ANÁLISIS MATEMÁTICO 2
Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 6. Continuidad y Diferenciabilidad de Funciones en Varias Variables

---

1. Introducción.

Se sabe del curso paralelo de Álgebra y Geometría Analítica 2, que el conjunto $\mathbb{R}^n$, de todas las n-uplas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de componentes reales junto con las operaciones de suma y producto por escalar, definidas respectivamente por componentes por las leyes

- $\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- $\lambda \mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$,

forma un espacio vectorial real, del cual el conjunto de los n vectores canónicos $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ (con $\mathbf{e}_j = (\delta_{jk})$) forma una base, lo que lo hace un espacio vectorial de dimensión n.

En este espacio vectorial se puede definir una nueva operación, llamada producto escalar, notado usualmente con el símbolo $\times$ [1] generalizando la expresión algebraica mostrada para el producto escalar de vectores en dos y tres dimensiones, por la ley

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \;.$$

Todos estos elementos se combinan para definir a los espacios euclídeos.

Definición 1. *El conjunto $\mathbb{R}^n$, dotado con la suma y el producto por escalar, como espacio vectorial finito dimensional, junto con el producto escalar, es llamado espacio euclídeo n-dimensional.*

Se deja como ejercicio mostrar las siguientes propiedades algebraicas del producto escalar definido.

Proposición 1. *Para cualesquiera vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valen las siguientes afimaciones:*

a) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \;=\; \mathbf{y} \times \mathbf{x}$,

b) $(\alpha \mathbf{x}) \times \mathbf{y} \;=\; \alpha(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$,

[1] Observar que no cabe lugar a confusión con el mismo símbolo usado para notar al producto cartesiano, ya que este último opera sobre conjuntos, y el producto escalar sobre vectores.

c) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z} \;=\; \mathbf{x}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}$,

d) $\mathbf{x}\times\mathbf{x} \;\geqq\; 0$ y $\mathbf{x}\times\mathbf{x} \;=\; 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \;=\; \mathbf{0} \;=\; (0,...,0)$.

Por la última parte de la proposición anterior vale $\mathbf{x}\times\mathbf{x}\geqq 0$, para cualquier $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, y luego queda bien definida en este conjunto la función $||\cdot||$, llamada norma asociada al producto escalar $\times$, a valores reales, de ley

$$||\mathbf{x}|| \;=\; \sqrt{\mathbf{x}\times\mathbf{x}} \;=\; \sqrt{x_1^2+...+x_n^2}\ .$$

A la siguiente propiedad que vincula un producto escalar con la norma que él define, se la conoce como Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 2. *Para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$, vale la desigualdad $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|\leqq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, siendo la igualdad válida si y sólo si los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ forman un conjunto linealmente dependiente, esto es, existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$.*

Demostración. Dados $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ cualesquiera, se comienza definiendo la función $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, por la ley $T(\lambda)=||\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}||^2$, para la cual se tiene que

$$0 \;\leqq\; T(\lambda) \;=\; (\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y})\times(\mathbf{x}-\lambda\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}\times\mathbf{x}-2\lambda(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+\lambda^2(\mathbf{y}\times\mathbf{y}) \;=\; ||\mathbf{x}||^2-2\lambda(\mathbf{x}\times\mathbf{y})+\lambda^2||\mathbf{y}||^2\ .$$

Resulta entonces T una función en $\mathbb{R}$, cuadrática en la variable λ, que siempre es no negativa, por lo cual, o tiene una sola raíz real, o no tiene ninguna. Esta observación se traduce en el signo no positivo del discriminante de la ecuación, $\Delta=4(\mathbf{x}\times\mathbf{y})^2-4||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2\leqq 0$, de lo que se obtiene la desigualdad buscada despejando y tomando raíces cuadradas, $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|\leqq||\mathbf{x}||\;||\mathbf{y}||$.

Si en particular vale la igualdad, el discriminante vale 0 y esto ocurre si y sólo si la función cuadrática tiene una raíz real, λ_0. Esto es, si y sólo si, existe $\lambda_0\in\mathbb{R}$ tal que $0=T(\lambda_0)=||\mathbf{x}-\lambda_0\mathbf{y}||^2$, lo que implica, que $(\mathbf{x}-\lambda_0\mathbf{y})\times(\mathbf{x}-\lambda_0\mathbf{y})=0$, y luego por la parte *d*) de la Proposición 1, $\mathbf{x}-\lambda_0\mathbf{y}=0$ y de allí que $\mathbf{x}=\lambda_0\mathbf{y}$.

Q.E.D.

Proposición 3. *Para cualesquiera $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ y $\alpha\in\mathbb{R}$, valen las propiedades siguientes:*

$$a)\;\;\|\alpha\mathbf{x}\|=|\alpha|\,\|\mathbf{x}\|\ ,\quad b)\;\;\|\mathbf{x}\|\geqq 0\ ,\ \|\mathbf{x}\|=0\;\Leftrightarrow\;\mathbf{x}=\mathbf{0}\ ,\;\;\text{y}\quad c)\;\;\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leqq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|\ .$$

Demostración. Las dos primeras propiedades siguen de la Proposición 1. Por otro lado, aplicando la Proposición 2 en (1), sigue la tercera afirmación, tomando raices cuadradas a continuación,

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times(\mathbf{x}+\mathbf{y})=||\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2+2\mathbf{x}\times\mathbf{y}\overset{(1)}{\leqq}||\mathbf{x}||^2+||\mathbf{y}||^2+2||\mathbf{x}||\;||\mathbf{y}||=(||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2\ .$$

Q.E.D.

Observación 1. *En general, un producto escalar es una operación definida en $\mathbb{R}^n$ que verifique las afirmaciones hechas en la Proposición 1, y una norma es cualquier función en $\mathbb{R}^n$ que cumpla las de la Proposición 3. Hay diferentes productos escalares, y hay normas que no sólo no provienen del producto escalar definido, sino que no provienen de ningún producto escalar en el espacio vectorial. Además de la norma definida, también son normas en $\mathbb{R}^n$, las definidas por las leyes $||\mathbf{x}||_1=|x_1|+...+|x_n|$ y $||\mathbf{x}||_0=\text{máx}\{|x_1|,...,|x_n|\}$.*

Observando que las propiedades mostradas en la Proposición 3 generalizan, al espacio $\mathbb{R}^n$, las propiedades de la función valor absoluto definida en $\mathbb{R}$, se suelen utilizar normas, por ejemplo la euclídea proveniente del producto escalar, para definir distancias entre puntos del espacio, formalizadas en funciones $\mathrm{d}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, de ley

$$\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|\ ,$$

Proposición 4. *Para cualesquiera* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$*, valen las siguientes propiedades.*

$$a)\ \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})=\mathrm{d}(\mathbf{y},\mathbf{x})\ ,\quad b)\ \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\geqq 0\ ,\ \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0\ \Leftrightarrow\ \mathbf{x}=\mathbf{y}\ ,\ \text{ y }\quad c)\ \mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{y})\leqq\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{z})+\mathrm{d}(\mathbf{z},\mathbf{y})\ .$$

la propiedad c) se conoce con el nombre de desigualdad triangular.

Y de nuevo, si bien estas propiedades fueron mostradas para las distancias definidas a través de normas, en general en Análisis, se definen distancias, o métricas, a toda función $d:A\times A\to\mathbb{R}$, $d(x,y)$, definida entre pares de puntos de un conjunto en el conjunto de números reales, que verifiquen lo probado en el resultado anterior.

Contando con funciones de distancia en $\mathbb{R}^n$, a continuación se presentan algunos conceptos referidos de la topología que ella induce sobre este conjunto en particular, adaptables a cualquier conjunto en general, en el que se puedan definir métricas.

