a,\infty)$ *es*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dejamos la prueba de este resultado como ***ejercicio****.*

Ejemplo 69. Analicemos la existencia de las integrales impropias de la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^p}$$

con $p \in \mathbb{Q}^+$. Ya hemos visto que para $p = 1$ la integral impropia de f en $[1,\infty)$ es divergente.

Para $p \neq 1$, tenemos para cada $x > 1$,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right)$$

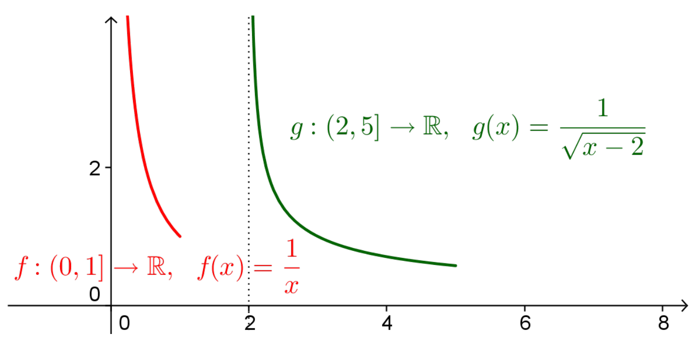
Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} \int_1^x f(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto existe la integral impropia de f en $[1,\infty)$ solo si $p > 1$. Si $p < 1$ la integral impropia es divergente.

Analicemos un segundo caso en el que será posible definir integrales impropias. La función f podría no ser acotada en un intervalo $(a,b]$ o $[a,b)$ por tener en a o en b respectivamente una asíntota vertical.

Consideremos por ejemplo las funciones $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g : (2,5] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$.



Es fácil ver que f tiene una asíntota vertical en $x = 0$ y g tiene una asíntota vertical en $x = 2$. Por lo tanto no tiene sentido definir las integrales usuales

$$\int_0^1 f(x)dx, \quad \int_2^5 g(x)dx$$

pues ni f ni g son acotadas en estos intervalos.

Sin embargo f es integrable en cualquier intervalo de la forma $[x,1]$ con $0<x<1$ y g es integrable en cualquier intervalo de la forma $[x,5]$ con $2<x<5$. En esos casos tenemos

$$\int_x^1 f(t)dt = -\ln(x), \qquad \int_x^5 g(t)dt = 2(\sqrt{3}-\sqrt{x-2})$$

Tendremos por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 f(t)dt = \infty, \qquad \lim_{x\to 2^+}\int_x^5 g(t)dt = 2\sqrt{3}.$$

Conluimos que no será posible definir una integral impropia de f entre 0 y 1 pero sí será posible dar una noción de integral de g entre 2 y 5.

Definición 70. *Sea f una función integrable en $[x,b]$ para cada $a<x<b$ tal que f tiene una asíntota vertical en $x=a$. Si existe*

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^a f(t)dt = I$$

denominamos a este límite integral impropia de f en $(a,b]$ *y la denotamos*

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

En caso que este límite sea $\pm\infty$, decimos que la integral impropia de f en $(a,b]$ es divergente.

Si f una función integrable en $[a,x]$ para cada $a<x<b$ y f tiene una asíntota vertical en $x=b$, si existe

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt = I'$$

denominamos a este límite integral impropia de f en $[a,b)$ *y la denotamos*

$$\int_a^b f(x)dx = I'.$$

En caso que este límite sea $\pm\infty$, decimos que la integral impropia de f en $[a,b)$ es divergente.

Si $a<c<b$, f tiene una asíntota vertical en $x=c$ y existen las integrales impropias de f en $[a,c)$ y en $(c,b]$, denominamos integral impropia de f en (a,b) *a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Ejemplo 71. En este ejemplo veremos lo importante de no aplicar a ciegas la regla de Barrow. Consideremos la función $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y supongamos que queremos calcular $\int_0^3 f(x)dx$. Una primitiva de f está dada por

$$\int \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|$$

lo que nos puede inducir a pensar que

$$\int_0^3 \frac{1}{x-1}dx = \ln|x-1|\,|_0^3 = \ln(2)-\ln(1) = \ln(2).$$

Sin embargo esto es un error. La función f tiene una asíntota vertical en $x = 1 \in [0, 3]$. Tenemos

$$\lim_{x \to 1^-} \int_1^x f(t)dt = \lim_{x \to 1^-} \ln(1 - x|) = -\infty$$

con lo cual la integral impropia de f en $[0, 1)$ es divergente y entonces no existe la integral impropia de f en $[0, 3]$ (no necesitamos verificar si existe la integral impropia de f en $(1, 3]$).