Polinomios

Álgebra y Geometría I (LM, PM, LF, PF, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

21 de mayo de 2023

Un polinomio en una variable x es una expresión algebraica formada por la suma de varios términos (monomios), cada uno de los cuales es el producto de un coeficiente constante y de potencias de la variable, esto es de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

- Son funciones de fácil análisis numérico. Fijado el valor en el cuál se quiere analizar el polinomio, se conoce el valor asignado utilizando operaciones algebraicas sencillas. Por eso también muchas veces se utilizan para aproximar curvas más complejas.
- Por ejemplo, bajo supuestos razonables, si se arroja una pelota desde una altura H a una velocidad v_0, la altura y la velocidad dependiente del tiempo x quedan

$$y(x) = H + v_0 x - \frac{g}{2} x^2 \quad y \quad v(x) = v_0 - gx.$$

Definición

En general, las constantes y las variables se pueden tomar en conjuntos numéricos o no numéricos diversos. Nosotros vamos a trabajar con Polinomios a Coeficientes Complejos.

Función polinómica (o simplemente polinomio), es una función $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$x \;\mapsto\; p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;,$$

donde, para cada $k = 0, 1, ..., n$

- $a_k \in \mathbb{C}$, k-ésimo coeficiente
- $a_k x^k$, k-ésimo término o monomio, de grado k
- n, grado del polinomio, a_n coeficiente principal (observación: $a_n \neq 0$)
- a_0 coeficiente (o término) independiente.

- $\mathbb{C}[x] = \{p \ : \ \text{polinomio a coeficientes complejos}\}$.
- Si $a_k = 0$ para cada $k = 0 \cdots n$ $p(x)$, polinomio nulo, denotado por $p = \overline{0}$. Se conviene que el polinomio nulo no tiene grado.
- p es un polinomio de grado 0, p es una funcion constante no nula, $p = k \in \mathbb{C} - \{0\}$.

Definición

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \ , \quad q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \quad \text{son} \quad \text{IGUALES} \quad \text{si}$$

- tienen igual grado: $n = m$, y
- están formados por los mismos monomios, $a_i = b_i$, para todo $i = 0, 1, ..., n$.
- $p(x) = \frac{3}{4}x^4 + ix^3 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) x$ y $q(x) = 0,75x^4 + ix^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x, \quad p(x) = q(x)$.

Fue visto, que para sumar polinomios, éstos primero se completan con eventuales términos nulos, y luego se suman los coeficientes de los respectivos monomios:

- $p(x) = 2x^3 + 3ix^2 + 1, \;\; q(x) = x^4 + x^2 + x,$

$$\begin{array}{rcccccc} p(x): & & 2x^3 & +3ix^2 & +0x & +1 \\ q(x): & x^4 & +0x^3 & +x^2 & +x & +0 \\ \hline (p+q)(x) = & x^4 & +2x^3 & +(3i+1)x^2 & +x & +1 \end{array}$$

- si $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$, se define el polinomio $p + q$ por la ley (sumando los términos que hagan falta)

$$(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{\text{máx}\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$$

- Opuesto de un polinomio: dado $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ existe el **polinomio opuesto de** p:

$$-p(x) = (-a_n)x^n + (-a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (-a_1)x + (-a_0)\ .$$

- Con los polinomios opuestos puede definirse la operación **diferencia** entre polinomios, haciendo $p - q = p + (-q)$.
- $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1, \;\; q(x) = x^4 + x^2 + x,$

$$\begin{array}{rccccc}
p(x): & & 2x^3 & +3x^2 & +0x & +1 \\
-q(x): & -x^4 & +0x^2 & -x^2 & -x & +0 \\
\hline
(p-q)(x) = & -x^4 & +2x^3 & +2x^2 & -x & +1
\end{array}$$

