Presentación axiomática de los números reales

A esta altura de nuestra educación, ya todos tenemos experiencia con “los números” y con varias operaciones que los relacionan (empezando seguramente por la suma, la resta, la multiplicación y la división), y recordamos algunas propiedades que tienen, como que el orden de los números en la suma no altera el resultado, o que “menos por menos es más”. Y, por supuesto, aquella enigmática restricción por la cual “no se puede dividir por cero”.

Pero será oportuno que, como lo hicieron los matemáticos del siglo XIX, reflexionemos sobre los fundamentos del edificio numérico, para que construyendo sobre una base sólida, podamos alcanzar mayores alturas.

Nos preguntamos, entonces: ¿qué son los números reales? Hay distintas formas de responderlo, distintas formas de *definirlos*. Siguiendo al libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol (ver Parte III del capítulo de Introducción), la que aquí estudiaremos se encuadra bajo el título de definición axiomática. No investiga en la naturaleza de los números ni los construye a partir de otros objetos matemáticos, sino que los considera elementos primitivos. Los define describiendo la relación que guardan entre ellos: los números reales son simplemente elementos de un *conjunto* entre los que existen dos *operaciones* que, por definición, satisfacen ciertas propiedades específicas llamadas *axiomas*. Al conjunto lo designamos con $\mathbb{R}$, y las operaciones se llaman *suma* y *producto*. Son reglas de asignación o correspondencia que a cada par de números (es decir, a cada par de elementos de $\mathbb{R}$) le asignan algún otro elemento específico del conjunto.

Si a y b son dos números reales (en símbolos: $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$, o simplemente: $a, b \in \mathbb{R}$) y la operación suma les asigna el elemento $c \in \mathbb{R}$, en símbolos escribimos

$$a + b = c,$$

y decimos que c es la suma de a y b. Similarmente, si la operación producto les asigna el elemento $d \in \mathbb{R}$, se denota

$$a \cdot b = d$$

o también

$$ab = d$$

y decimos que d es el producto de a y b.

Los axiomas que vamos a presentar son, lo repetimos, las propiedades *básicas* que satisfacen los números reales junto a las operaciones de suma y producto. Las satisfacen por definición. Son como su ADN: lo identifican y guardan en potencia todas las demás propiedades que estos verifican. Es decir, cualquier otro enunciado sobre los números reales deberá estar justificado, en última instancia, a partir de los axiomas. Si omitimos o cambiamos alguno, tendríamos una construcción matemática quizás interesante, pero distinta de la que llamamos $\mathbb{R}$.

Hay tres grupos de axiomas: *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden* y el *axioma del supremo*.

1. Axiomas de cuerpo.

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ (es decir, son números reales cualesquiera). Son válidas las siguientes afirmaciones:

A1) *Propiedades conmutativas:*

$$a + b = b + a \qquad \text{y} \qquad ab = ba.$$

A2) *Propiedades asociativas:*

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{y} \qquad a(bc) = (ab)c.$$

A3) *Propiedad distributiva:*

$$a(b + c) = ab + ac.$$

A4) *Existencia de elementos neutros:*
Existen dos números reales distintos, denotados con 0 y 1, tales que, para todo $a \in \mathbb{R}$, verifican

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad \text{y} \qquad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

A5) *Existencia de elementos opuestos:*
Para todo número real a, existe un número real b tal que

$$a + b = b + a = 0.$$

A6) *Existencia de elementos recíprocos:*
Para todo número real $a \neq 0$, existe un número real b tal que

$$ab = ba = 1.$$

Los axiomas anteriores bastan para deducir las leyes usuales del álgebra elemental; *exempli gratia* (*e.g.*), la que establece el siguiente teorema: la propiedad cancelativa de la suma. Insistimos en que la validez de este y todos los teoremas, corolarios, lemas, y demás afirmaciones fuera de los axiomas no se acepta como definición, sino que debe ser *demostrada*.

Teorema 1 (Ley de simplificación para la suma o Propiedad cancelativa de la suma)**.** *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Si* $a + b = a + c$*, entonces* $b = c$.

Demostración:
Sean a, b y c números reales tales que $a + b = a + c$. Llamemos con d a la suma $a + b$. Es decir, sea $d = a + b$ (y por ende, $d = a + c$).
Por el axioma 5, existe al menos un número, llamémoslo y, que es opuesto a a; es decir, que verifica $a + y = y + a = 0$. Entonces:

$$y + d = y + (a + b) \overset{A2}{=} (y + a) + b = 0 + b \overset{A4}{=} b.$$

(Sobre algunos de los símbolos $=$ se ha explicitado el axioma que lo justifica). Luego, $y + d = b$. Pero también $y + d = c$; en efecto:

$$y + d = y + (a + c) \overset{A2}{=} (y + a) + c = 0 + c \overset{A4}{=} c.$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Por lo tanto

$$b = c,$$

quod erat demonstrandum (q.e.d.)

