3. Transformaciones lineales

Recordemos que uno de los objetivos del Álgebra Lineal es caracterizar la solución de sistemas lineales, en el caso general de m ecuaciones con n incógnitas

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & \vdots & & \vdots & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

donde los coeficientes están en $\mathbb{K}$. El estudio de las transformaciones lineales y sus propiedades nos dan buenas herramientas para caracterizar las soluciones de sistemas lineales.

3.1. Definiciones y propiedades elementales

En esta sección V y W son espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Estudiaremos funciones de V en W con propiedades particulares.

Definición 3.1 *Una función $T : V \to W$ es llamada* ***lineal*** *si verifica*

$$T(u+v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V \tag{4}$$

$$T(\alpha v) = \alpha T(u), \forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}. \tag{5}$$

El conjunto de todas las funciones lineales de V en W se nota como $\mathcal{L}(V,W)$. Muchas veces se escribe Tu en lugar de $T(u)$. Se refiere frecuentemente a estas funciones como ***transformaciones lineales****.*
Si $V = W$, se escribe $\mathcal{L}(V,V) = \mathcal{L}(V)$ y se llama a $T \in \mathcal{L}(V)$ un ***operador lineal sobre V****.*

Ejemplo 3.1

1. *La aplicación nula $0 : V \to V$ que asigna a todo elemento $v \in V$ el $0 \in W$ es lineal.*
2. *La identidad $I : V \to V$ definida por $Iv = v$ es lineal.*
3. *Consideremos $V = \mathbb{R}[x]$ el espacio vectorial de polinomios sobre $\mathbb{R}$ y la aplicación $T : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ derivación, definida por $T(p(x)) = p'(x)$.*
   Luego para dos polinomios $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, se tiene
   $$T(p(x)+q(x)) = (p(x)+q(x))' = p'(x) + q'(x) = T(p(x)) + T(q(x)).$$
   De manera similar para $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ y un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene
   $$T(\alpha p(x)) = (\alpha p(x))' = \alpha p'(x) = \alpha T(p(x)),$$
   por lo tanto T es lineal.
4. *Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por $T(x,y) = (x-2y, 3x+y)$. Luego para $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$ se tiene*
   $$\begin{aligned} T((x,y)+(x',y')) &= T(x+x', y+y') = (x+x'-2(y+y'), 3(x+x')+y+y') = \\ &= (x-2y, 3x+y) + (x'-2y', 3x'+y') = T(x,y) + T(x',y'). \end{aligned}$$
   Además para $\alpha \in \mathbb{R}$
   $$T(\alpha(x,y)) = T(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x - 2\alpha y, 3\alpha x + \alpha y) = \alpha(x-2y, 3x+y) = \alpha T(x,y).$$
   por lo tanto T es lineal. Más aun cualquier aplicación $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ definida por
   $$T(x_1, \cdots, x_n) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \cdots, a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n),$$
   con $a_{ij} \in \mathbb{K}$ es lineal. Esto podríamos escribirlo considerando $A = (a_{ij})_{n\times m}$ como $Tx = xA$.

5. *No todas las funciones son lineales. Por ejemplo la exponencial* $f(x) = e^x$ *no es lineal pues* $e^{2x} \neq 2e^x$. *La función* $f(x) = x - 1$ *no es lineal pues* $f(x + y) = x + y - 1 \neq x - 1 + y - 1 = f(x) + f(y)$.

6. *Sea* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *y* $V = C(\mathbb{R})$ *el espacio vectorial de todas las funciones continuas de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$. *Definimos* $T : V \to V$ *como*
$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$
Es decir a cada función continua f *le asignamos su función integral. Entonces* T *es una transformación lineal de* V *en* V.

Teorema 3.1 *Sean* V *un espacio vectorial de dimensión finita,* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base ordenada de* V. *Sea* W *un espacio vectorial sobre el mismo cuerpo* $\mathbb{K}$ *y* $w_1, \cdots, w_n \in W$. *Entonces existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *tal que* $T(v_i) = w_i$ *para* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demos: Definamos la siguiente aplicación T sobre V. Para un $v \in V$, existe única n-upla $(x_1, \cdots, x_n)$ tal que $v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n$, luego definimos
$$Tv = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n.$$
T está bien definida (a cada vector $v \in V$ le asigna un vector $Tv \in W$).
Veamos que T es lineal, sea $u = y_1v_1 + \cdots + y_nv_n \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Resulta
$$T(\alpha v+u) = T((\alpha x_1+y_1)v_1+\cdots+(\alpha x_1+y_n)v_n) = (\alpha x_1+y_1)w_1+\cdots+(\alpha x_1+y_n)w_n = \alpha T(v)+T(u).$$
Supongamos que existe otra transformación lineal $S : V \to V$ tal que $Sv_i = w_i, 1 \leqslant i \leqslant n$. Luego para el vector v se tiene
$$Sv = S(\sum_{i=1}^{n} x_iv_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iS(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iw = Tv.$$
demostrando así la unicidad. ■

Observación 3.1 *a) Si* T *es una transformación lineal de* V *en* W, *entonces la imagen de* T *no sólo es un subconjunto de* W *sino que es es un subespacio de* W.
b) El conjunto de los vectores $v \in V$ *tales que* $Tv = 0$ *es un subespacio de* V.

Definición 3.2 *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal entre espacios vectoriales. Se define el* ***espacio nulo de*** T *o* ***núcleo de*** T *o* ***ker o kernel de*** T *al conjunto de vectores de* V *que son aplicados en el* $0 \in W$
$$null(T) = ker(T) = \{v \in V : Tv = 0\}.$$

Ejemplo 3.2 *Consideremos la transformación lineal derivación definida en el espacio de los polinomios* $V = \mathbb{R}[x]$, $T(p(x)) = p'(x)$. *Luego*
$$nul(T) = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : Tp(x) = 0\} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : p(x) = cte\}.$$

Proposición 3.1 *Sea* $T : V \to W$ *una transformación lineal. Luego* $nul(T)$ *es un subespacio vectorial de* V.

