Complementos de Matemática I - Matemática Discreta

2025

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

Presentación de la materia

Complementos de Matemática I / Matemática Discreta

Docentes:

- Mariana Escalante mariana@fceia.unr.edu.ar
- Azul Giovagnoli azul@fceia.unr.edu.ar
- Lucía Moroni lmoroni@fceia.unr.edu.ar

Aula Virtual:

- Nombre: Matemática Discreta/Complementos de Matemática I (Licenciatura en Matemática)
- Contraseña: Euler-1736

Horarios:

- Lunes 10:30 a 14:30, Anfiteatro de física
- Miércoles 10:30 a 13:30, Aula 03

Parciales: (carpeta cerrada)

- Parcial 1: 01/10
- Parcial 2: 19/11
- Recuperatorio: 26/11

Condiciones:

- Regulares: notas mayores o iguales a 5, promedio 6.
- Promovidos: notas mayores o iguales a 7, promedio 8.

Introducción

Ejemplos

Juan, María y Constanza son amigos entre sí desde la secundaria. Santino, Facundo y Pedro juegan juntos en un equipo de fútbol de la liga regional. Lourdes estudia inglés en el mismo curso de María y Constanza, y suelen reunirse a estudiar en la casa de Constanza. Ramiro es hermano de Lourdes, y conoció a María en un curso de fotografía. Pedro y Lourdes ingresaron el mismo año a la carrera de LCC en la UNR, y han entregado trabajos prácticos juntos. Santino y Ramiro comparten el gusto musical y han formado una banda.

Aún sin conocerse todos entre sí, lograron organizarse para aprovechar un importante descuento por tarifa grupal en un viaje en colectivo a San Carlos de Bariloche. Debiendo ubicarse en cuatro filas de asientos dobles, ¿cómo pueden sentarse de manera que cada uno lo haga junto a alguno de sus conocidos?

Ejemplos

Imaginen que estamos en la ciudad de Königsberg (hoy Kaliningrado, Rusia) en el siglo XVIII.

Ejemplos

En Königsberg, hay un río llamado Pregolia que divide el plano en cuatro regiones distintas, las cuales están unidas a través de siete puentes,

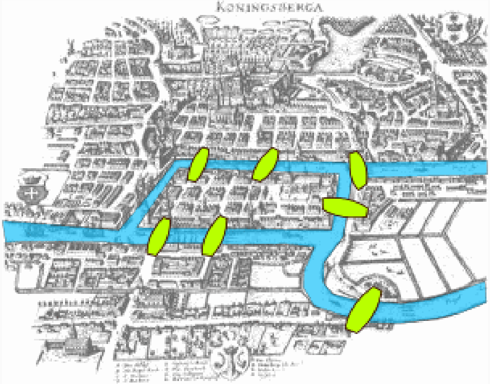


Figura 1: Puentes de Königsberg

¿es posible dar un paseo comenzando y terminando en el mismo lugar, cruzando cada puente exactamente una vez?

Ejemplos

Un matemático llamado Leonhard Euler se hizo la misma pregunta en 1736.

Figura 2: Leonhard Euler

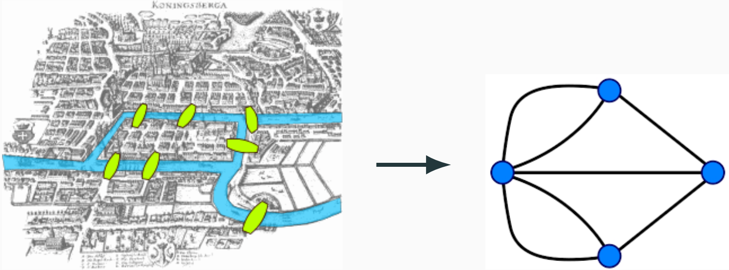
Su gran idea fue darse cuenta de que podía ignorar todos los detalles irrelevantes.

Ejemplos

Fue la primera persona que pensó en estudiar las propiedades de un objeto definido solo por sus conexiones, independientemente de su forma física.

Lo único que importaba era:

- Cuántas regiones de tierra había $\rightarrow$ Vértices
- Cuántos puentes conectaban cada par de regiones $\rightarrow$ Aristas



Ejemplos

Ahora pensemos en otro tipo de problema... imaginemos que somos una empresa de logística y tenemos que encontrar la mejor manera de transportar mercancía entre varias ciudades. Supongamos que tenemos 5 ciudades: A, B, C, D y E. Las rutas disponibles son:

- Hay una ruta directa de A a B.
- Hay una ruta directa de A a C.
- Hay una ruta directa de B a D.
- Hay una ruta directa de C a D.
- Hay una ruta directa de D a E.
- Hay una ruta directa de B a E.

