ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 2. Teorema Fundamental del Cálculo, Funciones Logaritmo y Exponencial

1. Funciones Integrales

El resultado principal de esta unidad, denominado Teorema Fundamental del Cálculo, establece la conexión de las dos grandes ramas hasta ahora estudiadas en los cursos de Análisis, en principio, desde el punto de vista geométrico, difícil de vincular: el Cálculo Diferencial (originado del problema de la búsqueda de rectas tangentes), y el Cálculo Integral (motivado por la formalización del concepto de áreas de recintos). I. Barrow y J. Gregory en el siglo 17 descubren por separado el vínculo entre estos dos problemas como problemas inversos, mientras que I. Newton y G. Leibniz sistematizan el uso de éste para el cálculo de áreas, evitando los engorrosos límites de sumas aproximantes. Este resultado a menudo se enuncia separado en dos resultados, relativos a funciones dependientes del extremo superior de una integral definida.

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable en $[a,b]$, entonces, dado $x\in[a,b]$ se tiene por la [Unidad 1, Proposición 5] que f es integrable en el intervalo $[a,x]$, y queda bien definida la función

$$F:[a,b]\to\mathbb{R}\,,\qquad x\mapsto F(x)\;=\;\int_a^x f\,, \tag{1}$$

dependiente del extremo superior de la integral definida de f en el intervalo $[a,x]$. Por supuesto, esta función integral F depende de la función f y del punto a, pero fijados éstos, F depende exclusivamente de x. En la Figura 1 se representa al valor de $F(x)$, como el área sombreada bajo la gráfica de la función no negativa f, entre los valores a y x.

Proposición 1. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, la función F definida en (1) es continua en $[a,b]$.*

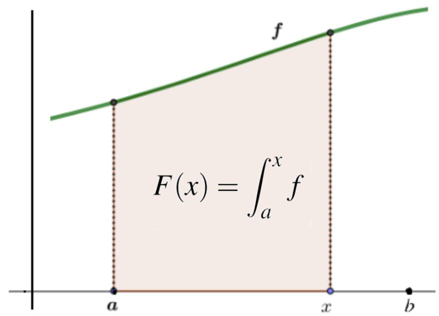


Figura 1: Interpretación de una función integral

Demostración. Para M una cota de $|f|$ (que existe como valor finito dado que f es integrable y luego acotada), $c \in [a,b]$ y $h \in \mathbb{R}$ (positivo o no), vale, por el [Unidad 1, Ejercicio 9] que

$$F(c+h) - F(c) \ = \ \int_a^{c+h} f - \int_a^c f \ = \ \int_c^{c+h} f \ ,$$

de donde, dado $\varepsilon > 0$, por el [Unidad 1, Ejercicio 7], vale, para $|h| < \frac{\varepsilon}{M}$,

$$|F(c+h) - F(c)| \ = \ \left| \int_c^{c+h} f \right| \ \leqq \ M\,|h| \ < \ \varepsilon \ ,$$

condición de continuidad de F en el punto c. *Q.E.D.*

Observación 1. *Más aún, la demostración hecha permite afirmar que la función F es uniformente continua en $[a,b]$, en el sentido del apéndice de la unidad anterior.*

2. El Teorema Fundamental del Cálculo

Visto el resultado anterior, dado que la integrabilidad de f permite asegurar la continuidad de F, es natural preguntar cómo resulta F bajo la condición f continua. De eso trata el Primer Teorema Fundamental del Cálculo presentado a continuación.

Proposición 2. *Para f integrable en $[a,b]$ y F definida como en (1), si f es continua en $c \in (a,b)$, resulta F derivable en c, siendo $F'(c) = f(c)$.*

Demostración.. Se planteará la derivabilidad de F en el punto c, a través del cálculo de los límites laterales del cociente incremental correspondiente. Para ello, notar primero que para $h > 0$ y $h < 0$, quedan respectivamente

$$F(c+h) - F(c) \ = \ \int_a^{c+h} f - \int_a^c f \ = \ \int_c^{c+h} f \quad \text{y} \quad F(c) - F(c+h) \ = \ \int_a^c f - \int_a^{c+h} f \ = \ \int_{c+h}^c f \ .$$

