PRÁCTICA 3 COMPLEMENTARIA - Límite y Continuidad - Parte 1

Límite

1. (a) Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

   I. $|x-3|<1 \Rightarrow |x+3|<7.$

   II. $|x-2|<1 \Rightarrow \dfrac{1}{|x|}<1.$

   (b) Interpretar geométricamente los resultados obtenidos en los ítem anteriores.

2. (a) En el siguiente ejemplo determinar, si ello resulta posible, un número $\delta>0$ tal que

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|<\epsilon,$$

   para los valores de a, c y ϵ dados en cada caso:

$$f(x)=\frac{1}{x},\ a=2,\ c=\frac{1}{2},\ \epsilon=0{,}0001.$$

   (b) Representar gráficamente la función f en un entorno del punto a e interpretar geométricamente el resultado obtenido.

3. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\leq 1,\\ \dfrac{x}{2}+1 & x>1,\end{cases}$$

   (a) graficar f y comprobar a partir de la gráfica la siguiente afirmación:

   Dado $\epsilon=1$, para todo $0<\delta<1$ se verifica que $0<|x-1|<\delta \ \Rightarrow |f(x)-1|<\epsilon.$

   (b) Del resultado de la parte (a), ¿se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$?

4. Determinar el dominio y la gráfica de $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$. A partir de la gráfica indicar el valor de $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

5. Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

   (a) $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x-5}=2.$

   (b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=-6.$

   (c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$ para $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\neq 1,\\ 2 & x=1.\end{cases}$

6. Probar que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$ si y sólo si $\lim\limits_{h\to 0} f(c+h)=L.$

Cálculo de límites

7. Calcular el siguiente límite, indicando las propiedades aplicadas.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2+x\right)\left(x^3-1\right).$$

8. Sabiendo que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 6$$

determinar, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{2f(x)}{g(x)+3h(x)}$.

9. Calcular los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} (x^2+3x+2)$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \ln(3x-2)$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{3x+4}{x+1}$.

(e) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$.

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)\cos(\pi x)}{x^2-25}$.

(g) $\displaystyle\lim_{u\to 3} \frac{15-5u}{2u^2-4u-6}$.

(h) $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$.

(j) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \cos\left(\tfrac{x}{4}\right)$.

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(4x+x^3\right)^{\frac{3}{2}}$.

(l) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h}$.

10. (a) Demostrar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x^3)$.

(b) Dar un ejemplo en que exista $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x^2)$, pero no exista $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

11. Calcular los siguientes límites.

(a) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\tan(t)\sec(2t)}{3t}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+x\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)\cos(x)}$.

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\operatorname{sen}(x)\cot(3x))$.

12. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x<0 \\ \sqrt{x}, & x>0 \end{cases}$$

Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)$. Utilizar las definiciones formales para verificar los resultados. En base a lo obtenido, ¿qué se puede decir acerca de $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$? Justificar la respuesta.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119