Demos: : Ejercicio ■

Observación 3.2 *Recordemos que para una transformación lineal $T : V \to W$ se dice que es:*
i) ***inyectiva*** *si para todos $u, v \in V$, $T(u) = T(v) \Rightarrow u = v$.*
ii) ***sobreyectiva*** *si $img(T) = W$*
*iii)****biyectiva*** *si T es inyectiva y sobreyectiva.*

Proposición 3.2 *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Luego T es inyectiva si y solo si $nul(T) = \{0\}$.*

Demos: $\Rightarrow$) Supongamos T inyectiva. Como $nul(T)$ es un subespacio de V, sabemos que $0 \in V$. Supongamos que existe otro vector $v \in V$ tal que está en el núcleo de T. Luego $T(v) = 0 = T(0)$. Como T es inyectiva resulta $v = 0$.
$\Leftarrow$) Supongamos que $nul(T) = 0$, sean $u, v \in V$ tal que $Tu = Tv$. Luego $0 = Tu - Tv = T(u - v)$, luego $u - v \in nul(T)$, i.e. $u = v$. ■

Definición 3.3 *Las transformaciones lineales entre espacios vectoriales son también llamadas* ***homomorfismos de espacios vectoriales*** *. El espacio $\mathcal{L}(V, W)$ también se nota como*

$$Hom_{\mathbb{K}}(V, W) = \{T : V \to W : T\, es, lineal\}.$$

Un homomorfismos $T : V \to W$ también es llamado:
i) ***Monomorfismo*** *si T es inyectivo.*
ii) ***Epimorfismo*** *si T es sobreyectivo.*
iii) ***Isomorfismo*** *si T es biyectivo.*
iv) ***Endomorfismo*** *si $V = W$.*
v) ***Automorfismo*** *si $V = W$ y T es biyectivo.*

Definición 3.4 *Si V es de dimensión finita se dice que la dimensión de la $img(T)$ es el* ***rango de T*** *.*

Teorema 3.2 *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que $\dim(V)$ es finita. Luego*

$$rang(T) + \dim(nul(T)) = \dim V.$$

Demos: Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ una base de $nul(T)$. Existen $v_{k+1}, \cdots, v_k$ vectores en V tales que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es base de V. Probaremos que $\{Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n\}$ es una base de $img(T)$.
Los vectores $Tv_1, \cdots, Tv_n$ generan $img(T)$ y como $Tv_j = 0$ para $1 \leqslant j \leqslant k$, se tiene que $Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n$ generan $img(T)$.
Para ver que son linealmente independientes, supongamos que existen escalares $c_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$0 = \sum_{i=k+1}^{n} c_i(Tv_i) = \sum_{i=k+1}^{n} T(c_iv_i) = T(\sum_{i=k+1}^{n} c_iv_i) = 0.$$

Es decir que $u = \sum_{i=k+1}^{n} c_iv_i \in nul(T)$. Como $v_1, \cdots, v_k$ forman una base para $nul(T)$ luego existen escalares $b_i \in \mathbb{K}$ con $1 \leqslant i \leqslant k$ tales que $u = \sum_{i=1}^{k} b_iv_i$. Así

$$\sum_{i=1}^{k} b_iv_i - \sum_{i=k+1}^{n} c_iv_i = 0.$$

Como los $v_1, \cdots, v_n$ son *l.i.* resulta $b_1 = \cdots = b_k = c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$.
El hecho que $Tv_{k+1}, \cdots, Tv_n$ formen una base de $img(T)$ nos dice que $rang(T) = n - k$, como $\dim V = n$ y $\dim(nul(T)) = k$, demostramos el enunciado. ■

Teorema 3.3 *Si A es una matriz $m \times n$ con entradas en el campo $\mathbb{K}$ entonces $rang(A)$ por filas es igual al $rang(A)$ por columnas.*

Demos: Consideremos la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{n+1}$ definida por $T(x) = Ax$. El espacio nulo de T es el espacio solución del sistema $Ax = 0$. La imagen de T es el conjunto de las matrices columnas $m \times 1$ y tales que $Ax = y$ tiene alguna solución x.
Si $A_1, \cdots, A_n$ son las columnas de A entonces

$$Ax = x_1A_1 + \cdots + x_nA_n.$$

Por lo tanto la imagen de T es el subespacio generado por las columnas de A, vale decir que la imagen de T es el espacio columna de A.

$$rang(T) = rango\, por\, por\, columnas\, de\, A.$$

Así el Teorema 3.2 dice que si S es el espacio solución para $Ax = 0$, entonces

$$dim(S) + rango\ por\ columnas\ (A) = n.$$

Observemos que si R es una matriz escalonada reducida equivalente a A, con r filas no nulas, entonces $Rx = 0$ expresa a r de las incógnitas $x_1, \cdots, x_n$ en función de las restantes $(n-r)$ incógnitas. Esto es decir, si r es la dimensión del espacio fila de A, entonces el espacio solución S tiene una base que consiste en $n - r$ vectores:

$$dim(S) = n - rango\ por\ filas(A).$$

Luego surge lo que queríamos probar. ■

3.2. El álgebra de las transformaciones lineales

Teorema 3.4 *Sean V y W espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sean $T, S \in \mathcal{L}(V, W)$. La función $(T + S)$ definida por*

$$(T + S)(v) = Tv + Sv,$$

es una transformación lineal de V en W.
Si $\alpha \in \mathbb{K}$, la función (αT) definida por

$$(\alpha T)(v) = \alpha(Tv),$$

es una transformación lineal de V en W. El conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W junto a la suma y producto por escalares recién definidas, es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. $(\mathcal{L}(V, W), \mathbb{K}, +, \cdot)$.

Demos: . $(T + S)(cv + u) = c(T + S)(v) + (T + S)(u)$, luego $T + S$ es una transformación lineal.
$(\alpha T)(cv + u) = c(\alpha T(v) + (\alpha T)(u)$, luego αT es una transformación lineal.
Para ver que $(\mathcal{L}(V, W), \mathbb{K}, +, \cdot)$ deben comprobarse los axiomas que definen un espacio vectorial. (Ejercicio). ■

Observación 3.3 *a) Notaremos a este espacio vectorial como $\mathcal{L}(V, W)$.*
b) $\mathcal{L}(V, W)$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones definidas de V en W.