Observación:
Junto a los axiomas se presupone la validez de las siguientes *propiedades de la igualdad*:

- Propiedad de reflexividad: para todo a vale, $a = a$.
- Propiedad de simetría: si $a = b$, entonces $b = a$.
- Propiedad de transitividad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Estas propiedades fueron empleadas implícitamente en la demostración anterior, y lo serán en las venideras.

El teorema anterior nos permite asegurar la "unicidad del 0". Más precisamente, que no existe otro número distinto a éste que pueda cumplir el rol de elemento neutro de la suma.

Corolario 1 (Unicidad del elemento neutro de la suma)**.** *Si $0'$ es un número que verifica que*

$$a + 0' = 0' + a = a,$$

para todo $a \in \mathbb{R}$, entonces $0' = 0$.

Demostración:
El axioma 4 afirma que 0 es un elemento neutro para la suma. Supongamos que $0'$ es un número que también funciona como neutro de la suma, es decir que $a + 0' = 0' + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
Sea a un número cualquiera (por ejemplo, $a = 1$ o cualquier otro). Entonces

$$a + 0 = a \qquad \text{y también} \qquad a + 0' = a.$$

Luego,

$$a + 0 = a + 0',$$

y, por la propiedad cancelativa de la suma,

$$0 = 0'.$$

q.e.d.

En el axioma 5 debe entenderse que todo número tiene *al menos* un opuesto, un número que al sumarlo al primero da 0. Pero veremos que sólo puede haber un elemento con dicha característica para cada número.

Corolario 2 (*Unicidad del elemento opuesto*)**.** *Para todo $a \in \mathbb{R}$, existe un único número b tal que $a + b = b + a = 0$.*

Demostración:
Dado $a \in \mathbb{R}$, la existencia de un número b tal que $a+b = b+a = 0$ está garantizada por el axioma 5. Lo que debemos probar es que hay un solo número capaz de satisfacer aquello.
Supongamos que hubiera otro: sea $b' \in \mathbb{R}$ tal que $a + b' = b' + a = 0$. En particular, tenemos que

$$a + b = 0 \qquad \text{y} \qquad a + b' = 0.$$

Luego,

$$a + b = a + b',$$

y, por la propiedad cancelativa de la suma,

$$b = b',$$

q.e.d.

El corolario anterior nos permite establecer una **notación**: para cualquier número a, denotamos con $-a$ al único elemento opuesto a a; es decir, al único número que verifica $a + (-a) = 0$. Si nos topamos con un número b tal que $a + b = 0$, entonces $b = -a$.

¿Es $-a$ un "número negativo"?

¡**No necesariamente**! El uso común que hacemos del signo "$-$" al trabajar con números nos predispone mentalmente a pensar que $-a$ es negativo, pero debe notar que aún no hemos definido qué se entiende por número negativo o positivo en esta presentación axiomática de los números reales. Del número $-a$ sólo sabemos que es el opuesto de a, pero nada más. Quizás una notación más pedagógica sería escribirlo al principio como $Op(a)$, aunque resultaría un poco engorrosa.

Definición. Llamamos *diferencia* entre dos números reales a y b, y la denotamos con $a-b$, al número dado por la suma de a y el opuesto de b. Es decir,

$$a - b = a + (-b).$$

Teorema 2. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ (cualesquiera). Entonces:*

1. $-(-a) = a$ *(El número opuesto al opuesto de a es el propio número a).*
2. $-0 = 0$ *(El opuesto a 0 es el propio 0).*
3. $0 \cdot a = 0$*. (El producto de 0 con cualquier otro número, es 0).*
4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$*.*
5. $(-a)(-b) = ab$
6. $a(b - c) = ab - ac$*.*

Demostración:

1. Dado $a \in \mathbb{R}$, su opuesto $-a$ también es un número real y por lo tanto tiene que existir su elemento opuesto (por el Axioma 5, aplicado sobre $-a$); es decir, debe existir un número real d tal que $(-a) + d = d + (-a) = 0$. Más aún, por el Corolario anterior, sabemos que hay un único número d que verifica aquello. Ahora bien, como $-a$ es el elemento opuesto a a, vale $(-a) + a = a + (-a) = 0$. Por lo tanto, $d = a$; es decir, $-(-a) = a$.

2. Hemos visto que si a y b son números cualesquiera tales que $a + b = 0$ entonces uno es el opuesto del otro.

   En particular, como $0 + 0 = 0$, entonces $-0 = 0$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

3. Notar que
$$0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$$
y también
$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0,$$
de donde
$$0 \cdot a + 0 \cdot a = 0 \cdot a + 0.$$
Por la propiedad cancelativa de la suma,
$$0 \cdot a = 0.$$
(Justifique cada igualdad de esta demostración)
4. Basta probar por separado estas dos igualdades:
$$a(-b) = -(ab) \quad \text{y} \quad (-a)b = -(ab),$$
es decir se debe probar que ab es el elemento opuesto a $a(-b)$ y también a $(-a)b$.
Recuerde que para probar que un elemento es opuesto a otro basta ver que la suma de ambos es 0. Pruebe, entonces, que
$$a(-b) + ab = 0 \quad \text{y} \quad (-a)b + ab = 0.$$
5. Basta aplicar la propiedad vista en el item anterior (justifique).
6. Demuéstrelo. Use la definición de la operación de diferencia.

