Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal - LCC, LM, PM - 2024
Práctica 2: Transformaciones Lineales.

---

1. Determinar cuáles de los siguientes aplicaciones son lineales.

   i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_1, x_1 + \sqrt{2}x_3, x_1 - \frac{1}{2}x_2)$,
   ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_2, 1 + x_1)$,
   iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - 7x_3, 0, 3x_2 + 2x_3)$,
   iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, |x_1|)$,
   v) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = iz$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial),
   vi) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i\,\mathrm{Im}(z)$
   vii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial),
   viii) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,
   ix) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3a_{13} - a_{23}, a_{11} + 2a_{22} - a_{23}, a_{22} - a_{12})$,
   x) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$,
   xi) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$,

2. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

   i) $T(x, y) = (x, 0)$,
   ii) $T(x, y) = (0, y)$,
   iii) $T(x, y) = (x, -y)$,
   iv) $T(x, y) = (\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y))$,
   v) $T(x, y) = (x \cos t - y \mathrm{sen}\, t, x \mathrm{sen}\, t + y \cos t)$ para $t \in \mathbb{R}$ fijo.

3. Para un $\mathbf{F}$-espacio vectorial V conveniente se pide:

   i) Encontrar una función $f : V \to V$ que cumpla $f(v + w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v, w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.
   ii) Encontrar una función $f : V \to V$ que cumpla $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ para cualquier escalar $\alpha \in \mathbf{F}$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

4. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

   i) $\mathrm{tr} : \mathbf{F}^{n\times n} \to \mathbf{F}$ la función traza,
   ii) $t : \mathbf{F}^{m\times n} \to \mathbf{F}^{n\times m}$, $t(A) = A^t$,
   iii) $f : \mathbf{F}^{n\times m} \to \mathbf{F}^{r\times m}$, $f(A) = BA$, donde $B \in \mathbf{F}^{r\times n}$,
   iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\delta(f) = f'$,
   v) $\epsilon_\alpha : \mathbf{F}[x] \to \mathbf{F}$, $\epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in \mathbf{F}$,
   vi) $s : \mathbf{F}^\mathbb{N} \to \mathbf{F}^\mathbb{N}$, $s(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = (0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.
   vii) $T : \mathbf{F}^{n\times n} \to \mathbf{F}^{n\times n}$, $T(A) = AB - BA$, donde $B \in \mathbf{F}^{n\times n}$.

5. i) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (-5, 3)$ y $T(-1, 1) = (5, 2)$. Para dicha T, determinar $T(5, 3)$ y $T(-1, 2)$.
   ii) ¿Existirá una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (2, 6)$, $T(-1, 1) = (2, 1)$ y $T(2, 7) = (5, 3)$?
   iii) Sean $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que

   $$\begin{array}{lll} T(1,0,1) = (1,2,1), & T(2,1,0), = (2,1,0) & T(-1,0,0) = (1,2,1), \\ S(1,1,1) = (1,1,0), & S(3.2,1) = (0,0,1), & S(2,2,-1) = (3,-1,2). \end{array}$$

   Determinar si $T = S$.
   iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga $T(1, -1, 1) = (2, a, -1)$, $T(1, -1, 2) = (a^2, -1, 1)$ y $T(1, -1, -2) = (5, -1, -7)$.

v) Hallar una fórmula para todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ que satisfacen $T(x^3+2x^2-x+4) = (6,5,3)$, $T(3x^2+2x-5) = (0,0,-3)$, $T(x^3-2x^2+3x-2) = (0,-1,1)$ y $T(2x^3-3x^2+7) = (6,4,7)$.

6. (a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(1,2) = 1$ y $f(2,4) = 3$. ¿Es posible que f sea una transformación lineal? Justifique.

   (b) Consideremos ahora una función $g : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ tal que $g(x^2) = x^3$ y $g(2x^2) = x^4$. ¿Es posible que g sea una transformación lineal? Justifique.

7. Sea A una matriz en $\mathbf{F}^{m\times n}$. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbf{F}^n \to \mathbf{F}^m$ definida por $T(x) = Ax$. Pruebe que $T = \overline{O}$ si y sólo si A es la matriz nula.

