1. Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, se define la relación de *congruencia módulo* n de la siguiente manera:

$$a \equiv b \,(\texttt{mod}\, n) \Leftrightarrow n \,|\, (b-a).$$

   (a) Probar que define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros.

Sea $a \in \mathbb{Z}$, vamos a determinar su clase de equivalencia:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b \,(\texttt{mod}\, n)\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : n \,|\, (b-a)\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b - a = kn, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} : b = a + kn, \text{para algún } k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Esto es, en $\overline{a}$ se encuentran todas las sumas de a con múltiplos de n. En particular,

$$\begin{aligned} \overline{0} &= \{\cdots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \cdots\}, \\ \overline{1} &= \{\cdots, 1-2n, 1-n, 1, 1+n, 1+2n, 1+3n, \cdots\}, \\ \overline{2} &= \{\cdots, 2-2n, 2-n, 2, 2+n, 2+2n, 2+3n, \cdots\}, \\ &\vdots \\ \overline{n-1} &= \{\cdots, -1-n, -1, -1+n, -1+2n, -1+3n, -1+4n, \cdots\}. \end{aligned}$$

Notemos que no existen otras clases de equivalencia distintas. Por ejemplo,

$$\overline{n} = \{\cdots, -n, 0, 2n, 3n, 4n, \cdots\} = \overline{0}.$$

Observemos que, de acuerdo al algoritmo de la división, los representantes de las clases de equivalencia que escogimos son los posibles restos de la división de un entero por n.

Luego, el conjunto cociente resulta

$$\mathbb{Z}_n := \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{n-1}\}.$$

Por ejemplo, si tomamos $n = 3$, el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\},$$

donde $\overline{0}$ es el conjunto de los múltiplos de 3, o equivalentemente, el conjunto de los enteros que divididos por 3 dan resto nulo, a $\overline{1}$ pertenecen los enteros que divididos por 3 dan resto 1, y en $\overline{2}$, los enteros que divididos por 3 dan resto 2.

Ahora, dados dos elementos $\overline{i}$ y $\overline{j}$ en $\mathbb{Z}_n$, definimos

$$\begin{aligned} \overline{i} + \overline{j} &= \overline{i+j}, \\ \overline{i} \cdot \overline{j} &= \overline{i \cdot j}. \end{aligned}$$

   (b) Verficar que estas operaciones se encuentran bien definidas.
   (c) Analizar si $\mathbb{Z}_1$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$ y $\mathbb{Z}_4$ son cuerpos.
   (d) Mostrar que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si n es primo.

2. Sea $\mathbf{F}$ un cuerpo.

   (a) Probar que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbf{F}$ se cumple:

      i. $(m+n)x = mx + nx$, ii. $m(nx) = (mn)x$, iii. $n(xy) = (nx)y = x(ny)$.

   (b) Probar que si $\mathbf{F}$ es un cuerpo de característica p, con p primo, entonces $(x+y)^p = x^p + y^p$. *Ayuda*: p divide a $\binom{p}{k}$ si y sólo si k no es 0 ni p.

3. Determinar cuál es la característica de los cuerpos $\mathbb{Z}_p$.

4. Si X es un conjunto cualquiera, probar que $V = \mathcal{P}(X)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F} = \mathbb{Z}_2$ con las siguientes operaciones:

$$+ : \; B + C = B \Delta C,$$
$$\cdot \; : \; \overline{0} \cdot B = \emptyset, \; \overline{1} \cdot B = B.$$

5. Probar que $V = \mathbf{F}^{\mathbb{N}} = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) : a_i \in \mathbf{F} \; \forall i \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de todas las sucesiones de elementos de $\mathbf{F}$ (donde $\mathbf{F}$ es un cuerpo cualquiera), es un espacio vectorial sobre $\mathbf{F}$ con la suma y el producto por escalar definidos de la siguiente manera:

$$+ : \; (a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}},$$
$$\cdot \; : \; k \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (k a_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

6. Sea X un conjunto no vacío, se considera $\mathbf{F}^X = \{f : X \to \mathbf{F} : f \text{ es función}\}$ y se definen

$$f + g : X \to \mathbf{F}, \; (f+g)(x) = f(x) + g(x), \; \forall x \in X,$$
$$k \cdot f : X \to \mathbf{F}, \; (k \cdot f)(x) = k f(x), \; \forall x \in X.$$

   Probar que $\mathbf{F}^X$ es un $\mathbf{F}$-espacio vectorial.

7. Demostrar que $-(-v) = v$ para todo $v \in V$.

8. Sean $v, w \in V$. Explicar por qué existe un único elemento $x \in V$ tal que $v + 3x = w$.

9. Supongamos que ∞ y $-\infty$ denotan dos objetos distintos, ninguno de los cuales se encuentra en $\mathbb{R}$. Se definen las operaciones suma y producto por escalar en $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ considerando la suma y el producto usual entre dos números reales y, para $t \in \mathbb{R}$,

$$t\infty = \begin{cases} -\infty & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ \infty & \text{si } t > 0, \end{cases} \qquad t(-\infty) = \begin{cases} \infty & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -\infty & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

$$t + \infty = \infty + t = \infty, \qquad t + (-\infty) = (-\infty) + t = -\infty,$$
$$\infty + \infty = \infty, \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \qquad \infty + (-\infty) = 0.$$

   ¿$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$? Explicar.

