Álgebra Lineal 2024-2do (LM - PM - LCC)

Práctica 4: Espacios vectoriales con producto interno. Ortogonalidad.

1. Verificar en cada caso que el producto definido es un producto interno en V.

   a) Sea $V = \mathbb{R}^n$, un vector $v \in V$ lo pensamos como $v = (v_1, \cdots, v_n)^t$. Definiendo
   $$\langle u, v\rangle = u^t v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$$
   Resulta $\langle u, v\rangle$ así definido un producto interno en V.

   b) Sea $V = \mathbb{C}^n$. Definiendo
   $$\langle u, v\rangle = u^t \bar{v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i.$$
   donde $\bar{v}$ es el vector de $\mathbb{C}^n$ cuyas componentes son los conjugados de las componentes del vector v. Estos productos internos definidos en $\mathbb{K}^n$ se conoce como ***producto interno canónico***.

   c) En $V = \mathbb{R}^2$ podemos considerar para $u = (u_1, u_2)$ y $v = (v_1, v_2)$
   $$\langle u, v\rangle = u_1 v_1 - u_2 v_1 - u_1 v_2 + 4u_2 v_2.$$

   d) Sean $t_0, \cdots, t_n$ escalares distintos. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{K}$ de grado menor o igual a n. Para $p, q \in V$ definimos
   $$\langle p, q\rangle = p(t_0)\overline{q(t_0)} + \cdots + p(t_n)\overline{q(t_n)}.$$

   e) Sea V el espacio vectorial de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$. Para $f, g \in V$ sea
   $$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$
   esto define un producto interno.

   f) Verificar que $f \times g = \int_1^e \log(x) f(x) g(x) dx$ es un producto interno en $C([1, e])$, espacio de las funciones continuas a valores reales en el intervalo $[1, e]$.

2. Sean que para $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$,
   $$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

   a) Comprobar que es un producto interno (conocido como producto de Frobenius).

   b) Dada una matriz $B = (b_i j)$ su matriz adjunta está dada por $B^* = \bar{B}^t$, es decir $b^*_{ij} = \overline{b_{ji}}$
   $$\langle A, B\rangle = tr(AB^*) = tr(B^* A).$$

   c) Probar que $\langle AB, C\rangle = \langle B, A^* C\rangle$.

3. Determinar en cada caso si el producto definido es un producto interno en $\mathbb{R}^n$. En caso de no serlo determinar cual es el axioma que no se verifica.

   a) $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i\, |v_i|$.

   b) $\langle u, v\rangle = \left|\sum_{i=1}^{n} u_i\, v_i\right|$.

c) $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} v_i$.

d) $\langle u, v\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\, v_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Dados $u, v \in V$ espacio vectorial con producto interno, probar que $u = v$ si y sólo si $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $w \in V$.

5. Dar un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de dos vectores linealmente independientes que no sean ortogonales y un ejemplo de dos vectores que sean ortogonales y que no sean linealmente independientes.

6. Demostrar las siguientes proposiciones.
i) Un vector $v \in W^{\perp}$ si y solo si v es ortogonal a todo vector en un conjunto que genere a W.
ii) $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.

7. Dados los vectores
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
determinar que par de vectores son ortogonales.

8. Dada la matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$
calcular
   a) un vector no nulo x ortogonal al espacio fila de A
   b) un vector no nulo y ortogonal al espacio columna de A
   c) un vector no nulo z ortogonal al espacio nulo de A

9. Sea $W \underset{s.e.}{\subset} V$, V *e.v.* con producto interno. Probar que $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

10. Sea $\mathbb{R}^{n\times n}$ con el producto interno definido en el ejercicio 2.
   a) Hallar una base ortogonal para $\mathbb{R}^{n\times n}$ para dicho producto interno.
   b) Hallar $W^{\perp}$, si $W = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.
   c) Ídem b) para $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$.

11. Sea $C([1, e])$, con el producto interno definido en el ejercicio 1f.
   a) Calcular $\|f\|$ para $f(x) = \sqrt{2}$.
   b) Hallar un polinomio de grado uno que sea ortogonal a $g(x) = 1$.