Comenzando con $h > 0$, si se definen $m_h = \inf\limits_{[c,c+h]} f$ y $M_h = \sup\limits_{[c,c+h]} f$, resultan para $x \in [c,c+h]$ las desigualdades $m_h \leqq f(x) \leqq M_h$, y luego desigualdades izquierdas de la implicancia como consecuencia de la [Unidad 1, Proposición 7], y las del lado derecho consecuencia de dividir por $h > 0$,

$$m_h\, h \leqq \int_c^{c+h} f \leqq M_h\, h \quad \Rightarrow \quad m_h \leqq \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \leqq M_h \; ,$$

y de modo similar para $h < 0$, si $m_h = \inf\limits_{[c+h,c]} f$ y $M_h = \sup\limits_{[c+h,c]} f$, siendo $c-(c+h) = -h > 0$,

$$m_h(-h) \leqq \int_{c+h}^{c} f \leqq M_h(-h) \quad \Rightarrow \quad m_h \leqq \frac{F(c)-F(c+h)}{-h} \leqq M_h \; .$$

Observando que la continuidad de f en c implica los valores $\lim\limits_{h\to 0} m_h = \lim\limits_{h\to 0} M_h = f(c)$, por el Principio de Intercalación del Límite, independiente del signo de h, se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(c+h)-F(c)}{h} = f(c) \; ,$$

como se quería demostrar *Q.E.D.*

Observación 2. *Para $c = a$ o b, el símbolo $F'(c)$ refiere a una derivada lateral, quedando como ejercicio mostrar el resultado anterior en esos dos casos extremos particulares.*

Se llama **función primitiva o antiderivada** de una función f, a una función g, derivable, tal que $g' = f$. Es inmediato notar que si f es continua en todos los puntos de $[a,b]$, entonces F es derivable en todo el intervalo y allí es $F' = f$. Luego, la Proposición 2 presenta para una función continua en un intervalo, una primitiva, y de hecho, cambiando el extremo inferior de integración, a una familia de ellas, notando que, para $\alpha \in [a,b]$, siendo $\int_a^\alpha f$ un número real,

$$G(x) = \int_\alpha^x f = \int_a^x f - \int_a^\alpha f \quad \Rightarrow \quad G'(x) = F'(x) \; .$$

Por otro lado, por el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, se sabe que si en un intervalo dos funciones tienen la misma derivada, entonces ellas difieren en una constante, de modo que si g es una primitiva de f, será de la forma $F + c$, concluyendo que para una función continua, todas las primitivas se pueden expresar como una integral dependiendo del extremo superior, más una constante.

Observación 3. *Por la propiedad de la media de Darboux vista en el primer curso de Análisis, se sabe que una función con discontinuidades de salto, no puede ser la derivada de una función, pero en general, no es un problema sencillo decidir cuándo una función dada es o no la derivada de alguna otra. La Proposición 2 asegura que si f es continua, entonces sí, f es la derivada de la función integral asociada F definida por (1).*

En la bibliografía se refiere como Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tanto al Corolario 1 como a la Proposición 3. Notar que la tesis en los dos es la misma, pero en el Corolario 1 la hipótesis sobre f es más restrictiva. Además, a los dos también se los conoce como Regla de Barrow.

Corolario 1. *Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f \;=\; g(b) - g(a)\ .$$

<u>**Demostración**</u>. Para f continua en el intervalo $[a,b]$, la Proposición 2 establece que la función integral F definida por (1) es derivable en todo el intervalo, siendo allí $F' = f = g'$, permitiendo concluir la existencia de una constante c tal que $F(x) = g(x) + c$, para todo $x \in [a,b]$.

Tal número c puede calcularse fácilmente haciendo $F(a) = 0 = g(a) + c$, de modo que $c = -g(a)$, y así para todo x vale $F(x) = g(x) - g(a)$, y el particular para $x = b$,

$$\int_a^b f \;=\; F(b) \;=\; g(b) - g(a)\ .$$

Q.E.D.

Proposición 3. *Si f integrable en $[a,b]$, y $f = g'$ para alguna función g, entonces*

$$\int_a^b f \;=\; g(b) - g(a)\ .$$

<u>**Demostración**</u>. Si $P = \{t_0, ..., t_n\}$ es una partición del intervalo $[a,b]$, la derivabilidad de g y el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial, implican, para todo k, la existencia de un punto $x_k \in [t_{k-1}, t_k]$, para el cual

$$g(t_k) - g(t_{k-1}) \;=\; g'(x_k)(t_k - t_{k-1}) \;=\; f(x_k)(t_k - t_{k-1})\ ,$$

y si por otro lado, se notan como siempre $m_k = \inf\limits_{[t_{k-1},t_k]} f$ y $M_k = \sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} f$, ocurren, siendo los $\Delta t_k \geqq 0$,

$$m_k \Delta t_k \;\leqq\; f(x_k)\Delta t_k \;\leqq\; M_k \Delta t_k \;\;\Rightarrow\;\; m_k \Delta t_k \;\leqq\; g(t_k) - g(t_{k-1}) \;\leqq M_k \Delta t_k\ .$$

Sumando todas las desigualdades (usando la propiedad telescópica en la suma del medio), quedan

$$L(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k \;\leqq\; g(b) - g(a) \;\leqq\; \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k \;=\; U(f,P)\ ,$$

de donde se deduce, dada la arbitrariedad de P y la integrabilidad de f, la tesis

$$\int_a^b f \;=\; g(b) - g(a)\ .$$

Q.E.D.

