8) Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto

tal que: • Si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(n,n) \in S$ (S-I)

• Si $(n,m) \in S$ entonces $(n,m+1) \in S$ (S-II)

c) Definimos inductivamente $Q \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:

- Si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(0, n) \in Q$ (QI)
- Si $(n, m) \in Q$ entonces $(n+1, m+1) \in Q$ (QII)

Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas

- $S \subseteq Q$ • $Q \subseteq S$ • $Q = S$

- $S \subseteq Q$, lo probaremos haciendo inducción sobre S

Sea $P(n, m) : (n, m) \in Q$

- Caso base: Debemos probar $P(n, n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}_0$, lo haremos por inducción.
  - Caso base $n = 0$; $P(0, 0) : (0, 0) \in Q$
  - Inducción: Supongamos que $P(b, b)$ es cierto para $b \in \mathbb{N}_0$, probemos que $P(b+1, b+1)$ se cumple

NOTA

FECHA

$$\underbrace{(b,b) \in Q}_{HI} \overset{(Q\,II)}{\Rightarrow} (b+1, b+1) \in Q$$

Luego el caso base se cumple $\forall m \in \mathbb{N}_0$

- Inducción: Supongamos $P(a,b) : (a,b) \in Q$ es cierto p.a $(a,b) \in S$, probemos que $P(a, b+1) : (a, b+1) \in Q$ es cierto

$$\underbrace{(a-a, b+1-a) = (0, b+1-a) \in Q}_{(*)} \Rightarrow (a, b+1) \in Q$$

(aplicando a veces (Q II))

$(*)$ Por HI tenemos $(a,b) \in S$, por lo probado en ~~en~~ el ítem (b) $a \leq b$, además por HI $(a,b) \in Q$ luego $a-a=0$ y $a \leq b \Rightarrow 0 \leq b-a \Rightarrow 0 \leq b-a+1$ entonces por (Q I) tenemos $(0, b-a+1) \in Q$

$\therefore$ Luego $P(n,m)$ se cumple $\forall (n,m) \in S$, entonces se cumple

$\forall x [x \in S \Rightarrow x \in Q] \Leftrightarrow S \subseteq Q$ ■

• $Q \subseteq S$, lo probaremos haciendo inducción sobre Q.

Primero enunciemos el principio de inducción primitivo para Q

Sea P una propiedad tal que verifica:

• $P(0,n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}_0$

• $P(n,m) \Rightarrow P(n+1, m+1)$

Luego $P(n,m)$ vale $\forall (n,m) \in Q$.

Ahora probamos $Q \subseteq S$. Probaremos esto viendo que se cumple

$P(n,m) : (n,m) \in S$

• Caso base: Debemos probar que $P(0,n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}_0$, lo

haremos por inducción.

• Caso base: $n=0$: $P(0,0) : (0,0) \in S$

$0 \in \mathbb{N}_0 \underset{(S\text{-}I)}{\Rightarrow} (0,0) \in S$ ∴ El caso base se cumple para $n=0$

NOTA

Escaneado con CamScanner

• Inducción: Suponemos que $P(0,h)$ es cierto p.a $h \in \mathbb{N}_0$, probemos que $P(0,h+1)$ se cumple

$$\underbrace{(0,h) \in S}_{HI} \underset{(S-II)}{\Rightarrow} (0,h+1) \in S$$

$\therefore$ $P(0,n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}_0$, luego el caso base se verifica.

• inducción: Suponemos $P(a,b): (a,b) \in S$ p.a $(a,b) \in Q$, probemos que se cumple $P(a+1,b+1): (a+1,b+1) \in S$

Por HI como $(a,b) \in S$, luego $a \leq b$, separamos la prueba en dos casos

• $a = b \in \mathbb{N}_0 \underset{(S-I)}{\Rightarrow} (a,b) \in S \underset{\substack{a=b \\ y \\ (S-I)}}{\Rightarrow} (a+1,b+1) \in S$

• $a < b \in \mathbb{N}_0$ =

$$\underbrace{(a,b) \in S}_{HI} \underset{a<b \Rightarrow a+1 \leq b}{\Rightarrow} (a+1,b) \in S \underset{(S-II)}{\Rightarrow} (a+1,b+1) \in S$$

$\therefore$ $P(n,m)$ se cumple para todo $(n,m) \in Q$, entonces se cumple

$\forall x [x \in Q \Rightarrow x \in S] \Leftrightarrow Q \subseteq S$ ∎

$\therefore$ Como probamos que $S \subseteq Q$ y $Q \subseteq S$, esto implica que $S = Q$