Teorema 3.5 *Sea V un espacio n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea W un espacio m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Luego $\mathcal{L}(V, W)$ es de dimensión finita y es de dimensión nm.*

Demos: Sean $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente. Para cada par de naturales (p,q), con $1 \leqslant p \leqslant n$ y $1 \leqslant q \leqslant m$ definimos la transformación lineal E^{qp} de V en W como sigue

$$E^{qp}(v_j) = \delta_{jp} w_q = \begin{vmatrix} 0 & si\ j \neq p, \\ w_q & si\ j = p. \end{vmatrix}$$

De acuerdo al Teorema 3.1, existe una única transformación lineal de V en W que cumple estas condiciones. Veamos que las mn transformaciones E^{qp} forman una base para $\mathcal{L}(V,W)$.
Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$. Para cada $j, 1 \leqslant j \leqslant n$, sean $A_{1j}, \cdots, A_{mj}$ las coordenadas del Tv_j en la base ordenada B', es decir

$$Tv_j = \sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q.$$

Veamos que

$$T = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}. \tag{6}$$

Sea U la transformación definida por el lado derecho de (6) entonces para cada j se tiene que

$$Uv_j = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}(v_j) = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} \delta_{jp} w_q = \sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q = Tv_j.$$

En consecuencia $U = T$.
Así (6) muestra que $E^{qp}, 1 \leqslant p \leqslant n, 1 \leqslant q \leqslant m$ generan $\mathcal{L}(V,W)$, falta probar que son independientes.
Si la transformación $U = \sum_{q=1}^{m} \sum_{p=1}^{n} A_{qp} E^{qp}$ es la transformación cero, entonces $Uv_j = 0, \forall j$, luego $\sum_{q=1}^{m} A_{qj} w_q = 0$ y la independencia de los w_q implica que $A_{qj} = 0, \forall q, j$, como queríamos probar. ■

Teorema 3.6 *Sean V, W, Z espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V,W)$ y $S \in \mathcal{L}(W,Z)$. Luego la composición $S \circ T$ definida por*

$$(S \circ T)(v) := (ST)(v) := ST(v) := S(T(v))$$

es una transformación lineal de V en Z, i.e. $ST \in \mathcal{L}(V,Z)$.

Demos: $(ST)(\alpha v + u) = (S(T(\alpha v + u)) = S(\alpha T(v) + T(u)) = \alpha S(T(v)) + S(T(u)) = \alpha(ST)(v) + (ST)(u)$. ■

Observación 3.4 *Si en el Teorema 3.6 consideramos $V = W = Z$, T, S son operadores lineales ($T \in \mathcal{L}(V,V)$) y también lo es ST. De este modo $\mathcal{L}(V)$ tiene definida una "multiplicación" dada por la composición. En este caso TS también está definida pero en general $ST \neq TS$.*
Notemos también que si T es un operador lineal sobre V, podemos componer a T con si mismo. Notaremos $T^2 := T \circ T = TT$ y en general $T^n := T \cdots T$ para $n \in \mathbb{N}$. Definimos $T^0 = I$ si $T \neq 0$.

Lema 3.1 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Sean $S, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V)$. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, luego vale:*
i) $IS = SI = S$.
ii) $S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$, $\qquad (T_1 + T_2)S = T_1 S + T_2 S$
iii) $\alpha(ST_1) = (\alpha S)T = S(\alpha T)$.

Demos: Ejercicio ■

Ejemplo 3.3 *Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V. Consideremos los operadores lineales E^{qp} que aparecen en la prueba del Teorema 3.5: $E^{qp}(v_j) = \delta_{jp} v_q$.*
Estos n^2 operadores lineales forman una base del espacio de operadores lineales sobre V, $\mathcal{L}(V)$.
A qué es igual la composición de E^{sr} con E^{qp} aplicado a un v_j

$$E^{sr}E^{qp}(v_j) = E^{sr}(\delta_{jp}v_q) = \delta_{jp}E^{sr}(v_q) = \delta_{jp}\delta_{qr}v_s,$$

es decir

$$E^{sr}E^{qp} = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{si } q \neq r, \\ E^{sp}, & \text{si } q = r. \end{array} \right.$$

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Vimos que si $A_j = [Tv_j]_{B'=B}$, $A = [A_1, \cdots, A_n]$, entonces $T = \sum_q \sum_p A_{qp}E^{qp}$.
Luego si $S = \sum_s \sum_r B_{sr}E^{sr}$ es otro operador $S \in \mathcal{L}(V)$, por el Lema 3.1 se tiene que

$$\begin{aligned} ST &= (\sum_s \sum_r B_{sr}E^{sr})(\sum_q \sum_p A_{qp}E^{qp}) = \\ &= \sum_s \sum_r \sum_q \sum_p B_{sr}A_{qp}E^{sr}E^{qp} = \sum_s \sum_p \left(\sum_q B_{sq}A_{qp} \right) E^{sp} = \\ &= \sum_s \sum_p (BA)_{sp}E^{sp}. \end{aligned}$$

Así, el efecto de componer T con S equivale a multiplicar las matrices B y A.

Observación 3.5 *Recordemos que $T : V \to W$ es inversible si y sólo si existe $S : W \to V)$ tal que ST es la identidad en V y TS es la identidad en W.*
Si T es inversible la función S es única y se nota por T^{-1}. Más aun, T es inversible si y sólo si T es biyectiva.

Teorema 3.7 *Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Si T es inversible, entonces su inverso T^{-1} es una transformación lineal de W en V.*

Demos: Sabemos que si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ es inversible se tiene que $TT^{-1} = I_W$ y $T^{-1}T = I_V$.
Sean $w_1, w_2 \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$. Sea $v_i = T^{-1}(w_i), i = 1, 2$, es decir que v_i es el único vector de V tal que $Tv_i = w_i$.
Como T es lineal se tiene que

$$T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2) = \alpha w_1 + w_2.$$

Así $\alpha v_1 + v_2$ es el único vector de V que T envía a $\alpha w_1 + w_2$. Luego

$$T^{-1}(\alpha w_1 + w_2) = \alpha v_1 + v_2 = \alpha T^{-1}(w_1) + T^{-1}(w_2),$$

luego T^{-1} es lineal. ■

Observación 3.6 *Supongamos que $T : V \to W$ y $S : W \to Z$ son inversibles. Entonces ST es inversible y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. Esta conclusión no requiere linealidad, sólo hay que chequear que efectivamente $T^{-1}S^{-1}$ es inversa a derecha e izquierda de ST.*

Observación 3.7 *Si T es lineal, entonces $T(v - w) = Tv - Tw$, luego $Tv = Tw$ si y sólo si $T(v - w) = 0$, esto simplifica la verificación de T inyectiva.*
Una transformación lineal T es no singular si $Tv = 0 \Rightarrow v = 0$, o sea si el espacio nulo de T es $\{0\}$.