Se conviene la notación para la tesis del Segunto Teorema Fundamental,

$$\int_a^b f \;=\; g(b) - g(a) \;=\; g\,\Big|_a^b\ .$$

Ejemplo 1. *Hasta ahora, para $n = 0, 1, 2, 3$, se conocen desde la Unidad 1, las fórmulas*

$$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \;.$$

La Regla de Barrow permite obtener el mismo resultado sin analizar límites de sumas aproximantes, para más casos de funciones potencia. En efecto, en primer lugar para $n \in \mathbb{N}$, la función de ley $f(x) = x^n$ es continua en todo intervalo de la forma $[a,b]$ contenido en $\mathbb{R}$, y luego integrable, siendo la función de ley $g(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ una primitiva, de modo que

$$\int_a^b x^n \,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b f \;=\; g \,\Big|_a^b \;=\; \frac{x^{n+1}}{n+1}\,\Big|_a^b \;=\; \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1} \;.$$

El caso de potencias de la forma x^{-n} con $n \in \mathbb{N}$ es parecido, con el cuidado de que estas funciones no están definidas y no son acotadas en intervalos que contengan a 0, y luego en ésos, no serán integrables. Si eso no sucede, observando que en intervalos $[a,b]$ que no contengan al origen, también es primitiva de $f(x) = x^{-n}$ la función $g(x) = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}$ (salvo para el caso $n = 1$), vuelve a valer

$$\int_a^b x^{-n} \mathrm{d}x \;=\; \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,\Big|_a^b \;=\; \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1} \;.$$

Hasta este punto del curso, no se conoce una función primitiva de la función potencia en el caso $n = -1$, asunto que será estudiado en la siguiente Sección junto con el caso general x^{α}, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Antes de pasar a eso, se presentan ejemplos de derivación de composiciones que involucran funciones integrales, recordando la fórmula general de la Regla de la Cadena, $(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x)$.

Ejemplo 2. *La función de ley*

$$f(x) \;=\; \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} \,\mathrm{d}t$$

está bien definida en todo $\mathbb{R}$, independiente de la elección de a, y es resultado de la composición $f = F \circ g$, de las funciones de leyes, con dominio en $\mathbb{R}$ ambas,

$$F(x) \;=\; \int_a^{x} \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2 t} \,\mathrm{d}t \qquad y \qquad g(x) \;=\; x^3 \;.$$

Como en todo $\mathbb{R}$ la función g es derivable, al igual que en todo punto $g(x)$ la función F lo es (ya que el integrando es continuo al ser un cociente de funciones continuas, donde el denominador nunca se anula), la Regla de la Cadena implica, siendo $F'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x}$ por la Proposición 2,

$$f'(x) \;=\; (F \circ g)'(x) \;=\; F'(g(x))\; g'(x) \;=\; \frac{1}{1 + \operatorname{sen}^2(x^3)}\; 3\,x^2 \;.$$

Si con las mismas funciones F y g, se forma la composición $h = g \circ F$, se puede proceder de la misma manera, y arribar a

$$h'(x) \;=\; (g \circ F)'(x) \;=\; g'(F(x))\; F'(x) \;=\; 3\left(\int_a^x \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} \;.$$

3. Función Logaritmo Natural

Siendo la función de ley $f(t) = \frac{1}{t}$ integrable en cada intervalo de la forma $[1,x]$, con $x \geqq 1$ y $[x,1]$, con $0 < x < 1$, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 1. *Se denonmina función* ***logaritmo natural****, a la función* $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *de ley*

$$\ln x \;=\; \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t \;.$$

Observación 4. *Cabe aclarar que muchos textos utilizan directamente la notación* log *para el logaritmo natural, e incluyen explícitamente la base en cualquier otro caso, inclusive para el logaritmo en base 10.*

En lo que sigue, se demostrarán propiedades para la función logaritmo (y más adelante para la exponencial que también será definida) que quizá resulten ya conocidas y utilizadas anteriormente, en base a la definición que se acaba de dar.