- Multiplicación de polinomios: se aplica la propiedad distributiva y las propiedades de la potencia de números complejos.
- $p(x) = x^5 - ix^2 + 2x, \quad q(x) = x^2 + 3,$

$$p(x) \cdot q(x) = (x^5 - ix^2 + 2x)(x^2 + 3) = (x^5 - ix^2 + 2x)x^2 + (x^5 - ix^2 + 2x)3$$

$$= (x^7 - ix^4 + 2x^3) + (3x^5 - 3ix^2 + 6x) = x^7 + 3x^5 - ix^4 + 2x^3 - 3ix^2 + 6x \; .$$

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0,$

$$(p \cdot q)(x) = (a_n b_m) x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1}$$

$$+ (a_n b_{m-2} + a_{n-1} b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-2} + \cdots + (a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots a_1 b_{k-1} + a_0 b_k) x^k$$

$$\cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

- $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + \cdots b_1 x + b_0$,

$$(p \cdot q)(x) = (a_n b_m)x^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)x^{n+m-1}$$

$$+(a_n b_{m-2}+a_{n-1} b_{m-1}+a_{n-1} b_m)x^{n+m-2}+\cdots+(a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots a_1 b_{k-1} + a_0 b_k)x^k$$

$$\cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

$$(p \cdot q)(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{j=0}^{m} \left[\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) \cdot b_j x^j\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \ , \quad c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$$

- en la fórmula de los c_k se suponen $a_i = b_j = 0$ para $i > n$ y $j > m$

Teorema

Las operaciones suma y multiplicación en $\mathbb{C}[x]$ *verifican las siguientes propiedades:*

Suma: Es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro (el polinomio nulo $\bar{0}$*), y elementos opuestos.*

Multiplicación: Es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro (el polinomio constante igual a 1: $\bar{1}$*).*

Ambas: Distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Queda como ejercicio su prueba

- Si $p, q \in \mathbb{C}[x]$, son polinomios no nulos, entonces

$$gr(p+q) \leq max\{gr(p), gr(q)\} \quad \text{y} \quad gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)\ .$$

Si $gr(p) = n$ y $gr(q) = m$, entonces $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$.

  - $(p \cdot q)(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \cdot x^{i+j}$ de grado $n+m$, ya que $a_n b_m \neq 0$.
  - $(p+q)(x) = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) \cdot x^i$.
    - Si $n = m$ y $a_n = -b_n$, el coeficiente que correspondería a x^n es cero $gr(p+q) < n$.
    - Si no, $gr(p+q) = \max\{m, n\}$ (ejercicio).

Divisibilidad .....*existe el polinomio inverso de uno dado?*

- Por ejemplo, dado el polinomio $p(x) = x$, siendo el elemento neutro de la multiplicación el polinomio constante 1, el inverso debería ser un polinomio q, tal que para cada x, sea $1 = (p \cdot q)(x) = xq(x)$, que como función, entonces, sería tal que

$$x \mapsto q(x) = \frac{1}{x} \,, \qquad \text{que no es un polinomio!}$$

- Por otro lado, dado $p(x) = 2$, existe $q(x) = \frac{1}{2}$, tal que $p \cdot q = \overline{1}$.

Proposición $p \in \mathbb{C}\,[x]$, no nulo, entonces p tiene inverso $\Leftrightarrow gr(p) = 0$.

$\Leftarrow$) $gr(p) = 0 \Rightarrow p = k \in \mathbb{C} - \{0\}$, y $q(x) = k^{-1}$ es el polinomio inverso de p ya que $p \cdot q = k \cdot k^{-1} = \overline{1}$.

$\Rightarrow$) p tiene inverso, q debe ser $\overline{1} = p \cdot q \quad \Rightarrow \quad 0 = gr(\overline{1}) = gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$. Como $gr(p), gr(q) \in \mathbb{N}_0$ (enteros no negativos), necesariamente $gr(p) = gr(q) = 0$.

