Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 4: Métodos de integración.

---

1. Encuentre f sabiendo que:

$$a)\ f'(x) = 6x^2 + 2x \text{ y } f(1) = 0, \qquad b)\ f'(x) = 3e^x - 2 \text{ y } f(0) = 4,$$

$$c)\ f''(x) = \operatorname{sen} x,\ f'(\pi) = 1 \text{ y } f(0) = -2, \quad d)\ f''(x) = e^{2x} - x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 0.$$

2. Demuestre que

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b f(a+b-x)\ dx.$$

3. Resuelva las siguientes integrales

$$a)\ \int \frac{t^2+2}{t^2+1}\ dt, \qquad b)\ \int \sqrt{y\sqrt{y}}\ dy, \qquad c)\ \int (e^z - e^{-z})^2\ dz,$$

$$d)\ \int (5^x - x^5)\ dx, \qquad e)\ \int (\sqrt{x}-3)(x^{\frac{1}{3}} + \sqrt{x})\ dx, \qquad f)\ \int (\frac{5}{3t^2+3} - \frac{2}{\sqrt{1-t^2}})\ dt.$$

4. Halle las primitivas de las siguientes funciones:

$$a)\ f_1(x) = x(x^2-1)^{10}, \qquad b)\ f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}, \qquad c)\ f_3(x) = \frac{(ln\ x)^2}{x},$$

$$d)\ f_4(x) = \sec(ax)\tan(ax), \qquad e)\ f_5(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \qquad f)\ f_6(x) = \sqrt{e^x - 1},$$

$$g)\ f_7(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}, \qquad h)\ f_8(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}, \qquad i)\ f_9(x) = \frac{\arctan^3 x}{1+x^2},$$

$$j)\ f_{10}(x) = -\frac{14x^3}{4\sqrt{7x^2+2}}, \qquad k)\ f_{11}(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad l)\ f_{12}(x) = x^2\ e^{-2x}$$

$$m)\ f_{13}(x) = x^2\ \operatorname{sen}(2x), \qquad n)\ f_{14}(x) = \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad o)\ f_{15}(x) = x\ \operatorname{sen} x\ \cos x$$

p) $f_{16}(x) = e^{-x}\cos(3x)$, *q)* $f_{17}(x) = x^2\ \ln x$ *r)* $f_{18}(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

s) $f_{19}(x) = \arctan x$, *t)* $f_{20}(x) = x\ \arctan x$, *u)* $f_{21}(x) = \sec^2(3x)$,

v) $f_{22}(x) = \sec x\ \tan x\ \sqrt{1+\sec x}$, *w)* $f_{23}(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$, *x)* $f_{24}(x) = \operatorname{sen}^3 x - \dfrac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Aplicando el método de partes, deduzca las siguientes fórmulas de recurrencia:

   a) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + k.$

   b) $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\dfrac{\operatorname{sen}^{n-1} x\ \cos x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$ si $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

   c) $\int cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + k.$

   d) $\int cos^n x\,dx = \dfrac{\cos^{n-1} x\ \operatorname{sen} x}{n} + \dfrac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ si $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

6. Halle las primitivas de cada una de las siguientes fracciones simples:

   a) $l(x) = \dfrac{1}{(9x^2+1)^2}$, *b)* $m(x) = \dfrac{4x-3}{3x^2+3x+1}$, *c)* $n(x) = \dfrac{3x+1}{(9x^2+6x+2)^2}$

   d) $o(x) = \dfrac{x^3+x^2+x+2}{x^4-1}$, *e)* $m(x) = \dfrac{x^4+3x^2+x+1}{x^3+x}$, *f)* $q(x) = \dfrac{5x^4+6x^2+1}{x(x^2+1)^2}$.

7. Halle las primitivas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$, *b)* $g(x) = \dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x+2}$, *c)* $h(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}$,

   d) $l(x) = \dfrac{x^2}{(x+4)^{\frac{3}{2}}}$, *e)* $m(x) = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{x+1}$ *f)* $n(x) = \dfrac{2x+3\sqrt{x+1}}{2x-3\sqrt{x+1}}$.

8. Halle las primitivas de las siguientes funciones racionales de $\sin(x)$ y $\cos(x)$:

   a) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, *b)* $g(x) = \dfrac{1}{4\sin(x)+3\cos(x)}$,

   c) $l(x) = \dfrac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}$, *d)* $m(x) = \dfrac{(\cos(x))^3}{1+(\cos(x))^2}$.

9. Halle el valor de las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{1} 2x\, sen(1-x^2)dx$.

b) $\int_0^{\pi} \tan^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(7-5r)^2}} dr$.

d) $\int_{-\pi/3}^{0} \sec(x)\tan(x)dx$.

e) $\int_0^{\pi/2} \frac{3sen(x)\cos(x)}{\sqrt{1+3sen^2(x)}} dx$.

f) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan(\theta)}{\sqrt{2\sec(\theta)}} d\theta$.

10. Demuestre que el área de un círculo de radio r es πr^2.

11. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}\, dx = \pi \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0^-} \int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2+x^2}\, dx = -\pi \ .$$