Proposición 4. *Si* $x, y \in \mathbb{R}^+$*, entonces vale la identidad* $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Demostración. Para $y > 0$ (fijo) y $x \in \mathbb{R}^+$ (variable), la función de ley $f(x) = \ln(xy)$ es derivable, con

$$f'(x) \;=\; \ln'(xy)\, y \;=\; \frac{1}{xy}\, y \;=\; \frac{1}{x}\;,$$

resultando que las funciones f y ln tienen la misma derivada. Por lo tanto, debe existir una constante c tal que para todo $x \in \mathbb{R}^+$ quede $f(x) = \ln(x) + c$. Para determinar el valor de la constante, se observa que eligiendo $x = 1$, resulta $\ln y = f(1) = \ln 1 + c = c$, y en conclusión, para todo x, la identidad propuesta

$$\ln(xy) \;=\; f(x) \;=\; \ln x + f(1) \;=\; \ln x + \ln y\;.$$

Q.E.D.

Corolario 2. *Si* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\ln(x^n) \;=\; n\, \ln x \quad\; y \quad\; \ln\left(\frac{x}{y}\right) \;=\; \ln(x) - \ln(y)\;.$$

Demostración.. La primera parte sigue aplicando el Principio de Inducción Matemática en base al resultado anterior, siendo $x^{n+1} = x^n x$ para todo todo $n \in \mathbb{N}$, y para la segunda, basta observar que como $y > 0$,

$$x \;=\; \frac{x}{y}\, y \quad\Rightarrow\quad \ln x \;=\; \ln\left(\frac{x}{y}\, y\right) \;=\; \ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln y \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) \;=\; \ln x - \ln y\;.$$

Q.E.D.

Un primer análisis de la función logaritmo natural permite concluir las siguientes:

Propiedades

1. Siendo la función de ley $f(t) = \frac{1}{t}$ continua en $\mathbb{R}^+$, la función ln es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$, por las Proposiciones 1 y 2, y vale
$$\ln' x \;=\; \left(\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right)' \;=\; \frac{1}{x}\;.$$

2. En particular, vale $\ln 1 = 0$, siendo el valor de una integral definida de iguales extremos.

3. La función de ley $f(t) = \frac{1}{t}$ es positiva en $\mathbb{R}^+$, y luego tiene integral definida entre a y b, positiva si $a < b$ y negativa si $b < a$, resultando así $\ln x > 0$ si $x > 1$, y $\ln x < 0$, para $0 < x < 1$.

4. La derivada primera de la función ln es la función de ley $f(t) = \frac{1}{t}$ que es positiva en $\mathbb{R}^+$, y ésta a su vez es allí derivable, con derivada de ley $f'(t) = \frac{-1}{t^2}$, siempre negativa, implicando que en su dominio, la función ln es creciente y cóncava. Además, como la derivada nunca se anula, no posee puntos críticos, y luego no tiene mínimos ni máximos relativos.

5. Dado $M \in \mathbb{N}$, se tiene que $2M \in \mathbb{N}$, y de la monotonía, el Corolario 2 y la desigualdad $\ln 2 > \frac{1}{2}$, propuesta en el Ejercicio 9, se tienen
$$x > 2^{2M} \quad\Rightarrow\quad \ln x \;>\; \ln\left(2^{2M}\right) \;=\; 2M\ln 2 \;>\; \frac{2M}{2} \;=\; M\;,$$
y
$$0 < x < 2^{-2M} \quad\Rightarrow\quad \ln x \;<\; \ln\left(2^{-2M}\right) \;= -2M\ln 2 \;<\; \frac{-2M}{2} \;= -M\;,$$
implicando los comportamientos $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Estos límites, junto a la continuidad de la función ln, permiten afirmar también que el recorrido de la función logaritmo es $\mathbb{R}$ (Teorema de los Valores Intermedios para Funciones Continuas).

Lo anterior permite esbozar una gráfica de la función logaritmo natural en la parte derecha de la Figura 2, en donde el único valor de referencia concreto es el valor $\ln 1 = 0$. Como dato adicional, dados los valores $\ln 1 = 0$ y $\ln' 1 = 1$, se puede concluir que la ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto $(1,0)$, resulta $y = x - 1$.