8. Calcular el núcleo y la imagen de las transformaciones lineales del Ejercicio 1.

9. Consideremos la transformación lineal "derivada" $D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, donde si $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, se tiene

$$D(p)(x) = a_1 + 2a_2x + ... + na_nx^{n-1}.$$

   Calcular el núcleo y la imagen de D.

10. Sea $V = \mathbb{C}^3$ espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definida por

$$T(z_1, z_2, z_3) = (z_1 - z_2 + 2z_3, 2z_1 + z_2, -z_1 - 2z_2 + 2z_3).$$

   (a) Comprobar que T es lineal.

   (b) Si $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, ¿qué condiciones tienen que verificar a, b, c para que $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(T)$? ¿Cuál es la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$?

   (c) ¿Qué condiciones tienen que verificar a, b, c para que $(a,b,c) \in \ker(T)$? ¿Cuál es la dimensión de $\ker(T)$?

11. (a) Supongamos que $T : \mathbf{F}^4 \to \mathbf{F}^2$ es una transformación lineal que verifica

$$\ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : \ x_1 = 5x_2 \ \text{ y } \ x_3 = 7x_4\}.$$

   Probar que T es un epimorfismo.

   (b) Probar que no existe una transformación lineal $T : \mathbf{F}^5 \to \mathbf{F}^2$ que verifique

$$\ker(T) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \ x_1 = 3x_2 \ \text{ y } \ x_3 = x_4 = x_5\}.$$

12. Sea T el único operador lineal sobre $\mathbb{C}^3$, espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, para el que $T(e_1) = (1,0,i)$, $T(e_2) = (0,1,1)$, $T(e_3) = (i,1,0)$, donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ denota la base canónica de $\mathbb{C}^3$. ¿Es T invertible?

13. Sea $V = \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial $\mathbb{C}$ definido sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{R}$. Describir explícitamente un isomorfismo de V en $\mathbb{R}^2$.

14. Sea W el conjunto de matrices $\mathbb{C}^{2\times 2}$ *hermíticas*, esto es $A \in W$ si y solo si $A^t = \overline{A}$. El conjunto W es un espacio vectorial real con las operaciones usuales. Demostrar que

$$(x,y,z,t) \mapsto \begin{pmatrix} t+x & y+iz \\ y-iz & t-x \end{pmatrix}$$

   es un isomorfismo de $\mathbb{R}^4$ en W.

15. Sea $T \in L(V,W)$ con V, W espacios vectoriales de dinensión finita. Probar que:

   (a) Si T es un monomorfismo, entonces manda conjuntos linealmente de V en conjuntos linealmente independientes de W.

   (b) Si T es un epimorfismo, entonces manda conjuntos generadores de V en conjuntos generadores de W.

   (c) Si T es un isomorfismo, entonces manda base en base.

16. Sea $T \in L(V)$ con V espacio vectorial de dimensión finita. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes:

   - T es un monomorfismo,
   - T es un epimorfismo,
   - T es un isomorfismo.

17. Probar que $W = \{T \in L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) : \ \dim\ker(T) > 2\}$ no es un subespacio de $L(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

18. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbf{F}$ y sea $U : V \to W$ un isomorfismo de V en W. Probar que la aplicación $T \mapsto UTU^{-1}$ es un isomorfismo de $L(V,V)$ en $L(W,W)$.

19. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

    (a) $(1,0,0) \in \ker(T)$ y $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$,

    (b) $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \langle\{(1,1,2)\}\rangle$,

    (c) $T \neq 0$ y $\ker(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$,

    (d) $T \neq \overline{O}$ y $T \circ T = \overline{O}$,

    (e) $T \neq \mathrm{Id}$ y $T \circ T = \mathrm{Id}$,

    (f) $\ker(T) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

20. Demostrar que los vectores

$$u_1 = (1,1,0,0), \quad u_2 = (0,0,1,1), \quad u_3 = (1,0,0,4), \quad u_4 = (0,0,0,2)$$

    forman una base de $\mathbb{R}^4$. Hallar las coordenadas de cada uno de los vectores de la base canónica respecto de la base ordenada $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$.

21. Hallar las coordenadas del vector $(1,0,1)$ en la base de $\mathbb{C}^3$ formada por los vectores $(2i,1,0)$, $(2,-1,1)$, $(0,1+i,1-i)$, en ese orden.

