PRÁCTICA 2: *Conjuntos Inductivos*

Dante Zanarini Alejandro Hernández Guido De Luca Denise Marzorati Santiago Coronel

1. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
   (a) El conjunto de los números naturales múltiplos de 3.
   (b) El conjunto de los números enteros múltiplos de 3.

2. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Defina inductivamente los siguientes conjuntos y enuncie el principio de inducción primitiva para cada uno de ellos:
   (a) Σ^*
   (b) $B = \{a^n bc^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

3. Defina inductivamente los siguientes conjuntos:
   (a) $A = \{a\}^*$
   (b) $B = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ es un palíndromo}\}$
   (c) $C = \{a, b, ab, ba\}$

4. Considere el conjunto de las matrices

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{N}_0 \text{ donde } a, b, c \text{ tienen la misma paridad} \right\}$$

   (a) Defina inductivamente al conjunto M.
   (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para M.

5. Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto $\mathbb{P}$, definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $0 \in \mathbb{P}$
   - si $n \in \mathbb{P}$ entonces $(n + 2) \in \mathbb{P}$

   Utilice este principio para probar que para todo $n \in \mathbb{P}$ existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $n = m + m$.

6. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Δ inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $a \in \Delta$
   - si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$

   (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Δ.

   (b) Demuestre que cualquier cadena de Δ tiene un número par de símbolos b.

7. Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$. Definimos Γ inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $\lambda \in \Gamma$
   - si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$
   - si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

   (a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ.

   (b) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - $b \in \Gamma$
   - $a \in \Gamma$
   - $babacbaca \in \Gamma$
   - $aba \in \Gamma$

   (c) Considere ahora el conjunto Δ definido inductivamente como el menor conjunto tal que:
   - $\lambda \in \Delta$
   - si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha b \in \Delta$
   - si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha a \in \Delta$

   Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
   - si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha \in \Delta$
   - si $\alpha \in \Delta$ entonces $a\alpha \in \Delta$
   - $\Gamma \subseteq \Delta$
   - $\Delta \subseteq \Gamma$
   - $\Delta = \Gamma$

8. Definimos inductivamente la relación $S \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:

   - si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(n, n) \in S$
   - si $(n, m) \in S$ entonces $(n, m + 1) \in S$

   (a) Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
      - $(0, 0) \in S$
      - $0 \in S$
      - $(2, 3) \in S$
      - $(3, 4) \in S$

   (b) Enuncie el principio de inducción primitiva para S. Demuestre, utilizando este principio, que para todo par $(n, m) \in S$ se tiene $n \leq m$.

   (c) Definimos inductivamente $Q \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ como el menor conjunto tal que:
      - si $n \in \mathbb{N}_0$ entonces $(0, n) \in Q$
      - si $(n, m) \in Q$ entonces $(n + 1, m + 1) \in Q$

      Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
      - $S \subseteq Q$
      - $Q \subseteq S$
      - $Q = S$

9. Mostraremos, por inducción en la cantidad de caballos, que todos los caballos son del mismo color.

   - Caso base, $n = 1$: para un conjunto de un único caballo $\{c_1\}$ la proposición es trivial.
   - Caso inductivo, $n = k$: Supongamos que, para cualquier conjunto de k caballos, todos resultan ser del mismo color. Sea $C = \{c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ un conjunto de $k + 1$ caballos. Por hipótesis inductiva, los caballos en $C_1 = \{c_1, \ldots, c_k\}$ son todos del mismo color. Por la misma razón, los de $C_2 = \{c_2, \ldots, c_k, c_{k+1}\}$ también resultan del mismo color. Luego todos los caballos de C son del mismo color.

   Explique cuál es el error en el razonamiento dado.