



FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
LCC - LF - LM - PM - PF

Álgebra y Geometría Analítica II 2023

PRÁCTICA 4: Los espacios vectoriales \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n .

1. Pruebe que $\mathbb{F}_n[x]$ es un espacio vectorial.
2. Pruebe que $\mathbb{F}^{m \times n}$ es un espacio vectorial.
3. Consideremos en $V = \mathbb{F}^3$ las operaciones definidas según:
 - Producto por escalar: $\cdot : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, x_2, x_3)$,
 - Suma usual: $+: \mathbb{F}^3 \times \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{F}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.Indique si $(V, +, \cdot)$ es un espacio vectorial, justificando adecuadamente.
4. Consideremos en $V = \mathbb{R}^3$ las operaciones definidas según:
 - Producto por escalar usual: $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,
 - Suma: $+: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)$, o sea, estamos considerando una operación que le llamamos suma, y que es la conocida como producto vectorial. Probar que $(V, +, \cdot)$ NO es un espacio vectorial. Chequear los 10 axiomas y marcar cuáles no son válidos.
5. Sea $\beta = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\}$ un subconjunto de vectores de \mathbb{F}^n . Probar que:
 - a) Si $s > n$ entonces β debe ser LD.
 - b) Si $s < n$ entonces β no puede generar \mathbb{F}^n .
 - c) Si $s = n$ y β es LI, entonces β genera \mathbb{F}^n y resulta ser base de \mathbb{F}^n .
 - d) Si $s = n$ y β genera \mathbb{F}^n , entonces β es LI y resulta ser base de \mathbb{F}^n .
6. Cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de $u = (1, -1, 3)$ y $v = (2, 4, 0)$?
 - a) $(3, 3, 3)$
 - b) $(4, 2, 6)$
 - c) $(1, 5, 6)$
 - d) $(0, 0, 0)$.
7. En cada caso exprese los polinomios como combinaciones lineales de
$$p_1 = 2 + x + 4x^4, \quad p_2 = 1 - x + 3x^2 \quad y \quad p_3 = 3 + 2x + 5x^2$$
 - a) $5 + 9x + 5x^2$
 - b) $2 + 6x^2$
 - c) 0
 - d) $2 + 2x + 3x^2$
8. Determinar si los vectores dados generan \mathbb{R}^3
 - a) $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (2, 2, 0) v_3 = (3, 0, 0)$.
 - b) $v_1 = (2, -1, 3), v_2 = (4, 1, 2) v_3 = (8, -1, 8)$.
9. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes:
 - a) en \mathbb{R}^3 :
 - i) $(2, -1, 4), (3, 6, 2), (2, 10, -4)$.

- ii) $(1, 3, 3), (0, 1, 4), (5, 16, 3), (7, 2, -1)$.

b) en \mathbb{R}^4 :

- i) $(1, 2, 1, -2), (0, -2, -2, 0), (0, 2, 3, 1), (3, 0, -3, 6)$.

- ii) $(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (-5, 0, 5, 5)$.

10. Para qué valores de λ los vectores que siguen forman un conjunto linealmente dependiente en \mathbb{R}^3 ?

$$v_1 = \left(\lambda, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad v_2 = \left(-\frac{1}{2}, \lambda, -\frac{1}{2}\right), \quad v_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \lambda\right).$$

11. Si $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores, demuestre que todo subconjunto no vacío de vectores de S es linealmente independiente.

12. Si $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial \mathbb{F}^n , demuestre que $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n}, \overline{v_{n+1}}\}$ es linealmente dependiente, en donde $\overline{v_{n+1}} \in \mathbb{F}^n$.

13. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para:

a) en \mathbb{R}^3 :

- i) $(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)$.

- ii) $(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1), (7, 2, -1)$.

b) en \mathbb{R}^4 :

- i) $(1, 2, 1, -2), (0, -2, -2, 0), (0, 2, 3, 1), (3, 0, -3, 6)$.

- ii) $(4, 4, 0, 0), (0, 0, 6, 6), (-5, 0, 5, 5)$.

14. Sea $\{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ una base para un espacio vectorial \mathbb{F}^n . Demuestre que $\{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}\}$ también es una base, en donde $\overline{u_1} = \overline{v_1}$, $\overline{u_2} = \overline{v_1} + \overline{v_2}$ y $\overline{u_3} = \overline{v_1} + \overline{v_2} + \overline{v_3}$.

15. Estudiar para qué valores de a y b los vectores $(3, 0, a, 1)$, $(1, 1, 0, b)$ y $(2, 5, b, 4)$ de \mathbb{R}^4 son linealmente dependientes.

16. Sea \mathbb{F}^4 con base $B = \{\overline{u_1}, \overline{u_2}, \overline{u_3}, \overline{u_4}\}$. Se definen los vectores

$$\begin{aligned}\overline{v_1} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\ \overline{v_2} &= 2\overline{u_1} + \overline{u_3} + 2\overline{u_4}, \\ \overline{v_3} &= \overline{u_1} + \overline{u_2} - \overline{u_3}, \\ \overline{v_4} &= \overline{u_1} + 2\overline{u_3} + 3\overline{u_4}\end{aligned}$$

Probar que $C = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}, \overline{v_4}\}$ es una base de \mathbb{F}^4 .

17. De manera similar al ejercicio 1) se puede demostrar que el conjunto de los polinomios $\mathbb{F}[x]$ es un espacio vectorial. Demostrar que $\mathbb{F}[x]$ no puede tener dimensión finita.

18. Sean $\overline{v_1} = (1, 1, -2)$, $\overline{v_2} = (2, 5, -1)$, $\overline{v_3} = (0, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

- i) Pruebe que $S = \{\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3}\}$ es linealmente dependiente.

- ii) Escriba cada uno de los vectores como combinación lineal de los otros dos.

19. Consideremos \mathbb{F}^n .

- i) Bajo qué condiciones un conjunto de un solo vector $S = \{\overline{v}\}$ es linealmente independiente?

- ii) Pruebe que si el conjunto de dos vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}\}$ es linealmente dependiente, entonces o bien $\overline{u} = \lambda \overline{v}$ o bien $\overline{u} = \lambda \overline{v}$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$.

- iii) Pruebe que si el conjunto de tres vectores $S = \{\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}\}$ es linealmente dependiente, entonces alguno de ellos puede escribirse como combinación lineal de los otros dos.

- iv) [*] Pruebe la siguiente afirmación: Un conjunto $S = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ con $k \geq 2$ es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de los vectores \bar{v}_j puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores de S .
20. Sean $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\bar{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\bar{v}_3 = (-2, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Pruebe que
- $S = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .
 - La ecuación $\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 + c_3\bar{v}_3$ tiene una única solución.
21. [*] En base al ejercicio anterior, enuncie un teorema acerca de la unicidad de escritura respecto a una base dada en \mathbb{F}^n . Se anima a demostrarlo?
22. [*] Sea $AX = b$ un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Sean $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ las columnas de A . Si b es una combinación lineal de estos n vectores columna, explique porqué esto implica que el sistema lineal es consistente. Ilustre su respuesta con ejemplos apropiados. Qué puede concluir acerca del sistema lineal si b no es una combinación lineal de las columnas de A ?

Los ejercicios marcados con [] requieren de madurez de los conceptos. No se desespere por resolverlos, si no salen, ya saldrán.*