10. Determinar si los siguientes subconjuntos de $\mathbf{F}^3$ son subespacios de $\mathbf{F}^3$.
    (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$,
    (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$,
    (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,
    (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{F}^3 : x_1 = 5x_3\}$.

11. Probar que el conjunto de las funciones reales derivables en $(-4, 4)$ tales que $f'(-1) = 3f(2)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{(-4,4)}$.

12. Si U_1, U_2 son subespacios de V, probar que la intersección $U_1 \cap U_2$ es un subespacio de V.

13. Probar que la intersección de cualquier colección de subespacios de V es un subespacio de V.

14. Probar que la unión de dos subespacios de V es un subespacio de V si y sólo si uno de los subespacios está contenido en el otro.

15. Probar o dar un contraejemplo: si U_1, U_2 y W son subespacios de V tales que $U_1 + W = U_2 + W$, entonces $U_1 = U_2$.

16. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, probar que $S = \{f \in V : f \text{ es par}\}$ y $T = \{f \in V : f \text{ es impar}\}$ son subespacios de V y que $S \oplus T = V$.

17. Sean U, W subespacios de V. Probar que $U + W$ es una suma directa si y sólo si $U \cap W = \{0\}$.

18. Sea $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, probar que $U = \{f \in V : f(0) = 0\}$ y $W = \{f \in V : f \text{ es constante}\}$ son subespacios de V y que $U \oplus W = V$.

19. Encontrar un sistema de generadores para los siguientes $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

(a) $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$,
(b) $S_2 = \mathbb{C}^{n\times n}$,
(c) $S_3 = \{(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : a_i = 0 \,\forall\, i \geq 5; a_1 + 2a_2 - a_3 = 0; a_2 + a_4 = 0\}$,
(d) $S_4 = \{f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : f''' = 0\}$.

20. Determinar la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones.

    (a) Sea V un $\mathbf{F}$-espacio vectorial y sean $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbf{F}$. Entonces $\langle\{v, w\}\rangle = \langle\{v, w + \lambda.v\}\rangle$.
    (b) Sean $v_1, v_2, v_3, v_4, w \in \mathbb{R}^7$ tales que $\langle\{v_1, v_2, w\}\rangle = \langle\{v_3, v_4, w\}\rangle$. Entonces $\langle\{v_1, v_2\}\rangle = \langle\{v_3, v_4\}\rangle$.

21. Sea $S = \langle\{(1, -1, 2, 1), (3, 1, 0, -1), (1, 1, -1, -1)\}\rangle \subset \mathbb{R}^4$.

    (a) Determinar si $(2, 1, 3, 5) \in S$.
    (b) Determinar si $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\} \subset S$.
    (c) Determinar si $S \subset \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$.

22. Decidir si los siguientes vectores son linealmente independientes y si generan el espacio vectorial correspondiente.

    (a) $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (1, 1, 4), (5, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$,
    (b) $(1, 4, -1, 3), (2, 1, -3, -1), (0, 2, 1, -5)$ en $\mathbb{R}^4$,
    (c) $(1 - i, i), (2, -1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$, para $\mathbf{F} = \mathbb{R}$ y $\mathbf{F} = \mathbb{C}$,
    (d) $f(x) = 1$, $g(x) = x$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

23. Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $\{v_1, v_2, v_3\} \subset V$ es un conjunto linealmente independiente en los siguientes casos:

    (a) $\{(1, 2, k), (1, 1, 1), (0, 1, 1 - k)\} \subset \mathbb{R}^3$,
    (b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & 2k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

24. Hallar un número t de manera tal que $(3, 1, 4)$, $(-2, 3, 5)$, $(5, 9, t)$ no sean linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$.

25. Probar o dar un contraejemplo: Si $v_1, \cdots, v_n$ es una lista de vectores linealmente independientes en V y $\lambda \in \mathbf{F}$ con $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda v_1, \cdots, \lambda v_n$ son linealmente independientes.

26. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbf{F}$. Pruebe que:

    (a) S es linealmente dependiente si y sólo si existe un vector v de S que se puede escribir como combinación lineal de los demás.
    (b) Si v es el vector del ítem anterior, pruebe que $\text{span}(S) = \text{span}(S \setminus \{v\})$.

27. Sean $v_1, \ldots, v_n$ linealmentes independientes en V y $w \in V$. Probar que:

    (a) si $v_1 + w, \ldots, v_n + w$ son linealmente dependientes entonces $w \in \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.
    (b) $v_1, \ldots, v_n, w$ son linealmente independientes si y sólo si $w \notin \text{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

28. Dar una base y la dimensión de los siguientes espacios vectoriales:

    (a) $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + 2y = 0\}$,
    (b) $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x + y + z = 0,\ y + 2z = 0\}$,
    (c) $V_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^t = A\}$,
    (d) $V_4 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A^t = -A\}$,
    (e) $V_5 = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0,\ p(1) = 1\}$,
    (f) $V_6 = \{(z_1, z_1) \in \mathbb{C}^2 :\ z_1 + 2z_2 = 0\}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

29. Encontrar una base para los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales dados en el Ejercicio 19.