¿Cómo podríamos representar este problema de rutas? ¿Qué serían los vértices y qué serían las aristas en este caso?

¿Este es el único dibujo posible para representar estas conexiones?

Un grafo no siempre tiene que estar dibujado explícitamente, pero debe estar bien definido.

Definiciones

Definición

Un **grafo** G *es un par ordenado* $(V(G), E(G))$ *que consiste en un conjunto* $V(G)$ *de vértices y un conjunto* $E(G)$ *de aristas junto con una función de incidencia* ψ_G *que asigna a cada arista un par no ordenado de vértices (no necesariamente distintos) de* G*.*

Notación:

- $\psi_G : E(G) \longmapsto V(G) \times V(G)$
- $\psi_G(e) = \{u, v\} := uv$ para $e \in E(G)$ y $u, v \in V(G)$. La arista e es incidente en u y v, u y v son extremos de e.
- Dos vértices incidentes en una misma arista se dicen adyacentes, lo mismo para dos aristas que tienen un extremo en común.
- Si no hay lugar a confusión sobre el grafo de referencia notamos V en lugar de $V(G)$ y E en lugar de $E(G)$.
- $n = |V(G)|$ es el orden de G
- $m = |E(G)|$

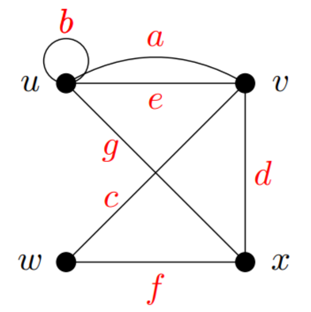
Ejemplo

$$G = (V(G), E(G))$$

donde $V(G) = \{u, v, w, x\}$, $E(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

y ψ_G *está definida por*

$$\psi_G(a) = uv,\ \psi_G(b) = uu,\ \psi_G(c) = vw,\ \psi_G(d) = xv,$$
$$\psi_G(e) = uv,\ \psi_G(f) = wx,\ \psi_G(g) = ux$$



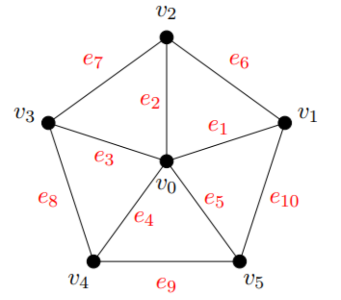
Ejemplo

$$H = (V(H), E(H))$$

donde $V(H) = \{v_i : i = 0, \dots, 5\},\ E(H) = \{e_i : i \in \{1, \dots, 10\}\}$

y ψ_H *está definida por*

$$\psi_H(e_i) = v_0 v_i,\ i \in \{1, \dots, 5\}$$
$$\psi_H(e_i) = v_{i-5} v_{i-4},\ i \in \{6, \dots, 9\}$$
$$\psi_H(e_{10}) = v_5 v_1$$



Definiciones

Definición

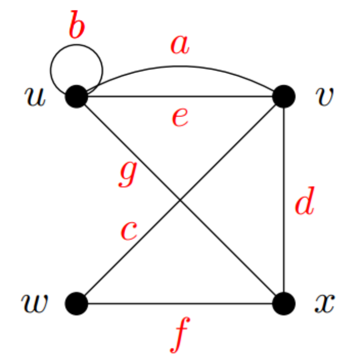
Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. Llamamos vecindad abierta de v al conjunto $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$. Llamamos vecindad cerrada de v al conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Si G está claro del contexto, notamos $N(v)$ y $N[v]$ respectivamente.

Algunas convenciones:

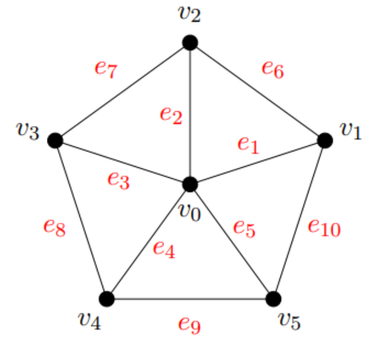
- Dos vértices adyacentes se dicen vecinos.
- Si $N[v] = V$ decimos que v es un vértice universal.
- una arista uu es un loop o bucle.
- Dos aristas con mismo extremos se dicen paralelas.
- Un grafo es simple si no tiene aristas paralelas ni bucles. En este caso, queda identificada la arista y el par de vértices distintos.
  Además resulta, $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.
- Llamamos grafo nulo al grafo $G = (V, E)$ si $V = \emptyset$ y grafo trivial si $|V| = 1$.
- En general, trabajaremos con grafos simples, no nulos y finitos.

Ejemplo

¿Qué características tienen G y H?



(a) G



(b) H

Algunos grafos FAMOSOS

Consideremos $n \in \mathbb{N}$.