Definición 2. *A continuación,* $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$*,* $r>0$ *y* $A\subseteqq\mathbb{R}^n$*,* $A\neq\emptyset$*.*

a) Se llamará esfera o bola (abierta) de centro $\mathbf{a}$ *y radio r, al conjunto*

$$B(\mathbf{a},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{a})<r\}\ ,$$

donde $\mathrm{d}(\mathbf{x},\mathbf{a})$ *es una función de distancia, por ejemplo, la definida por la norma euclídea.*

b) Un punto $\mathbf{a}$ *se dice interior a A, si existe* $B(\mathbf{a},r)\subseteqq A$*, al conjunto de puntos interiores se lo llamará interior de A, y se indicará* $\mathrm{int}(A)$*. El conjunto A será abierto, si todos sus puntos son interiores. En particular,* $\mathrm{int}(A)$ *es abierto.*

c) Un punto $\mathbf{a}$ *se dice exterior a A, si existe una* $B(\mathbf{a},r)\subseteqq A^c$ *(complemento de A), y al conjunto de puntos exteriores, se lo llamará exterior del conjunto A y se indicará* $\mathrm{ext}(A)$*.*

d) Por último, un punto $\mathbf{a}$ *se dice de frontera de conjunto A, si toda* $B(\mathbf{a},r)$ *contiene puntos tanto de A como de* A^c*, y al conjunto de puntos de frontera de A, se le dirá frontera de A y se indicará* $\mathrm{Fr}(A)$*.*

e) A es llamado conjunto cerrado, si A^c *es un conjunto abierto.*

Observación 2. *Los conjuntos* $\emptyset$ *y* $\mathbb{R}^n$ *son por definición conjuntos abiertos, y por lo tanto, por complementación, también son conjuntos cerrados.*

Ejemplo 1.

a) La bola $B(\mathbf{a},r)$ *es un conjunto abierto. Esto quedará mostrado, si para* $\mathbf{x}\in B(\mathbf{a},r)$ *genérico, se muestra que existe una bola* $B(\mathbf{x},\rho)\subseteqq B(\mathbf{a},r)$*. Para hacerlo, observando primero que*

$$\mathbf{x}\in B(\mathbf{a},r)\ \Rightarrow\ ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||<r\ \Rightarrow\ ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||=r-\delta\ ,\ \text{ con }\ \delta>0\ ,$$

eligiendo $\rho=\frac{\delta}{2}$*, se aplica la desigualdad triangular en (1), y se concluye que*

$$\mathbf{y}\in B(\mathbf{x},\rho)\ \Rightarrow\ ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||<\frac{\delta}{2}\ \Rightarrow\ ||\mathbf{y}-\mathbf{a}||\overset{(1)}{\leqq}||\mathbf{y}-\mathbf{x}||+||\mathbf{x}-\mathbf{a}||<\frac{\delta}{2}+r-\delta<r\ \Rightarrow\ \mathbf{y}\in B(\mathbf{a},r)\ .$$

En particular, si $n=1$*, queda* $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<r\}=(a-r,a+r)$*, intervalo abierto de centro a y radio r, resultando el intervalo abierto un conjunto abierto, y en general, los conjuntos que son uniones de intervalos abiertos son conjuntos abiertos.*

b) El conjunto $E=\{\mathbf{x}:||\mathbf{x}-\mathbf{a}||\geqq r\}$ *es cerrado pues* $E=B(\mathbf{a},r)^c$ *es complemento de un conjunto abierto.*

c) El conjunto $D=\{\mathbf{x}:||\mathbf{x}-\mathbf{a}||>r\}$ *es abierto y luego el conjunto* $\overline{B}(\mathbf{a},r)=\{\mathbf{x}:||\mathbf{x}-\mathbf{a}||\leqq r\}$ *es cerrado. A este conjunto se lo llama bola cerrada de centro* $\mathbf{a}$ *y radio r. De nuevo, en particular, los intervalos cerrados resultan conjuntos cerrados. Además son cerrados los conjuntos singuletes,* $\{\mathbf{a}\}$*.*

d) Existen conjuntos que no son abiertos, ni cerrados, como por ejemplo en $\mathbb{R}$*, los intervalos semiabiertos, de la forma* $[a,b)$ *o* $(a,b]$*.*

2. Campos Escalares y Vectoriales

En lo que sigue de la unidad se estudiarán funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, y con conjunto imagen contenido en $\mathbb{R}^m$, donde tanto n como m, pueden ser naturales cualesquiera.

Definición 3. *A una función $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se la llamará*

a) campo escalar, o funciones con valores escalares, en el caso que sea $m = 1$, siendo éstos de la forma

$$f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ , \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R} \ .$$

b) campo vectorial, o funciones con valores vectoriales, cuando sea $m > 1$, quedando éstos

$$\mathbf{f} : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^m \ ,$$

donde f_k es un campo escalar con dominio en A, para cada $k = 1, \ldots, m$.

Luego, pueden extenderse a campos escalares y vectoriales algunos conceptos estudiados hasta ahora, dando lugares a definiciones muy parecidas, diferenciadas por las particularidades del caso. Por ejemplo, para un campo vectorial $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, se llamará gráfica de $\mathbf{f}$ al conjunto

$$G_{\mathbf{f}} \ = \ \{(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in A\} \ \subseteqq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ .$$

Observación 3. *No deben confundirse la gráfica del campo, con el conjunto imágen de éste. Con las dimensiones de la definición anterior, la gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, mientras que el conjunto imagen está contenido en $\mathbb{R}^m$. Por ejemplo, dado el campo $\mathbf{f} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ de ley $\mathbf{f}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$, su gráfica es un conjunto de $\mathbb{R}^4$, que no puede representarse, y su imagen es el conjunto de $\mathbb{R}^3$ que tiene como lugar geométrico a la circunferencia de radio 1 y centro $(0, 0, 1)$, contenida en el plano $z = 1$.*

Ejemplo 2.

a) Las funciones lineales de leyes $f(x, y) = ax + by + c$ son campos escalares definidos en $\mathbb{R}^2$, cuyas gráficas, lugares geométricos de ecuaciones $z = ax + by + c$ corresponden a planos en el espacio.

b) También son campos escalares en el plano las funciones de ley $f(x, y) = ax^2 + by^2$, siendo sus gráficas paraboloides elípticos, con vértice en el origen, como el representado en la parte izquierda de la Figura 1.

c) Al igual que la ecuación de la circunferencia de radio r da lugar a dos funciones definidas en el intervalo $[-r, r]$, las funciones de ley $f_{1,2}(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, que representan a las semicircunferencia inferior y superior, la ecuación de la esfera de radio r, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (verificada por los puntos que distan r unidades del origen) puede ser usada para definir dos funciones con dominio en el disco centrado en el origen de radio r del plano, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqq r^2\}$, y leyes $f_{1,2}(x, y) = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, representadas por la semiesfera inferior y superior centradas en el origen y de radio r.

d) Son campos escalares las funciones producto escalar, $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y norma, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de leyes, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ genéricos,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ = \ \mathbf{x} \times \mathbf{y} \ = \ x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{y} \quad g(\mathbf{x}) \ = \ ||\mathbf{x}|| \ = \ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ .$$

Las gráficas de campos escalares de dos variables, como superficies, son lugares geométricos en $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones de la foma $z = f(x,y)$. En general, la intersección de éstas con planos paralalelos a los coordenados, brindan información cualitativa de su comportamiento. Otro método para obtener información del comportamiento de un campo, tomado de la cartografía, consiste en construir curvas de contorno o curvas de nivel, uniendo puntos en los que el campo asuma un mismo valor predeterminado.

Definición 4. *Si $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar y $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor en el conjunto imagen de f, se define el conjunto de nivel α de f, como el conjunto $C_\alpha = \{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = \alpha\}$.*

Cuando $n = 2$ el conjunto es llamado curva de nivel y consiste en la proyección de la intersección de la gráfica de f con el plano $z = \alpha$ sobre el plano xy, mientras que para $n = 3$ es referido como superficie de nivel.

