PRÁCTICA 1 - Funciones reales - Parte 3

1. Siempre que sea posible, en cada uno de los siguientes ítems encontrar la función compuesta de f con g y la función compuesta de g con f. Señalar cuál es el dominio y la imagen de cada función involucrada (vale decir, de f, de g y de las compuestas).

   (a) $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = x + 1$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   (c) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

   (d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ y $g(x) = x^2 - 1$.

   (e) $f(x) = g(x) = \dfrac{1}{x}$.

   (f) $f(x) = \sqrt{7 - 3x}$ y $g(x) = \sqrt{2x + 5}$.

2. Dadas las siguientes funciones:

$$f_1(x) = x^2 + 3 \text{ si } x \leq 0, \qquad f_2(x) = \frac{x-2}{x+2} \text{ si } x > -2, \qquad f_3(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } 4 < x. \end{cases}$$

   Para cada $i \in \{1, 2, 3\}$, se pide:

   (a) Demostrar que la función f_i es inyectiva.

   (b) Simbolizando con g_i la inversa de la función f_i, describir su dominio.

   (c) Hallar una expresión para obtener $g_i(y)$ para todo y perteneciente al dominio de la función g_i.

   (d) A partir de la gráfica de la función f_i, representar gráficamente la función g_i.

3. Determinar si las siguientes funciones son inversas una de la otra.

   (a) $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{2}$.

   (b) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ y $g(x) = x^2 + 4$, $x > 0$.

   (c) $f(x) = 1 - x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$.

   (d) $f(x) = x^{-2}$, $x > 0$ y $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, $x > 0$.

4. Encontrar la función inversa (si existe) y representar aproximadamente un gráfico de f y de f^{-1} en tal caso.

   (a) $f(x) = x^2$, $x \geq 0$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 2$

   (c) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

5. (a) Determinar la ley, dominio y recorrido de las funciones cuyas gráficas se obtienen de la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ mediante:

      I. traslación vertical hacia abajo en 2 unidades más una traslación horizontal a la derecha en 3 unidades.

      II. reflexión con respecto al eje de las ordenadas.

   III. reflexión con respecto al eje de las abscisas.
   IV. reflexión con respecto a la recta $y = 4$.
   V. reflexión con respecto a la recta $x = 2$.

(b) A partir de la gráfica de la función exponencial representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = -5^x + 1, \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = 3^{2x}, \quad f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = e^{-x} - 1$$

   I. En cada caso indicar si la función es o no biyectiva, y decir cómo deben ser el dominio y el codominio para que lo sea.
   II. Para cada una de las funciones biyectivas halladas, encontrar la función inversa.

6. (a) A partir de la gráfica de la función logarítmica representar gráficamente las siguientes funciones e indicar sus dominios e imágenes:

   I. $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f_1(x) = 3 + \log_2(3x)$
   II. $f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f_2(x) = -3\log_{10}(x)$
   III. $f_3 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f_3(x) = |\log_4(x)|$
   IV. $f_4 : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}, f_4(x) = \log_2|x|$
   V. $f_5 : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}, f_5(x) = \ln(3 - x)$
   VI. $f_6 : (4, +\infty) \to \mathbb{R}, f_6(x) = 2+3\ln(x-4)$

   (b) En cada caso indicar si la función es o no biyectiva, y diga cómo deben ser el dominio y el codominio para que lo sea.
   (c) Para cada una de las funciones biyectivas halladas, encuentre la función inversa.

7. Hallar dominio e imagen de cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente. Estudiar crecimiento y decrecimiento.

   (a) $f_1(x) = \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$.
   (b) $f_2(x) = \arctan\left|\frac{x-1}{3}\right|$..

8. Demostrar las siguientes "identidades hiperbólicas".

   (a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$
   (b) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$
   (c) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y)$

   Con lo demostrado anteriormente, deducir identidades hiperbólicas para $\operatorname{senh}(2x)$ y $\cosh(2x)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119