Cardinalidad

Pablo Verdes (2020)

LCC

Dictado 2025

¿Por qué estudiamos cardinalidad?

- Recordemos nuestro objetivo: **modelar el proceso de cálculo**.
- ¿Cuál es el tipo de cálculo más elemental? ¿Sumar? No, es contar.

Contar: finito vs. infinito

- Supongamos que se nos pide ordenar conjuntos según su tamaño.
- Si los conjuntos son finitos, es fácil: contamos sus elementos y ordenamos los conjuntos de acuerdo a los números obtenidos.
- ¿Pero qué hacemos si algunos conjuntos son infinitos? ¿Qué sentido tiene 'más grande' o 'más pequeño' si no les podemos asignar un número a su tamaño?
- Para resolver este problema se introduce el concepto de **cardinalidad**, que generaliza la idea de 'tamaño' al caso de conjuntos infinitos.
- Entenderemos mejor el proceso de contar conjuntos finitos, y también veremos que existen diferentes 'tipos' de conjuntos infinitos.

Conjuntos contables

- Consideremos un conjunto finito, por ej. las letras del alfabeto:

$$S = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$$

- ¿Qué significa **contar** los elementos de este conjunto?

- En esencia, **contar es numerar**: asignar a cada elemento del conjunto un único número natural, comenzando en 1 y de manera ascendente:

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & \ldots & x & y & z \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 26 & 27 & 28 \end{array}$$

- Obs. que también se puede pensar como la creación de una **biyección** entre el conjunto S y el subconjunto de los naturales $\{1, 2, 3, \ldots, 28\}$.

(Repaso) Funciones inyectivas

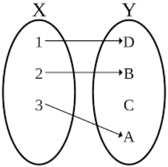
- **Definición:** $f : X \to Y$ es **inyectiva** sii

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente,

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

- **Gráficamente:**



- **Prop.:** Sean X, Y conjuntos finitos; n_X, n_Y su cantidad de elementos.

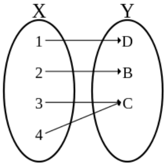
Si existe $f : X \to Y$ inyectiva, entonces $n_X \leq n_Y$.

(Repaso) Funciones sobreyectivas

- **Definición:** $f : X \to Y$ es **sobreyectiva** sii

$$\forall y \in Y \;\; \exists x \in X \mid f(x) = y$$

- **Gráficamente:**



- **Prop.:** Sean X, Y conjuntos finitos; n_X, n_Y su cantidad de elementos.

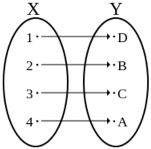
  Si existe $f : X \to Y$ sobreyectiva, entonces $n_X \geq n_Y$.

(Repaso) Funciones biyectivas

- **Definición:**

$$f : X \to Y \quad \text{es } \textbf{biyectiva}$$

- **Gráficamente:**



- **Prop.:** Sean X, Y conjuntos finitos; n_X, n_Y su cantidad de elementos.

  Si existe $f : X \to Y$ biyectiva, entonces $n_X = n_Y$.

- Por analogía con el caso de conjuntos finitos, se usan los conceptos de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para generalizar la idea de comparación de tamaños al caso de conjuntos infinitos.

Definiciones

- Dos conjuntos A y B tienen la **misma cardinalidad** (son **equipotentes**) si existe una biyección de A en B.
  Notación: $\#A = \#B, \;\; card(A) = card(B), \;\; A \sim B$
- La **cardinalidad** de un conjunto A es **anterior** a la de un conjunto B si existe una función inyectiva f de A en B.
  Notación: $\#A \leq \#B, A \preceq B$
- Si además ninguna de las inyecciones $f : A \to B$ es sobreyectiva, entonces $\#A < \#B, A \prec B$ (estrictamente anterior).
- Un conjunto es **finito** cuando es: 1) vacío, o bien 2) equipotente a $\{1, 2, \ldots, n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En caso contrario, se dice **infinito**.
- Un conjunto A es **contable** o **numerable** si existe $f : A \to \mathbb{N}$ inyectiva. Si existe $f : A \to \mathbb{N}$ biyectiva se dice que A es **infinito numerable**. En caso contrario, se dice que A es **no numerable**.
- Cardinalidad de los números naturales: $\#\mathbb{N} = \aleph_0$ (aleph cero).

Unión numerable de conjuntos numerables

- Un conjunto F se dice una **familia de conjuntos** si sus elementos son, a su vez, conjuntos.
- F es una familia **indexada de conjunto índice** I (no vacío) si existe una función con dominio I y recorrido F.
- Llamando S_α con $\alpha \in I$ a los elementos de la familia F, podremos entonces escribir $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\}$.
- Consideremos ahora el caso particular en que los elementos de F, que hemos rebautizado S_α, son conjuntos numerables (finitos o infinitos).
- Supongamos además que el conjunto índice I es numerable (finito o infinito).
- En dicho caso, la unión de los elementos de la familia, $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$, será también numerable.