Ejemplo 3.

a) *En la parte izquierda de la Figura 1 se muestra un paraboloide elíptico gráfica del campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de ley $f(x,y) = ax^2 + by^2$, sobre la que se marcan trazas equiespaciadas intersectando con los planos $z = \alpha$, con $\alpha = 0,25; 0,5; \ldots; 4$. La curvas de nivel del campo para cada uno de esos valores de α consisten en las respectivas elipses de ecuaciones $\frac{ax^2}{\alpha} + \frac{by^2}{\alpha} = 1$, graficadas en la parte derecha, sobre el plano xy, donde se observa cómo, a medida que α crece, las curvas se vuelven más cercanas, indicando una razón de crecimiento más rápido del campo, a mayor altura sobre éste.*

Figura 1: Curvas de nivel de un paraboloide elíptico

b) *Para el campo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de ley $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, se tienen los conjuntos de nivel, que en este caso serán superficies de nivel, $C_\alpha = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = \alpha\}$, siendo éstos conjuntos no vacíos si y sólo si $\alpha \geqq 0$, casos donde resultan esferas centradas en el origen de respectivos radios $\sqrt{\alpha}$, o el origen si $\alpha = 0$.*

c) *Para el campo escalar $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de ley $h(x,y) = x^2 + 1$ (gráfica "canaleta"), el conjunto de nivel $C_\alpha = \{(x,y) : x^2 + 1 = \alpha\} \neq \emptyset$ si y sólo si $\alpha \geqq 1$, consistiendo respectivamente cada C_α en dos rectas paralelas, dadas por las ecuaciones $x = \pm\sqrt{\alpha - 1}$ si $\alpha > 1$ y en el eje y si $\alpha = 1$.*

3. Continuidad de Campos Vectoriales

Teniendo nociones de distancia en los espacios euclídeos, vuelve a tener sentido el análisis del comportamiento de valores de un campo, escalar o vectorial, a medida que una o más variables se acerquen a un punto de referencia que puede, o no, estar en el dominio de éste. Sigue de manera inmediata la adaptación del concepto de límite hecha para funciones reales.

Definición 5. *Se dice que un campo vectorial* $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tiene límite en un punto* $\mathbf{a}$*, interior o de frontera de* A*, si existe un vector* $\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{R}^m$*, tal que, para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, verificando*

$$\mathbf{x} \in A\ ,\ \ 0 \ <\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \ <\ \delta \quad \text{implica} \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\ell}\| < \varepsilon\ ,$$

y caso en el cual, se notará $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell}$.

Puesta en palabras, la definición anterior establece que $\mathbf{f}$ tiene límite $\boldsymbol{\ell}$ en el punto $\mathbf{a}$, si dada una bola de centro $\boldsymbol{\ell}$ y radio ε (contenida en $\mathbb{R}^m$) existe una bola de centro $\mathbf{a}$ y radio δ (en $\mathbb{R}^n$), tal que para $\mathbf{x} \in B(\mathbf{a},\delta) \cap A$, queda $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in B(\boldsymbol{\ell},\varepsilon)$, siendo las bolas mencionadas en los espacios de salida y de llegada construidas con las correspondientes distancias definidas por las normas que en ellos se consideran. En particular, si alguno de estos conjuntos es $\mathbb{R}$, como por ejemplo el codominio de los campos escalares, la norma considerada será la función valor absoluto. En la Figura 2 se ilustran dos visualizaciones de límites de campos escalares en $\mathbb{R}^2$.

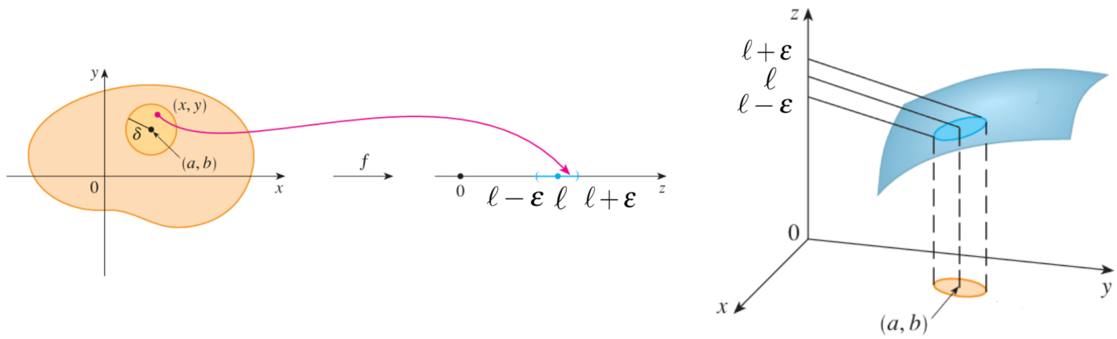

Figura 2: Límite de campos escalares

Resulta inmediato, y se propone como ejercicio convencerse de ello revisando lo hecho para funciones reales, que si existe el límite de un campo en un punto, éste es único, y que además son equivalentes las formulaciones,

$$a)\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; \boldsymbol{\ell}\ ,\quad b)\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\ell}|| \;=\; 0\ ,\quad c)\ \lim_{||\mathbf{x}-\mathbf{a}||\to 0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; \boldsymbol{\ell} \quad \text{y} \quad d)\ \lim_{\mathbf{u}\to\mathbf{0}} \mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{u}) \;=\; \boldsymbol{\ell}\ .$$

Proposición 5. *Si* $\mathbf{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es un campo vectorial de ley* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x}))$*, siendo cada* f_k *un campo escalar, entonces, en un punto* $\mathbf{a}$ *interior a* A*, existe el límite de* $\mathbf{f}$ *si y sólo si existen los límites de todas las componentes escalares* f_k*, y además*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \;=\; \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})) \;=\; (\ell_1,\ldots,\ell_m) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f_k(\mathbf{x}) \;=\; \ell_k\ ,\ \text{ para todo } k = 1,\ldots,m\ .$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ dado, si en primer lugar se considera que $\boldsymbol{\ell}$ es el límite de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$, se asegura la existencia del valor δ de la definición, que sirve para mostrar la tesis referida a los campos escalares, proponiendo como valor del límite para el campo f_k a la componente k-ésima del vector $\boldsymbol{\ell}$,

$$0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| \;<\; \delta \;\;\Rightarrow\;\; |f_k(\mathbf{x})-\ell_k| \;\leqq\; ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\ell}|| \;<\; \varepsilon\ .$$

Recíprocamente, si cada campo f_k tiene límite ℓ_k en el punto $\mathbf{a}$, existen números δ_k tales que $0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta_k$ implica $|f_k(\mathbf{x})-\ell_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, valiendo simultáneamente las n desigualdades para δ más chico que todos ellos, queda el vector $\boldsymbol{\ell}$ formado por los límites de los campos componentes como límite del campo vectorial, siendo

$$0 < ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| \;<\; \delta \;\;\Rightarrow\;\; ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\ell}||^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} (f_k(\mathbf{x})-\ell_k)^2 \;<\; n\frac{\varepsilon^2}{n} \;=\; \varepsilon^2 \;\;\Rightarrow\;\; ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\boldsymbol{\ell}|| \;<\; \varepsilon\ . \qquad \textit{Q.E.D.}$$

Proposición 6. *(Álgebra de límites de campos vectoriales o escalares) Si* $\mathbf{f}$ *y* $\mathbf{g}$ *son campos vectoriales de* $\mathbb{R}^n$ *en* $\mathbb{R}^m$ *con igual dominio* $A \subseteqq \mathbb{R}^n$ *y existen los límites* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell}_1$ *y* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell}_2$*, valen las siguientes afirmaciones:*

a) Existe una bola de centro $\mathbf{a}$*, en donde el campo* $\mathbf{f}$ *está acotado.* [2]

b) Existe el límite de la función $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*, y vale* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f}+\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2$*.*

c) Para $\lambda \in \mathbb{R}$*, existe el límite de la función* $\lambda\mathbf{f}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*, y vale* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\lambda\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \lambda\boldsymbol{\ell}_1$*.*

d) Existe el límite de la función producto escalar $\mathbf{f}\times\mathbf{g}$ *en el punto* $\mathbf{a}$*, y vale* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} (\mathbf{f}\times\mathbf{g})(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\ell}_1 \times \boldsymbol{\ell}_2$*.*

e) Existe el límite de la función $||\mathbf{f}||$ *en el punto* $\mathbf{a}$*, y vale* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} ||\mathbf{f}||(\mathbf{x}) = ||\boldsymbol{\ell}_1||$*.*

f) Si $m = 1$*, existe el límite de la función* fg *en* $\mathbf{a}$*, y vale* $\ell_1\ell_2$*, y si además es* $\ell_2 \neq 0$*, existe el límite de la función cociente* $\frac{f}{g}$ *con valor* $\frac{\ell_1}{\ell_2}$*.*