22. Sea $\mathfrak{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ la base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por

$$u_1 = (1,0,-1), \quad u_2 = (1,1,1), \quad u_3 = (1,0,0).$$

    ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a,b,c) en la base ordenada $\mathfrak{B}$?

23. Sea W el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por $u_1 = (1,0,i)$ y $u_2 = (1+i,1,-1)$.

    (a) Demostrar que u_1 y u_2 forman una base de W.

    (b) Demostrar que los vectores $v_1 = (1,1,0)$ y $v_2 = (1,i,1+i)$ pertenecen a W y forman otra base de W.

    (c) ¿Cuáles son las coordenadas de u_1 y u_2 en la base ordenada $\{v_1, v_2\}$?

24. Sea t un número real fijo. Definimos

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x + t, \quad p_3(x) = (x+t)^2.$$

    Demostrar que $\mathfrak{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$. Si $q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ ¿Cuáles son las coordenadas de q en esta base ordenada $\mathfrak{B}$?

25. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, 2x_3 - x_1).$$

    (a) Si $\mathfrak{B}_1$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $\mathfrak{B}_2$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, ¿cuál es la matriz de T respecto al par $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$?

    (b) Si $\mathfrak{B}_1 = \{u, v, w\}$ y $\mathfrak{B}_2 = \{x, y\}$, donde

$$u = (1,0,-10), \quad v = (1,1,1), \quad w = (1,0,0), \quad x = (0,1), \quad y = (1,0).$$

    ¿Cuál es la matriz de T en la bases $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$?

26. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_3, -2x_1 + x_2, -x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

    (a) ¿Cuál es la matriz de T en la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$?

    (b) ¿Cuál es la matriz de T en la base ordenada $\mathfrak{B} = \{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde $u = (1,0,1)$, $v = (-1,2,1)$, $w = (2,1,1)$?

    (c) Demostrar que T es invertible y dar una expresión de T^{-1} tal como dimos para T.

27. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ la aplicación definida por $T(z_1, z_2) = z_1 + 2z_2$.

    (a) Considerando que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^2$ son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales, probar que T es una transformación lineal. Dar la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}$.

    (b) Repetir el ítem anterior considerando ahora que $\mathbb{C}^2$ y $\mathbb{C}$ son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

28. Sea $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(x) = ax^2 + (2b - c)x + (d - a).$$

(a) Dar la matriz de T en las bases

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{B}_2 = \{1, x, x^2\}$$

de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente.

(b) Repetir el ítem anterior con la bases

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{B}_2 = \{1, x - 1, x^2\}.$$

29. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbf{F}$ y sean $T, S \in L(V, V)$. Demostrar que existen dos bases ordenadas $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ de V tales que $[S]_{\mathfrak{B}_1} = [T]_{\mathfrak{B}_2}$ si y sólo si existe $U \in L(V, V)$ invertible tal que $T = USU^{-1}$.

30. Calcular la matriz cambio de base $C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ en los siguientes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1),(1,2)\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,3),(2,5)\}$,
(b) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$,
(c) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$,
(d) $V = \mathbb{R}_2[x]$, $\mathfrak{B}_1 = \{3, 1+x, x^2\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{1, x+3, x^2+x\}$,
(e) $V = \mathbb{R}^4$, $\mathfrak{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$,
(f) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\mathfrak{B}_1 = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$, $\mathfrak{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$,
(g) $V = \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ (como $\mathbb{R}$-espacio vectorial), $\mathfrak{B}_1 = \{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(1,0),(i,1),(1,1),(1,i)\}$,
(h) $V = \mathbb{C}^2_{\mathbb{C}}$ (como $\mathbb{C}$-espacio vectorial), $\mathfrak{B}_1 = \{(1,0),(0,i)\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{(1,1),(1,-i)\}$,

31. Dado $v \in V$ y las bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ de V, hallar las coordenadas de v respecto de $\mathfrak{B}_1$ y utilizando la matriz cambio de base, las coordenadas de v ($p(x)$ o A según el caso) respecto de $\mathfrak{B}_2$.

(a) $v = (2,3)$ y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30a,
(b) $v = (-1,5,6)$ y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30b,
(c) $v = (-1,5,6)$ y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30c,
(d) $p(x) = 1 + x + x^2$, y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30d,
(e) $v = 2v_1 + 3v_2 - 5v_3 + 7v_4$, y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30e,
(f) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ como en el Ejercicio 30f.

