Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Álgebra Lineal - LCC, LM, PM - 2024

Segunda Evaluación Parcial - 06/06/2024

Apellido y nombre: Carrera:

1. Considere la matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el polinomio minimal de A está dado por $m_A(x) = (x+2)^2(x-2)$ (no hace falta probar esto).

   (a) Pruebe que A no es diagonalizable.

   (b) Calcule la forma de Jordan J_A y una matriz invertible P tal que $J_A = P^{-1}AP$.

   (c) La matriz P del ítem anterior es una matriz de cambio de bases de $\mathbb{C}^4$. Indicar cuáles son estas bases.

2. Sea la transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ dada por $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (2y, 2x, -2z)$. Considere el producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

   (a) Calcule la transformación adjunta de T.

   (b) Pruebe que T es un operador autoadjunto.

   (c) Si $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $A = [T]_{\mathcal{C}}$, calcule una matriz diagonal D y una matriz ortogonal O tal que $D = O^t AO$.

3. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando su respuesta.

   (a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente y diagonalizable.

   (b) Sea $T \in L(\mathbb{R}^3)$ una transformación ortogonal. Entonces $\lambda = 1$ es el único autovalor de T.

   (c) Sean $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $T \in L(V)$ y T^* la transformación adjunta de T. Entonces $\mathrm{Im}(T^*) = (\ker(T))^\perp$.

   (d) Sea $T \in L(V)$ una transformación lineal ortogonal y sea $U \subset V$ un subespacio T-invariante. Entonces $T(U^\perp) \subset U$.