- Grafo completo K_n: Grafo simple con n vértices donde todo par de vértices son adyacentes.
  $V(K_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(K_n) = \{v_i v_j : i, j \in [n], i \neq j\}$.
- Grafo vacío: un grafo que no posee aristas.
- Grafo camino P_n $(n \geq 2)$:
  $V(P_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(P_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in [n-1]\}$.
  $m = |E(P_n)| = ?$
- Grafo ciclo C_n $(n \geq 3)$:
  $V(C_n) = \{v_i : i \in [n]\}$,
  $E(C_n) = \{v_i v_{i+1} : i \in [n-1]\} \cup \{v_1 v_n\}$.

Grafos bipartitos

Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si existe una bipartición (X, Y) de V tal que toda arista de E tiene un extremo en X y otro en Y.
Notación: $G[X, Y]$.

Ejemplos:

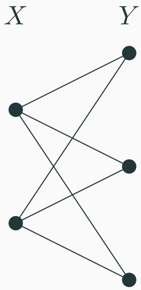
- Los caminos P_n son grafos bipartitos.
- Los ciclos C_{2k} con $k \in \mathbb{N}$ son grafos bipartitos.
- Los ciclos C_{2k+1} no son bipartitos.
- Los grafos completos K_n con $n \geq 3$ no son grafos bipartitos.

Grafos bipartitos

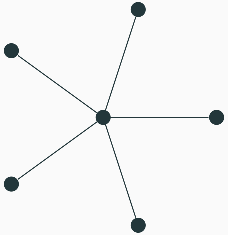
Definición

Consideremos $n, m \in \mathbb{N}$, $X = \{v_i, i \in [n]\}$ *e* $Y = \{u_j, j \in [m]\}$.

*El grafo **bipartito completo*** $K_{n,m}$ *tiene conjunto de vértices* $V(K_{n,m}) = X \cup Y$ *y como aristas al conjunto* $E(K_{n,m}) = X \times Y$. *En particular, al grafo bipartito completo* $K_{1,m}$ *se lo denomina grafo estrella.*



$K_{2,3}$



$K_{1,5}$

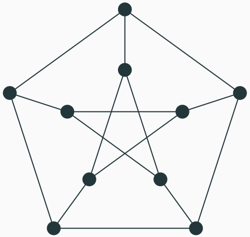
Grafos conexos

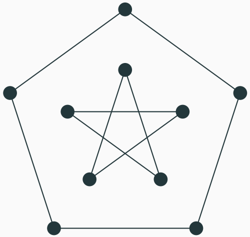
Definición

Un grafo $G = (V, E)$ es conexo si para toda bipartición (X, Y) de su conjunto de vértices V con $X \neq \emptyset \neq Y$, existe al menos una arista con un extremo en cada conjunto, i.e. $\psi(E) \cap (X \times Y) \neq \emptyset$.

En caso contrario, el grafo es disconexo.

Es una propiedad del grafo.





Grado

Definición

Sea $G = (V, E)$ un grafo y $v \in V$. El grado de v es la cantidad de aristas incidentes en v (un bucle cuenta dos al grado de cada vértice) y se lo nota $d_G(v)$ (o $d(v)$ si G está claro del contexto).

Si $d_G(v) = 0$ decimos que v es un vértice aislado.

Observemos que si G es un grafo simple entonces $d(v) = |N(v)|$.

- $\delta(G)$ es el grado mínimo de todos los vértices de G.
- $\Delta(G)$ es el grado máximo de todos los vértices de G.
- $d(G)$ es el grado promedio de todos los vértices de G.

Primeras propiedades

Teorema

Sea $G = (V, E)$ *un grafo. Luego*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

Demostración.

Surge de la definicion de grado de un vértice y del hecho que cada arista aporta 2 unidades a la suma $\sum_{v \in V} d(v)$. $\square$

Primeras propiedades

Corolario

Sea $G = (V, E)$ un grafo. La cantidad de vértices de grado impar es par.

Demostración.

Definimos los conjuntos: $I = \{v \in V : d(v) \text{ es impar}\}$ y $P = \{v \in V : d(v) \text{ es par}\}$.

Por el teorema anterior, sabemos que $\sum_{v \in V} d(v) = 2m$. Separando la suma sobre los vértices de grado par y los de grado impar, tenemos:

$$\sum_{v \in I} d(v) + \sum_{v \in P} d(v) = 2m.$$

Observemos que:

- Cada término en $\sum_{v \in P} d(v)$ es par, por lo que la suma total sobre P es par.
- Como $2m$ es par, se deduce que $\sum_{v \in I} d(v)$ también debe ser par.

Ahora, cada término en $\sum_{v \in I} d(v)$ es impar. La suma de una cantidad impar de números impares es impar, mientras que la suma de una cantidad par de números impares es par. Por lo tanto, para que $\sum_{v \in I} d(v)$ sea par, el número de términos (es decir, $|I|$) debe ser par.