- ¿Podrá definirse una operación de **división** entre polinomios?
- Hasta el momento se sabe que la operación de multiplicación es cerrada, asociativa conmutativa, con elemento neutro, pero donde no todos los elementos tienen inverso. Por su parte, la suma es cerrada, asociativa, conmutativa, con neutro y cada elemento tiene inverso (opuesto), y la multiplicación es distributiva respecto de la suma.
- Si se piensa, entre los conjuntos númericos conocidos, en $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$, la suma y la multiplicación tienen las mismas propiedades, pero además en todos hay inversos multiplicativos de elementos no nulos, y aquél en donde la suma y la multiplicación se comportan como en el conjunto de polinomios es $\mathbb{Z}$.

- Allí, algunos elementos tienen una división *exacta*, $6 \div 3$, $20 \div (-5)$, casos en los casos en que el dividendo es múltiplo del divisor.
- Pero además, hay divisiones que no pueden realizarse pretendiendo obtener un resultado que sea un número entero, $6 \div 4$, $82 \div 3$, $23 \div 5$. Éstas se efectuan trabajando con un procedimiento que se conviene en llamar "división con resto".

  $$\boxed{\text{dividendo} = \text{divisor} \cdot \text{cociente} + \text{resto}, \qquad \text{donde} \quad 0 \leq \text{resto} < \text{divisor}}$$

  Se obtiene, trabajando en $\mathbb{Z}$ que $6 = 4 \cdot 1 + 2$, $\quad 82 = 3 \cdot 27 + 1$, $\quad 23 = 5 \cdot 4 + 3$
- Ya que algebraicamente, el conjunto de los polinomios y el de los números enteros son tan parecidos, tiene sentido intentar algo parecido.

Ejemplos de division entre polinomios

$$\begin{array}{rl} 6x^3 - x^2 - 5x + 2 & \underline{|\,2x^2 + x - 1} \\ -\ \underline{6x^3 + 3x^2 - 3x} & \ 3x - 2 \\ -4x^2 - 2x + 2 & \\ -\ \underline{-4x^2 - 2x + 2} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 8x^3 - 4x^2 + 2x + 7 & \underline{|\,2x^2 + x - 1} \\ -\ \underline{8x^3 + 4x^2 - 4x} & \ 4x - 4 \\ -8x^2 + 6x + 7 & \\ -\ \underline{-8x^2 - 4x + 4} & \\ 10x + 3 & \end{array}$$

- $6x^3 - x^2 - 5x + 2 = (2x^2 + x - 1)(3x - 2)$
- $8x^3 - 4x^2 + 2x - 7 = (2x^2 + x - 1)(4x - 4) + (10x + 3)$

Teorema (Algoritmo de la División)

Si $p, q \in \mathbb{C}[x]$, *con* $q \neq \bar{0}$, *entonces existen únicos* $c, r \in \mathbb{C}[x]$, *tales que*

$$p = c \cdot q + r\ , \quad con \quad r = \bar{0} \quad o \quad 0 \leq gr(r) < gr(q)$$

Teorema (Regla de Ruffini)

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *y* $q(x) = x - \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces* $p = c \cdot q + r$, *con*

$$r = a_0 + \alpha \cdot b_0 \quad y \quad c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

siendo $b_{n-1} = a_n$, *y para* $i = 0, \ldots, n-2$, $b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1}$.

- En la práctica se disponen los coeficientes según el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & & & & & \\
\alpha & & \alpha b_{n-1} & \ldots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
 & \underbrace{a_n}_{b_{n-1}} & \underbrace{a_{n-1} + \alpha b_{n-1}}_{b_{n-2}} & \ldots & \underbrace{a_2 + \alpha b_2}_{b_1} & \underbrace{a_1 + \alpha b_1}_{b_0} & \underbrace{a_0 + \alpha b_0}_{r}
\end{array}$$

Teorema (del Resto)

Si $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) \geq 1$ *y* $z \in \mathbb{C}$, *entonces* $p(z)$ *es igual al resto de la división de* p *por* $x - z$.

- Por el Teorema (3), $p(x) = (x - z) \cdot c(x) + r$, $con r \in \mathbb{C}$, y si $x = z$ resulta

$$p(z) = \underbrace{(z - z)}_{0} \cdot c(z) + r = r$$

.

