

# COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA I

## MATEMÁTICA DISCRETA

Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
UNR

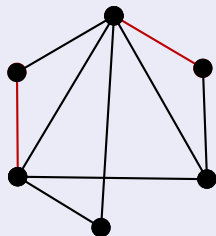
2025

# MATCHING

## DEFINICIÓN

Un **matching** en un grafo  $G$  es un conjunto de aristas (no bucles) que no tienen extremos en común.  $M \subset E(G)$ . Un vértice que es extremo de una arista que está en  $M$  matching se dice que está **saturada** por  $M$  o  **$M$ -saturada**. Un **matching perfecto** en un grafo  $G$  es un matching que satura todas los vértices de  $G$ .

## EJEMPLO

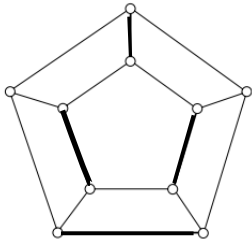


## DEFINICIÓN

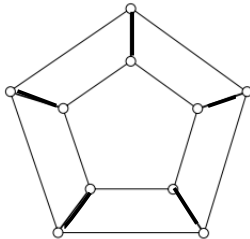
Un *matching maximal*  $M$  en un grafo  $G$  es matching que al agregar cualquier arista de  $G$  que no está en  $M$  deja de ser un matching en  $G$ .  
Un matching es *máximo* si es un matching cuyo cardinal es máximo entre todos los otros matching de  $G$ .

- Si un matching es máximo, es maximal.
- Dar un matching en  $P_n$  que sea maximal y no máximo.

## EJEMPLO



*matching maximal*

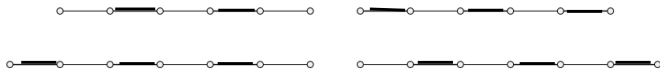


*matching perfecto*

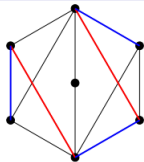
## DEFINICIÓN

Dado un matching  $M$  en un grafo  $G$ , un camino es **camino  $M$ -alternante** si alterna entre aristas en  $M$  y aristas en  $E(G) - M$ . Un camino  $M$ -alternante es  **$M$ -aumentante** si sus extremos son distintos y no están  $M$ -saturados.

## EJEMPLO

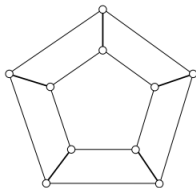
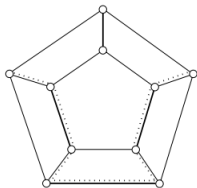


## EJEMPLO



## EJEMPLO

*Camino  $M$ -aumentante  $P$  y el matching  $M \triangle E(P)$ :*



### THEOREM (BERGE)

*un matching  $M$  en un grafo  $G$  es máximo si y sólo si  $G$  no tiene camino  $M$ -aumentante.*

### PROOF.

Hojitas



# MATCHING EN GRAFOS BIPARTITOS

Asignación de trabajos a personas...

Dado  $G[X, Y]$  buscamos un matching en  $G$  que sea incidente en todo vértice de  $X$ . Decimos que un tal matching **satura**  $X$ .

## THEOREM (HALL)

*Un grafo bipartito  $G[X, Y]$  tiene un matching que sature  $X$  si y sólo si*

$$|N(S)| \geq |S| \quad \text{para todo } S \subset X.$$

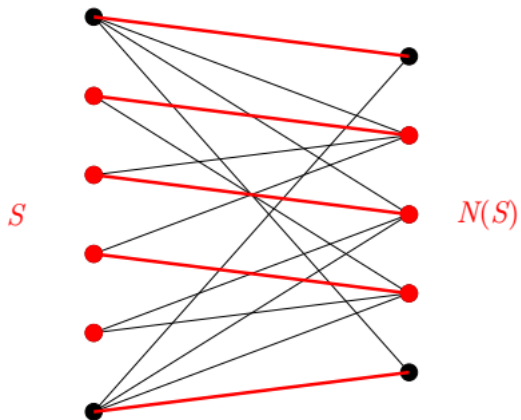
## PROOF.

Hojitas





## EJEMPLO



## COROLARIO

*Todo grafo bipartito  $k$ -regular ( $k \geq 1$ ) tiene un matching perfecto.*

## PROOF.

Hojitas



# RELACIÓN ENTRE MATCHING Y CUBRIMIENTO

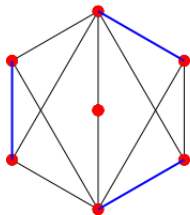
## DEFINICIÓN

Un *cubrimiento de aristas por vértices* de un grafo  $G$  es un conjunto  $F$  de vértices de manera que *toda* arista de  $G$  tiene (al menos) un extremo en  $F$ .

## OBSERVACIÓN

Si  $F$  es un cubrimiento y  $M$  es un matching en  $G$  entonces  $|M| \leq |F|$ .

## EJEMPLO

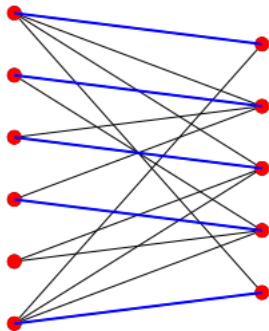


Llamemos con  $\beta(G)$  al cardinal de un cubrimiento por vértices de mínimo cardinal. Entonces,

- $\beta(K_n) = n - 1$
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(W_n) =$

Si  $\alpha'(G)$  es el cardinal de un matching de máximo cardinal en  $G$  tenemos que:

$$\beta(G) = \min\{|F| : F \text{ cubr. de } G\} \geq \max\{|M| : M \text{ match. en } G\} = \alpha'(G)$$



### THEOREM (KONIG-EGERVARY (1931))

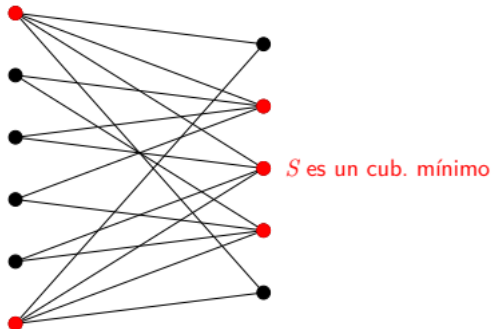
*Si  $G$  es bipartito entonces  $\beta(G) = \alpha'(G)$ .*

### PROOF.

Hojitas

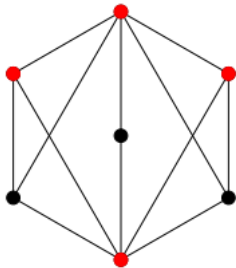


# RELACIÓN ENTRE CONJUNTOS ESTABLES Y CUBRIMIENTOS POR VÉRTICES



$S$  es un cubrimiento por vértices de  $G$  si y sólo si  $\bar{S}$  es un conjunto estable.

Otro ejemplo:





## PROPOSICIÓN

Sea  $G$  grafo con  $|V(G)| = n$  y  $S \subset V(G)$ .  $S$  es un conjunto estable en  $G$  si y sólo si  $\overline{S}$  es un cubrimiento por vértices de  $G$ . Además,  $\alpha(G) + \beta(G) = n$ .

- $\beta(K_n) = n - 1$      $\alpha(K_n) = 1$
- $\beta(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$      $\alpha(K_{n,m}) = \max\{n, m\}$
- $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$      $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- $\beta(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$      $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
- $\beta(W_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$      $\alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$