Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 7: Aplicaciones del Cálculo Diferencial.

---

1. Represente gráficamente las siguientes funciones y halle, si es posible sus extremos relativos y absolutos.

$$
\begin{array}{rlll}
i) & f_1 : [-1, 0) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_1(x) = 2 - 2x^2; \\
ii) & f_2 : (-3, 1) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_2(x) = 2x^2 + 3x - 2; \\
iii) & f_3 : [0, 2) \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_3(x) = -x^2 + 2x - 2; \\
iv) & f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & \text{tal que} & f_4(x) = x^2 + |2 - 4x| + 1;
\end{array}
$$

$$
v)\quad f_5(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{si } x \geq 0, \\ \arctan x & \text{si } x < 0; \end{cases} \qquad vi)\quad f_6(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}|x - 2| & \text{si } x > 0. \end{cases}
$$

2. Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + 1$. Determine los valores de a y b de manera que el máximo absoluto de f sea 3 y alcance el mismo en $x = 1$.

3. Determine para qué valores de a y b la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tiene un máximo relativo en $x = -3$ y un mínimo relativo en $x = -1$.

4. Sea $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Muestre que la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^k - kx$ posee un extremo relativo en $x = 1$, tratándose de un máximo relativo si $0 < k < 1$ y de un mínimo relativo si $k > 1$.

5. Halle los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo indicado en cada caso:

$$
\begin{array}{rlll}
i) & f_1(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \quad \text{en } [0, 3]; & ii) & f_2(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} \quad \text{en } [1, 3]; \\
iii) & f_3(x) = x\sqrt{1 - x} \quad \text{en } [-1, 1]; & iv) & f_4(x) = x - \operatorname{sen} x \quad \text{en } [-\pi, \pi]; \\
v) & f_5(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x} \quad \text{en } [0, 2\pi]; & vi) & f_6(x) = (x - 1)^{1/3} + \dfrac{1}{2}(x + 1)^{2/3} \quad \text{en } [-2, 7].
\end{array}
$$

6. Calcule los siguientes límites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$, $b)$ $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{2x^2-13x+21}$, $c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(2x-1)e^x - x - 2}{x^3}$, $e)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, $f)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x-\sin x}{(x \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}}}$,

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $h)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(2x) - 2\operatorname{arc\,sen} x}{x^3}$, $i)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$.

$j)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(a \arctan \frac{\sqrt{x}}{a} - b \arctan \frac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x\sqrt{x}}$, $k)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} x^k - n}{x-1}$, $l)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x^b}$, $a>1$, ,

$m)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right]$, $n)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x}$, , $o)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{x^x} - 1$.

7. ¿Para qué valores de las constantes a y b es $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^{-3}\sin(3x) + a\,x^{-2} + b) = 0$?

8. Halle c de modo que $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = 4$.

9. Represente gráficamente una función que satisfaga simultáneamente las condiciones dadas en cada caso.

   $a)$ $g(-1)=4$, $g(1)=0$, $g'(-1)=0$, $g'(1)$ no existe,
   $g'(x)>0$ si $|x|>1$, $g'(x)<0$ si $|x|<1$, $g''(x)<0$ si $|x|\neq 1$.

   $b)$ $f'(2)=0$, $f'(0)=1$, $f'(x)>0$ si $0<x<2$, $f'(x)<0$ si $x>2$,
   $f''(x)<0$ si $0<x<4$, $f''(x)>0$ si $x>4$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$,
   $f(-x)=-f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

10. $a)$ Suponga que $f'(x)>g'(x)$ para todo x y que $f(a)=g(a)$. Demuestre que $f(x)>g(x)$ para $x>a$ y $f(x)<g(x)$ para $x<a$.

    Busque un ejemplo donde se muestre que lo anterior no es válido sin la hipótesis $f(a)=g(a)$.

    $b)$ Suponga que f es continua y derivable en [0,1], que $f(x)$ está en [0,1] para todo x y que $f'(x)\neq 1$ para todo $x\in[0,1]$. Demuestre que existe exactamente un $x_0\in[0,1]$ tal que $f(x)=x$.

    $c)$ Demuestre que si f y g son convexas y f es creciente, entonces $g\circ f$ es convexa.

d) Enuncie y demuestre un resultado similar al Teorema 85 del documento de teoría, que brinde condiciones suficientes de no crecimiento y no decrecimiento.

11. Para cada una de las siguientes funciones se pide:

    a) determine el dominio de f y estudiar su paridad;

    b) determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y la existencia de extremos relativos;

    c) determine los intervalos de concavidad y de convexidad y la existencia de puntos de inflexión;

    d) analice la existencia o no de asíntotas horizontales y/o verticales para f;

    e) construya un boceto de la gráfica de f utilizando la información de los items anteriores;

    f) analice la existencia de máximo o mínimo absoluto para esta función.

    i) $f(x) = x^3 - 4x$, *ii*) $f(x) = (x-1)^2\,(x+2)$,

    iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, *iv*) $f(x) = 2 + (x-1)^4$,

    v) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, *vi*) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$,

    vii) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, *viii*) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$,

    ix) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, *x*) $f(x) = x - \operatorname{sen} x$,

    xi) $f(x) = x\ e^x$, *xii*) $f(x) = \ln(x^2+x+1)$.

12. Suponga que f es una función tal que $f'(x) = 1/x$ para todo $x > 0$ y que $f(1) = 0$. Demuestre que $f(xy) = f(x) + f(y)$ (sin usar la función vista en apunte anterior!).

    Ayuda: Halle $g'(x)$ cuando $g(x) = f(xy)$.

13. Demuestre que entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

14. Convengamos en medir las alturas hacia arriba desde el nivel del suelo. Si $s(t)$ representa la posición de un cuerpo en tiempo t al ser arrojado hacia arriba, entonces su aceleración es $s''(t) = -9,8m/s^2$.

    a) Si se lanza un cuerpo con velocidad inicial v_0 m/s y a 1 metro del suelo, ¿a qué altura llegará?

    b) ¿Cuál será su velocidad al tocar el suelo?

    c) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?