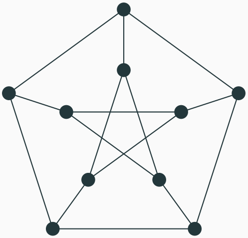
En consecuencia, el número de vértices de grado impar en G es par. $\square$

Grafos regulares

Definición

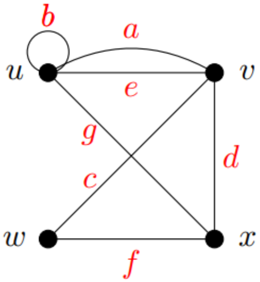
Un grafo $G = (V, E)$ es k-regular si $d(v) = k$ para todo $v \in V$ y k entero positivo fijo.

- El grafo K_n es $(n-1)$-regular.
- El grafo completo bipartito $K_{k,k}$ es k-regular.
- El grafo C_n es 2-regular.
- Los grafos 1,2-regulares son simples de caracterizar, sin embargo no es así con los grafos cúbicos o 3-regulares.
- El grafo de Petersen es 3-regular:



Definición

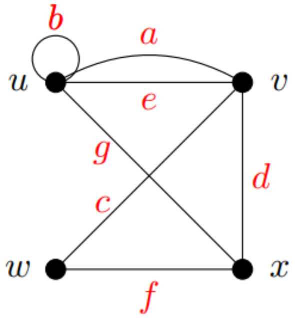
Dado $G = (V, E)$, la matriz de incidencia *de G es la matriz $n \times m$, $M_G = (m_{ve})$ tal que $m_{ve} \in \{0, 1, 2\}$ cuenta el número de veces en que v y e son incidentes.*



$$M_G = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{array}{c} u \\ v \\ w \\ u \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definición

Dado $G = (V, E)$, la matriz de adyacencia *de G es la matriz $n \times n$, $A_G = (a_{uv})$ tal que $a_{uv} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ cuenta el número de aristas que unen los nodos u y v. Un bucle cuenta dos unidades.*



$$M_G = \left(\begin{array}{c|cccc} & u & v & w & x \\ \hline u & 2 & 2 & 0 & 1 \\ v & 2 & 0 & 1 & 1 \\ w & 0 & 1 & 0 & 1 \\ u & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ventajas y desventajas

- En general, los grafos tienen menos vértices que aristas. Por ello la matriz de adyacencia requiere menos espacio de almacenamiento.
- También se puede usar una lista de adyacencia: $(N(v) : v \in V)$, donde en $N(v)$ podemos tener multisets, es decir, listas no ordenadas de vértices, y así representar grafos no simples.
- ¿Qué podemos hacer en un grafo bipartito para ahorrar almacenamiento?

Isomorfismo de grafos

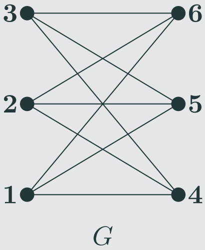
Definición

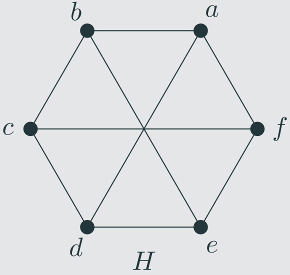
Dos grafos simples G y H son isomorfos (y escribimos $G \equiv H$) si existe una función biyectiva $\theta : V(G) \to V(H)$ tal que

$$uv \in E(G) \iff \theta(u)\theta(v) \in E(H)$$

Una tal función es un isomorfismo.

Ejemplo





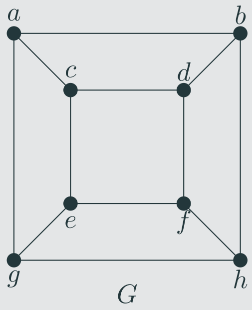
¿H y G son isomorfos?

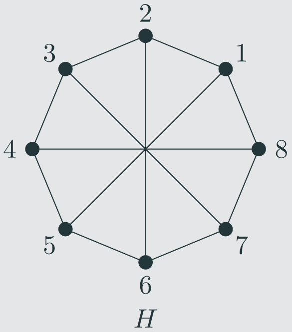
$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ b & d & f & c & e & a \end{pmatrix}$$

Observación

Dos grafos isomorfos poseen el mismo número de vértices y de aristas. Pero esta condición no es suficiente.

Ejemplo





¿H y G son isomorfos?

Ambos grafos tienen 8 vértices y 12 aristas, pero no son isomorfos, ya que, por ejemplo, los vértices b, c, f, g son mutuamente no adyacentes pero en H no existen 4 vértices no adyacentes.