32. Se pide

(a) Calcular los vectores coordenados $[v]_{\mathfrak{B}}$ y $[v]_{\mathcal{C}}$ de v con respecto a las bases $\mathfrak{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente;
(b) Calcular la matriz cambio de base de $\mathfrak{B}$ a $\mathcal{C}$;
(c) Usar el ítem anterior para calcular $[v]_{\mathcal{C}}$, y compare con la respuesta obtenida en el ítem (a);
(d) Calcular la matriz cambio de base de $\mathcal{C}$ a $\mathfrak{B}$;
(e) Usar los ítems (c) y (d) para calcular $[v]_{\mathcal{B}}$ y compare su respuesta con la que obtuvo en el ítem (a).

con los siguientes ítems

i) $V = \mathbb{R}^2$, $v = (2,3)$, $\mathfrak{B} = \{(1,0),(0,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,1),(1,-1)\}$,
ii) $V = \mathbb{R}^2$, $v = (2,3)$, $\mathfrak{B} = \{(0,1),(1,0)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,0),(1,1)\}$,
iii) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (1,0,-1)$, $\mathfrak{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$,
iv) $V = \mathbb{R}^3$, $v = (3,1,6)$, $\mathfrak{B} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$, $\mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)\}$.

33. Repetir las instrucciones del Ejercicio 32 para los siguientes ítems y use $p(x)$ en lugar de v.

v) $V = \mathbb{R}_1[x]$, $p(x) = 2 - x$, $\mathfrak{B} = \{1, x\}$, $\mathcal{C} = \{x, 1 + x\}$,

vi) $V=\mathbb{R}_1[x]$, $p(x)=1+3x$, $\mathfrak{B}=\{1+x,1-x\}$, $\mathcal{C}=\{2x,4\}$,

vii) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $p(x)=1+x^2$, $\mathfrak{B}=\{1+x+x^2,x+x^2,x^2\}$, $\mathcal{C}=\{1,x,x^2\}$,

viii) $V=\mathbb{R}_2[x]$, $p(x)=4-2x-x^2$, $\mathfrak{B}=\{x,1+x^2,x+x^2\}$, $\mathcal{C}=\{1,1+x,x^2\}$.

34. Repetir las instrucciones del Ejercicio 32 para los siguientes ítems y use A en lugar de v.

ix) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $\mathfrak{B}=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$, $\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$,

x) $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$, $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\mathfrak{B}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$,
$\mathcal{C}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

35. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ generado por el conjunto $\{\operatorname{sen}(x),\cos(x)\}$, y sean $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$ dos bases de W. En los siguientes ítems se pide hallar la matriz cambio de base $C_{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$ y las coordenadas $[f(x)]_{\mathfrak{B}_1}$ y $[f(x)]_{\mathfrak{B}_2}$ de $f(x)$ en las bases $\mathfrak{B}_1$ y $\mathfrak{B}_2$, respectivamente.

(a) $f(x)=2\operatorname{sen}(x)-3\cos(x)$, $\mathfrak{B}_1=\{\operatorname{sen}(x)+\cos(x),\cos(x)\}$, $\mathfrak{B}_2=\{\operatorname{sen}(x)+\cos(x),\operatorname{sen}(x)-\cos(x)\}$,

(b) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, $\mathfrak{B}_1=\{\operatorname{sen}(x)+\cos(x),\cos(x)\}$, $\mathfrak{B}_2=\{\cos(x)-\operatorname{sen}(x),\operatorname{sen}(x)+\cos(x)\}$.

36. (a) Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$. Si $\mathcal{C}=\{(1,2),(2,3)\}$ y la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}$ a $\mathcal{C}$ es

$$C_{\mathfrak{B}\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

hallar $\mathfrak{B}$.

(b) Sean $\mathfrak{B}$ y $\mathcal{C}$ dos bases de $\mathbb{R}_2[x]$. Si $\mathfrak{B}=\{x,1+x,1-x+x^2\}$ y la matriz de cambio de base de $\mathfrak{B}$ a $\mathcal{C}$ es

$$C_{\mathfrak{B}\mathcal{C}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

hallar $\mathcal{C}$.