Observación 4. *Para funciones reales, hay sólo una dirección (y dos sentidos) en que la variable independiente se puede acercar al punto donde se analiza el límite, y se concluye que existe el límite, si y sólo si existen y coinciden los límites laterales. En cambio, en* $\mathbb{R}^n$*, la situación es más compleja, ya que existen infinitas direcciones para considerar. De ello puede concluirse que si al acercarse la variable al punto por una curva dada, los valores de la función no tienden a un valor finito, o si al hacerlo por dos curvas diferentes cualesquiera, la función se acerca a dos valores distintos, la función no puede tener límite en el punto. Sin embargo, que una función se acerque a un valor dado por infinitas curvas consideradas, tampoco será suficiente para asegurar la existencia de límite, a menos que de alguna manera se pruebe que esto pasa para todas las formas posibles de acercar la variable al punto.*

Ejemplo 4.

a) Para analizar la existencia de límite del campo de ley $f(\mathbf{x}) = f(x,y) = \frac{5xy}{x^2+y^2}$*, para* $\mathbf{x}$ *acercándose a* $\mathbf{0}$*, se observan los comportamientos, según se consideren puntos sobre la recta* $x = y$*, o sobre el eje* $x = 0$*,*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{0}\\ x=y}} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{2x^2} = \frac{5}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{0}\\ x=0}} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0\,,$$

lo cual permite concluir la no existencia de límite.
Otra forma, cuando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$*, que será útil en la práctica, es analizar el comportamiento, pasando de las coordenadas cartesianas del punto* (x,y) *a las polares, mediante el conocido cambio* $x = \rho\cos\theta$ *e* $y = \rho\operatorname{sen}\theta$*, siendo* $(x,y) \to \mathbf{0} \Leftrightarrow \rho \to 0$*,*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{5xy}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{5(\rho\cos\theta)(\rho\operatorname{sen}\theta)}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\operatorname{sen}\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} 5\cos\theta\operatorname{sen}\theta \begin{cases} \nearrow \frac{5}{2} \text{ si } \theta = \frac{\pi}{4} \\ \searrow 0 \text{ si } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases},$$

de donde se concluye que el límite depende de la dirección por la cual la variable se vaya aproximando al origen, observando los mismos casos particulares, $\frac{5}{2}$ *para* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *y* 0 *para* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, encontrados en la forma cartesiana.*

[2] Un campo vectorial $\mathbf{f} : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ está acotado en un conjunto A si, considerando una norma en $\mathbb{R}^m$, existe $M > 0$ tal que, $||\mathbf{f}(\mathbf{x})|| \leqq M$, para todo $\mathbf{x} \in A$.

b) *Respecto del límite del campo de ley* $g(\mathbf{x}) = \frac{5x^2y}{x^2+y^2}$ *acercándose al origen, puede comenzarse analizando el comportamiento siguiendo cualquier segmento recto de ecuaciones paramétricas* $x = at$ *e* $y = bt$ *(para constantes* a, b *no simultáneamente nulas),*

$$\lim_{\substack{\mathbf{x}\to\mathbf{0} \\ x=at\ ,\ y=bt}} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{5a^2bt^3}{(a^2+b^2)t^2} = 0\ .$$

Esto no implica que exista el límite del campo, pero al menos proporciona el valor 0 como el candidato necesario para utilizar en la definición de límite. Con éste, usando las acotaciones

$$\left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = \left| \frac{x^2}{x^2+y^2} \right| |5y| \leqq 5\,|y| \leqq 5\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

se concluye, dado $\varepsilon > 0$ *y eligiendo* $\delta < \frac{\varepsilon}{5}$*, la confimación del límite 0, a través de la implicancia*

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} = ||(x,y)-(0,0)|| < \delta \ \Rightarrow\ \left| \frac{5x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| \leqq 5\sqrt{x^2+y^2} < 5\delta = \varepsilon\ .$$

Usando coordenadas polares, también se puede concluir este límite, siendo el resultado independiente de la dirección de aproximación,

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{5x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{5(\rho\cos\theta)^2(\rho\operatorname{sen}\theta)}{(\rho\cos\theta)^2+(\rho\operatorname{sen}\theta)^2} = \lim_{\rho\to 0} 5\rho\, \underbrace{\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta}_{\text{acotado}} = 0\ .$$

Al igual que para funciones reales, la continuidad de campos vectoriales se define mediante la propiedad de sustitución directa en el cálculo de límites.

Definición 6. *Un campo vectorial* $\mathbf{f} : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, se dice continuo en un punto* $\mathbf{a} \in A$ *si allí tiene límite, y vale* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{a})$*, esto es, si para dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$*, tal que*

$$||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta \ \text{ implica } \ ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|| < \varepsilon\ ,$$

y se dice continuo en el conjunto A*, si es continuo en cada* $\mathbf{a} \in A$*.*

Todas las propiedades enunciadas en la Proposición 6 sobre álgebra de límites y en la Proposición 5 sobre límite por componentes, se adaptan para el caso de funciones continuas, simplemente analizando los valores de los campos en los puntos bajo análisis y enunciando con las adaptaciones correspondientes, las siguientes proposiciones:
Proposición 6' (Álgebra de continuidad de campos vectoriales o escalares).

Proposición 7. *Un campo vectorial* $\mathbf{f} = (f_1, .., f_m) : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *es continuo en* $\mathbf{a}$ *si y sólo si cada campo escalar* f_k *es continuo en* $\mathbf{a}$*, para* $k = 1, ..., m$*.*

A continuación, se agrega el posterior resultado de continuidad para la composición, también similar a la continuidad de la composición conocida para funciones reales.

Proposición 8. *Si* $\mathbf{f} : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $\mathbf{g} : B \subseteqq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *son dos funciones tales que* $\mathbf{f}(A) \subseteqq B$*, y para* $\mathbf{a} \in A$ *son* $\mathbf{f}$ *continua en* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{g}$ *continua en* $\mathbf{f}(\mathbf{a})$*, entonces es* $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ *continua en* $\mathbf{a}$*.*

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, siendo $\mathbf{g}$ continua en $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, se asegura la existencia de $\rho > 0$, tal que

$$||\mathbf{y}-\mathbf{f}(\mathbf{a})|| < \rho \;\Rightarrow\; ||\mathbf{g}(\mathbf{y})-\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))|| < \varepsilon \,,$$

y a su vez, de la continuidad de $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$, dado el ρ recién garantizado, sigue la existencia de δ tal que

$$||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta \;\Rightarrow\; ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|| < \rho \,.$$

Combinando lo anterior, dado el ε original, sigue la existencia de δ tal que

$$||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta \;\Rightarrow\; ||\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{a})|| < \rho \;\Rightarrow\; ||\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))-\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}))|| = ||(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{x})-(\mathbf{g}\circ\mathbf{f})(\mathbf{a})|| < \varepsilon \,,$$

y luego la continuidad de la función $\mathbf{g}\circ\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$. *Q.E.D.*

Ejemplo 5.

a) *Los campos escalares constantes son continuos en todos los puntos. En efecto, dados* $\mathbf{a}$ *y* $\varepsilon > 0$, *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})| = |c-c| = 0 < \varepsilon \,.$$

b) *También es continuo en todo* $\mathbf{a}$ *el campo proyección sobre la primera variable, de ley* $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n) = x_1$, *siendo, para* $\varepsilon > 0$ *y* $\delta < \varepsilon$,

$$|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})| = |x_1-a_1| \leqq ||\mathbf{x}-\mathbf{a}|| < \delta < \varepsilon \,.$$

De manera similar, resultan continuas las demás proyecciones y también continuos los polinomios y las funciones racionales, en los puntos en que el denominador no se anula.

c) *Los campos de leyes* $f(\mathbf{x}) = \sqrt{x^2+y^2}$ *y* $g(\mathbf{x}) = \ln\left(1+x^2+y^2+z^2\right)$ *son continuos en* $\mathbb{R}^2$ *y* $\mathbb{R}^3$ *respectivamente, siendo composición de campos continuos con funciones de una variable continuas.*

4. Derivadas Direccionales y Parciales de Campos Escalares

Si en un campo escalar que depende de varias variables, se dejan fijas todas, salvo una, lo que se obtiene es una función real, la cual, en puntos en particular, pueden resultar o no derivables. Esto da lugar a la siguiente definición de derivadas parciales de campos escalares.