El siguiente teorema y sus corolarios establecen propiedades de la operación del producto semejantes a las vistas para la suma en el Teorema 1 y sus corolarios. Compárelos: observe sus semejanzas y diferencias; inspírese en la demostración de aquellos para demostrar estos.

Teorema 3 (*Ley de simplificación para el producto* o *Propiedad cancelativa del producto*). *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Si $ab = ac$, entonces $b = c$.*

Corolario 3 (*Unicidad del elemento neutro del producto*). *Si $1'$ es un número que verifica que $a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$, entonces $1' = 1$.*

Corolario 4 (*Unicidad del recíproco o inverso*). *Para todo $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, existe un único número b tal que $ab = ba = 1$.*

Demostración de estos resultados: Se deja como ejercicio.

Notación: A partir de la unicidad recién demostrada, dado $a \neq 0$, al único número que es recíproco de a se lo denota con a^{-1}.

Definición. Si a y b son dos número reales y $b \neq 0$, llamamos *cociente* entre a y b, y lo denotamos con $\frac{a}{b}$ (o también a/b), al número dado por el producto de a y el recíproco de b. Es decir,
$$\frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

Teorema 4. *Sean* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. *El número* 0 *no tiene recíproco. (Y es por esto que "no se puede dividir por cero").*
2. $1^{-1} = 1$.
3. $\frac{a}{1} = a$; *y si* $a \neq 0$, $\frac{1}{a} = a^{-1}$.
4. *Si* $ab = 0$, *entonces* $a = 0$ *o* $b = 0$.
5. *Si* $b \neq 0$ *y* $d \neq 0$ *entonces:*
   i) $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$.
   ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
   iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.
6. *Si* $a \neq 0$ *y* $b \neq 0$, *entonces* $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$.
7. $-a = (-1) \cdot a$

Demostración: Se deja como ejercicio.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

2. Axiomas de orden.

Estos axiomas permitirán establecer una ordenación de los números reales; una forma de relacionarlos entre sí definiendo para todo par de números distintos cuál de ellos es “mayor” al otro.

Para ello incluimos un nuevo concepto primitivo: el de que un número sea *positivo*. Formalmente, suponemos la existencia de un subconjunto de $\mathbb{R}$ al que llamaremos *conjunto de números positivos* y denotaremos con $\mathbb{R}^+$, tal que, por definición, satisface los siguientes tres axiomas:

A7) Si $a \in \mathbb{R}^+$ y $b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$ y $ab \in \mathbb{R}^+$.

A8) Para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \neq 0$, vale que $a \in \mathbb{R}^+$ ó $-a \in \mathbb{R}^+$, pero no ambas.

A9) $0 \notin \mathbb{R}^+$. (Es decir: el 0, el elemento neutro de la suma, no es un número positivo.)

Vamos a definir los símbolos $<$, $>$, $\leq$ y $\geq$, llamados respectivamente *menor que*, *mayor que*, *menor o igual que* y *mayor o igual que*, de la siguiente forma. Sean a y b dos números culesquiera:

- $a < b$ significa que $b - a \in \mathbb{R}^+$.
- $a > b$ significa que $a - b \in \mathbb{R}^+$, es decir, $b < a$.
- $a \leq b$ significa que, o bien $b - a \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$.
- $a \geq b$ significa que, o bien $a - b \in \mathbb{R}^+$, o bien $a = b$; es decir, $b \leq a$.

Notar que con estas definiciones $a > 0$ si y solo si a es positivo; es decir,

$$a > 0 \text{ si y solo si } a \in \mathbb{R}^+.$$

Más aún, se deduce (¡*justificar*!):

i) Si $a > 0$, entonces $-a < 0$.

ii) Si $a < 0$, entonces $-a > 0$.

Si $a < 0$ (esto es, si $-a \in \mathbb{R}^+$) se dice que a es *negativo*. Así, el Axioma 8 se puede reexpresar diciendo que todo número distinto de 0 es positivo o negativo, pero no ambos.

Si $a \geq 0$, se dice que a es *no negativo*.

De los axiomas de orden se deducen todas las reglas usuales del cálculo con desigualdades. A continuación, presentaremos algunas de ellas, muy importantes.

Teorema 5 (Propiedad de Tricotomía)**.** *Dados dos números reales cualesquiera a y b, se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:*

$$i)\ a < b \qquad ii)\ b < a \qquad iii)\ a = b$$

Demostración:

Sean a y b dos números reales cualesquiera. Llamemos $c = a - b$. Obviamente se cumple exactamente una de esta dos posibilidades: o es $c = 0$ o es $c \neq 0$.

Si $c = 0$, entonces $a - b = 0$, y por lo tanto $a = b$.

Caso contrario, si $c \neq 0$, entonces el Axioma 8 impone que sea $c \in \mathbb{R}^+$ o $-c \in \mathbb{R}^+$, pero no ambas ciertas. De esto se deduce respectivamente que $b < a$ o $a < b$, pero no ambas.

