Métodos Numéricos - LCC 2023
Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Brian Luporini
Práctica 3: Resolución de ecuaciones no lineales (complementaria)

---

1) a) Aplicar el método de Regula Falsi a la ecuación $x^5 - 3x^4 + 10x - 8 = 0$, partiendo de $[2, 5]$.

b) Repetir el Ejercicio 2 de la Práctica 3 con el método de Regula Falsi.

2) Se quiere encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones:

I. $x = \tan(x)$,

II. $x^3 = \ln(1 + 2x)$,

III. $x = 1.6 + 0.99\cos(x)$.

a) Para cada ecuación, mediante una gáfica verifique en que itervalo se encuentra la raíz.

b) Proponga un método iterativo de punto fijo (diferente de Newton) que converja a la solución de la ecuación en el intervalo encontrado en el ítem (a). Justifique la convergencia del método.

c) Para un valor inicial en el intervalo de convergencia calcular cuantas iteraciones n serán necesarias para aproximar la raíz con 4 cifras exactas usando el método del apartado (b) y el método de Newton. Usar Scilab.

3) La función $F(x) = \mathrm{sen}(x) - \frac{1}{2}\sqrt{x}$, tiene 2 ceros en $I = [0, 2]$. Uno es en $x = 0$; se desea hallar el otro. Para ello se utilizará un método se punto fijo basado en la función de iteración $g(x) = x - F(x)$. Hallar un intervalo que contenga al cero buscado como único cero de $F(x)$. Mostrar que en dicho intervalo el método propuesto converge.

4) Sea $g(x) = 0.1 + 0.6\cos(2x)$.

a) Pruebe que $g(x)$ define un método iterativo convergente, encontrando explícitamente un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$ tal que $g(I) \subset I$ y una constante $0 < \lambda < 1$ tal que $|g'(x)| \leq \lambda$ para todo $x \in I$.

b) Use el método de Newton para encontrar una aproximación al punto fijo de $g(x)$ en I. Use como condición inicial $x_0 = 0.4$ y como criterio de parada $|x_n - g(x_n)| \leq 10^{-5}$.

5) Dado un número c, podemos calcular su inverso $x = \frac{1}{c}$ resolviendo la ecuación

$$\frac{1}{x} - c = 0.$$

a) Comprueba que si aplicamos el método de Newton, podemos calcular inversos sin hacer divisiones.

b) Escribir un programa en Scilab que dado un número c calcule su inverso sin usar divisiónes mediante el método de Newton.

c) Calcula el valor inverso de 9, 45 y 678.

d) ¿Qué condiciones deben cumplir los valores iniciales para que el método converja?

6) Un ingeniero necesita encontrar una aproximación de $\sqrt[3]{25}$ con una precisión de por lo menos tres cifras decimales exactas, usando el método de Bisección. Resuelve este problema usando Scilab. Si fuese posible escribe un programa que generalice la solución, es decir que dado un α y β arbitrarios, aproxime el valor de α con β cifras decimales exactas usando el médo de Bisección. En el caso de que la generalización del problema no sea posible justifica.

7) Sea $p_n(x)$ el polinomio

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n.$$

Después de hallar una raíz r de $p_n(x) = 0$, es deseable factorizar el polinomio como

$$p_n(x) = (x - r)p_{n-1}(x)$$

donde

$$p_{n-1}(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{n-1} x^{n-1}.$$

Igualando los coeficientes de la misma potencia de x obtenemos

$$b_{n-1} = a_n, \quad b_{n-2} = a_{n-1} + r b_{n-1}, \quad \dots\ , \ b_0 = a_1 + r b_1$$

Como las raíces restantes de $p_n(x)$ son las raíces de $p_{n-1}(x)$, el procedimiento de búsqueda de raíces se puede aplicar ahora a $p_{n-1}(x)$ en lugar de $p_n(x)$.

Consideremos ahora el polinomio

$$p_4(x) = \frac{7392}{625} - \frac{3356}{125}x + \frac{552}{25}x^2 - \frac{39}{5}x^3 + x^4.$$

Se sabe que este polinomio posee cuatro raíces reales en el intervalo $[1, 3]$. Se quiere hallar las cuatro raíces con una precisión dada por $|p_4(r)| < 10^{-6}$. Para ello se propone utilizar el procedimiento de factorización descrito arriba empleando algún método numérico de búsqueda de raíces apropiado. La última raíz se puede obtener analíticamente a partir del polinomio $p_1(x)$.

8) Utilice el método de Newton para estimar el valor de π con diez cifras significativas con convergencia garantizada en un intervalo $\mathcal{I}$ que contiene a π. (Nota: existen muchas posibles funciones que se pueden utilizar para obtener la solución correcta).

9) Se desea obtener una solución de la ecuación

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

en el intervalo $[1, 2]$ utilizando el método iterativo de punto fijo. Verificar que las siguientes 5 expresiones son conversiones válidas a la forma $x = g(x)$:

$$\begin{aligned}
x &= g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10, \\
x &= g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}, \\
x &= g_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}, \\
x &= g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{4 + x}}, \\
x &= g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}.
\end{aligned}$$

¿Cuáles de dichas funciones g convergen a la solución en el intervalo $[1, 2]$ y cuáles no? Justificar.

10) El método de Newton modificado: El método de Newton pierde su convergencia cuadrática en el caso de raíces repetidas, pasando a tener solo convergencia lineal. Sin embargo, si se conoce la multiplicidad de la raíz (o se puede estimar), es posible, para preservar la velocidad de convergencia, modificar el método de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

donde m es la multiplicidad de la raíz buscada. Este método se llama método de Newton modificado. Verificar que el método de Newton modificado converge más rápido a la raíz doble $x = 1.5$ de la ecuación $x^3 - 2x^2 - 0.75x + 2.25 = 0$ comparando los errores cometidos por ambos métodos en las primeras iteraciones.

11) Determine los puntos de intersección del círculo $x^2 + y^2 = 3$ y la hipérbola $xy = 1$. Se pide

a) De la gráfica del círculo y la hipérbola, obtener una estimación inicial de un punto de intersección.

b) Resolver el problema empleando el método de Newton. Calcular todas las derivadas necesarias en forma analítica. Obtener el resultado con 5 cifras significativas.

c) Deducir los puntos de intersección restantes por simetría.

12) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$, una función definida en el dominio bidimensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimo local estricto de f:

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] = \mathbf{0} \quad \text{(gradiente nulo)}$$

$$(ii) \quad \text{matriz hessiana } \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \text{ definida positiva.}$$

Se desea hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función

$$f(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

a) Partiendo del punto inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [1, \ 1]^\mathsf{T}$, hallar mediante el método de Newton un punto que satisfaga la condición (i). Utilizar como criterio de finalización $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|_2 \leq 10^{-12}$.

b) Corroborar que el punto hallado en el item a) es un mínimo (local) de f verificando el cumplimiento de la condición (ii).