Procesos estocásticos

1. Al final de una línea de fabricación, el producto final está sujeto a un proceso de inspección que determina si el producto es defectuoso o no. Supongamos que la aparición de un artículo defectuoso es independiente de la aparición de otros y que la probabilidad de ocurrencia del mismo es p. Sea el proceso estocástico $\{N_n: n \in \mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de artículos defectuosos hallados hasta el n-ésimo producto fabricado.

   a) Describa el proceso estocástico $\{N_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ en términos del proceso de Bernoulli.
   b) Muestre que el proceso $\{N_n: n \in \mathbb{N}_0\}$ es una cadena de Markov.
   c) Halle la matriz de transición para esta cadena.
   d) Clasifique los estados.
   e) Calcule la esperanza y la variancia de dicho proceso.

2. En una bifurcación de una ruta, aproximadamente el 38% de los automóviles toma el camino de la derecha, y es posible suponer que cada conductor elige cuál camino tomar independientemente de lo que hace el resto. Definimos el proceso estocástico $\{N_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de automóviles que toman el camino de la izquierda hasta el n-ésimo instante de observación.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto automóvil sea el primero en girar a la izquierda?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el quinto automóvil sea el segundo en girar a la izquierda?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que 12 automóviles hayan tomado hacia la izquierda hasta el vigésimo instante de observación sabiendo que hasta el duodécimo instante lo hicieron 9?
   d) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que girarán a la derecha en las primeras 100 observaciones?

3. El ingreso a un centro comercial puede realizarse por dos puertas idénticas, y por razones desconocidas los clientes prefieren la puerta de la izquierda. Haciendo un análisis estadístico se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad que el cliente que ingresa lo haga por la puerta de la izquierda es 2/3. Además, se ha concluido que la influencia de posibles congestiones frente a una de las puertas es despreciable pues, debido a las dimensiones de las puertas y al promedio de clientes que ingresan por unidad de tiempo, dichas congestiones son poco frecuentes. Por lo tanto, puede suponerse que los clientes eligen la puerta de acceso según su propia preferencia independientemente de lo que haga el resto de los clientes. Se pide hallar la matriz de transición asociada al proceso $\{N_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, donde N_n es el número de clientes que ingresan al centro comercial por la puerta de la izquierda hasta el instante de arribo del n-ésimo cliente.

4. El número de accidentes en una fábrica se puede representar por un proceso de Poisson con promedio igual a dos accidentes por semana.

   a) Calcule la probabilidad de que se registren 7 accidentes en dos semanas.
   b) Calcule la probabilidad de que en 30 días se registren 5 accidentes si durante los primeros 20 días sucedieron 4.
   c) A partir de hoy, ¿en cuánto tiempo se espera que suceda el quinto accidente?
   d) Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos accidentes sea mayor que 3 días.
   e) Simule una trayectoria de este proceso estocástico para un período de un mes y grafique dicha trayectoria teniendo en cuenta las características fundamentales de los procesos Poisson.

5. El número de diarios que vende un canillita es una variable aleatoria X con distribución de Poisson con tasa 50 diarios/hora.

   a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.
   b) Si el canillita tarda 5 minutos en preparar y tomar un café, calcule la probabilidad de que realice esas acciones sin ser interrumpido por un cliente.
   c) Calcule el tiempo promedio que transcurre entre dos ventas.
   d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.

6. En una ciudad dada, al 90% de los días soleados le siguen días soleados, y al 80% de los días nublados le siguen días nublados. Con esta información, modelar el clima de la localidad como una cadena de Markov, dibujar el grafo asociado y explicitar la matriz de probabilidades de transición en un paso de dicha cadena.

7. Sea X una cadena de Markov con espacio de estados E={a,b,c}, matriz de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 0 & 3/5 \end{bmatrix}$$

y distribución inicial

$$\pi = (2/5, 1/5, \quad 2/5)$$

Calcular

a) $P(X_1=b, X_2=b, X_3=b, X_4=a, X_5=c \mid X_0=a)$
b) $P(X_1=b, X_3=a, X_4=c, X_6=b \mid X_0=a)$
c) $P(X_2=b, X_5=b, X_6=a)$

8. Un edificio de dos pisos y planta baja posee un ascensor que llega a todas las plantas. La secuencia de pisos alcanzados hasta el piso en el que finaliza el *n*-ésimo viaje puede modelarse como una cadena de Markov. Se sabe que la mitad de los viajes que parten de la planta baja se dirigen a cada uno de los otros dos pisos, mientras que si un viaje comienza en el primer piso solo el 25% de las veces finaliza en el segundo. Por último, si un trayecto comienza en el segundo piso, siempre finaliza en planta baja.

a) Calcular la matriz de probabilidades de transición en un paso de la cadena.
b) Dibujar el grafo asociado.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que, a largo plazo, el ascensor se encuentre en cada una de las tres plantas?