Teorema 3.8 *Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Luego T es no singular si y sólo si T lleva a cada subconjunto l.i. de V en un subconjunto l.i. de W.*

Demos: $\Rightarrow$) Sea T no singular. Sea $S \subset V$, *l.i.*. Si $v_1, \cdots, v_k \in S$, entonces $Tv_1, \cdots, Tv_k$ son *l.i.* pues

$$0 = \alpha_1(Tv_1) + \cdots + \alpha_k(Tv_k) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k),$$

y como T es no singular

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$$

de donde surge que $\alpha_i = 0, \forall i$ pues S es *l.i.*.
$\Leftarrow$) Supongamos T lleva conjuntos *l.i.* en conjuntos *l.i.*. Sea $0 \neq v \in V$. Luego el conjunto $S = \{v\}$ es independiente y $\{Tv\}$ es independiente, por lo tanto $Tv \neq 0$. Esto muestra que $nul(T) = \{0\}$ y por lo tanto T no singular. ■

Definición 3.5 *Si existe un isomorfismo de V en W, diremos que V y W son* ***isomorfos***

Observación 3.8 *i) V es trivialmente isomorfo a V.*
ii) Si V es isomorfo a W vía un isomorfismo T, entonces W es isomorfo a V pues T^{-1} es un isomorfismo de W en V.
iii) Si V es isomorfo a W y W es isomorfo a Z, entonces V es isomorfo a Z.

Por estas tres observaciones concluimos que la relación .es isomorfo a"define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los espacios vectoriales.

Teorema 3.9 *Todo espacio vectorial n-dimensional sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^n$.*

Demos: Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V.
Definimos la función $T : V \to \mathbb{K}^n$ como sigue, para $v \in V$, sea $Tv = (x_1, \cdots, x_n)$ la n-upla de coordenadas de v relativas a la base ordenada B, i.e. $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$.
Esta aplicación así definida resulta lineal, inyectiva y sobreyectiva. ■

3.3. Representación de transformaciones lineales por matrices

Teorema 3.10 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y W un espacio vectorial m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Sea B una base ordenada de V y B' una base ordenada de W. Para cada transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ existe una matriz $m \times n$ A con entradas en $\mathbb{K}$ tal que para cada vector $v \in V$*

$$[Tv]_{B'} = A[v]_B.$$

Más aun la asignación $T \to A$ es una correspondencia uno a uno entre el conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Demos: Si $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$, entonces

$$Tv = T(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (Tv_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{m} A_{ij} w_i) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) w_i.$$

Si X es la matriz de coordenadas de v en la base ordenada B, entonces esto muestra que AX es la matriz de coordenadas del vector Tv en la base ordenada B'. Observemos además que si A es cualquier matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$, entonces

$$T(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j) w_i$$

define una transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$, cuya matriz asociada relativa a las bases ordenadas B y B' es A.
Así esta matriz A asociada a T se llama ***matriz de T relativa a las bases B y B'*** . ■

Observación 3.9 *A es la matriz cuyas columnas $A_1, \cdots, A_n$ son $A_j = [Tv_j]_{B'}$, $j = 1, \cdots, n$. Si $S \in \mathcal{L}(V, W)$ es otra transformación lineal y $C = [C_1, \cdots, C_n]$ es la matriz de S relativa a las bases ordenadas B y B' entonces $\alpha A + C$ es la matriz asociada a la transformación $\alpha T + S$ relativa a las bases B y B'.*

$$\alpha A_j + C_j = \alpha[Tv_j]_{B'} + [Sv_j]_{B'} = [\alpha Tv_j + Sv_j]_{B'} = [(\alpha T + S)v_j]_{B'}.$$

En vista del teorema precedente y la observación podemos enunciar el siguiente

Teorema 3.11 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional sobre $\mathbb{K}$ y sea W un espacio m-dimensional sobre $\mathbb{K}$. Para cada par de bases ordenadas B y B' para V y W respectivamente, la aplicación que a cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ le asigna $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, su matriz asociada relativa a B y B', es un isomorfismo entre los espacios vectoriales $\mathcal{L}(V, W)$ y $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.*

Demos: La función en cuestión es lineal, visto en la observación, y es biyectiva, visto en el teorema anterior. ■

.

Observación 3.10 *Veamos que sucede con la representación de operadores lineales (transformaciones lineales de un espacio V en si mismo). Conviene usar la misma base ordenada B. Así llamaremos a la matriz de T como la matriz de T relativa a la base ordenada B.*

Nota 3.1 *Si T es un operador lineal sobre un espacio vectorial de dimensión finita V y $B = v_1, \cdots, v_n$ es una base ordenada de V, la matriz de T relativa a B es la matriz $n \times n$, A cuyas entradas A_{ij} están definidas por*

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}v_i, \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Debemos recordar que esta matriz que representa a T depende de la base ordenada B, para cada base ordenada obtendremos una matriz diferente que representa al mismo operador lineal T. Para hacer más explícita esta dependencia puede notarse como $[T]_B$ a la matriz del operador lineal T en la base ordenada B. La forma en la que esta matriz y la base ordenada describen al operador T es tal que para cada $v \in V$ se tiene

$$[Tv]_B = [T]_B[v]_B.$$

Ejemplo 3.4 *Sea $V = \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$. Sea $W = \mathcal{M}_{m\times 1}(\mathbb{K})$. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ fija. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ definida por $T(X) = AX$.*
Sea B la base ordenada para V análoga a la base estándar en $\mathbb{K}^n$ (el vector e_i es la matriz $n \times 1$ con un 1 en la fila i y 0 en las otras). Sea B' la base ordenada para W análoga a la base estándar en $\mathbb{K}^m$. Entonces la matriz de T relativa al par B, B' es la matriz A.