Teorema 1

La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración:

- Nos pondremos en el peor caso posible: supondremos que tanto los conjuntos S_α como el conjunto índice I son infinitos.
- Dado que el conjunto índice I es infinito numerable, sin pérdida de generalidad podemos considerar de aquí en más que $I = \mathbb{N}$.
- Podemos entonces escribir $F = \{S_\alpha \mid \alpha \in I\} = \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.
- Debemos mostrar que la unión $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$ es equipotente a $\mathbb{N}$.
- Dado que S_i es infinito numerable, podemos escribir

$$S_i = \{a_{ik} \mid k \in \mathbb{N}\} = \{a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}, \ldots\}$$

- Observemos que podemos organizar a los elementos de la unión de acuerdo a la siguiente tabla:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

- Podemos entonces contarlos de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & \rightarrow & a_{12} & & a_{13} & \rightarrow & a_{14} & \dots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
a_{31} & & a_{32} & & & & & \\
& \swarrow & & & & & & \\
a_{41} & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Corolarios

- **Corolario 1.1:** $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

  D/ Escribimos a $\mathbb{Z}$ como u.n.c.n.:

  $$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1\} \cup \{0\} \cup \{1, 2, 3, \dots\}$$

- **Corolario 1.2:** $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

  D/ Escribimos a $\mathbb{Q}$ como u.n.c.n.:

  $$\mathbb{Q} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \qquad A_k = \{\dots, -\tfrac{2}{k}, -\tfrac{1}{k}, \tfrac{0}{k}, \tfrac{1}{k}, \tfrac{2}{k}, \dots\}$$

- **Corolario 1.3:** $\mathbb{N}^d \sim \mathbb{N}$

  D/ Por inducción en d.

  Caso $d = 1$: vale trivialmente.

  Ahora probemos que si $\mathbb{N}^d$ es numerable, $\mathbb{N}^{d+1}$ también.

Corolarios (cont)

Para mostrar que $\mathbb{N}^{d+1}$ es numerable, escribimos $\mathbb{N}^{d+1} = \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}$.

Como $\mathbb{N}^d$ es numerable, podemos denotar a sus elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Disponemos $\mathbb{N}^{d+1}$ de acuerdo a la siguiente tabla y usamos el mismo argumento que en el Teorema 1:

$$
\begin{array}{cccccccc}
(a_1,1) & \rightarrow & (a_1,2) & & (a_1,3) & \rightarrow & (a_1,4) & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
(a_2,1) & & (a_2,2) & & (a_2,3) & & & \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & & \\
(a_3,1) & & (a_3,2) & & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & \\
(a_4,1) & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Conjuntos no numerables

- Por lo visto hasta aquí, pareciera que todos los conjuntos son numerables.

- Esto no es cierto, como veremos en el siguiente:

Teorema 2

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es no numerable.

Demostración:

- Alcanza con probar que el intervalo $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es no numerable. (¿Por qué?)
- Representamos a sus elementos por su expansión decimal infinita, por ejemplo $0.229384112598\ldots$

  (Para evitar ambigüedades, no usaremos expansiones con un número infinito de nueves.)
- Por el absurdo, supongamos que $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ es numerable.
- Habrá entonces en $(0, 1)$ un primer elemento, segundo, tercero, etc.

- Podemos entonces listarlos del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} 0.\underline{a_{11}}a_{12}a_{13}a_{14}\dots \\ 0.a_{21}\underline{a_{22}}a_{23}a_{24}\dots \\ 0.a_{31}a_{32}\underline{a_{33}}a_{34}\dots \\ 0.a_{41}a_{42}a_{43}\underline{a_{44}}\dots \\ \vdots \end{array}$$

- Consideremos ahora el número $b = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \dots$
donde cada b_k puede ser cualquier dígito **excepto** a_{kk}, es decir, los subrayados en la diagonal.

- Es claro que $b \in (0,1)$ pero no figura en el listado, ya que difiere de cada número de la lista en por lo menos un dígito.

- Esto constituye una contradicción, luego el intervalo $(0,1) \subset \mathbb{R}$ es no numerable. $\square$

Conjuntos no numerables

- El intervalo $(0, 1)$, y por lo tanto $\mathbb{R}$, es no numerable.
- De hecho, tienen la misma cardinalidad (queda como ejercicio).
  Notación: $\#\mathbb{R} = c$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$ numerable, $\mathbb{R}$ no numerable $\Rightarrow$ $\mathbb{I}$ no numerable
- Es claro que $\aleph_0 < c$.
- ¿Existen conjuntos con una cardinalidad posterior a c?
- Podríamos intentar con productos cartesianos de $\mathbb{R}$;
  sin embargo, se puede demostrar que $\forall d \in \mathbb{N} \quad \#(\mathbb{R}^d) = c$.
- La respuesta a la pregunta anterior es **sí**: existen conjuntos con una cardinalidad posterior a c.
- Veremos ahora un método que, dado un conjunto S (finito o infinito), nos permite construir otro con una cardinalidad estrictamente posterior.