Definición z **es raíz** (o cero) de un polinomio p si $p(z) = 0$.

Proposición Si $p \in \mathbb{C}[x]$ y $z \in \mathbb{C}$, entonces z es raíz de $p \Leftrightarrow x - z$ divide a p

- Demostración inmediata por el Teorema del Resto

Factorización de Polinomios

- Para hacer la suma $\frac{2x^4+2x^3-10x^2+2x-12}{x^6+6x^4-31x^2-36}+\frac{5}{x^2+9}$ es útil advertir que

$$\frac{2x^4+2x^3-10x^2+2x-12}{x^6+6x^4-31x^2-36} \overset{(1)}{=} \frac{2\cdot(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x^2+1)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+9)\cdot(x^2+1)} = \frac{2\cdot(x+3)}{(x+2)\cdot(x^2+9)}$$

y luego hacer $\frac{2\cdot(x+3)}{(x+2)\cdot(x^2+9)}+\frac{5}{x^2+9} = \frac{2\cdot(x+3)+5\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x^2+9)} = \frac{7x+16}{(x+2)\cdot(x^2+9)}$

- en el paso (1) se factorizaron los polinomios en el numerador y el denominador
- para factorizar polinomios, es útil el Teorema Fundamental del Álgebra, que se presenta a continuación, sin demostrar en este curso

Teorema (Fundamental del Álgebra)

Todo polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ de grado $n \geq 1$ tiene, al menos, una raíz en $\mathbb{C}$.

Aceptando el Teorema anterior, se puede trabajar inductivamente hacia atrás del siguiente modo.

- si $gr(p) \geq 1 \Rightarrow p$ tiene una raíz $\alpha_1 \Rightarrow p(x) = (x - \alpha_1) \cdot c_1(x)$, con $gr(c_1) = n - 1$.
- Si $gr(c_1) \geq 1 \Rightarrow c_1$ tiene una raíz $\alpha_2 \Rightarrow c_1(x) = (x - \alpha_2) \cdot c_2(x)$, con $gr(c_2) = n - 2$.

  $\vdots$
- $c_{n-1}(x) = (x - \alpha_n) \cdot c_n(x)$, con $gr(c_n) = n - n = 0$

$$p(x) = (x - \alpha_1) \cdot c_1(x) = (x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n) \cdot c_n, \quad c_n \in \mathbb{C}$$

- Comparando términos de grado n, se tiene $c_n = a_n$.

Lo anterior proporciona una prueba informal del resultado siguiente.

Teorema (Descomposición factorial de un polinomio)

Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, *de grado* $n \geq 1$ *admite una única descomposición factorial de la forma:*

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \ldots (x - \alpha_r)^{l_r}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$ *son* r *raíces distintas de* $p(x)$, $l_i \in \mathbb{N}$, *y* $l_1 + l_2 + \cdots + l_r = n$.

- todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas
- cada l_i es la multiplicidad de la raiz α_i
- contando cada raíz tantas veces como su multiplicidad, todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$
- si $p \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p) = n \geq 2$ y α es una raíz de p, entonces las restantes raíces de p son las raíces del polinomio c tal que $p(x) = (x - \alpha) \cdot c(x)$

- sabiendo que p es el polinomio que tiene a i y $2-i$ como raíces simples, a 1 como raíz doble y tal que $p(-1)=i$,

$$p(x)=a_4\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2$$

- $p(-1)=a_4\cdot(-1-i)\cdot(-1-2+i)\cdot(-1-1)^2=a_4\cdot(16+8i)=i \;\Rightarrow\; a_4=\frac{i}{16+8i}=\frac{1}{40}-\frac{1}{20}i$
- $p(x)=\left(\frac{1}{40}-\frac{1}{20}i\right)\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2$ polinomio de menor grado que cumple lo pedido
- cualquier multiplo de él, cumple las condiciones
- aún con pedir de grado mínimo, sin la condición $p(-1)=i$, no habría unicidad, cualquier polinomio de la forma

$$p(x)=a_4\cdot(x-i)\cdot(x-(2-i))\cdot(x-1)^2 \;\text{, con }\; a_4\in\mathbb{C}-\{0\}$$

cumpliría los requisitos.