Siendo $\mathbb{R}$ el conjunto imagen de la función logaritmo, se asegura la existencia de un número para el cual el logaritmo natural resulte igual a 1, o gráficamente, tal que el área debajo de la gráfica de la función de ley $f(x) = \frac{1}{x}$ entre 1 y ese número, sea igual a 1. A ese número se lo llama e, en referencia al matemático L. Euler, y es un número irracional, hecho que se mostrará en la Unidad 5. En el Ejercicio 9 se demuestra este número se encuentra comprendido entre 2 y 3, y de nuevo en la Unidad 5, a este número lo se podrá aproximar con tantas cifras decimales exactas como se desee.

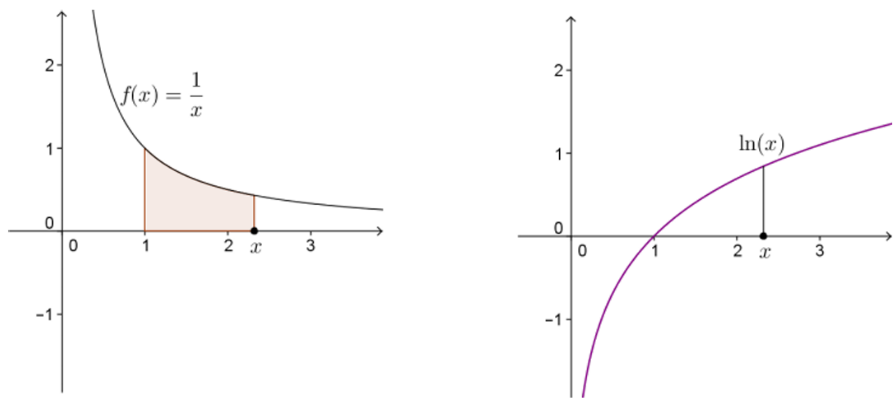


Figura 2: Función logaritmo natural

4. Función Exponencial

Visto que la función logaritmo natural definida en la sección anterior, resultó estrictamente creciente, y por lo tanto inyectiva, con $\mathbb{R}^+$ como dominio y $\mathbb{R}$ como conjunto imagen, tiene sentido la siguiente definición.

Definición 2. *Se llama **función exponencial** a la función* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$*, inversa de la función logaritmo natural. Esto es, en su dominio,*

$$\exp x \;=\; y \quad \Leftrightarrow \quad \ln y \;=\; x$$

Siendo la función exponencial la inversa de la función logaritmo natural, queda ésta creciente y convexa en su dominio, con límites $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$, y valor de referencia $\exp 0 = 1$, quedando la gráfica, simétrica respecto de la recta $y = x$ de la gráfica de la función logaritmo natural representada en la Figura 3 .

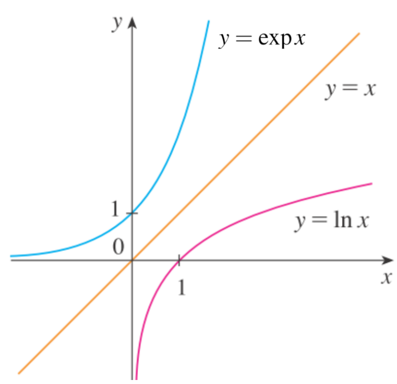


Figura 3: Funciones logaritmo y exponencial

Además, por la fórmula de derivación de la función inversa, se llega a la siguiente forma para la derivada.

Proposición 5. *Para cualquier número real x, la función* exp *es derivable en x, y vale* $\exp' x \;=\; \exp x$.

Demostración. Como la función exponencial es por definición la inversa del logaritmo, se tiene

$$\exp' x \;=\; (\ln^{-1})'(x) \;=\; \frac{1}{\ln'(\ln^{-1} x)} \;=\; \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1} x}} = \ln^{-1} x = \exp x \,.$$

Q.E.D.

Proposición 6. *Para* $x, y \in \mathbb{R}$*, vale la identidad* $\exp(x+y) = \exp x \, \exp y$*.*

Demostración. Para $x, y \in \mathbb{R}$, notando $\bar{x} = \exp x$ e $\bar{y} = \exp y$, queda, usando la Proposición 4,

$$x+y \;=\; \ln\bar{x} + \ln\bar{y} \;=\; \ln(\bar{x}\,\bar{y}) \;\Rightarrow\; \exp(x+y) \;=\; \bar{x}\,\bar{y} \;=\; \exp x \, \exp y \,.$$

Q.E.D.

