PRÁCTICA 1 - Funciones reales - Parte 1

1. (a) Expresar el área y el perímetro de un triángulo equilátero como una función de la longitud del lado del mismo.
   (b) Expresar la longitud del lado l de un cuadrado como una función de la longitud d de la diagonal del mismo. Expresar el perímetro y el área del cuadrado como una función de la longitud d de su diagonal.
   (c) Una caja prismática sin tapa, de $2m^3$ tiene base cuadrada. Expresar el área de la superficie de la caja en función de la longitud de uno de los lados de su base e indicar su dominio.
   (d) Un recipiente prismático de almacenamiento, sin tapa, tiene $10m^3$ de volumen. La longitud de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta $\$100$ por metro cuadrado, y el de los lados $\$60$ por metro cuadrado. Expresar el costo de los materiales en función del ancho de la base e indicar su dominio.

2. Dada la función

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) = |x+5| + |x-2|, \end{array}$$

   (a) Calcular $g(0)$, $g(4)$, $g(-5)$, $g(t+2)$.
   (b) ¿Existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $g(a) = 0$?

3. Describir el dominio y recorrido de las siguientes funciones. Calcular el valor de la función en los puntos indicados en cada caso:

   (a) $f_1(x) = 3, \qquad x = -1, x = \pi.$
   (b) $f_2(x) = \frac{1}{x}, \qquad x = -2, x = \frac{1}{2}.$
   (c) $f_3(x) = \begin{cases} 2x+1 & -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & 0 < x \leq 3, \end{cases} \qquad x = -1, x = 0, x = 2.$
   (d) $f_4(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, \end{cases} \qquad x = 2, x = \frac{2}{3}, x = \sqrt{2}.$
   (e) $f_5(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x+2}, \qquad x = 0, x = -3$

4. Siempre que sea posible, encontrar la ley y el dominio de las funciones definidas en cada ítem. En caso de no ser posible, decir por qué. Además, calcular los valores de las funciones definidas en $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

   (a) Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x$, se desea definir $h(x) = \frac{f}{g}(x)$ y $k(x) = \frac{g}{f}(x)$
   (b) Dadas $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$, se desea definir $h(x) = f^2(x)$ y $k(x) = \frac{f}{g}(x)$
   (c) Dadas $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ y $g(x) = x + 3$, se desea definir $h(x) = (f+g)(x)$ y $k(x) = (gf)(x)$
   (d) Dadas $f(x) = \sqrt{3x+8}$ y $g(x) = \sqrt{9-2x}$, se desea definir $h(x) = (f+g)(x)$ y $k(x) = \frac{g}{f}(x)$

5. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / x \mapsto f(x) = x^2$, determinar para cada una de las siguientes igualdades el conjunto de números reales para el cual es válida:

   (a) $f(-x) = f(x)$ (b) $f(-x) = -f(x)$ (c) $f(2x) = 4f(x)$

6. Considerar las funciones

$$f_1(x) = x^2, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x}, \ (x \neq 0)$$

   (a) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$, hallar el dominio y simplificar la expresión de la ley de cada una de las funciones

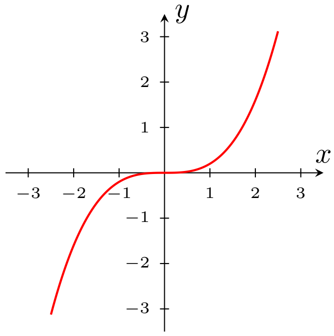
$$g_i(h) = \frac{f_i(3+h) - f_i(3)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

   (b) Para cada una de las funciones $\{f_i : 1 \leq i \leq 2\}$ recién definidas, simplificar el valor de la expresión

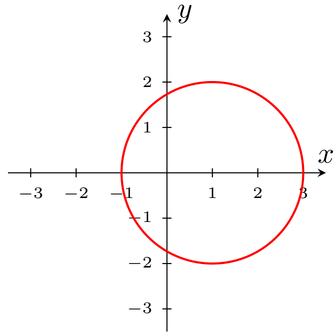
$$\frac{f_i(x+h) - f_i(x)}{h}, \qquad i = 1, 2.$$

7. Para cada una de las siguientes curvas en el plano cartesiano xy, determinar si se trata de la gráfica de alguna función $f(x)$.

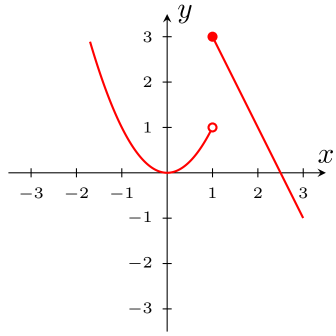
(a)



(b)



(c)



8. Para cada una de las siguientes funciones: Indicar dominio y recorrido, dar una expresión en la cual no intervenga el valor absoluto y representarlas gráficamente.

   (a) $f_1(x) = |x - 1|$. (b) $f_2(x) = |x| + |x - 1|$. (c) $f_3(x) = |x| - 1$.

9. (a) Determinar gráfica y analíticamente si las siguientes funciones reales son o no inyectivas. (*Para el análisis gráfico se puede hacer uso del software GeoGebra.*)

   I. $f_1(x) = 4x - 2$.
   II. $f_2(x) = x^3 - x$.
   III. $f_3(x) = \sqrt{x}$.
   IV. $f_4(x) = 2$
   V. $f_5(x) = 1 - x^2 - x$.

   (b) Indicar en qué conjunto A se puede definir cada función para que sea inyectiva.