9. Un viajante realiza su trabajo en tres ciudades A, B y C. Para evitar desplazamientos innecesarios, permanece todo el día en una ciudad viajando a otra ciudad al día siguiente si no tiene suficiente trabajo. Después de estar trabajando un día en C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella al día siguiente es 0,4, la de tener que viajar a B es 0,4, y la de tener que viajar a A es 0,2. Si el viajante se queda un día en B, con probabilidad 0,2 tendrá que seguir trabajando en la misma ciudad al día siguiente, en el 60% de los casos viajará a C, mientras que irá a A con probabilidad 0,2. Por último, si el viajante trabaja todo el día en A, permanecerá en esa ciudad al día siguiente con probabilidad 0,1, irá a B con una probabilidad de 0,3 y a C con una probabilidad de 0,6.

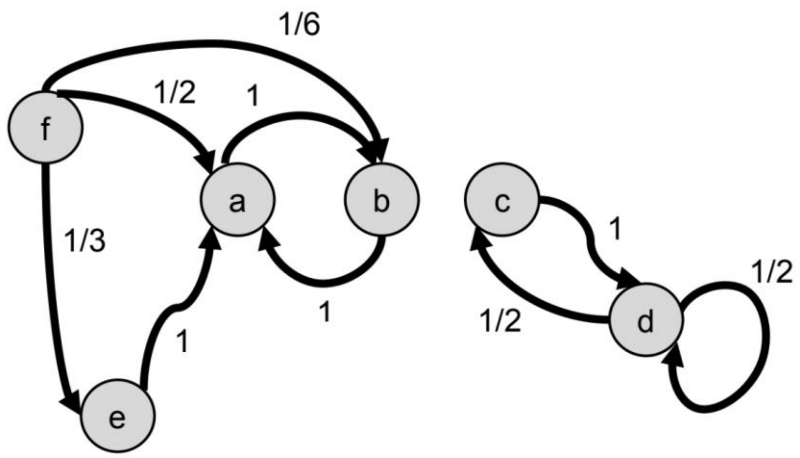
a) Dibujar el grafo asociado.
b) Si el viajante está en C, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga que trabajar en C al cabo de cuatro días?
c) Del total de días laborales, ¿qué porcentaje de días el viajante está en cada una de las tres ciudades?

10. Para cada una de las matrices de transición que se dan a continuación:

$$A=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0 & 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Construir el grafo correspondiente.
b) Clasificar los estados de la cadena.
c) Identificar las clases cerradas.
d) Responder: ¿es posible encontrar una única distribución límite?

11. El siguiente grafo representa un proceso, cuyo comportamiento puede modelarse a través de una cadena de Markov.



a) Estudie la cadena y sus estados.
b) Calcule, para cada *i*, *j* pertenecientes al espacio de estados *E*, la probabilidad de alcanzar el estado *i* a partir de *j* en algún número finito de pasos.
c) Analice si existe para esta cadena una única distribución límite.
Importante: todos los ítems deben estar justificados teóricamente, utilizando nomenclatura específica.

12. Considere dos apostadores cuyos capitales suman \$7 de manera que, cuando uno de ellos tiene los \$7, el otro llega a la ruina y el juego termina. Suponga que los jugadores apuestan \$1 en cada jugada, que las jugadas son independientes y que se tiene la misma probabilidad de ganar o perder. Sea X_n el capital del primer apostador al final de la *n*-ésima jugada.
a) Mostrar que *X* es una cadena de Markov con espacio de estados *E*={0,…,7} y calcular sus probabilidades de transición.
b) Calcular la probabilidad *P(i ⊨ ◊0)* de llegar a la ruina a partir del capital inicial *i* para el primer jugador.
c) Simular tres trayectorias desde distintos estados hasta absorción. Observar hacia qué estado absorbente tienden, cuánto tardan en absorberse y si notan algún patrón según el estado inicial.