Por lo tanto, una y solo una de las siguientes afirmaciones es cierta: $a < b$, $b < a$ o $a = b$, *q.e.d.*

Teorema 6 (Propiedad Transitiva de la relación de *menor*)**.** *Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.*

Idea para la demostración: Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y $b < c$; por definición de esta notación, eso quiere decir que $b - a \in \mathbb{R}^+$ y $c - b \in \mathbb{R}^+$. Use el Axioma 7 para obtener el resultado esperado.

Teorema 7. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.*
2. *Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.*
3. *i) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.*
   ii) Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.
4. *Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$ (donde a^2 es una notación para el producto aa).*
5. *$1 > 0$. Es decir, $1 \in \mathbb{R}^+$.*
6. *Si $a < b$, entonces $-b < -a$*
7. *$ab > 0$ si y solo si a y b son los dos positivos o los dos negativos.*
8. *$ab < 0$, entonces o bien a es positivo y b negativo o bien a es negativo y b positivo.*
9. *$a > 0$ si y solo si $\dfrac{1}{a} > 0$.*
10. *Si $0 < a < b$, entonces $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$.*

Demostración: ejercicio.

2.1. Números naturales, enteros, racionales e irracionales.

¿Cuántos números reales hay? En otras palabras: ¿cuántos elementos hay en el conjunto $\mathbb{R}$? Los axiomas de cuerpo imponen explícitamente la existencia de dos distintos, el 0 y el 1. Con los axiomas de orden vimos que

$$0 < 1$$

y que para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c.$$

Luego,

$$0 < 1 \;\Rightarrow\; 0 + 1 < 1 + 1 \;\Rightarrow\; 1 < 1 + 1.$$

Al número $1 + 1$ se lo denota con 2 (¡menos mal!). Es decir, $2 = 1 + 1$. Notemos que, como $a < b$ equivale a $b - a \in \mathbb{R}^+$, y $0 \notin \mathbb{R}^+$ (Axioma 9), entonces

Si $a < b$ entonces $a \neq b$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Por lo tanto, en $\mathbb{R}$ sabemos que existen al menos tres números distintos: 0, 1 y 2. Y que respetan este orden: $0 < 1$ y $1 < 2$. La propiedad transitiva implica que $0 < 2$ y podemos escribir simplemente

$$0 < 1 < 2.$$

Ahora bien, si denotamos $3 = 2 + 1$, se tiene

$$1 < 2 \;\Rightarrow\; 1 + 1 < 2 + 1 \;\Rightarrow\; 2 < 3.$$

Si denotamos $4 = 3 + 1$, obtenemos

$$2 < 3 \;\Rightarrow\; 2 + 1 < 3 + 1 \;\Rightarrow\; 3 < 4.$$

Repitiendo el razonamiento, introducimos los números 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., etc, que junto a los anteriores verifican esta ordenación:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < 11 < \ldots$$

Definición. Llamamos *conjunto de números naturales* al conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 10, 11, \ldots\}.$$

Notemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$, pues $0 < n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

El conjunto de los naturales verifica dos propiedades básicas:

i) El número 1 pertenece al conjunto.

ii) Si a pertenece al conjunto, también $a + 1$ pertenece.

A los conjuntos que verifican esas propiedades se los denomina *conjuntos inductivos*. Una definición más formal de $\mathbb{N}$ es decir que es el subconjunto inductivo más pequeño (en términos de inclusión de conjuntos) de $\mathbb{R}$; en otras palabras, $\mathbb{N}$ es el subconjunto inductivo incluido en todo subconjunto inductivo de $\mathbb{R}$.

Conviene destacar que, así definido, $\mathbb{N}$ tiene un *primer elemento*, el 1. Éste es el menor número natural; si $a < 1$, entonces $a \notin \mathbb{N}$.

Como los números naturales son positivos, sus opuestos son negativos. Al conjunto formado por los naturales, sus opuestos y el 0 se lo denomina conjunto de números *enteros*, $\mathbb{Z}$. Así,

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \;\vee\; -x \in \mathbb{N} \;\vee x = 0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3. \ldots\}.$$

Se puede demostrar (lo omitiremos aquí) que la suma, la diferencia y el producto de números son operaciones cerradas en $\mathbb{Z}$, esto es, que si $a, b \in \mathbb{Z}$ entonces $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$ y $ab \in \mathbb{Z}$. No ocurre lo mismo con el cociente de dos números enteros. Por ejemplo, veamos que $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. En efecto, como $0 < 1 < 2$, por el Teorema 7 (10), se tiene $0 < \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{1} = 1$. Así, $\dfrac{1}{2}$ es un número positivo, pero que no pertenece a $\mathbb{N}$ por ser estrictamente menor que 1. Luego, $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Al conjunto de todos los números reales que se obtienen como cocientes de números enteros se lo llama *conjunto de números racionales*, $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} :\; \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \text{ tal que } x = \frac{p}{q} \right\}.$$

Así, son racionales, por ejemplo, los números:

$$\frac{1}{2}, \; \frac{1}{3}, \; \frac{3}{2}, \; \frac{6}{4}, \; \frac{-15}{1}, \; \text{ etc.}$$

Ejercicio

1. Pruebe que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2. Pruebe que dados $a, b \in \mathbb{R}$ y $c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$, vale: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ si y solo si $ad = bc$.

