Proceso Bernoulli

Considere un experimento que consiste:

✓una sucesión infinita de ensayos realizados en idénticas condiciones.

✓los ensayos son independientes entre sí y

✓sólo pueden tener dos resultados posibles:

"éxito" (E) o "fracaso"(F)

con: $P(E) = p$, $P(F) = 1 - p$,

constante a lo largo de todo el proceso.

Este experimento puede modelarse como la sucesión de infinitos ensayos de Bernoulli.

El espacio muestral común de este experimento es

$$\Omega = \{w : w = (w_1, w_2, ..., w_n, ...),\ w_i = E \text{ o bien } w_i = F, i \in \mathrm{N}\}.$$

A la n-ésima repetición del ensayo podemos asociarle una variable aleatoria X_n que toma dos valores posibles

$$X_n(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } w_n = E, \\ 0, & \text{si } w_n = F. \end{cases} \qquad [1]$$

$$P(X_n = 1) = p;\ P(X_n = 0) = 1 - p. \qquad [2]$$

Se denomina *proceso de Bernoulli* a una colección numerable de variables aleatorias independientes, definidas como en [1] con distribución de prob. [2].

Ejemplo

En una bifurcación de una ruta, aproximadamente el 62% de los automóviles toma la rama izquierda.

Se define:
$X_n = 1$ si el n–ésimo automóvil toma la rama izquierda,
$X_n = 0$ si toma la rama derecha.

Se supone que los conductores eligen su camino independientemente de lo que hacen los otros, eso quiere decir que se puede considerar

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots\dots$ independientes con $P\left(X_n = 1\right) = 0.62 \quad \forall n$

El proceso $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un *proceso de Bernoulli.*

Proceso Número de Éxitos

Sea $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ un proceso de Bernoulli con P(E) = p.

La variable aleatoria:

$$N_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \qquad [3]$$

describe el número de éxitos en los primeros n ensayos de Bernoulli.
Si además se define $N_0 = 0$, el proceso estocástico

$$\{N_n : n \in \mathrm{N}_0\}$$

describe el número de éxitos en un proceso de Bernoulli y tiene a $\mathbb{Z}_0$ como espacio de estados.

Proceso Número de Éxitos

Notar que (3) indica que:

$$N_n = k \Leftrightarrow X_1 + X_2 + ... + X_n = k \Leftrightarrow$$

exactamente k de los n sumandos es igual a 1 y, por lo tanto, se deduce:

$$N_n \sim Bi(n, p)$$

$$P(N_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \ \forall k = 0, ..., n.$$

Proceso Número de Éxitos

Las variables aleatorias

$$N_{m+n} - N_m$$

representan el número de éxitos entre el m-ésimo y el (m + n)-ésimo ensayo. Por lo tanto:

$$P(N_{m+n} - N_m = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ \forall k = 0, ..., n,$$

lo cual significa que el número de éxitos sólo depende de la cantidad de ensayos observados y no del instante en que comenzó a observarse el proceso.

Para pensar!

¿Influye la cantidad de éxitos ocurridos en los m primeros ensayos sobre la cantidad de los que ocurrirán entre la m*-ésima* y la $(\mathrm{m}+\mathrm{n})$ *-ésima* repetición del ensayo de Bernoulli?

La independencia de las Xi asegura que no.

$$P(N_{m+n} - N_m = k | N_0, N_1, ..., N_m) = P(N_{m+n} - N_m = k), \ \forall k = 0, ..., n.$$

dado que el valor de la probabilidad es independiente de m.

Proceso Número de Éxitos

Más aún, las variables aleatorias:

$$N_{n_1}, N_{n_2} - N_{n_1}, \dots, N_{n_m} - N_{n_{m-1}} \quad (0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m)$$

son variables aleatorias *independientes* , por lo tanto:

$$P(N_{m+1} = k | N_0, N_1, \dots, N_m) = P(N_{m+1} = k | N_m).$$

esta igualdad indica que el futuro inmediato del proceso depende sólo del presente y no del pasado.

propiedad markoviana

Proceso Número de Éxitos

Si se conoce cuántos éxitos hubo hasta el instante n-*ésimo,* ¿cuántos éxitos podemos tener al instante siguiente?

$$P(N_{n+1} = j | N_n = i) = P(N_n + X_{n+1} = j | N_n = i) = P(X_{n+1} = j - i)$$

$$P(X_{n+1} = j - i) = \begin{cases} p & \text{si } j - i = 1 \\ 1 - p & \text{si } j - i = 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$P(N_{n+1} = j | N_n = i) = \begin{cases} p & \text{si } j = i + 1 \\ 1 - p & \text{si } j = i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Notar que estas probabilidades son independientes de n.

Proceso Número de Éxitos

- ✓ Estas probabilidades pueden interpretarse como la *probabilidad de transición* en un paso entre dos estados del proceso.
- ✓ Estas probabilidades pueden representarse en una matriz o a través de un grafo.

Propuesta:

•Armar la matriz de transición

$$P(i,j) = P(N_{n+1} = j | N_n = i)$$

•Construya el grafo correspondiente al proceso planteado