1. Espacios vectoriales

1.1. Introducción

En todos los campos de la matemática se encuentran ejemplos de objetos que pueden sumarse entre ellos y multiplicarse por números, podríamos citar como ejemplos los números naturales en si mismos, las funciones, los números complejos, los vectores de $\mathbb{R}^n$, etc. Estamos en condiciones de iniciar el estudio del álgebra lineal introduciendo el concepto de ***espacio vectorial***. Los espacios vectoriales son esenciales para la formulación y solución de los problemas de álgebra lineal.
Brevemente, un espacio vectorial es un conjunto de elementos de naturaleza cualquiera sobre el que pueden realizarse ciertas operaciones llamadas adición y multiplicación por escalares. Al definir un espacio vectorial no se especifica la naturaleza de los elementos, ni se establece como se realizan las operaciones pero si se exige que las operaciones verifiquen ciertas propiedades que serán considerados axiomas de un espacio vectorial.

Los escalares pueden considerarse en un cuerpo $\mathbb{K}$, en general consideraremos $\mathbb{K}$ igual al cuerpo de los números reales $\mathbb{R}$ o al cuerpo de los números complejos $\mathbb{C}$.

Comencemos dando la definición precisa de cuerpo.

Definición 1.1 *Un **cuerpo** es una terna* $(F, +, \dot{})$ *constituida por un conjunto* F *dotado de dos operaciones* $+$ *y* $\cdot$ *en* F*, denominadas respectivamente adición y multiplicación, que verifican los siguientes axiomas:*

Axiomas de la adición

A1 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$.

A2 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x + y = y + x$.

A3 *Existencia de elemento neutro para +:* $\exists!$ *elemento* $\theta \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x + \theta = \theta + x = x$.

A4 *Existencia del opuesto de un elemento:* $x \in F$, $\exists!$ *elemento* $-x \in F$ *t.q.* $x + (-x) = (-x) + x = \theta$.

Axiomas de la multiplicación

A5 *Propiedad asociativa:* $x, y, z \in F \Rightarrow (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

A6 *Propiedad conmutativa:* $x, y \in F \Rightarrow x \cdot y = y \cdot x$.

A7 *Existencia de elemento identidad para* $\cdot$*:* $\exists!$ *elemento* $\epsilon \in F$ *t.q.* $x \in F \Rightarrow x \cdot \epsilon = \epsilon \cdot x = x$.

A8 *Existencia del recíproco de un elemento:* $\theta \neq x \in F$, $\exists!$ *elemento* $x^{-1} \in F$ *t.q.* $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \epsilon$.

Definición 1.2 *Sea* $\mathbb{F}$ *un conjunto no vacío de objetos, que llamaremos escalares, y sean las operaciones **adición***

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{F} \times \mathbb{F} & \to & \mathbb{F} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha + \beta \end{array}$$

*y **multiplicación***

$$\cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{F} \times \mathbb{F} & \to & \mathbb{F} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \alpha \cdot \beta. \end{array}$$

Diremos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un **cuerpo** si se satisfacen los siguientes axiomas.*
Axiomas de clausura

Axioma 1: Clausura respecto de la adición: A todo par de elementos $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *corresponde un elemento único de* $\mathbb{F}$ *llamado suma de* α *e* β*, designado por* $\alpha + \beta$.

Axioma 2: Clausura respecto de la multiplicación. A todo $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ *corresponde un elemento de* $\mathbb{F}$ *llamado producto de* α *por* β*, designado por* $\alpha \cdot \beta = \alpha\beta$.

Axiomas para la adición

Axioma 3: Ley asociativa. Para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$ *se tiene que*

Axioma 4: Ley asociativa. Para todos $u, v, w \in V$ *se tiene que* $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Axioma 4: Ley conmutativa. Para todos $u, v \in V$, *se tiene que* $u + v = v + u$.

Axioma 5: Existencia de elemento neutro o cero. Existe un elemento en V, *designado por el símbolo 0, tal que* $v + 0 = v, \forall v \in V$.

Axioma 6: Existencia de opuesto. Para todo $v \in V$ *existe un elemento que notaremos* $-v$ *tal que* $v+(-v) = 0$.