Definición 7. *Si* $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es un campo escalar y* $\mathbf{a}$ *es un punto en el interior de A, se llama derivada parcial respecto de la k-ésima variable del campo f en el punto* $\mathbf{a}$ *al valor, supuesto que el límite exista,*

$$D_k f(\mathbf{a}) = f_{x_k}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_k)-f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_k+h,\ldots,a_n)-f(a_1,\ldots,a_n)}{h} \,.$$

También se la llama derivada direccional de f en el punto $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{e}_k$.
De modo más general, si $\mathbf{v}$ *es un vector de* $\mathbb{R}^n$, *se denominará derivada direccional de f en el punto* $\mathbf{a}$ *en la dirección de* $\mathbf{v}$ *a la cantidad, suponiendo de nuevo la existencia del límite, siendo* $\mathbf{v}_0$ *el versor asociado a* $\mathbf{v}$,

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v}_0)-f(\mathbf{a})}{h} \,.$$

Además de observar que calcular derivadas parciales se reduce al caso de funciones reales fijando como constantes las variables que deban fijarse, surge como consecuencia de la definición de derivadas parciales la interpretación geométrica para gráficas en $\mathbb{R}^3$ de esos valores como las pendientes de las rectas tangentes a las curvas que se obtienen intersectando a la gráfica del campo con planos paralelos a los coordenados que pasen por el punto bajo análisis, como se observa en la Figura 3.

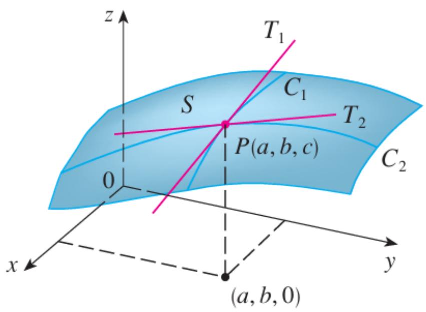

Figura 3: Derivadas parciales de un campo escalar

Ejemplo 6.

a) *Las derivadas parciales de la función de ley $f(x,y)=x+y^2$, en el punto $\mathbf{a}=(a,b)$, resultan*

$$D_1 f(\mathbf{a}) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)+b^2-a-b^2}{h} \;=\; 1\,,$$

y

$$D_2 f(\mathbf{a}) \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{a+(b+h)^2-a-b^2}{h} \;=\; 2b\,.$$

Como ha sido mencionado, resulta de calcular la derivada de la función al fijar $y=b$, y evaluando en el punto $x=a$, y el de derivar a la que se obtiene fijando $x=a$, evaluada en $y=b$.

b) *En lugar de calcular las derivadas parciales del campo de ley $f(x,y,z)=e^x\operatorname{sen}(y+z^2)$ en el punto $\mathbf{a}=(a,b,c)$ por definición como en el caso anterior, se elige hacerlo fijando variables y derivando respecto de las demás,*

$$f_x(a,b,c)=e^a\operatorname{sen}(b+c^2)\,,\quad f_y(a,b,c)=e^a\cos(b+c^2)\quad \text{y}\quad f_z(a,b,c)=2ce^a\cos(b+c^2)\,.$$

c) *Para calcular la derivada direccional del campo de ley $f(x,y)=x+y$ en el punto $\mathbf{a}=(1,1)$, en la dirección del vector $\mathbf{v}=(-1,-1)$, se utiliza el versor asociado a $\mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, y se busca*

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v}_0)-f(\mathbf{a})}{h} \;=\; \lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}h,1-\frac{1}{\sqrt{2}}h\right)-f(1,1)}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0}\frac{1-\frac{h}{\sqrt{2}}+1-\frac{h}{\sqrt{2}}-2}{h} \;=\; -\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

En la Proposición 10 se presentará, para ciertos campos escalares, una expresión para el cálculo de derivadas direccionales, evitando la búsqueda de límites.

Siendo las derivadas parciales de un campo escalar $f : A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un nuevo campo escalar, definido en principio en un subconjunto de A, cabe analizar sobre éstos la existencia de derivadas parciales, que serán derivadas parciales dobles o segundas del campo original f, notadas, para $k,j=1,\ldots,n$, por

$$D_{kj}f \;=\; D_k(D_jf) \;=\; \left(f_{x_j}\right)_{x_k}=f_{x_jx_k} \;=\; \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_j}\,.$$

Ejemplo 7. *Para calcular las derivadas parciales dobles del campo de ley $f(x,y) = xe^{y^2}$, se comienza calculando las derivadas parciales, quedando éstas con las leyes $f_x(x,y) = e^{y^2}$ y $f_y(x,y) = 2xye^{y^2}$, con las cuales quedan*

$$D_{11}f(x,y) = f_{xx}(x,y) = 0 \ , \quad D_{21}f(x,y) = f_{xy}(x,y) = e^{y^2}2y \ ,$$

$$D_{12}f(x,y) = f_{yx}(x,y) = e^{y^2}2y \quad \text{y} \quad D_{22}f(x,y) = f_{yy}(x,y) = x\left(e^{y^2}(2y)^2 + e^{y^2}2\right)$$

En el ejemplo anterior se observa que las derivadas segundas "cruzadas" D_{12} y D_{21} resultan ser iguales en todo punto del dominio del campo escalar. Esta situación no es general, pero sí frecuente. En el Ejercicio 6 se mostrará que esto no sucede en un caso particular y en el resultado a continuación, cuya demostración se posterga hasta la parte anexa, se exhibe una condición suficiente para que la propiedad sí se satizfaga.

Proposición 9. *Si $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar para el cual, para un par de índices k, j, existen las derivadas parciales $D_k f$, $D_j f$, $D_{kj} f$ y $D_{jk} f$ en una bola abierta centrada en un punto* **a***, en el cual son continuos los campos escalares $D_{kj} f$ y $D_{jk} f$, entonces $D_{kj} f(\mathbf{a}) = D_{jk} f(\mathbf{a})$.*

Continuando con los contraejemplos, en el mismo Ejercicio 6 se concluirá la existencia de campos no continuos en un punto dado, pero con derivadas en todas las direcciones, marcando una diferencia importante con el hecho conocido para funciones reales, donde la existencia de derivada implica la continuidad de la función.

5. Diferenciabilidad de campos escalares.

Una de las ideas más importantes en el estudio de funciones de una variable, es que, localmente, el gráfico de una función diferenciable en un punto se vuelve indistinguible de su recta tangente, y puede aproximarse la función mediante la función lineal correspondiente. Dado que la existencia de derivadas parciales en toda dirección en torno a un punto ni siquiera asegura la continuidad de un campo, la extensión de la propiedad de aproximación lineal será asegurada bajo una definición más restrictiva que la de existencia de derivadas.