El conjunto de partes de un conjunto

- **Definición:** Dado un conjunto S, el **conjunto de partes** de S, denotado $\mathcal{P}(S)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de S.
- Ejemplo:

$$S = \{a, b, c\}$$

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- En el caso finito, es claro que $\mathcal{P}(S)$ tiene estrictamente más elementos que S.

  (De hecho, si S tiene n elementos, $\mathcal{P}(S)$ tendrá 2^n elementos —ejercicio).

- Ahora extenderemos dicho resultado al caso de conjuntos infinitos. Más precisamente, demostraremos que:

$$card(S) < card(\mathcal{P}(S))$$

Teorema 3

$$\text{Para todo conjunto } S, \;\; card(S) < card(\mathcal{P}(S)).$$

Demostración:

- $f(x) = \{x\}$ es una inyección de S en $\mathcal{P}(S)$. Por lo tanto
$$card(S) \leq card(\mathcal{P}(S))$$
- Ahora veamos que no existe función de S en $\mathcal{P}(S)$ sobreyectiva.
- Por el absurdo: sea $f : S \to \mathcal{P}(S)$ sobreyectiva.
- Todo elemento del codominio tendrá pre-imagen:
$$\forall A \in \mathcal{P}(S) \;\; \exists a \in S \mid f(a) = A$$
$$\forall A \subset S \;\; \exists a \in S \mid f(a) = A$$
- Hay dos posibilidades: (1) $a \in A$ (2) $a \notin A$
- Definamos un nuevo subconjunto de S:
$$B = \{a \in S \mid a \notin f(a)\}$$
(elementos de S que no pertenecen a su imagen)

- $B \in \mathcal{P}(S)$, $\quad f$ sobreyectiva $\quad \Rightarrow \ \exists b \in S \mid f(b) = B$
- Pregunta: ¿$b \in B$?
- Supongamos que $b \in B$. Entonces, por definición de B, b no pertenece a su imagen: $b \notin f(b) = B$. Absurdo.
- Supongamos que $b \notin B$. Entonces, por definición de B, b pertenece a su imagen: $b \in f(b) = B$. Absurdo.
- Por lo tanto $\nexists f : S \to \mathcal{P}(S)$ sobreyectiva. $\square$

- **Consecuencia:** dado un conjunto S, podemos construir una sucesión de conjuntos de cardinalidad 'creciente':

  $$S,\ \mathcal{P}(S),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(S)),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(S))), \ldots$$

  En particular:

  $$\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \ldots$$

- ¿Será $\mathbb{N}$ el conjunto infinito más 'pequeño'? Respuesta: sí.

Teorema 4: (El conjunto infinito más pequeño es $\mathbb{N}$)

Para todo conjunto infinito A, $\aleph_0 \leq card(A)$.

Demostración:

- Sea A un conjunto infinito.
- A infinito $\Rightarrow$ $A \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ $\exists x_1 \in A$
- A infinito $\Rightarrow$ $A \neq \{x_1\}$ $\Rightarrow$ $\exists x_2 \in A \mid x_2 \neq x_1$
- A infinito $\Rightarrow$ $A \neq \{x_1, x_2\}$ $\Rightarrow$ $\exists x_3 \in A \mid x_3 \neq x_1, x_2$
- A infinito $\Rightarrow$ $A \neq \{x_1, x_2, x_3\}$ $\Rightarrow$ $\exists x_4 \in A \mid x_4 \neq x_1, x_2, x_3$

  $\ldots$
- Así, se puede construir una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$ de elementos de A tales que $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.
- Definiendo $f : \mathbb{N} \to A$ tal que $f(i) = x_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, tenemos que f es inyectiva. Luego $\aleph_0 \leq card(A)$. $\square$

Cierre

- ¿Qué hace un programa? Desde el punto de vista de la máquina, sus entradas y salidas son cadenas de 0s y 1s.
- Podemos decir entonces que un programa es una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
- Recíprocamente: dada una $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ arbitraria, ¿podemos escribir un programa que la calcule?
- La teoría de cardinalidad permite responder esta pregunta (ver último ejercicio de la práctica):

$$card(\{p \mid p \; programa\}) < card(\{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\})$$

- Por lo tanto, existen infinitos posibles cálculos para los cuales no se puede escribir un programa.
- ¿Cuáles son? ¿Se pueden resolver cambiando el lenguaje?
- Estas son algunas de las preguntas que consideraremos en la materia.