Isomorfismo de grafos

Observación

La relación "es isomorfo a "define una relación de equivalencia en la familia de los grafos simples finitos.

Cuando representamos a un grafo, tomamos un representante de la clase de todos los grafos de su clase, bajo esta relación.

Automorfismos

Definición

Un automorfismo es un isomorfismo de un grafo (simple) en si mismo. Es decir, es una permutación de los vértices que preserva adyacencias.

Observación

Los automorfismos reflejan simetrías entre los vértices.

- Dos vértices u y v son similares si existe un automorfismo θ de G tal que $\theta(u) = v$.
- Un grafo se dice vértice transitivo si todo par de vértices son similares.

Ejemplo

- $K_n, K_{n,n}$ *y* C_n *son grafos vértice transitivos.*
- *El grafo de Petersen es vértice transitivo.*

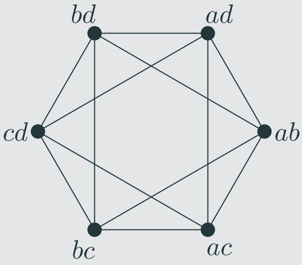
Grafos de intersección

Definición

Sea X un conjunto y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. El grafo de intersección de $\mathcal{F}$ es un grafo que tiene un vértice por cada elementos de $\mathcal{F}$ y dos vértices son adyacentes si su intesercción es no vacía.

Ejemplo

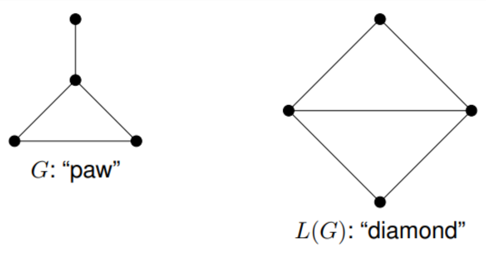
$X = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) : |A| = 2\}$.



¿Todo grafo simple es grafo de intersección de alguna familia $\mathcal{F}$?

Grafos de intersección

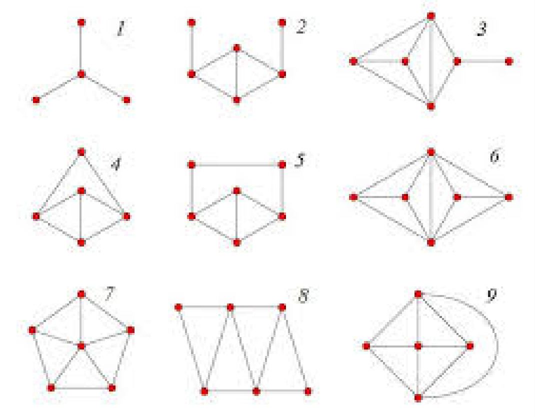
Sea $G = (V, E)$ un grafo simple y consideremos $\mathcal{F} = E$. El grafo de interseción de $\mathcal{F}$ se denomina grafo de línea de G, notado $L(G)$ y tiene por vértices las aristas y conecta dos "aristasçuando tienen un extremo en común.



Grafos de intersección

¿Cualquier grafo es grafo de línea?

Grafos prohibidos para los grafos de línea:

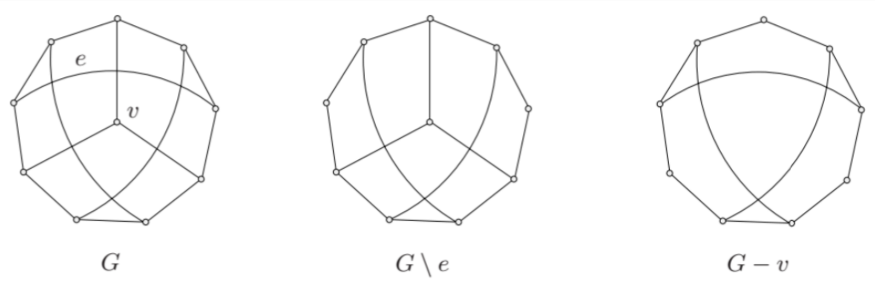


- Sea $X = \mathbb{R}$ y $\mathcal{F} = I_{\mathbb{R}}$ el conjunto de intervalos cerrados de la recta real. Su grafo de intersección es llamado grafo de intervalos y tiene por vértices los intervalos y conecta dos "intervalosçuando tienen algún elemento en común.

Operaciones en grafos

Sea $G = (V, E)$, $e \in E$ y $v \in V$

- Borrado de arista: $G \setminus e$ es el grafo con V como conjunto de vértices y $E \setminus \{e\}$ como conjunto de aristas.
- Borrado de vértice: $G - v$ es el grafo con conjunto de vértices $V \setminus \{v\}$ y como conjunto de aristas, todas las de E en la que v no es un extremo.