Definición 8. *Se dice que un campo escalar $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto* **a** *interior a A, si existe un vector $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$, que permita expresar el incremento*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \ = \ \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| E(\mathbf{a},\mathbf{h}) \ , \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} E(\mathbf{a},\mathbf{h}) \ = \ 0 \ ,$$

Observación 5. *Por definición entonces, sigue que si un campo escalar de dos variables f es diferenciable en un punto $\mathbf{a} = (a,b)$ de su dominio, el plano de ecuación*

$$z \ = \ f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \ ,$$

resulta ser tangente a la gráfica de f en el punto **a***. Si bien no es necesaria la diferenciabilidad en el punto para armar esta ecuación, ya que basta con conocer el valor de la función y las derivadas parciales, debe observarse que un plano construido a partir de una función no diferenciable, será un lugar geométrico que no resultará útil como plano tangente aproximante.*

Proposición 10. *Si $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable en el punto* **a** *interior a A, entonces*

a) f es continua en **a***, y además*

b) f tiene derivadas direccionales en cualquier dirección $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y vale, siendo $\mathbf{v}_0$ el versor asociado a **v***,*

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) \ = \ \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{v}_0 \ .$$

<u>Demostración</u>. La continuidad sigue de aplicar la definición de diferenciabilidad en (1), y propiedades de Álgebra de Límites en (2),

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})) \overset{(1)}{=} \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}(\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{h}+||\mathbf{h}||E(\mathbf{a},\mathbf{h})) \overset{(2)}{=} \boldsymbol{\alpha}\times\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\mathbf{h}+\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}||\mathbf{h}||E(\mathbf{a},\mathbf{h}) = 0 .$$

Por su parte, con argumentos similares, notando que para $h\to 0$ queda $\mathbf{h}=h\mathbf{v}_0\to\mathbf{0}$ y luego $E(\mathbf{a},h\mathbf{v}_0)\to 0$,

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{v}_0)-f(\mathbf{a})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{\alpha}\times(h\mathbf{v}_0)+||h\mathbf{v}_0||E(\mathbf{a},h\mathbf{v}_0)}{h} = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{v}_0\pm||\mathbf{v}_0||E(\mathbf{a},h\mathbf{v}_0) = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{v}_0 .$$

Q.E.D.

Se remarca que la proposición anterior da dos condiciones necesarias de diferenciabilidad, permitiendo concluir que si una función, no es continua en un punto, o no tiene derivada en alguna dirección, en particular si no tiene alguna derivada parcial, no puede ser diferenciable en ese punto.

Por otro lado, conocidas las derivadas parciales del campo escalar f en el punto $\mathbf{a}$, se define el vector gradiente de f en el punto $\mathbf{a}$, como el formado por esos valores,

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a})\right) ,$$

y la segunda parte de la proposición anterior, para funciones diferenciables, permite dar forma al vector $\boldsymbol{\alpha}$ de la definición de diferenciabilidad,

$$\alpha_k = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{e}_k = f'(\mathbf{a},\mathbf{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{a}) \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{\alpha} = \nabla f(\mathbf{a}) .$$

Observación 6. *La expresión anterior permite simplificar el estudio de diferenciabilidad de un campo en un punto, mostrando que a lo sumo un vector puede ser útil en la definición de diferenciabilidad. Si escribiendo la aproximación de primer orden con $\boldsymbol{\alpha}=\nabla f(\mathbf{a})$ se obtiene un resto con las características necesarias, entonces el campo es diferenciable, ya que se encontró el vector pedido en la definición, mientras que si con ese $\boldsymbol{\alpha}$ el resto no es como se necesita, entonces no hay posibilidad de que la propiedad se cumpla con otro vector, y luego el campo no podrá ser diferenciable.*

Se deja para la parte anexa, la demostración de la siguiente condición suficiente de diferenciabilidad.

Proposición 11. *Si $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es un campo escalar tal que para todo $k=1,\ldots,n$ la derivada parcial D_kf existe y es continua en una bola centrada en el punto $\mathbf{a}$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{a}$.*

Ejemplo 8.

a) La función de ley $f(\mathbf{x})=\sqrt{|xy|}$ tiene derivadas parciales continuas en todo punto $\mathbf{x}$ para el cual $|xy|\neq 0$, y luego por la Proposición 11, es diferenciable en los puntos donde $x\neq 0$ e $y\neq 0$. Por otro lado, se observa que la derivada de f respecto de y no existe en los puntos $(x,0)$ con $x\neq 0$, no existiendo el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \sqrt{|x|}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h|}}{h} ,$$

que tampoco existe la derivada de f respecto de x en los puntos $(0,y)$ con $y\neq 0$, pero que sí existen las derivadas $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Luego, por la Proposición 10, f no puede ser diferenciable en los ejes, salvo posiblemente en el origen, lo cual se debe analizar por definición, no contando con otras herramientas.

Sabiendo entonces que en $\mathbf{a}=\mathbf{0}$*, valen* $f(\mathbf{a})=f_x(\mathbf{a})=f_y(\mathbf{a})=0$*, se plantea el cálculo, para* $\mathbf{h}=(h_1,h_2)$*,*

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} E(\mathbf{a},\mathbf{h}) &= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})\times\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} \\ &= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(h_1,h_2)-(f(0,0)+f_x(0,0)h_1+f_y(0,0)h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \sqrt{\frac{|h_1h_2|}{h_1^2+h_2^2}} \,,\end{aligned}$$

que, por ejemplo sobre la recta $h_1=h_2$*, queda* $\lim\limits_{h\to 0}\sqrt{\frac{h^2}{2h^2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}\neq 0$*, permitiendo concluir la no diferenciabilidad de* f *en* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$*. Por todo lo anterior,* f *es diferenciable en los puntos de* $\mathbb{R}^2$ *que no pertenezcan a alguno de los ejes coordenados.*

b) *Haciendo el mismo análisis para el campo de ley* $f(\mathbf{x})=\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *para* $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$*, e igual a 0 en el origen, continuo en* $\mathbb{R}^2$*, se deja como ejercicio mostrar que fuera del origen las derivadas parciales son continuas y por lo tanto el campo es en esos puntos diferenciable, y que además valen* $f(\mathbf{a})=0$ *y* $\nabla f(\mathbf{a})=\mathbf{0}$*. El estudio de la diferenciabilidad en el origen pasa por el análisis del límite de la función error,*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} E(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(f(\mathbf{a})+\nabla f(\mathbf{a})\times\mathbf{h})}{||\mathbf{h}||} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2} = 0 \,,$$

comprobándose este valor pasando a coordenadas polares, concluyendo la diferenciabilidad de f *en el punto* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$*, y luego en todo el plano.*

Además, de la expresión $f'(\mathbf{a},\mathbf{v})=\nabla f(\mathbf{a})\times\mathbf{v}_0$ de las derivadas direccionales para campos diferenciables, en los casos en que éstos tengan dominio en conjuntos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, y sea $\nabla f(\mathbf{a})\neq\mathbf{0}$, resultará,

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = ||\nabla f(\mathbf{a})||\cdot||\mathbf{v}_0||\cdot\cos\theta \,,$$

siendo θ el ángulo que forman los vectores. De ello, si en el punto $\mathbf{a}$ se consideran los diferentes versores del espacio, se observa que la derivada direccional tendrá su valor máximo cuando se elija el versor asociado en el mismo sentido al vector gradiente, de modo que $\cos\theta=1$, y será $f'(\mathbf{a},\mathbf{v})=||\nabla f(\mathbf{a})||$, y el valor será el mínimo eligiendo el opuesto del vector anterior, para el cual $f'(\mathbf{a},\mathbf{v})=-||\nabla f(\mathbf{a})||$. [3]

Ejemplo 9.

a) *La derivada direccional del campo de ley* $f(x,y,z)=x^2-yz+4xz^2+1$ *en el punto* $\mathbf{a}=(0,2,-1)$ *y en la dirección de* $\mathbf{v}=\left(1,0,\sqrt{3}\right)$*, se obtiene calculando el versor* $\mathbf{v}_0=\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}=\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$*, el vector* $\nabla f(\mathbf{a})$*,*

$$\nabla f(\mathbf{x})=(f_x(\mathbf{x}),f_y(\mathbf{x}),f_z(\mathbf{x}))=\left(2x+4z^2,-z,-y+8xz\right) \quad\Rightarrow\quad \nabla f(\mathbf{a}) = \nabla f(0,2,-1)=(4,1,-2) \,,$$

y aplicando Proposición 10 b), siendo f *con derivadas parciales continuas, y luego diferenciable,*

$$f'(\mathbf{a},\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{a})\times\mathbf{v}_0 = (4,1,-2)\times\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2-\sqrt{3} \,.$$

[3] Si bien estas afirmaciones fueron hechas para campos con dominio en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, sobre los que tiene sentido geométrico hablar de direcciones de movimiento, éstas valen en general en $\mathbb{R}^n$, como consecuencia de la parte referida a la igualdad en la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, Proposición 2.