Ejemplo 3.5 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y T un operador sobre $\mathbb{K}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$.*
Es fácil ver que es un operador lineal sobre $\mathbb{K}^2$. Sea $B = e_1, e_2$ la base ordenada estándar para $\mathbb{K}^2$. Se tiene que

$$Te_1 = T(1,0) = (1,0), \qquad Te_2 = T(0,1) = (0,0).$$

La matriz de T en la base ordenada B es $[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 3.6 *Sea V el espacio de todos los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3, i.e.*

$$V = \{p(x) : p(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3, c_i \in \mathbb{R}, i = 0, \cdots, 3\}.$$

El operador derivada D va de V en V. Sea $B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ base ordenada de V con $f_j(x) = x^{j-1}$. Luego

$$\begin{array}{ll} (Df_1)(x) = 0, & Df_1 = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\ (Df_2)(x) = 1, & Df_2 = 1f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\ (Df_3)(x) = 2x, & Df_3 = 0f_1 + 2f_2 + 0f_3 + 0f_4, \\ (Df_4)(x) = 3x^2, & Df_4 = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4. \end{array}$$

La matriz de D en la base ordenada B es

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.12 *Sea V, W y Z espacios vectoriales de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $S \in \mathcal{L}(W, Z)$. Si B, B' y B'' son bases ordenadas para V, W y Z respectivamente y si A es la matriz de T relativa a B y B' y C es la matriz de S relativa a B' y B'', entonces la matriz de la composición ST relativa a B y B'' es la matriz $D = CA$.*

Demos: Sean $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, $B' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ y $B'' = \{z_1, \cdots, z_p\}$. Para $v \in V$ cualquiera se tiene

$$[Tv]_{B'} = A[v]_B, \qquad [S(Tv)]_{B''} = B[Tv]_{B'}, \qquad [(ST)v]_{B''} = CA[v]_B,$$

y por lo tanto por definición y unicidad de la matriz asociada, se tiene que $D = CA$.
También puede demostrarse esto a través del cálculo

$$(ST)v_j = S(Tv_j) = S(\sum_{k=1}^{m} A_{kj}w_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{kj}(Sw_k) = \sum_{k=1}^{m} A_{kj} \sum_{i=1}^{p} C_{ik}z_i = \sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{jk})z_i.$$

$$\therefore D_{ij} = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{kj},$$

como queríamos probar. ■

Observación 3.11 *Si T y S son operadores lineales sobre V y los representamos mediante una única base ordenada B, entonces*

$$[ST]_B = [S]_B[T]_B.$$

Así la correspondencia que determina B entre operadores y matrices no sólo es un isomorfismo de espacios vectoriales sino que preserva productos. Una consecuencia de esto es que el operador lineal T será inversible si y solo si $[T]_B$ es una matriz inversible. Es decir que $ST = TS = I$ equivale a $[S]_B[T]_B = [T]_B[S]_B = I$. Además cuando T es inversible resulta $[T^{-1}]_B = [T]_B^{-1}$.

Teorema 3.13 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sean $B = v\{v_1, \cdots, v_n\}$ y $B' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ bases ordenadas de V. Supongamos que T es un operador lineal sobre V. Si $P = [P_1, \cdots, P_n]$ es la matriz $n \times n$ con columnas $P_j = [v'_j]_B$, entonces*

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_BP.$$

Demos: Por lo visto anteriormente, existe una única matriz $n \times n$ inversible P tal que para cada $v \in V$

$$[v]_B = P[v]_{B'}, \tag{7}$$

donde $P = [P_1, \cdots, P_n]$ con $P_j = [v'_j]_B$.
Por definición

$$[Tv]_B = [T]_B[v]_B. \tag{8}$$

Aplicando (7) a Tv se obtiene

$$[Tv]_B = P[Tv]_{B'}. \tag{9}$$

Combinando (7), (8) y (9) se obtiene

$$[T]_B P[v]_{B'} = P[Tv]_{B'} \qquad o \qquad P^{-1}[T]_B P[v]_{B'} = [Tv]_{B'},$$

de donde $[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P$.
Observemos además que existe un único operador lineal S que lleva B en B' definido por

$$Sv_j = v'_j, \ j = 1, \cdots, n.$$

Este operador es inversible ya que lleva una base de V en una base de V. Precisamente la matriz P es la matriz del operador S en la base ordenada B. Pues, P está definida por $v'_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}v_i$ y como $Sv_j = v'_j$, podemos escribir

$$Sv_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}v_i.$$

Así $P = [S]_B$ por definición, como queríamos ver. ■

Ejemplo 3.7 *Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Vimos que*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que $B' = \{(e'_1, e'_2\}$ con $e'_1 = (1,1)$ y $e'_2 = (2,1)$ es otra base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Entonces se tiene que

$$\begin{array}{rcccc} e'_1 & = & e_1 & + & e_2 \\ e'_2 & = & 2e_1 & + & e_2 \end{array}$$

Luego P es la matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Así $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y surge que

$$[T]_{B'} = P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Es sencillo de comprobarlo pues

$$\begin{array}{rcccl} Te'_1 & = & (1,0) & = & -e'_1 + e'_2, \\ Te'_2 & = & (2,0) & = & -2e'_1 + 2e'_2. \end{array}$$

Ejemplo 3.8 *Sea V el espacio vectorial del ejemplo 3.6. Sea $t \in \mathbb{R}$ y definamos $g_j(x) = (x+t)^{j-1}$, o sea*

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1, \\ g_2 &= tf_1 + f_2, \\ g_3 &= t^2 f_1 + 2t f_2 + f_3, \\ g_4 &= t^3 f_1 + 3t^2 f_2 + 3t f_3 + f_4. \end{aligned}$$

Como la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es inversible siendo

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sigue que $B' = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ es una base ordenada de V.
Vimos en el ejemplo 3.6 que

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz del operador D en la base ordenada B' es

$$P^{-1}[D]_B P = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2 & -t^3 \\ 0 & 1 & -2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ 0 & 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es decir que D es representado por la misma matriz en las bases ordenadas B y B'.

Definición 3.6 *Sean A y B matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que **B es similar a A sobre $\mathbb{K}$** si existe una matriz $n \times n$ inversible P sobre $\mathbb{K}$ tal que $B = P^{-1}AP$.*

3.4. Producto y cociente de espacios vectoriales

Como veníamos trabajando todos los espacios vectoriales involucrados en lo que sigue son sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$.