5. Funciones Logartimos y Exponenciales Generales

Definición 3. *Para* $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ *se denomina función* ***logaritmo en base a****, a la función* $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *de ley*

$$\log_a x \;=\; \frac{\ln x}{\ln a} \,.$$

Como para $a \neq 1$ es $\ln a \neq 0$, la función logaritmo en base a es inversible, siendo la inversa una función con dominio en $\mathbb{R}$ y recorrido en $\mathbb{R}^+$, llamada ***función exponencial en base a***, y notada como a^x, de manera que

$$y \;=\; a^x \quad\Leftrightarrow\quad x \;=\; \log_a y \;=\; \frac{\ln y}{\ln a} \quad\Leftrightarrow\quad y \;=\; \exp(x\,\ln a) \,.$$

Aparte, y de manera relacionada, pero sin resultar ser inversa de un logaritmo, para $a = 1$ se define la función exponencial, como $1^x = \exp(x \ln 1) = \exp(0) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dado que para $0 < a < 1$ se tiene $\ln a < 0$ y para $a > 1$ queda $\ln a > 0$, se obtienen las gráficas de diferentes logaritmos en la parte izquierda de la Figura 4 y las correspondientes inversas en la parte derecha, junto con el caso particular para $a = 1$ para la exponencial.

Observar que la definición de exponencial en distintas bases es una generalización de las fórmulas conocidas para las potencias naturales, en sentido que, justificando por inducción,

1. $a^1 = \exp(1 \ln a) = \exp(\ln a) = a$
2. $a^2 = \exp(2 \ln a) = \exp(\ln a + \ln a) = \exp(\ln a)\exp(\ln a) = a \cdot a$ y en general

$$a^{n+1} \;=\; \exp((n+1)\ln a) \;=\; \exp(n \ln a + \ln a) \;=\; \exp(n \ln a)\exp(\ln a) \;=\; (\underbrace{a ... a}_{n \text{ veces}}) \cdot a \,.$$

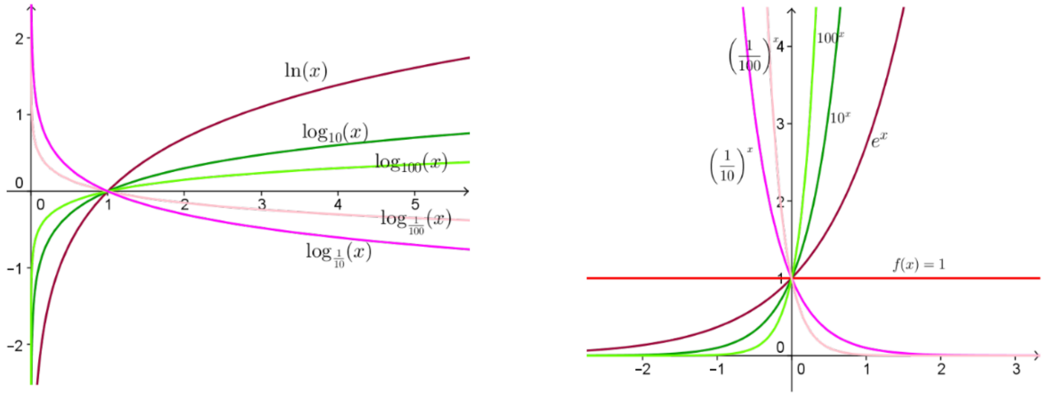


Figura 4: Funciones logaritmo y exponenciales generales

Observación 5. *Para $a \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$, vale $\ln(a^x) = \ln(\exp(x \ln a)) = x \ln a$, igualdad que generaliza la primera parte del Corolario 2. Además, eligiendo al número e como base, quedan (donde tengan sentido),*

$$\log_e x \;=\; \frac{\ln x}{\ln e} \;=\; \ln x \qquad \text{y} \qquad e^x \;=\; \exp(x \ln e) \;=\; \exp x \,,$$

justificando esto último en adelante utilizar de manera indistinta ambas notaciones para referir a la misma función.

Se deja para como Ejercicio 15, la prueba del siguiente resultado, que generaliza las propiedades de logaritmos y exponenciales de base e, donde se asume $a > 0$ en ambas partes y $a \neq 1$ en la referida a logaritmos.