b) *Conocido que la temperatura sobre los puntos de una región del plano se describen a través del campo de ley* $T(x,y) = \frac{1}{x^2+3y^2+1}$*, de la ley* $\nabla T(x,y) = \left(\frac{-2x}{(x^2+3y^2+1)^2}, \frac{-6y}{(x^2+3y^2+1)^2}\right)$*, sigue que la dirección a la que más rápido sube la temperatura, ubicados por ejemplo en el punto* $(3,1)$*, será la definida por el vector* $\nabla T(3,1) = (\frac{-6}{169}, \frac{-6}{169})$*, de dirección y sentido que el vector más simple* $(-1,-1)$*, y aquélla a la que más rápido descienda, será la dada por el vector* $-\nabla T(3,1)$*, paralelo y de igual sentido que* $(1,1)$*.*

c) *Si en el punto* $(1,1,2)$ *ubicado en la gráfica del paraboloide de ley* $z = 4-(x^2+y^2)$ *se soltara una partícula, se sabe que por acción de la gravedad, ésta caerá siguiendo la dirección en la cuál la velocidad sea máxima, esto es, aquélla en la que más rápido disminuya la componente* z *(considerando que* z *crece hacia arriba) del movimiento del punto sobre el paraboloide. Esto sucede, siendo* $\nabla f(1,1) = (-2,-2)$*, en la dirección dada por las dos primeras componenes* $(2,2)$*, quedando la velocidad igual a* $-||\nabla f(1,1)|| = -\sqrt{8}$ *(en las unidades que correspondan). Además, siendo los polinomios funciones diferenciables, se puede construir la ecuación del plano tangente a la gráfica del campo en el mismo punto,*

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1) = 2-2(x-1)-2(y-1) = 6-2x-2y\,.$$

6. Ejercicios

1. Para cada subconjunto de $\mathbb{R}^2$ a continuación, hallar los conjuntos interior, exterior y frontera. Decidir además si ellos son abiertos, cerrados, o de ninguno de estos tipos.

   a) $A = \{\mathbf{x} : xy > 0\}$ *b)* $A = \{\mathbf{x} : x > 0, y > 0, y < 2-x\}$ *c)* $A = \{\mathbf{x} : |x|+|y| \leqq 1\}$
   d) $A = \left\{\mathbf{x} : 1 < x^2+y^2 \leqq 4\right\}$ *e)* $A = \left\{\mathbf{x} : (x^2+y^2-4)x > 0\right\}$ *f)* $A = \left\{\mathbf{x} : 2x-y^2 \geqq 1\right\}$

2. Demostrar las siguientes afirmaciones:

   a) Los conjuntos $\mathbb{R}^n$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados.
   b) Si A, B son abiertos en $\mathbb{R}^n$ entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ son abiertos.
   c) Si A, B son cerrados en $\mathbb{R}^n$ entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ son cerrados.
   d) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\mathrm{int}(A)$ y $\mathrm{ext}(A)$ son abiertos.
   e) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\mathbb{R}^n = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{ext}(A)$ valiendo además $\mathrm{ext}(A) \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$, $\mathrm{ext}(A) \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$ y $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{int}(A) = \emptyset$.
   f) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{ext}(A) \cup \mathrm{Fr}(A)$ y $\mathrm{Fr}(A)$ son conjuntos cerrados.

3. En cada caso, representar las curvas de nivel para los campos de leyes y valores α indicados.

   a) $f(\mathbf{x}) = 6-3x-2y\,,\ \alpha = -6,0,6,12\,,$ *b)* $f(\mathbf{x}) = |x|+|y|\,,\ \alpha = -1,0,1,3\,,$

   c) $f(\mathbf{x}) = -\sqrt{9-x^2-y^2}\,,\ \alpha = -1,0,1,3$ y *d)* $f(\mathbf{x}) = x+y^2\,,\ \alpha = -1,0,2\,.$

4. Usando coordenadas polares describa las curvas de nivel del campo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de ley

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}\,.$$

5. Calcular los siguientes límites de campos escalares en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ según corresponda.

a) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} xy^3(x+y)^{-1}$	*b*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$	*c*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{xy}$	*d*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2}$
e) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} x\operatorname{sen}(\frac{1}{y})+y\sin(\frac{1}{y})$	*f*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$	*g*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\operatorname{sen} xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$	*h*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} y^2\ln(x^2+y^2)$
i) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$	*j*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{1}{x^4+y^4-2x^2y^2}$	*k*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x^2y}{x^2\exp x+2y^4}$	*n*) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{y^2\operatorname{sen}^2 x}{x^4+2y^4}$

6. *a*) Mostrar que el campo $f(\mathbf{x}) = \sqrt[3]{xy}$ es continua en el origen, que las derivadas parciales existen en el origen, pero las derivadas direccionales en todas las demás direcciones no existen.

   b) Probar que para el campo de ley $f(\mathbf{x}) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, y $f(\mathbf{0})=0$, resulta $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{0}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\mathbf{0})$, y verificar, analizando las derivadas primeras de f, que esto no contradice a la Proposición 9.

   c) Demostrar que el campo de ley $f(\mathbf{x}) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$, y $f(\mathbf{0})=0$ admite derivadas direccionales en el origen en toda dirección, y en tal punto no es continua. Luego verificar que el campo no es diferenciable en el origen para confirmar que esto no contradice a la Proposición 10.

7. *a*) Decidir si existe un campo escalar de dos variables con derivadas parciales de leyes $f_x(x,y)=x+4y$, $f_y(x,y)=3x-y$.

   b) Mostrar que los dos primeros campos a continuación son soluciones de la ecuación diferencial de Laplace, $f_{xx}+f_{yy}=0$, y los dos segundos, de la ecuación diferencial de ondas, $f_{xx}-f_{yy}=0$,

$$f_1(\mathbf{x}) = \ln(x^2+y^2)\ ,\ \ f_2(\mathbf{x}) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\ ,\ \ f_3(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}(x-4y)\ ,\ \ \text{y}\ \ f_4(\mathbf{x}) = \ln(x-y)(x-y)^2.$$

8. Mostrar que son continuos en el origen los campos de leyes

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0} \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}=\mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{0} \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{x}=\mathbf{0} \end{cases} \quad ,$$

calcular sus derivadas parciales allí, decidir si ellas son o no diferenciables en ese punto.

9. Analizar en qué puntos del plano son diferenciables los campos de leyes

$$a)\ f(\mathbf{x}) = \ln(x-y)\exp(x+y)\ ,\quad b)\ f(\mathbf{x}) = (x^2+y^2)(1+x^2+y^2)^{-1} \quad \text{y} \quad c)\ f(\mathbf{x}) = |x|+|y|\ .$$

10. Calcule las derivadas direccionales de los siguientes campos en los puntos indicados y en las direcciones dadas:

    a) $f(\mathbf{x}) = \exp x\cos(\pi y)$, $\mathbf{a}=(0,-1)$, $\mathbf{v}=(1,2)$

    b) $f(\mathbf{x}) = x^2yz$, $\mathbf{a}=(1,0,-1)$, $\mathbf{v}=(-1,1,0)$

    c) $f(\mathbf{x}) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $\mathbf{a}=(1,0)$, $\mathbf{v}=(2,1)$.

11. *a*) Encontrar los puntos $\mathbf{a}$ en el circunferencia unidad con centro en el origen, y las direcciones $\mathbf{v}_0$ para los cuales las derivadas direccionales del campo de ley $f(\mathbf{x}) = 3x^2+y^2$ tengan el mayor valor.

    b) Hallar los valores de las constantes a, b y c tales que la derivada direccional del campo de ley $f(\mathbf{x}) = axy^2+byz+cz^2x^3$ en el punto $\mathbf{a}=(1,2,-1)$ tenga un valor máximo igual a 64 en una dirección paralela al eje z.

12. *a*) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $z = x\sin\frac{y}{x}$ en el punto $(a,b,a\sin\frac{b}{a})$ (con $a \neq 0$) y comprobar que ese plano pasa por el origen. Generalizar el resultado para cualquier superficie de la forma $z = xf(\frac{y}{x})$.

    b) Encontrar los dos planos paralelos al de ecuación $x+2y+3z = 1$, tangentes al elipsoide de ecuación $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}+z^2 = 1$.