(Así, en particular, $\dfrac{3}{2}$ y $\dfrac{6}{4}$ son dos expresiones del mismo número racional, pues $3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12$).

Los números reales que no son racionales forman el *conjunto de números irracionales*, $\mathbb{I}$:

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \notin \mathbb{Q}\}.$$

Por ejemplo, son irracionales los números:

$$\sqrt{2}, \ -\sqrt{3}, \ \sqrt[3]{9}, \ \pi, \ e, \ \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \ etc.$$

No debemos pasar por alto que al mencionar, por ejemplo, que $\sqrt{2}$ es irracional, estamos haciendo una afirmación importante: que no existe ningún par de enteros p, q, con $q \neq 0$, tales que $\sqrt{2} = p/q$. Tal afirmación puede y debe demostrarse, aunque no lo haremos aquí (el lector interesado no tendrá dificultad en hallar una demostración adecuada).

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

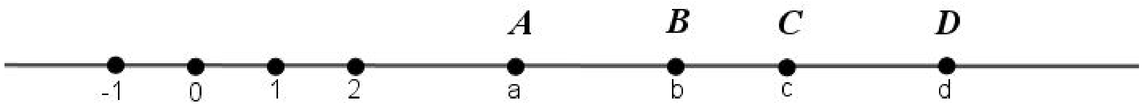
2.2. Representación geométrica de los números reales: la recta real.

Para ganar intuición sobre el conjunto de números reales y mejorar nuestra comprensión de ellos resulta muy importante contar con una manera de visualizarlos o representarlos geométricamente, en especial de alguna forma coherente con el orden establecido en $\mathbb{R}$ por los axiomas 7, 8 y 9.

La manera habitual de hacerlo, que cumple muy bien ese cometido, es mediante la llamada *recta real* (o *eje real*): en una recta se elige un punto para representar al 0 y otro punto distinto para el 1 (en una recta horizontal, generalmente a la derecha del anterior). Esta elección fija la escala. Cada punto de la recta representa a un único número real, y cada número real está representado por un único punto de la recta. Dicha *asociación biunívoca* se establece de manera tal que:

i) Si los puntos A y B sobre la recta representan a los números reales a y b, respectivamente, entonces A está a la izquierda de B si y solo si $a < b$.

ii) Si los puntos A, B, C, D representan a los reales a, b, c, d, respectivamente, con $a < b$ y $c < d$, entonces los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes si y solo si $b - a = d - c$.



En particular, los números positivos quedan a la derecha del 0, y los negativos, a la izquierda.

Esta identificación lleva a hablar indistintamente de “punto” y “número real”, tomándolos como sinónimos.

Todas las propiedades de los números reales (expresadas como teoremas, lemas, corolarios, etc.) se derivan, como hemos dicho, de los axiomas; no precisan una referencia geométrica. Sin embargo, en ocasiones un argumento *geométrico* es más claro, o es *obvio* –del latín, *obvius*: que se encuentra o pone delante de los ojos (RAE)–. Incluso, puede éste sugerir la necesaria demostración *analítica*. Tomemos la siguiente proposición y su demostración como ejemplo.

Proposición 1. *Para todo par de números reales a y b, con $a < b$, existe otro número real x tal que $a < x < b$.*

Para demostrarlo, pensemos en los puntos a y b de la recta real, con a a la izquierda de b. Podemos *ver* que hay infinitos puntos entre ellos; uno de ellos es el punto medio del segmento que va de a a b. Dicho punto medio se calcula como $(a + b)/2$.

Demostración: Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sea $x = \dfrac{a+b}{2}$. Probaremos que $a < x < b$. En efecto:

$$x - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

Como $b - a > 0$ y $2 > 0$, se tiene $x - a > 0$, es decir, $a < x$.

Por otra parte,

$$b - x = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-(a+b)}{2} = \frac{b-a}{2} > 0,$$

y por lo tanto $x < b$. Luego, $a < x < b$,

q.e.d.

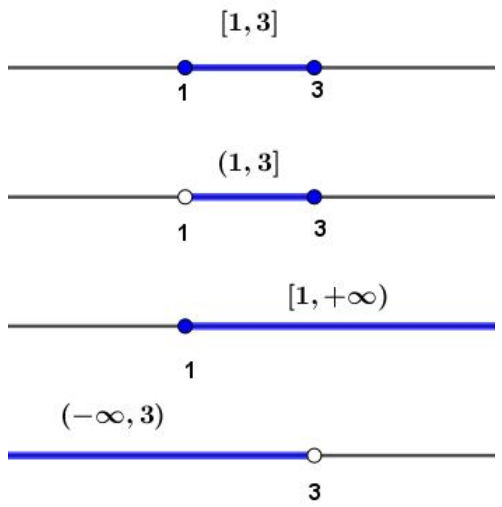
2.3. Intervalos reales.