Definición 3.7 *Sean $V_1, V_2, \cdots, V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, se define el* ***producto de los e.v. $V_1, V_2, \cdots, V_m$*** *como*

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m = \{(v_1, v_2, \cdots, v_m) : v_1 \in V_1, \cdots v_m \in V_m\}.$$

Definimos las siguientes operaciones en $V_1 \times \cdots \times V_m$:
adición:

$$(u_1, \cdots, u_m) + (v_1, \cdots, v_m) = (u_1 + v_1, \cdots, u_m + v_m);$$

producto por escalares:

$$\alpha(u_1, \cdots, u_m) = (\alpha u_1, \cdots, \alpha u_m).$$

Teorema 3.14 *Sean $V_1, \cdots, V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, luego $V_1 \times \cdots \times V_m$ con las operaciones definidas es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demos: : Ejercicio ■

Ejemplo 3.9

1. *Consideremos $\mathbb{R}_2[x]$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2, y $\mathbb{R}^3$, luego el espacio vectorial $\mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}^3$, está constituido por pares ordenados, donde el primer elemento es un polinomio de grado menor o igual a 2 y el segundo un elemento de $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo*

$$\left(7 - \pi x + \frac{7}{23}x^2, (1,0,1)\right) \in \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}^3.$$

2. *¿$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ es igual a $\mathbb{R}^5$? ¿Son isomorfos?*
La respuesta a la primera pregunta es NO. Los elementos de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ son pares de forma $((x_1, x_2, x_3), (x_4, x_5))$ con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$, mientras que los elementos de $\mathbb{R}^5$ son 5-uplas de forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.
Lo que si podemos asegurar es que son espacios vectoriales isomorfos siendo la transformación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^5 \\ & \mapsto & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \end{array}$$

claramente un isomorfismo.

Teorema 3.15 *Sean $V_1, \cdots, V_m$ espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensión finita. Luego resulta $V_1 \times \cdots \times V_m$ de dimensión finita y se verifica*

$$dim(V_1 \times \cdots \times V_m) = dim(V_1) + \cdots + dim(V_m).$$

Demos: Elijamos una base B_j para cada espacios V_j, $j = 1, \cdots, n$. Para cada uno de los vectores $u_i^j \in B_j, i = 1, \cdots, \dim(V_j)$ consideremos el vector de $V_1 \times \cdots \times V_m$ que tiene al vector u_i^j en la entrada j-ésima y 0 en el resto de los lugares. La conjunto de todos esos vectores es linealmente independiente, genera el espacio $V_1 \times \cdots \times V_m$ y tiene cardinal $dim(V_1) + \cdots + dim(V_m)$. ■

Ejemplo 3.10 *Sean V_1, V_2 espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. La transformaciones*

$$\begin{array}{rccc} \pi_j : & V_1 \times V_2 & \to & V_j \\ & (v_1, v_2) & \mapsto & \pi_j(v_1, v_2) = v_j \end{array} \quad j = 1, 2,$$

llamadas ***proyecciones*** *son transformaciones epimorfismos. Se tiene además que*

$$\dim(nul(\pi_j) = \dim(V_{3-j}), j = 1, 2.$$

Espacio cociente

Lema 3.2 *Sea $U \underset{s.e.}{\subseteq} V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La relación definida en V como*

$$w \sim_U v \quad \Leftrightarrow w - v \in U,$$

es una relación de equivalencia.

Demos: Ejercicio ■

Nota 3.2 *Como toda relación de equivalencia define una partición del conjunto en la que está definida dada por las clases de equivalencias. Recordemos que para $v \in V$ su clase de equivalencia está dada por*

$$[v] = \{w \in V : w \sim_U v\} = \{w \in V : w - v \in U\} = \{w \in V : w \in v + U\} = v + U.$$

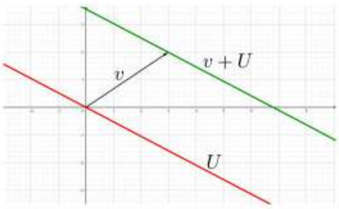
Si consideramos el **espacio cociente de V por la relación $\sim_U$** *formado por las clases de equivalencias resulta*

$$V/\sim_U = \{[v] : v \in V\} = \{v + U : v \in V\} = V/U.$$

Ejemplo 3.11 .
Sea $V = \mathbb{R}^2$ y $U = \{(\alpha, -\frac{\alpha}{2}) \in \mathbb{R}^2 : \alpha \in \mathbb{R}\}$, claramente U es la recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por el origen. Así

$$[(2,3)] = (2,3) + U,$$

es la recta de $\mathbb{R}^2$ de pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por el punto $(2,3)$.



Definición 3.8 *Sea $U \underset{s.e.}{\subseteq} V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Definimos en el espacio cociente las siguientes operaciones de adición y multiplicación por escalares. Para $[v], [w] \in V/U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$*

$$[v] + [w] = [v + w] = (v + w) + U = (v + U) + (w + U),$$

$$\alpha[v] = [\alpha v] = (\alpha v) + U = \alpha(v + U).$$

Lema 3.3 *Las operaciones de adición y multiplicación por escalares en V/U están bien definidas.*

Demos: . Debemos comprobar que efectivamente están bien definidas las operaciones, es decir, no dependen del representante de la clase de equivalencia que estemos considerando.
Para ello sean $\hat{v} \in [v] = v + U$, es decir que $\hat{v} + U = v + U$ y $\hat{w} \in [w] = w + U$, así tenemos

$$[\hat{v}] + [\hat{w}] = [\hat{v} + \hat{w}] = \hat{v} + \hat{w} + U = \hat{v} + U + \hat{w} + U = (v + U) + (w + U) = [v] + [w].$$

De manera análoga resulta para $\hat{v} \in [v] = v + U$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\alpha[\hat{v}] = [\alpha\hat{v}] = \alpha(\hat{v} + U) = \alpha(v + U) = [\alpha v] = \alpha[v],$$

como queríamos demostrar. ■

Teorema 3.16 *Sea $U \underset{s.e.}{\subseteq} V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. El conjunto cociente V/U con las operaciones definidas es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.*

Demos: Habiendo probado que las operaciones están bien definidas, la demostración es sencilla. Notemos que el elemento neutro de V/U está dado por $[0] = 0 + U = U$ y el opuesto de $[v]$ es $[-v]$. ■