Raíces de polinomios a coeficientes enteros-Teorema de Gauss

Teorema (Teorema de Gauss)

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x + \cdots a_1 x + a_0$, donde $n > 0$, y para cada $i = 0, 1, \ldots, n$ se tiene $a_i \in \mathbb{Z}$ y además un número racional $\frac{r}{s}$ (irreducible) es raíz de p, entonces a_0 es múltiplo de r y a_n es múltiplo de s.

- Parafraseando: las posibles raices racionales de un polinomio a coeficientes enteros, se forman diviendo a los divisores de a_0 con los divisores de a_n, y no hay otros candidatos.

- $p(x) = 8x^4 + 22x^3 + 9x^2 - 7x - 2$, posibles raices: $\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$.

	8	22	9	-7	-2
-1		-8	-14	5	2
	8	14	-5	-2	0
-2		-16	4	2	
	8	-2	-1	0	
1/2		4	1		
	8	2	0		
-1/4		-2			
	8	0			

- $p(x) = 8(x+1)(x+2)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{4})$.
- al llegar al polinomio $8x^2 - 2x - 1$, podría haberse aplicado la fórmula resolvente, o al llegar a $8x - 2$, simplemente despejar.

- $p(x) = 4x^4 - 15x^3 + 32x^2 - 31x - 10$, posibles raices en $\mathbb{Q}$: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$, $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{5}{4}$

	4	-15	32	-31	-10
2		8	-14	36	10
	4	-7	18	5	0
-1/4		-1	2	-5	
	4	-8	20	0	

- calculando raices con fórmula resolvente: $4x^2 - 8x + 20 = 4(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i))$
- $p(x) = 4(x-2)\left(x + \frac{1}{4}\right)(x - 1 - 2i))(x - 1 + 2i) = 4(x-2)\left(x + \frac{1}{4}\right)(x^2 - 4x + 5)$
- por la expresión de la fórmula resolvente, aparecieron raices no reales, conjugadas

- el conjunto de raices de un polinomio no varía al multiplicarlo por una constante no nula
- si p es a coeficientes racionales, se puede multiplicar por el mínimo común múltiplo (o cualquier múltiplo) de los denominadores, obtener un polinomio a coficientes constantes, y hecho esto, utilizar el Teorema de Gauss.
- $p(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{12}$, multiplicando por 12, $c(x) = 6x^3 - 7x^2 + 1$.
- posibles raices racionales de c en $\mathbb{Q}$: ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{1}{6}$.
- evaluando p, se observa 1, $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{3}$ son raíces de c.
- luego $c(x) = 6(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ y como $c(x) = 12 \cdot p(x)$,

$$p(x) = \frac{1}{2}(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

Proposición Si un polinomio que tiene todos sus coeficientes reales tiene una raíz compleja α entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz del mismo.

- Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, con todo $a_i \in \mathbb{R}$ y $p(\alpha) = 0$, entonces (propiedades de la conjugación)

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i \bar{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

- polinomio de menor grado que tiene a 3, -4 y $1-6i$ como raíces, y coeficiente del término de mayor grado igual a 8:

$$p(x) = 8(x-3)(x+4)(x-(1-6i))$$
$$= \cdots = 8x^3 + 48ix^2 - (104-48i)x + (96-576i) \in \mathbb{C}[x]$$

- polinomio a coeficientes reales de menor grado que tiene a 3, -4 y $1-6i$ como raíces, el coeficiente del término de mayor grado igual a 8:

$$p(x) = 8(x-3)(x+4)(x-(1-6i))(x-(1+6i)) = 8(x-3)(x+4)[x^2-2x+37]$$
$$= \cdots = 8x^4 - 8x^3 + 184x^2 + 488x - 3552 \in \mathbb{R}[x]$$