De suma importancia para el estudio de funciones serán los conjuntos de números cuya representación en la recta real es la de un segmento (o una semirrecta), con la salvedad de que pueden o no incluir los extremos del mismo. Se denominan *intervalos reales*.

Definición. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, se definen los siguientes conjuntos:

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ *(intervalo abierto)*.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$ *(intervalo semiabierto)*.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$ *(intervalo semiabierto)*.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ *(intervalo cerrado)*.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$.
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$.
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$.

Representación de algunos intervalos en la recta real:



En los casos donde aparecen, a y b son *extremos* del intervalo.

2.4. Valor absoluto de un número.

Pensemos en la *distancia* entre un número cualquiera y el 0, *id est* (*i.e.*), la longitud del segmento que los une en la recta real. Por ejemplo, es claro que la distancia entre 0 y 14 es, justamente, 14. Es la misma distancia que hay entre 0 y -14. Resulta conveniente contar con una notación para la distancia entre un número $x \in \mathbb{R}$ y el 0.

Definición. Dado $x \in \mathbb{R}$, su *valor absoluto* es el número real $|x|$ definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ es la distancia en la recta real entre los puntos 0 y x, pero nótese que la definición anterior es puramente analítica, como corresponde a esta presentación de los números reales.

Puede verse también que la distancia entre dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ está dada por el valor $|x - y|$ (que es igual a $|y - x|$, como se deducirá de la siguiente proposición).

Proposición 2 (Propiedades del valor absoluto)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces:*

1. $|x| \geq 0$. *Además,* $|x| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$.
2. $|x| = |-x|$.

3. $-|x| \leq x \leq |x|$.

4. *Dado* $a > 0$*, se tiene:*

   a) $|x| < a$ *si y sólo si* $-a < x < a$.

   b) $|x| > a$ *si y sólo si* $x < -a$ *o bien* $a < x$.

5. *Desigualdad triangular:* $|x + y| \leq |x| + |y|$

6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

7. *Si* $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Demostración: Ejercicio (Interprete geométricamente los cuatro primeros enunciados, pero demuestre **analíticamente** a partir de la definición de valor absoluto de un número).

3. Axioma del supremo (o de completitud)

Los axiomas de cuerpo establecen la existencia de al menos dos números distintos, 0 y 1, y con los axiomas de orden probamos que había muchos más: los naturales y los racionales. **Pero estos axiomas no nos aseguran que existan otros números reales.**

Para justificar esta última afirmación, basta notar que las operaciones de suma y producto son cerradas en $\mathbb{Q}$ (i.e., si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{Q}$, entonces $a + b \in \mathbb{Q}$ y $ab \in \mathbb{Q}$), y **el sistema de números racionales con la suma y el producto satisfacen todos los axiomas de cuerpo y orden**: satisfacen las propiedades conmutativas y asociativas; verifican la propiedad distributiva; tienen elementos neutros (pues $0, 1 \in \mathbb{Q}$), opuestos y recíprocos (si $a \in \mathbb{Q}$, entonces $-a \in \mathbb{Q}$ y $a^{-1} \in \mathbb{Q}$, si $a \neq 0$); y el conjunto $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \ : x > 0\}$ cumple perfectamente el rol de “conjunto de números positivos” en los axiomas de orden. Esto quiere decir que no está implícito entre los 9 axiomas presentados la existencia de números irracionales. Necesitamos un axioma más. Para enunciarlo, precisamos algunas definiciones previas.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una *cota superior* de A si
$$a \leq b \quad \forall a \in A.$$
- Si existe b tal que b es una cota superior de A, se dice que A está *acotado superiormente*.

Por ejemplo, 5 es una cota superior del intervalo $(-7, 3)$, que por lo tanto está acotado superiormente. Los puntos 4 y $\frac{7}{2}$ también son cotas superiores de dicho intervalo. Su propio extremo derecho, 3, es la menor de todas sus cotas superiores. Por otra parte, el intervalo $(-7, +\infty)$ no está acotado superiormente.

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es *supremo* de A si verifica:

i) $a \leq b \quad \forall a \in A$.

ii) Si $c < b$, entonces c no es una cota superior de A.

En otras palabras, b es supremo de A si es una cota superior de A (por i)) y es la menor de ellas (por ii)). Así, por lo antedicho, 3 es un supremo del intervalo $(-7, 3)$.

¿Puede un conjunto tener más de un supremo? No es difícil argumentar a partir de la definición que esto no es posible. Veremos en el siguiente teorema que si un conjunto tiene supremo, éste es único.

Teorema 8 (Unicidad del supremo)**.** *Dos números distintos no pueden ser supremos de un mismo conjunto.*

Demostración: Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, y sean b y b' dos supremos de A. Probaremos que $b = b'$.

Al ser supremos del conjunto, b y b' son, en particular, cotas superiores de A (por *i)* de la definición de supremo).