   I. $f_1 : A \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x + 3$.
   II. $f_2 : A \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = 6 - |x - 2|$.
   III. $f_3 : A \to [-1, 8], x \mapsto f_3(x) = \sqrt[3]{x}$.
   IV. $f_4 : A \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = \cos(\pi x)$.

10. (a) Determinar analíticamente si las siguientes funciones reales son o no sobreyectivas, considerando que en todos los casos el codominio es $\mathbb{R}$.

    I. $f_1(x) = 4x - 2$.
    II. $f_2(x) = x^3 - x$.
    III. $f_3(x) = \sqrt{x}$.
    IV. $f_4(x) = 2$
    V. $f_5(x) = 1 - x^2 - x$.

    (b) Redefinir en cada caso el codominio de la función para que resulte sobreyectiva.

    I. $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x^2 + 3$.
    II. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = 3 - |x + 2|$.
    III. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = [x + 2]$.
    IV. $f_4 : [0, 4] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = -\cos(\pi x)$.

11. Determinar si cada una de las siguientes funciones tiene algún tipo de paridad.

    (a) $f_1(x) = 4$.
    (b) $f_2(x) = x^2 + x$.
    (c) $f_3(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.
    (d) $f_4(x) = 2x + 5$.
    (e) $f_5(x) = x^3 - x$.
    (f) $f_6(x) = \sqrt{x}$.
    (g) $f_7(x) = \sqrt{|x|}$.
    (h) $f_8(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}_0^+, \\ -1, & x \in \mathbb{R}^-. \end{cases}$.

12. Dada la función $f : [-3, 2] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x - 1|$, se define la función $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ par y tal que para todo $x \in [0, 2]$ sea $g(x) = f(x)$.

    (a) Representar gráficamente las funciones f y g e indicar sus dominios y recorridos.
    (b) Encontrar la ley de la función g.

13. (a) Mostrar que, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto simétrico, la única función $f : A \to \mathbb{R}$ que es par e impar simultáneamente es la función nula.

    (b) Siendo p_1, p_2 dos funciones pares e i_1, i_2 dos funciones impares definidas en A, determinar, de ser posible, la paridad en cada uno de los siguientes casos:

    I. $f_1 = p_1 + p_2$.
    II. $f_2 = p_1 + i_1$.
    III. $f_3 = i_1 + i_2$.
    IV. $f_4 = p_1 p_2$.
    V. $f_5 = p_1 i_1$.
    VI. $f_6 = i_1 i_2$.

    (c) Sea f una función dada, con dominio simétrico.

    I. Demostrar que la funciones p e i, que tienen el mismo dominio que f y están definidas por

    $$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \ , \ \text{ e } \ i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

    son una función par y una función impar respectivamente.

    II. Verificar que $f(x) = p(x) + i(x)$.

    III. Mostrar que, si puede descomponerse a la función f como

    $$f(x) = p_1(x) + i_1(x) = p_2(x) + i_2(x) \ ,$$

    con p_1, p_2 pares e i_1, i_2 impares, entonces, necesariamente,

    $$p_1 = p_2 \ , \ \text{ e } \ i_1 = i_2 \ .$$

    Luego, una función f de dominio simétrico siempre puede escribirse como la suma de una función par con una impar, y esta representación es única.

(d) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 4x - 3$, hallar su descomposición como la suma de una función par p con una impar i y representar gráficamente las tres funciones f, p e i.

14. Estudiar la monotonía de las siguientes funciones.

    (a) $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) = x^2 + 2x + 1.$

    (b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(x) = 3x + 9.$

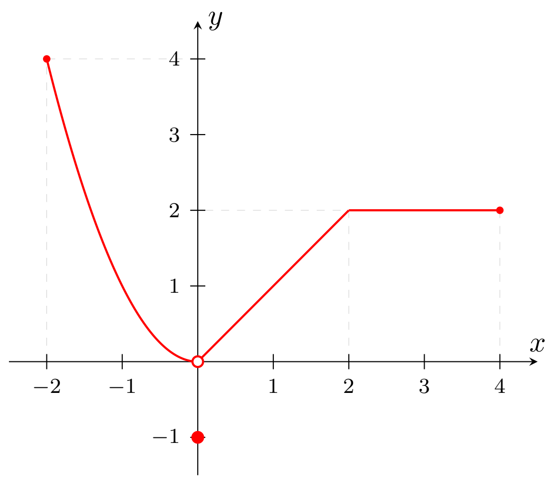
    (c) $f_3 : [2, 7] \to \mathbb{R}, x \mapsto f_3(x) = |x - 1| + 1.$

    (d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_4(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ 2 - x, & x \geq 1. \end{cases}.$

    (e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_5(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \leq 0, \\ -x, & x > 0. \end{cases}$

    (f) $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f_6(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x < -1, \\ 1, & -1 \leq x < 1, \\ x, & x \geq 1. \end{cases}$

15. Dada la función $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}$ cuya gráfica se muestra a continuación:



    (a) Calcular,a partir de la gráfica, los valores de $f(-2)$, $f(0)$ $f(1)$, $f(2)$ y $f\left(\frac{5}{2}\right)$.

    (b) Determinar los intervalos donde la función es creciente y decreciente.

    (c) ¿Puede decir algo acerca de la paridad de esta función?

    (d) ¿Se trata de una función inyectiva? Justificar.

    (e) Determinar el codominio para que f resulte sobreyectiva.

16. En cada uno de los siguientes casos esbozar, de ser posible, la gráfica de una función que cumpla con las propiedades especificadas. En el caso de no ser posible, justificar el porqué.

    (a) f es una función creciente en $[-1, 1]$ y decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

    (b) r es una función impar y decreciente en $\mathbb{R}$.

    (c) s es una función periódica de período p y estrictamente creciente.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119