Operaciones en grafos - Subgrafos

Definición

Un grafo H es subgrafo de G si puede ser obtenido de G aplicando borrados de vértices y/o aristas. Convenimos que un grafo es subgrafo de sí mismo.

Notación: $H \subseteq G$.

Un subgrafo de G se dice subgrafo inducido si puede ser obtenido de G por borrado solamente de vértices.

Ejemplo

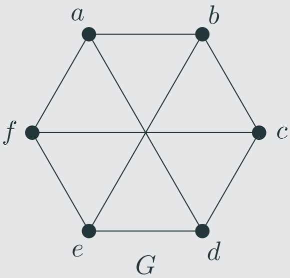


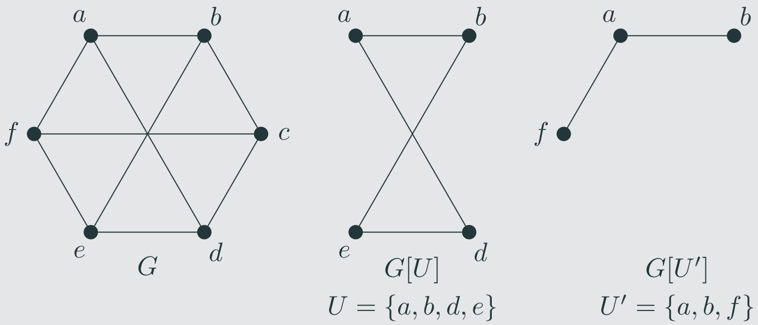
Figura 4: P_4 es subgrafo de G pero no es subgrafo inducido de G.

Operaciones en grafos - Subgrafos

Definición

Dado $G = (V, E)$ y $U \subseteq V$, el subgrafo inducido por U, notado $G[U]$, es el subgrafo de G obtenido borrando los vértices de $V \backslash U$.

Ejemplo



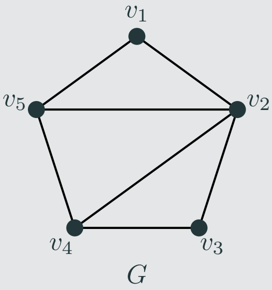
Definición

Dado $G = (V, E)$, decimos que H es subgrafo inducido de G si existe $U \subseteq V$ tal que $H = G[U]$.

Definición

Dado G, decimos que H es supergrafo de G si G se obtiene de H por borrado de un conjunto de sus vértices y/o aristas. Es decir, $G \subseteq H$.

Ejemplo



- $K_4 \subseteq G$?
- $P_3 \subseteq G$?
- $P_5 \subseteq G$?
- *Algún supergrafo de G?*

Operaciones en grafos

Hemos visto (en la práctica) que si G es bipartito, entonces C_{2k+1} $(k \in \mathbb{N})$ no es subgrafo inducido de G.

En este caso se dice que G es libre de C_{2k+1} o también $C_{2k+1} - free$ $(k \in \mathbb{N})$.

En general, si un grafo H no es subgrafo inducido de G, se dice que G es libre de H o H-free.

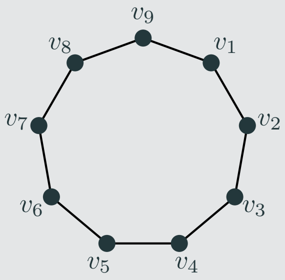
- Si G es libre de C_{2k+1} $(\in \mathbb{N})$, entonces ¿G es bipartito? Es decir, ¿la familia de grafos C_{2k+1}-free, es la familia de grafos bipartitos?
- Sea G un grafo libre de $K_{1,3}$. ¿Vale que $\Delta(G) \leq 2$?

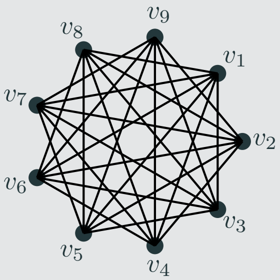
Grafo complemento

Definición

Dado G grafo simple, su complemento es el grafo simple $\overline{G}$ donde $V(\overline{G}) = V(G)$ y $E(\overline{G})$ es el conjunto de pares de vértices no adyacentes en G, es decir, $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V : u \neq v\} \backslash E(G)$.

Ejemplo





Grafo complemento - Propiedades

Algunas propiedades:

- $|E(\overline{G})| = \binom{|V(G)|}{2} - |E(G)|$
- $d_{\overline{G}}(v) = |V(G)| - d_G(v) - 1$
- $\delta(\overline{G}) = n - \Delta(G) - 1$ y $\Delta(\overline{G}) = n - \delta(G) - 1$
- $\overline{\overline{G}} \equiv G$
- $\overline{G - v} \equiv \overline{G} - v$

Algunos parámetros combinatorios

Definición

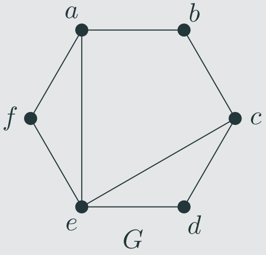
Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $W \subseteq V$ es una clique de G si $G[W]$ es un subgrafo completo de G,i.e. todos los vértices de W son adyacentes dos a dos.