Siendo que b es supremo de A y b' una cota superior, no puede ser $b' < b$ (por *ii)* de la definición de supremo). Por lo tanto, $b \leq b'$. Y con un razonamiento análogo, $b' \leq b$. Por lo tanto, $b = b'$,

q.e.d.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

La unicidad del supremo nos permite darle una **notación**: si b es *el* supremo de A, escribiremos:

$$b = \sup(A).$$

Ejemplos.

- Llamando $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in \mathbb{R}^+\}$, se tiene $\sup(\mathbb{R}^-) = 0$.
- Llamando $-\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -x \in \mathbb{N}\}$, se tiene $\sup(-\mathbb{N}) = -1$.
- Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, si $A = (a, b)$ y $B = (a, b]$, entonces $\sup(A) = \sup(B) = b$.
- $\mathbb{R}^+$ no tiene supremo, ya que no tiene ninguna cota superior.

Teorema 9 (Caracterización del supremo)**.** *Sea A un conjunto no vacío de números reales. Entonces $b = \sup(A)$ si y solo si b es una cota superior de A tal que para todo $\epsilon > 0$, existe algún elemento $a \in A$ tal que*

$$b - \epsilon < a$$

Demostración: (Bosquejo en clase. Escribir en detalle).

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el *máximo* de A, y se denota $b = \text{máx}(A)$, si verifica:

i) $a \leq b \quad \forall a \in A$.

ii) $b \in A$.

Proposición 3. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = \text{máx}(A)$ si y solo si $b \in A$ y $b = \sup(A)$.*

Al final de la sección 2.1 hemos definido que un número real a es irracional si no es racional; y mencionamos por ejemplo que $\sqrt{2}$ es irracional. Pero, ¿qué número es $\sqrt{2}$? Si no vamos a contradecir nada de lo que ya sabíamos sobre los números antes de empezar esta exposición, $\sqrt{2}$ ha de ser un número positivo tal que su cuadrado es 2. Es decir, es un número positivo que satisface la *ecuación*:

$$x^2 = 2.$$

Pero, ¿existe necesariamente una solución de esa ecuación? Con mayor generalidad: dado $a \in \mathbb{R}^+$, ¿existe $x \in \mathbb{R}^+$, tal que $x^2 = a$?

Con los axiomas de cuerpo y orden ya podíamos contestar afirmativamente la pregunta para algunos valores de a, como ser $a = 4$ y $a = 9$ (en efecto, $2, 3 \in \mathbb{R}^+$, $2^2 = 4$ y $3^2 = 9$), pero no para todo $a > 0$.

No es muy difícil –ni tampoco obvio– demostrar que si $x^2 = 2$, entonces $x \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto, la existencia de una solución positiva de dicha ecuación no está implícita entre los nueve primeros axiomas. Precisa el axioma del supremo.

A10) *Axioma del Supremo:* Todo conjunto no vacío de números reales que sea acotado superiormente tiene un supremo.

El siguiente teorema establece la existencia en $\mathbb{R}^+$ de una solución de la ecuación $x^2 = a$ (para cualquier $a > 0$), número al que llamaremos *raíz cuadrada de* a.

Teorema 10 (Existencia de raíces cuadradas)**.** *Dado $a \geq 0$, existe un único $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0$ y $x^2 = a$.*

Bosquejo de Demostración:

- Para $a = 0$, es fácil probar que $x^2 = 0$ si y solo si $x = 0$, usando el item 4 del Teorema 4.
- Sea $a > 0$. Aun sin usar el axioma del supremo, se prueba que si la ecuación $x^2 = a$ tiene solución, entonces tiene exactamente dos soluciones: un valor y su opuesto. Por lo tanto, una sola de ellas es positiva. Esto prueba la *unicidad* en el enunciado.
- Para probar que efectivamente existe una solución (al menos una), se define el conjunto

$$S_a = \{x \in \mathbb{R} : \; x^2 \leq a\}$$

- Se prueba que $S_a \neq \emptyset$ y que está acotado superiormente. Luego, por el axioma del supremo, existe $b = \sup(S_a)$.
- Finalmente, se prueba que no puede ser $b^2 < a$ ni $b^2 > a$. Por lo tanto (Propiedad de Tricotomía), $b^2 = a$.

Consultar los detalles de la demostración en el libro *Calculus. Vol I.* de Tom M. Apostol (páginas 35 y 36).

Veamos otro ejemplo (sin entrar en detalles) de cómo el Axioma del Supremo permite definir números irracionales. Considere el conjunto S definido por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : \; x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{para algún } n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : \; n \in \mathbb{N}\right\}$$

(Escriba explícitamente cinco elementos de S).

Se puede demostrar que S está acotado superiormente; por lo tanto, por *A10*, existe $\sup(S)$. Así como π, este número es irracional y tiene símbolo propio y hasta nombre propio:

$$\sup(S) = e, \text{ llamado número de Euler.}$$

(e es aproximadamente igual a $2{,}718$).

La siguiente es una propiedad útil de los números reales, cuya validez se puede deducir del Axioma del Supremo.