Proposición 7. *Para $x, y \in \mathbb{R}^+$ en el apartado 1. y $x, y \in \mathbb{R}$ en el apartado 2., valen*

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$, *y también* $\log_a(x^y) = y \log_a x$.
2. $a^{x+y} = a^x\, a^y$, $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$, $a^1 = a$ *y* $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. *Si además es $b > 0$, $(ab)^x = a^x b^x$.*

Respecto a la derivación, ambas funciones son derivables en sus dominios, valiendo

$$(\log_a)'(x) \;=\; \frac{1}{x \ln a} \qquad \text{y} \qquad (a^x)' \;=\; \exp(x \ln a)\, \ln a \;=\; a^x\, \ln a \,.$$

Por otro lado, si se considera la funcion $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, de ley $f(x) = x^\alpha$, donde la variable aparece en la base y el exponente α es fijo y arbitrario, se observa que

$$f(x) \;=\; \exp(\alpha \ln x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \;=\; \exp(\alpha \ln x)\; \alpha\; \ln' x \;=\; x^\alpha \alpha \frac{1}{x} \;=\; \alpha x^{\alpha - 1} \,,$$

como es conocido en particular cuando $\alpha \in \mathbb{Q}$, permitiendo luego, concluir la fórmula de integración general, en intervalos donde valga la integrabilidad de f, para $\alpha \neq -1$,

$$\int_a^b x^\alpha \;=\; \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Bigg|_a^b \;=\; \frac{b^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \,.$$

6. Ejercicios

1. Para la ley $f(x) = 2x^2$ se definen las funciones integrales $F(x) = \int_0^x f$, $G(x) = \int_{-2}^x f$ y $H(x) = \int_1^x f$. Analizar las relaciones existentes entre las funciones F, G y H, y trazar sus gráficas.

2. Se pide, para las funciones f y F definidas en el intervalo $[-3,3]$ por las leyes

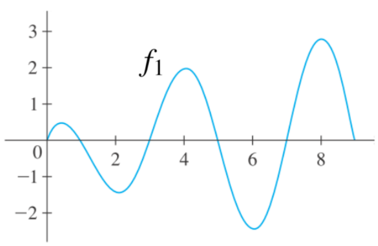
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad -3 \leqq x \leqq -2 \\ x+2 & \text{si} \quad -2 < x \leqq -1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 < x \leqq 1 \\ 2-x^2 & \text{si} \quad 1 < x \leqq 2 \\ 1 & \text{si} \quad 2 < x \leqq 3 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad F(x) = \int_{-3}^x f\,,$$

   a) justificar la integrabilidad de f y graficarla,

   b) decidir dónde es continua y dónde es derivable la función F, y

   c) graficar las funciones F y F'.

3. Para $i = 1,2$, las funciones f_i graficadas en la Figura 5, se pide, para las funciones de ley $F_i(x) = \int_0^x f_i$,



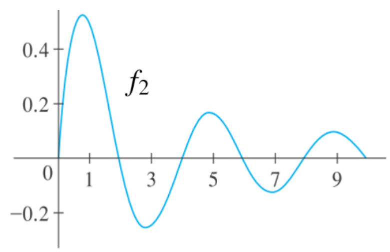


Figura 5: Funciones para el Ejercicio 3

   a) hallar intervalos de decrecimiento y crecimiento, y de concavidad y convexidad,

   b) analizar la existencia de extremos locales y puntos de inflexión,

   c) con la información obtenida, realizar una gráfica aproximada.

4. *a*) Si $f(1) = 12$, f' es integrable y $\int_1^4 f' = 17$, calcular $f(4)$.

   b) Si $F(x) = \int_1^x f$, donde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{1+u^4}{u}\,\mathrm{d}u$, calcular $F''(2)$.

   c) Encontrar una función f y un número a, tal que para todo $x > 0$, sea

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \;=\; 2\sqrt{x}\,.$$

5. Dada la función de ley $S(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$, analizar la existencia de extremos locales y determinar los intervalos de convexidad y concavidad de la función.

6. *a*) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y g,h son derivables con imagen contenida en (a,b), hallar

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\ \mathrm{d}t\right)' \qquad \text{y} \qquad \left(\int_{a}^{h(x)} g(x)f(t)\ \mathrm{d}t\right)'.$$

b) Sin intentar el cálculo de las integrales, hallar la derivada de las siguientes funciones.

$$i)\ f_1(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \cos t\ \mathrm{d}t \qquad ii)\ f_2(x) = \int_{8\cos x}^{\operatorname{sen}^2 x} 3t^2\ \mathrm{d}t \qquad iii)\ f_3(x) = \int_{x^4}^{2} (x-2)^2\sqrt{t}\ \mathrm{d}t\ .$$

7. *a*) Si $\alpha\in\mathbb{R}^+$, mostrar, sin usar logaritmos, que la función de ley $F(x)=\int_x^{\alpha x}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t$ es constante en $\mathbb{R}^+$.

b) Probar la identidad $\arccos x+\operatorname{arcsen} x=\frac{\pi}{2}$ válida en $[-1,1]$, y luego para todo $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arcsen}(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\ .$$

c) Demostrar que si f es una función continua en $[a.b]$, entonces para todo $x\in[a,b]$ vale

$$\int_a^x f(u)(x-u)\ \mathrm{d}u = \int_a^x\int_a^u f(t)\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u\ .$$

8. Hallar el dominio natural de la función de ley $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ y analizar su paridad.