12. Sea $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Describir el conjunto H de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ que son ortogonales a v.

13. Sea $W = \langle\{v_1, \cdots, v_p\}\rangle$. Mostrar que si x es ortogonal a todo v_j, para $1 \leqslant j \leqslant p$, luego x es ortogonal a todo vector en W.

14. Mostrar que si $x \in W \cap W^{\perp}$, entonces $x = 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

15. En cada caso, mostrar que $\{u_1, u_2\}$ o $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente, y luego expresar a x como combinación lineal de la base correspondiente.

 a) $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \end{pmatrix}$.

 b) $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

16. Suponer que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por n vectores ortogonales distintos de cero. Explicar por qué $W = \mathbb{R}^n$.

17. Una matriz cuadrada A $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es una matriz ortogonal si $A^{-1} = A^t$. Demostrar.

 a) Sean U, V matrices ortogonales. Luego UV es una matriz ortogonal.

 b) Tanto el conjunto de los vectores columna de una matriz ortogonal, como el conjunto de vectores filas son conjuntos ortonormales.

 c) El determinante de una matriz ortogonal es 1 o -1.

 d) Sea U una matriz ortogonal entonces para $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale: *i*) $\|Ux\| = \|x\|$, *ii*) $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ (con el producto interno canónico).

18. Sea $\{u_1, u_2\}$ un conjunto ortogonal de vectores distintos de cero, y c_1, c_2 escalares no nulos. Mostrar que $\{c_1u_1, c_2u_2\}$ también es ortogonal.

19. Verificar la ley del paralelogramo para los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

20. Dado $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, sea $L = \langle\{u\}\rangle$. Para $y \in \mathbb{R}^n$, *la reflexión de y en L* se define como

$$refl_L y = 2proy_L y - y.$$

 a) Graficar en $\mathbb{R}^2$ para observar que la $refl_L y$ es la suma de $\hat{y} = proy_L y$ con $\hat{y} - y$.

 b) Mostrar que la aplicación que $y \mapsto refl_L y$ es una transformación lineal.

21. Sean

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

 Escribir x como suma de dos vectores, uno en $\langle\{u_1, u_2, u_3\}\rangle$ y el otro en $\langle\{u_4\}\rangle$.

22. Sea W el subespacio generado por $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

 a) Si $y = (3, 1, 5, 1)^t$, escribirlo como la suma de un vector en W y uno en $W^\perp$.

 b) Si $y = (3, -1, 1, 13)^t$, encontrar el punto más cercano a y en W.

 c) Si $y = (2, 4, 0, 1)^t$, encontrar la mejor aproximación a y mediante vectores de la forma $c_1v_1 + c_2v_2$. Hallar la distancia de y a W.

23. Sean $y = (4, 8, 1)^t$, $u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)^t$, $u_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)^t$ y $W = \langle\{u_1, u_2\}\rangle$.

 a) Sea $U = [u_1u_2]$. Calcular U^tU y UU^t.

 b) Calcular $proy_W y$ y $(UU^t)y$.

24. Sea A una matriz $m \times n$. Demostrar que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede escribirse en la forma $x = p + u$, donde p está en $Fil(A)$ y $u \in nul(A)$. Mostrar que si la ecuación $Ax = b$ es consistente, entonces hay una única p en $Fil(A)$ tal que $Ap = b$.

25. Sea W un subespacio de $\mathbb{R}^n$ con una base ortogonal $\{w_1, \cdots, w_p\}$ y sea $\{v_1, \cdots, v_q\}$ una base ortogonal de $W^\perp$.

    a) Explicar por qué $\{w_1, \cdots, w_p, v_1, \cdots, v_q\}$ es un conjunto ortogonal.

    b) Explicar por qué el conjunto definido en el ítem anterior genera $\mathbb{R}^n$.

    c) Demostrar que $\dim W + \dim W^\perp = n$.

26. Siendo $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $v = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$, utilizar el proceso de Gram-Schimdt para producir una base ortogonal de $\langle\{u, v\}\rangle$.

27. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Encontrar una base ortogonal para el espacio columna de A.