Definición 3.9 *Sea $U \underset{s.e.}{\subseteq} V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La* ***aplicación cociente*** π *es la transformación lineal*

$$\begin{array}{rccc} \pi: & V & \to & V/U \\ & v & \mapsto & \pi(v) = [v]. \end{array}$$

Ejercicio 3.1 *Probar que efectivamente π es una transformación lineal.*

Teorema 3.17 *Sea $U \underset{s.e.}{\subseteq} V$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, de dimensión finita. Luego se verifica*

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U).$$

Demos: Sea π la aplicación cociente de V en V/U. Por el Teorema 3.16 sabemos que $nul(\pi) = U$, además resulta claro que $img(\pi) = V/U$. Así usando el Teorema 3.2 resulta

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(img(\pi)) = \dim(U) + \dim(V/U),$$

obteniéndose lo buscado. ■

3.5. Funcionales lineales

Definición 3.10 *Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, una transformación lineal de V en $\mathbb{K}$ se dice un* ***funcional lineal sobre*** V.

Ejemplo 3.12

1. *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. Definimos una función sobre $\mathbb{K}^n$ por*

$$f(x_1, \cdots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

f es un funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$. Es el funcional lineal que se representa por la matriz $[a_1, \cdots, a_n]$ relativa a la base ordenada estándar de $\mathbb{K}^n$ y la base $\{1\}$ de $\mathbb{K}$

$$a_j = f(e_j), \qquad j = 1, \cdots, n.$$

Todo funcional lineal sobre $\mathbb{K}^n$ es de esta forma para algunos escalares $a_1, \cdots, a_n$, pues

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(\sum_{j=1}^{n} x_je_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_je_j) = \sum_{j=1}^{n} x_jf(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_ja_j.$$

2. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo. Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, luego la traza define un funcional lineal sobre $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Recordemos que si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ luego $trA = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$.*

3. *Sea $V = \mathbb{K}[x]$ el espacio de todos los polinomios de $\mathbb{K}$ en si mismo. Sea $t \in \mathbb{K}$, definimos*

$$L_t(p) = p(t),$$

luego L_t es un funcional lineal sobre V. L_t se dice la evaluación en t.

4. *Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ y sea $C([a, b])$ el espacio vectorial de las funciones continuas a valores reales sobre $[a, b]$, Luego*

$$L(g) = \int_a^b g(t)dt,$$

define un funcional lineal L sobre $C([a, b])$.

Definición 3.11 *Si V es un espacio vectorial, el conjunto de todos los funcionales lineales sobre V forma un espacio vectorial. Es el espacio $\mathcal{L}(V,\mathbb{K})$, al que se nota V^* y se llama* **espacio dual de V**.

$$V^* = \mathcal{L}(V,\mathbb{K}).$$

Observación 3.12 *Si V es de dimensión finita, sabemos por el Teorema 3.5 que $\dim V^* = \dim V$.*
Sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Por el Teorema 3.1 para cada i existe un único funcional lineal f_i sobre V tal que $f_i(v_i) = \delta_{ij}$.
Así obtenemos de B un conjunto de n funcionales lineales distintos $f_1, \cdots, f_n$ sobre V. Veamos que son l.i..
Sea $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$, luego

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_j(v_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta ij = c_j.$$

En particular, si f es el funcional cero, $f(v_j) = 0, \forall j$ y por lo tanto todos los c_j son cero.
Entonces $\{f_1, \cdots, f_n\}$ son l.i. y ya sabemos que $\dim V^* = n$, surge que $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ es una base para V^*, es la llamada **base dual de B** .

Teorema 3.18 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Entonces existe una única base dual $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ de V^* tal que $f_i(v_j) = \delta_{ij}$. Para cada funcional lineal f sobre V se tiene que*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i,$$

y para cada vector $v \in V$ se tiene que $v = \sum_{i=1}^{n} f_i(v) v_i$.

Demos: Ya vimos que existe una única base que es la base dual de B.
Si $f \in V^*$, luego f es combinación lineal de los elementos f_i, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i$ y los escalares c_i deben ser $c_i = f(v_i)$. De manera similar, si $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$, luego

$$f_j(v) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_j(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{ij} = x_j.$$

Luego la única expresión para v como combinación lineal de los v_i es $v = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) v_i$, como queríamos probar. ■

Observación 3.13 *Si $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base ordenada de V y $B^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ es la base dual, entonces f_i es precisamente la función que le asigna a cada vector $v \in V$ la coordenada i-ésima de v relativa a la base ordenada B. Así podemos llamar a f_i las funciones coordenadas para B.*
Si $f \in V^*$ y $f(v_i) = a_i$, entonces cuando

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \qquad \rightarrow \qquad f(v) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n.$$

Es decir, si elegimos una base ordenada B para V y representamos a cada vector de V por la n-upla de sus coordenadas $(x_1, \cdots, x_n)$ relativas a B, luego cada funcional lineal sobre V tiene la forma $f(v) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$. Esto es la generalización natural del Ejemplo 1.

Ejemplo 3.13 *Sea V el espacio vectorial de todos los polinomios de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con grado menor o igual a 2. Sean t_1, t_2, t_3 tres números reales cualesquiera y sea $L_i(p) = p(t_i)$. Resultan funcionales lineales sobre V, y son l.i. pues si $L = c_1L_1 + c_2L_2 + c_3L_3$ y $L = 0$ ($L(p) = 0$ para cada polinomio p en V) entonces aplicando L a los polinomios $1, x, x^2$ se obtiene*

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0, \\ t_1c_1 + t_2c_2 + t_3c_3 &= 0, \\ t_1^2c_1 + t_2^2c_2 + t_3^2c_3 &= 0, \end{aligned}$$

y de aquí surge que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ pues la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3, \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{bmatrix}$$

es inversible cuando t_1, t_2, t_3 distintos.
Entonces los L_i son independientes y como la $\dim V = 3$, estos funcionales forman una base para V^*.
Nos preguntamos cual es la base ordenada de V para la cual ésta es su base dual. Tal base $\{p_1, p_2, p_3\}$ para V debe satisfacer que $L_i(p_j) = \delta_{ij}$ es decir que $p_j(t_i) = \delta_{ij}$. Se obtiene fácilmente que dichos polinomios están dados por

$$p_1(x) = \frac{(x-t_2)(x-t_3)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)},;\ p_2(x) = \frac{(x-t_3)(x-t_1)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)},;\ p_3(x) = \frac{(x-t_1)(x-t_2)}{(t_3-t_1)(t_3-t_2)}.$$

La base $\{p_1, p_2, p_3\}$ para V es interesante pues se tiene que para cada $p \in V$ $p = p(t_1)p_1 + p(t_2)p_2 + p(t_3)p_3$. Así dados $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ cualesquiera, existe exactamente un polinomio p sobre $\mathbb{R}$ que tiene al menos grado 2 y satisface $p(t_j) = c_j$, $j = 1, 2, 3$. Dicho polinomio es $p = c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3$.