9. Comparando áreas, mostrar que $\frac{1}{2}<\ln 2<1<\ln 3$, y como consecuencia de las dos últimas desigualdades se tendrá que $2<e<3$. Sugerencia para mostrar que $1<\ln 3$: calcular el área entre el eje x y la recta tangente a la gráfica de la función de ley $f(x)=\frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x_0=2$, para $1\leqq x\leqq 3$.

10. A partir de las gráficas de las funciones logaritmo natural y exponencial, representar las funciones de leyes indicadas, expresando en cada caso su dominio y recorrido.

$$a)\ f_1(x) = \ln(-x) \quad b)\ f_2(x) = \ln|x| \quad c)\ f_3(x) = |\ln x| \quad d)\ f_4(x) = 1+\ln(x-1)$$

$$e)\ f_5(x) = \exp(-x) \quad f)\ f_6(x) = \exp|x| \quad g)\ f_7(x) = \exp x - 1\ .$$

11. *a*) Calcular las derivadas de las siguientes funciones, suponiendo que las mismas están definidas para los valores en los cuales su expresión tiene sentido.

$$i)\ f_1(x) = \exp(3x^2+5) \qquad ii)\ f_2(x) = \exp\frac{1}{x} \qquad iii)\ f_3(x) = \exp\left(\cos^2 x\right)$$

$$iv)\ f_4(x) = 3^{2^x} \qquad v)\ f_5(x) = 2^{-\operatorname{sen}^2 x} \qquad vi)\ f_6(x) = \log_{\frac{1}{3}} x\ .$$

b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función de ley $f(x)$ en el punto de abscisa x_0, si *i*) $f(x)=x^2\exp(-x)$ y $x_0=1$ y *ii*) $f(x)=\ln(\ln x)$ y $x_0=e$.

12. *a*) Se sabe que las funciones de ley $f(x) = c\exp x$ (con c constante) verifican que $f'(x) = f(x)$, para todo x. Mostrar que fuera de esa familia de funciones, no hay otras que cumplen esa propiedad, esto es, que si f es una función derivable tal que para todo x es $f(x) = f'(x)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$, constante, tal que $f(x) = c\exp x$. Sugerencia: derivar el cociente $\frac{f(x)}{\exp x}$.

   b) Hallar, si existen, funciones continuas f y g, para las cuales sean

$$f(x) \;=\; \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{y} \qquad g^2(x) \;=\; \int_0^x \frac{g(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

13. Las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico, se definen en $\mathbb{R}$ por las leyes

$$\cosh x \;=\; \frac{\exp x + \exp(-x)}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh} x \;=\; \frac{\exp x - \exp(-x)}{2}\ .$$

   a) Mostrar las siguientes identidades, y compararlas con las respectivas trigonométricas conocidas.

$$i)\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x \;=\; 1 \qquad ii)\ \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$

$$iii)\ \operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y\ .$$

   b) Calcular las derivadas de ambas.

   c) Realizar el estudio necesario y arribar a las gráficas de ambas funciones.

14. Coloquialmente suele decirse que las funciones exponenciales crecen más rápido que las potencias, y que éstas lo hacen más rápido que los logaritmos. Mostrar estas afirmaciones, entendidas como los siguientes límites, para valores $a, b > 0$,

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} \;=\; 0 \qquad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\exp(ax)} \;=\; 0 \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} \;=\; \infty \qquad d)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(ax)}{x^b} \;=\; \infty\ .$$

Sugerencia para *a*): observando que si $c > 0$ y $t \geqq 1$ vale $t^{-1} \leqq t^{-1+c}$, concluir que para $x \geqq 1$,

$$0 \;< \ln x \;\leqq\; \frac{x^c - 1}{c} \;<\; \frac{x^c}{c} \quad \text{y en consecuencia} \quad 0 \;<\; (\ln x)^b \;<\; \frac{x^{bc}}{c^b} \quad \text{y} \quad 0 \;<\; \frac{(\ln x)^b}{x^a} \;<\; \frac{x^{bc-a}}{c^b}\ .$$

Luego, eligiendo un valor adecuado de $c > 0$ y utilizando el Principio de Intercalación, arribar al objetivo.

15. Demostrar la Proposición 7.