Definición

El número de clique de G es el tamaño máximo de una clique de G, y se nota $\omega(G)$, i.e.

$$\omega(G) = \{|W| : \text{ es una clique de } G\}$$

Ejemplo



$W = \{a, b\}$ es una clique de G
$W = \{c, d, e\}$ es una clique de G
$\omega(G) = 3$

Algunos parámetros combinatorios

Definición

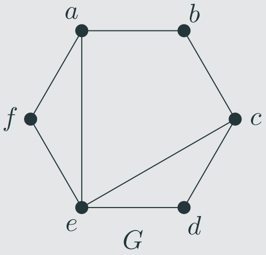
Dado un grafo $G = (V, E)$, un conjunto $S \subseteq V$ es un conjunto estable (o independiente) de G si todos sus vértices son mutuamente no adyacentees, i.e. $E(G[S]) = \emptyset$.

$S \subseteq V(G)$ es un conjunto estable si y sólo si $G[S]$ es un subgrafo vacío de G.

Definición

El número de estabilidad de G es el tamaño máximo de un conjunto estable de G y se lo nota $\alpha(G)$, i.e. $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ estable en } G\}$.

Ejemplo



$S = \{a, d\}$ es un estable de G.
$S = \{b, d, f\}$ es un estable de G.
$\alpha(G) = 3$.

Ejemplo

- $\omega(K_n) = n, \quad \alpha(K_n) = 1.$
- $\omega(K_{n,m}) = 2, \quad \alpha(K_{n,m}) = \max\{n, m\}.$
- $\omega(C_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n = 3 \\ 2 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}, \quad \alpha(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$
- $\omega(P_n) = 2, \quad \alpha(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$
- $\omega(W_n) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 3 \\ 3 & \text{si } n \geq 4 \end{cases}, \quad \alpha(W_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *si* $n \geq 4$.
- *Sea* H *subgrafo inducido de* G, *entonces* $\omega(H) \leq \omega(G)$ *y* $\alpha(H) \leq \alpha(G)$.
- *relación entre los parámetros de estabilidad entre* G *y* $\overline{G}$*?*

$$\omega(G) = \alpha(\overline{G}) \qquad \alpha(G) = \omega(\overline{G})$$

Operaciones en grafos - Unión disjunta

Consideremos dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

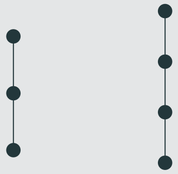
Definición

El grafo unión disjunta de G_1 y G_2, notado $G_1 + G_2$ se define como:

$$V(G_1 + G_2) = V_1 \cup V_2$$

$$E(G_1 + G_2) = E_1 \cup E_2$$

Ejemplo



$P_3 + P_4$

Ejercicio: $\alpha(G_1 + G_2) = \alpha(G_1) + \alpha(G_2),\ \omega(G_1 + G_2) = \text{máx}\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$.

Operaciones en grafos - Join

Consideremos dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

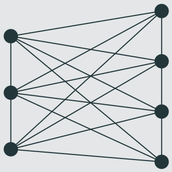
Definición

El grafo join de G_1 y G_2, notado $G_1 \vee G_2$ se define como:

$$V(G_1 \vee G_2) = V_1 \cup V_2$$

$$E(G_1 \vee G_2) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv : u \in V_1, v \in V_2\}$$

Ejemplo



$P_3 \vee P_4$

Ejercicio: $\alpha(G_1 \vee G_2) = \text{máx}\{\alpha(G_1), \alpha(G_2)\}, \; \omega(G_1 \vee G_2) = \omega(G_1) + \omega(G_2)$.

Ejercicio: Todo grafo G con al menos dos vértices verifica exactamente una de las siguientes condiciones:

1. Si G es no conexo, entonces
$$G = G_1 + G_2,$$
con G_1 y G_2 no vacíos.
2. Si $\overline{G}$ es no conexo, entonces
$$G = G_1 \vee G_2,$$
con G_1 y G_2 no vacíos.
3. Si tanto G como $\overline{G}$ son conexos, entonces se dice que G es **modular**.