Observación 3.14 *Relación entre funcional lineal y subespacio*
Si f es un funcional lineal no nulo, entonces el rango de f es 1 pues la imagen de f es un subespacio no nulo del campo escalar y por lo tanto debe ser el campo escalar mismo.
Si el espacio V es de dimensión finita n, por el teorema de la dimensión sabemos que

$$\dim(nul f) = \dim V - 1 = n - 1.$$

Definición 3.12 *En un espacio vectorial de dimensión finita n, un subespacio de dimensión $n-1$ se llama* ***hiperespacio*** *o* ***hiperplano*** *o* ***subespacio de codimensión 1****.*

Definición 3.13 *Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y S es un subconjunto de V, el* **anulador de S** *es el conjunto S° de funcionales lineales sobre V tales que $f(v) = 0, \forall v \in S$.*

Observación 3.15 *i) S° es un subespacio vectorial aunque S no lo sea.*
ii) Si $S = \{0\}$, $S^\circ = V^*$.
iii) Si $S = V$, S° es el subespacio $\{0\}$ de V.

Teorema 3.19 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, y sea W un subespacio de V entonces*

$$\dim W + \dim W^\circ = \dim V.$$

Demos: Sea $\dim W = k$ y $\{v_1, \cdots, v_k\}$ una base de W. Elijamos $v_{k+1}, \cdots, v_n \in V$ tales que $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ sea una base de V.
Sea $\{f_1, \cdots, f_n\}$ la base de V^* dual de la base B de V. Veamos que $\{f_{k+1}, \cdots, f_n\}$ es base de W°. Ciertamente $f_i \in W^\circ$ para $i = k+1, \cdots, n$ pues $f_i(v_j) = \delta ij$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \geqslant k+1$ y $j \leqslant k$.
De aquí sigue que para $i \geqslant k+1$, $f_i(v) = 0$ cuando v es una combinación lineal de $v_1, \cdots, v_n$. Los

funcionales $f_{k+1}, \cdots, f_n$ son independientes, así que sólo falta ver que generan w°.
Sea $f \in V^*$. Ahora $f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)f_i$, luego si $f \in W^\circ$ se tiene que $f(v_i) = 0, i \leqslant k$ y $f = \sum_{i=k+1}^{n} f(v_i)f_i$.
Así se tiene que $\dim W^\circ = n - k$. ■

Corolario 3.1 *Si W es un subespacio k-dimensional de un espacio vectorial V n-dimensional, entonces W es la intersección de $(n-k)$ hiperplanos de V.*

Demos: En la demostración anterior, W es exactamente el conjunto de vectores v tales que $f_i(v) = 0$, $i = k+1, \cdots, n$. En el caso $k = n-1$, W es el espacio nulo de f_n. ■

Corolario 3.2 *Si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita, entonces $W_1 = W_2$ si y solo si $W_1^\circ = W_2^\circ$.*

Demos: Si $W_1 = W_2$, obviamente $W_1^\circ = W_2^\circ$.
Si $W_1 \neq W_2$, entonces uno de los dos subespacios contiene un vector que no está en el otro. Supongamos que existe $v \in W_2$ y $v \notin W_1$.
Por lo anterior existe un funcional f tal que $f(u) = 0, \forall u \in W_1$ pero $f(v) \neq 0$. Entonces $f \in W_1^\circ$ pero $f \notin W_2^\circ$. ■

Ejemplo 3.14 *Consideremos tres funcionales sobre $\mathbb{R}^4$.*
$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$
$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_2 + x_4$
$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = -2x_1 - 4x_3 + 3x_4$.
El subespacio que ellos anulan puede hallarse explícitamente al hallar la matriz escalonada reducida de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

que es

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego los funcionales
$g_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_3$
$g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2$
$g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4$.
generan al mismo subespacio de $(\mathbb{R}^4)^*$ y anulan al mismo subespacio de $\mathbb{R}^4$ que f_1, f_2, f_3. El subespacio anulado consiste en los vectores con

$$x_1 = -2x_3, \qquad x_2 = x_4 = 0.$$

Ejemplo 3.15 *Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por*
$v_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$
$v_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$
$v_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$.
$v_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$.
¿Cómo describimos a W° el anulador de W?

Formemos la matriz A 4×5 con los vectores filas $v_1, \cdots, v_4$ y hallemos la forma escalonada reducida

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si f es el funcional lineal sobre $\mathbb{R}^5$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{j=1}^{5} c_j x_j,$$

entonces $f \in W^\circ$ si y solo si $f(v_i) = 0, i = 1, \cdots, 4$, por lo tanto, si y solo si

$$\sum_{j=1}^{5} A_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 4.$$

Esto es equivalente a

$$\sum_{j=1}^{5} R_{ij} c_j = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

o bien

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 - c_4 &= 0 \\ c_3 + 2c_4 &= 0 \\ c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Obtenemos todos esos funcionales lineales f asignándoles valores arbitrarios a los escalares c_2 y c_4, digamos $c_2 = a$ y $c_4 = b$, entonces hallar los correspondientes $c_1 = a + b$, $c_3 = -2b$ y $c_5 = 0$. Luego W° consiste de todos los funcionales lineales f de la forma

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (a + b)x_1 + ax_2 - 2bx_3 + bx_4.$$

La dimensión de W° es 2 y una base $\{f_1, f_2\}$ puede ser hallada tomando primero $a = 1, b = 0$ y luego $a = 0, b = 1$.

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2, \quad f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 - 2x_3 + x_4.$$

Un funcional genérico de W° tiene la forma $f = \alpha f_1 + \beta f_2$.