13. Un campo vectorial $\mathbf{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice diferenciable en un punto $\mathbf{a}$ interior a A, si existe una matriz $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tal que, para $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$, vale la igualdad vectorial

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \;=\; \mathbf{f}(\mathbf{a})+\mathbf{T}\mathbf{h}+\|\mathbf{h}\|\,E(\mathbf{a},\mathbf{h}) \ , \quad \text{donde} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} E(\mathbf{a},\mathbf{h}) = \mathbf{0}\,.$$

Mostrar que $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_m)$ es diferenciable en $\mathbf{a}$ si y sólo si cada f_k es diferenciable en $\mathbf{a}$, para $k = 1,\ldots,m$, y en ese caso necesariamente resulta la matriz $\mathbf{T}$ de la definición, de la forma

$$\mathbf{T} \;=\; \begin{pmatrix} \nabla f_1(\mathbf{a}) \\ \nabla f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{a}) & D_2 f_1(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_1(\mathbf{a}) \\ D_1 f_2(\mathbf{a}) & D_2 f_2(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_2(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 f_m(\mathbf{a}) & D_2 f_m(\mathbf{a}) & \cdots & D_n f_m(\mathbf{a}) \end{pmatrix},$$

referida como matriz Jacobiana del campo $\mathbf{f}$ en el punto $\mathbf{a}$, y notada usualmente por $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$.

Anexo

Demostración de la Proposición 11. Como el campo tiene derivadas parciales continuas en una bola abierta centrada en el punto $\mathbf{a}$, sin perder generalidad, al vector $\mathbf{h}$ en la definición de diferenciabilidad que se hará tender al vector nulo, puede considerárselo tal que $\mathbf{a}+\mathbf{h}$ quede dentro de tal bola. Con esos elementos, puede escribirse al incremento del campo, intercalando los términos mencionados en (1) y usando el Teorema del Valor medio en cada término a la izquierda de (2), siendo las funciones dependientes de una variable, dejando a las demás fijas, derivable,

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a}) \overset{(1)}{=} f(a_1+h_1,a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,\ldots,a_n) \;=\; f(a_1+h_1,a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n)$$

$$\pm f(a_1,a_2+h_2,\ldots,a_n+h_n)\pm f(a_1,a_2,a_3+h_3,\ldots,a_n+h_n)\pm\ldots\pm f(a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n+h_n)-f(a_1,\ldots,a_n)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k+h_k,a_{k+1}+h_{h+1},\ldots,a_n+h_n)-f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1}+h_{k+1},\ldots,a_n+h_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} D_k f(a_1,\ldots,a_{k-1},\xi_k,a_{k+1}+h_{h+1},\ldots,a_n+h_n)h_k$$

donde cada ξ_k se encuentra entre a_k y a_k+h_k. Usando la última igualdad, recordando que para f diferenciable el vector $\boldsymbol{\alpha}$ de la definición de diferenciabilidad de f en el punto $\mathbf{a}$ es necesariamente $\nabla f(\mathbf{a})$, usando la desigualdad (3), junto al hecho $\frac{h_k}{||\mathbf{h}||} \leqq 1$ para todo k, resulta

$$\left|\frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\times\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||}\right| \;=\; \left|\sum_{k=1}^{n}\left(D_k f(a_1,\ldots,a_{k-1},\xi_k,a_{k+1}+h_{k+1},\ldots,a_n+h_n)\right.\right.$$

$$\left.\left. -\; D_k f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)\right)\frac{h_k}{||\mathbf{h}||}\right|$$

$$\overset{(3)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} \left| D_k f(a_1,\ldots,a_{k-1},\xi_k,a_{k+1}+h_{k+1},\ldots,a_n+h_n) - D_k f(a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \right| .$$

En este punto se observa que, siendo ξ_k entre a_k y a_k+h_k, resulta,

$$(a_1,\ldots,a_{k-1},\xi_k,a_{k+1}+h_{k+1},\ldots,a_n+h_n) \to (a_1,\ldots,a_{k-1},a_k,a_{k+1},\ldots,a_n) \quad \text{para} \quad \mathbf{h}\to\mathbf{0} ,$$

y de la continuidad de todos los campos $D_k f$, que

$$\left| \frac{f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \times \mathbf{h}}{||\mathbf{h}||} \right| \to 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ diferenciable en } \mathbf{a} .$$

Q.E.D.

Demostración de la Proposición 9. Se mostrará el resultado para campos f dependiente de dos variables, x,y, siendo el caso general (para dos variables genéricas entre n), de demostración análoga a éste, dejando a las demás variables fijas. En este caso, si $\mathbf{a}=(a,b)$, dado que luego será $\mathbf{h}=(h_1,h_2)\to\mathbf{0}$, se puede suponer sin perder generalidad que las componentes h_1 y h_2 pueden ser elegidas tales que los puntos $(a+h_1,b)$, $(a,b+h_2)$ y $(a+h_1,b+h_2)$ pertenezcan a la bola donde las derivadas segundas de f existen y son continuas. La idea será, en ese conjunto y para esos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{h}$, buscar formas alternativas de la expresión

$$\Delta(h_1,h_2) = f(a+h_1,b+h_2) - f(a+h_1,b) - f(a,b+h_2) + f(a,b) ,$$

para la cual como se adelantó, se hará finalmente $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$. En primer lugar entonces, notar que la función de ley $\Phi(x) = f(x,b+h_2) - f(x,b)$, es derivable en la bola, y vale allí la ley para la derivada, $\Phi'(x) = D_1 f(x,b+h_2) - D_1 f(x,b)$, mientras que también lo es la función $\varphi(y) = D_1 f(x,y)$, con derivada $\varphi'(y) = D_2(D_1 f(x,y)) = D_{21} f(x,y)$ de manera que usando el Teorema del Valor Medio para Funciones Derivables respectivamente en (1) y en (2), queda, para ξ_1 entre a y $a+h_1$, y η_1 entre b y $b+h_2$,

$$\Delta(h_1,h_2) = (f(a+h_1,b+h_2) - f(a+h_1,b)) - (f(a,b+h_2) - f(a,b)) = \Phi(a+h_1) - \Phi(a)$$

$$\overset{(1)}{=} \Phi'(\xi_1)h_1 = (D_1 f(\xi_1,b+h_2) - D_1 f(\xi_1,b))h_1 \overset{(2)}{=} D_2(D_1 f(\xi_1,\eta_1)h_2)h_1 = D_{21} f(\xi_1,\eta_1)h_1h_2 .$$

De igual modo, usando la función de ley $\Psi(y) = f(a+h_1,y) - f(a,y)$, de derivada $\Psi'(y) = D_2 f(a+h_1,y) - D_2 f(a,y)$, y la de ley $\psi(x) = D_2 f(x,y)$, con derivada $\psi'(x) = D_1(D_2 f(x,y)) = D_{12} f(x,y)$, se asegura la existencia de ξ_2 entre a y $a+h_1$, y de η_2 entre b y $b+h_2$, tales que ahora

$$\Delta(h_1,h_2) = (f(a+h_1,b+h_1) - f(a,b+h_2)) - (f(a+h_1,b) - f(a,b)) = \Psi(b+h_2) - \Psi(b)$$

$$= \Psi'(\eta_2)h_2 = (D_2 f(a+h_1,\eta_2) - D_2 f(a,\eta_2))h_2 = D_1(D_2 f(\xi_2,\eta_2)h_1)h_2 = D_{12} f(\xi_2,\eta_2)h_1h_2 .$$

De lo anterior, para $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$, los valores ξ_1,ξ_2, que dependen de $\mathbf{h}$ se acercan a a, lo mismo los valores η_1 y η_2 tienden a b, y dado que las derivadas segundas del campo f son continuas, existen los límites

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\Delta(h_1,h_2)}{h_1h_2} = D_{21} f(a,b) \quad \text{y} \quad \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\Delta(h_1,h_2)}{h_1h_2} = D_{12} f(a,b) ,$$

concluyendo la tesis a partir del resultado de unicidad de límites puntuales de campos escalares. *Q.E.D.*