Teorema 11 (Propiedad Arquimediana de los números reales)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, con $x > 0$. Entonces existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.*

Demostración: Si, por lo contrario, fuese $nx \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tendría que y es una cota superior del conjunto

$$S = \{nx \; : n \in \mathbb{N}\} = \{x, 2x, 3x, 4x, \dots\}$$

(notar que $S \neq \emptyset$). Por el axioma del supremo, S tiene un supremo. Sea $b = \sup(S)$. Por el teorema de caracterización del supremo (tomando en particular $\epsilon = x$, ya que por hipótesis $x > 0$) , existe un elemento $a \in S$ tal que $b - x < a$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Como $a \in S$, a se escribe como $a = mx$, para algún $m \in \mathbb{N}$. Luego,

$$b - x < mx$$

es decir,

$$b < mx + x = (m+1)x.$$

Ahora bien, $(m+1)x \in S$, y por lo tanto b no es una cota superior de S. Pero esto contradice el hecho que $b = \sup(S)$.

La contradicción se genera al suponer que S está acotado superiormente. Luego, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$,

q.e.d.

Interprete geométricamente el teorema anterior para el caso en que $y > 0$. Y deduzca a partir del mismo las siguientes afirmaciones.

Corolario 5.

i) *Para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < n$.*

ii) *$\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.*

iii) *Si $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.*

iv) *Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, con $z > 0$. Si se verifica:*

$$x \leq y < x + \frac{z}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces $x = y$.

Demostración: Ejercicio.

3.1. Cotas inferiores, ínfimo y mínimo de un conjunto.

Definición. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$.

- Sea $b \in \mathbb{R}$. Se dice que b es una *cota inferior* de A si

$$b \leq a \quad \forall a \in A.$$

- Si existe b tal que b es una cota inferior de A, se dice que A está *acotado inferiormente*.

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Se dice de un punto $b \in \mathbb{R}$ que es *ínfimo* de A si verifica:

i) $b \leq a \quad \forall a \in A$.

ii) Si $b < c$, entonces c no es una cota inferior de A.

Análogamente al caso del supremo, se prueba que, si existe, el ínfimo de un conjunto A es único; se lo denota $\inf(A)$.

Definición. Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Un punto $b \in \mathbb{R}$ es el *mínimo* de A, y se denota $b = \min(A)$, si verifica:

i) $b \leq a \quad \forall a \in A.$

ii) $b \in A$.

Proposición 4. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Entonces $b = \min(A)$ si y solo si $b \in A$ y $b = \inf(A)$.*

Teorema 12. *Sea A tal que $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Si A está acotado inferiormente, entonces existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $b = \inf(A)$.*

En otras palabras, todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente posee ínfimo. Es importante remarcar que esto no se impone como un nuevo axioma, sino que su validez se deduce a partir de los diez anteriores. Su demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo:
Sea

$$S = \left\{ \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}.$$

Como todo elemento en S es positivo, el número 0 es una cota inferior de S. Por lo tanto, por el teorema anterior, existe un número que es ínfimo de S.

Más aún, en el Corolario 5 vimos que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$, lo cual quiere decir que ningún número positivo puede ser cota inferior de S. Así, 0 es la menor de sus cotas inferiores, i.e., $\inf(S) = 0$. Pero como $0 \notin S$, S no tiene mínimo.

Teorema 13 (Parte entera)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}$, existe un único número entero p, tal que*

$$p \leq x < p + 1.$$

lo que equivale a decir que p es el mayor número entero menor o igual que x.

Demostración: Si $x \in \mathbb{Z}$, entonces $p = x$ verifica $p \leq x < p + 1$.

Caso contrario, si $x \notin \mathbb{Z}$, separamos la prueba en los siguientes casos:

• Si $0 < x < 1$ entonces $p = 0$ verifica $p \leq x < p + 1$.

• Si $x > 1$, consideremos el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$. $S \neq \emptyset$, pues por la propiedad arquimediana (aplicada a $y = x > 1$ y a $x = 1 > 0$) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x < n_0 \cdot 1$, luego $n_0 \in S$; además, S está acotado inferiormente por x. Por lo tanto, S tiene un elemento mínimo (primer elemento), y este es único, llamémosle m, que por estar en S será $x < m$ y por ser mínimo $m - 1 \notin S$, lo que implica que $m - 1 \leq x$.
Luego, llamando $p = m - 1$ se verifica $p \leq x < p + 1$, siendo p único.

• Si $x < 0 \Longrightarrow -x > 0$ por lo demostrado anteriormente existe un único $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$q \leq -x < q + 1,$$

por lo tanto $-q - 1 \leq x < -q$, llamando $p = -q - 1 \in \mathbb{Z}$, se tiene $p \leq x < p + 1$, siendo p único.

Luego queda demostrado que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, existe un único $p \in \mathbb{Z}$ tal que

$$p \leq x < p + 1$$

que suele denotarse con $[x]$ y se lo denomina **parte entera de** x,

$$[x] \leq x < [x] + 1,$$

q.e.d.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119