Operaciones en grafos - Producto cartesiano

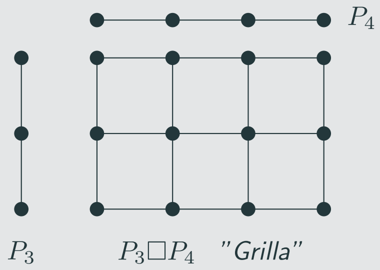
Definición

Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2)$*, el* **producto cartesiano** *de* G_1 *y* G_2*, denotado por* $G_1 \Box G_2$*, es el grafo tal que*

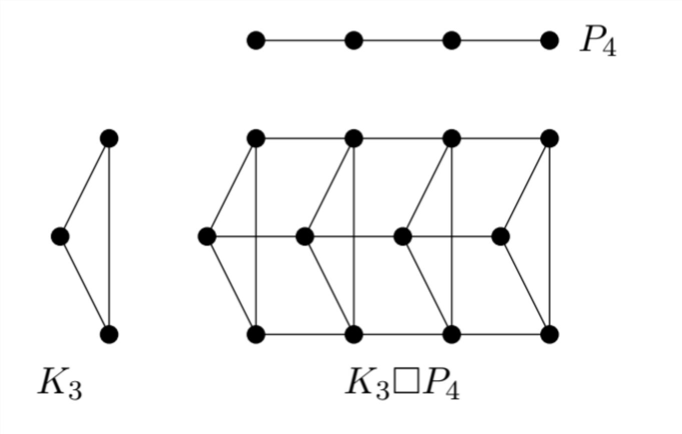
$$V(G_1 \Box G_2) = V_1 \times V_2, \text{ y}$$

$$E(G_1 \Box G_2) = \{\, (u_1, u_2)(v_1, v_2) : [u_1 = v_1 \ \wedge \ u_2 v_2 \in E_2] \ \vee \ [u_1 v_1 \in E_1 \ \wedge \ u_2 = v_2] \,\}.$$

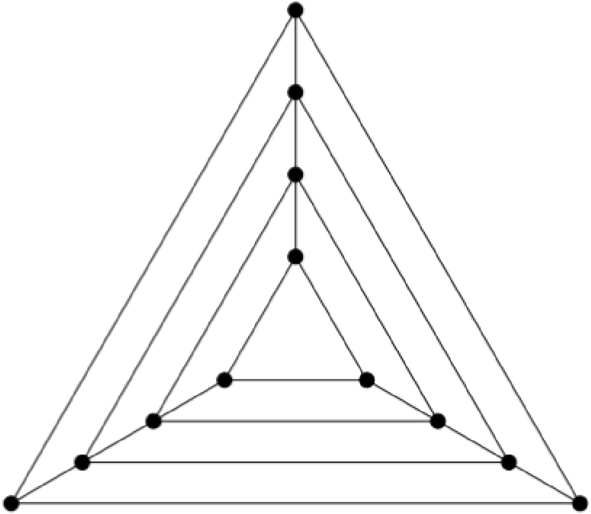
Ejemplo



Producto cartesiano - Ejemplos



Producto cartesiano - Ejemplos



$C_3 \square P_4$

"Prismas apilados"

Producto cartesiano

Observación

- *El producto Cartesiano es conmutativo.*
- *El grafo inducido por un conjunto de la forma $\{g\} \times V(H)$ es isomorfo a H. Estos subgrafos de senominan H-fibrados. Análogamente, el grafo inducido por $V(G) \times \{h\}$ es isomorfo a G y se denomina G-fibrado.*
- *Como consecuencia de lo anterior resulta que*

$$\alpha(G \Box H) \geq \max\{\alpha(G), \alpha(H)\}, \ \omega(G \Box H) \geq \max\{\omega(G), \omega(H)\}$$

.

Producto cartesiano

Teorema

Dados dos grafos G y H se verifica $\omega(G \square H) = \max\{\omega(G), \omega(H)\}$.

Demostración.

Como $G \square H$ posee un subgrafo inducido isomorfo a G (cada G-fibrado) entonces $\omega(G \square H) \geq \omega(G)$. Análogamente, $\omega(G \square H) \geq \omega(H)$.

Luego, $\omega(G \square H) \geq \max\{\omega(G), \omega(H)\}$.

Supongamos que $\omega(G \times H) > \max\{\omega(G), \omega(H)\}$ y sea W una clique en $G \times H$ de tamaño $\omega(G \times H)$.

En consecuencia, W debe tener dos vértices de la forma (g, h) y (g', h') con $g \neq g'$ y $h \neq h'$, de lo contrario W sería una clique de un fibrado de tamaño mayor que el número de clique del fibrado correspondiente.

Pero, como (g, h) y (g', h') no son adyacentes en $G \times H$, se sigue que W no es una clique de $G \times H$, lo cual es una contradicción.

Ergo, $\omega(G \times H) \leq \max\{\omega(G), \omega(H)\}$.

Por lo tanto, $\omega(G \times H) = \max\{\omega(G), \omega(H)\}$.

$\square$