37. (a) Dadas la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y una base $\mathfrak{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbf{F}^3$, hallar una base $\mathfrak{B}'$ tal que $M=C_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$.

(b) Dadas la matriz $M=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y una base $\mathfrak{B}'=\{v_1,v_2,v_3\}$ de $\mathbf{F}^3$, hallar una base $\mathfrak{B}$ tal que $M=C_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}$.

38. Sea $\mathfrak{B}$ una base de un espacio vectorial V. Supongamos que $u_1,...,u_k\in V$ y $c_1,...,c_k\in\mathbf{F}$. Demostrar que

$$[c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_ku_k]_{\mathfrak{B}}=c_1[u_1]_{\mathfrak{B}}+c_2[u_2]_{\mathfrak{B}}+\cdots+c_k[u_k]_{\mathfrak{B}}.$$

39. Sea $S\subset(\mathbb{R}^3)^*$ el subespacio $S=\{\varphi\in(\mathbb{R}^3)^*:\varphi(1,-1,2)=0\}$. Encontrar una base de S.

40. Dada la base $\mathfrak{B}$ del $\mathbf{F}$-espacio vectorial V, hallar su base dual en cada uno de los siguientes casos:

(a) $V=\mathbb{R}^2$, $\mathfrak{B}=\{(1,-1),(2,0)\}$,

(b) $V=\mathbb{R}^3$, $\mathfrak{B}=\{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

(c) $V=\mathbb{R}_3[x]$, $\mathfrak{B}=\{-x+2,x-1,x^2-3x+2,x^3-3x^2+2x\}$.

41. Sea $\mathfrak{B}'$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2,\quad \varphi_2(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_3,\quad \varphi_3(x_1,x_2,x_3)=x_2+x_3.$$

Hallar la base $\mathfrak{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\mathfrak{B}'=\mathfrak{B}^*$.

42. Hallar una base de $S^0\subset V^*$ en los siguientes casos:

(a) $V=\mathbb{R}^3$ y $S=\operatorname{span}\{(1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0)\}$.

(b) $V=\mathbb{R}^3$ y $S=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\ :\ x_1+x_3=0\ \wedge\ 2x_1-x_2+x_3=0\}$.

43. Sean $v_1=(1,0,-1,2)$ y $v_2=(2,3,1,1,)$ y sea $W=\operatorname{span}\{v_1,v_2\}$. ¿Qué funcionales lineales de la forma $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4$ están en W^0?.

44. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \quad AB = 0\}$. Sea $f \in W^0$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3$. Calcular $f(B)$.

45. Sea V un espacio vectorial y sea $v \in V$. Entonces v induce una aplicación $L_v : V^* \to \mathbf{F}$ definida por

$$L_v(f) = f(v), \text{ para } f \in V^*.$$

(a) Mostrar que L_v es lineal.

(b) Probar que si V es de dimensión finita y $v \neq \overline{0}$, entonces existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.

(c) Probar que si V es de dimensión finita, la aplicación $\Omega : V \to (V^*)^*$ definida por $\Omega(v) = L_v$ es un isomorfismo de V en $(V^*)^*$. El espacio $V^{**} = (V^*)^*$ se conoce como el **doble dual** de V.

(d) Probar que si V es dimensión finita y $L \in V^{**}$, entonces existe un único vector $v \in V$ tal que $L(f) = f(v)$ para todo $f \in V^*$.

46. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (4x + 5y + 6z, 7x + 8y + 9z)$. Supongamos que φ_1, φ_2 denota la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^2$, y ψ_1, ψ_2, ψ_3 denota la base dual de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Describir $T^*(\varphi_1)$ y $T^*(\varphi_2)$.

(b) Escribir a $T^*(\varphi_1)$ y $T^*(\varphi_2)$ como combinación lineal de ψ_1, ψ_2, ψ_3.

47. Sea $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ la transformación lineal definida por $(T(p))(x) = x^2 p(x) + p''(x)$.

(a) Sea $\varphi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definido por $\varphi(p) = p'(4)$. Describir $T^*(\varphi)$ en $\mathbb{R}[x]$.

(b) Sea $\varphi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definido por $\varphi(p) = \int_0^1 p(x)dx$. Evaluar $(T^*(\varphi))(x^3)$.