Axiomas para la multiplicación por escalares

Axioma 7: Ley asociativa. Para todo $v \in V$ *y todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se tiene que* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

Axioma 8: Ley distributiva respecto de la adición en V. *Para tods* $u, v \in V$ *y* $\alpha \in \mathbb{K}$ *se tiene* $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

Axioma 9: Ley distributiva respecto de la adición de escalares. Para todo $v \in V$ *y todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se tiene* $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$.

Axioma 10: Existencia del elemento idéntico. Para todo $v \in V$ *se tiene* $1v = v$.

Definición 1.3 *Sea* V *un conjunto no vacío de objetos llamados elementos. Sea* $\mathbb{K}$ *un cuerpo de escalares. Sean las operaciones* ***adición de vectores***

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

y ***multiplicación por un escalar***

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\alpha, v) & \mapsto & \alpha v. \end{array}$$

Diremos que $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ *es un* ***espacio vectorial, o lineal*** *si se satisfacen los siguientes axiomas.*
Axiomas de clausura

Axioma 1: Clausura respecto de la adición: A todo par de elementos $u, v \in V$ *corresponde un elemento único de* V *llamado suma de* u *e* v, *designado por* $u + v$.

Axioma 2: Clausura respecto de la multiplicación por escalares. A todo $v \in V$ *y todo* $\alpha \in \mathbb{K}$ *corresponde un elemento de* V *llamado producto de* α *por* v, *designado por* αv.

Axiomas para la adición

Axioma 3: Ley conmutativa. Para todos $u, vy \in V$, *se tiene que* $u + v = v + u$.

Axioma 4: Ley asociativa. Para todos $u, v, w \in V$ *se tiene que* $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Axioma 5: Existencia de elemento neutro o cero. Existe un elemento en V, *designado por el símbolo 0, tal que* $v + 0 = v, \forall v \in V$.

Axioma 6: Existencia de opuesto. Para todo $v \in V$ *existe un elemento que notaremos* $-v$ *tal que* $v+(-v) = 0$.

Axiomas para la multiplicación por escalares

Axioma 7: Ley asociativa. Para todo $v \in V$ *y todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *se tiene que* $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.

Axioma 8: Ley distributiva respecto de la adición en V. Para tods $u, v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$.

Axioma 9: Ley distributiva respecto de la adición de escalares. Para todo $v \in V$ y todos $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$.

Axioma 10: Existencia del elemento idéntico. Para todo $v \in V$ se tiene $1v = v$.

Un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ usualmente es llamado ***espacio vectorial real*** y un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ ***espacio vectorial complejo***. Los elementos $v \in V$ de un espacio vectorial son denominados ***vectores***.
La definición precedente puede aparecer como muy abstracta, pero los espacios vectoriales constituyen objetos matemáticos fundamentales y ustedes se cruzarán con numerosos ejemplos a lo largo de su vida matemática.

1.2. Ejemplos de espacios vectoriales

Precisando quien es el conjunto V, como se suman sus elementos y como se multiplican por escalares se obtienen espacios vectoriales concretos. Puede comprobarse de manera sencilla que cada uno de los siguientes ejemplos constituye un espacio vectorial.

1. Sea $V = \mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y sean $u + v$ y αu la adición y la multiplicación usual entre números reales. Luego $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial.

2. Sea $V = \mathbb{C}$, el conjunto de los números complejos, y sean $u + v$ la adición usual entre números complejos y αu la multiplicación del número complejo u por el escalar real α. Luego $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real (si bien los vectores son números complejos el conjunto de escalares es $\mathbb{R}$).

3. Consideremos $V = \mathbb{K}^n$, el conjunto de las n-úplas con elementos en $\mathbb{K}$. Definiendo la adición y la multiplicación por escalares por componentes: para $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n), v = (v1, v_2, \cdots, v_n) \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in \mathbb{K}$
$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n), \qquad \alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \cdots, \alpha u_n).$$
Resulta $(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Observemos que en este caso el elemento neutro está dado por $0 = (0, 0, \cdots, 0)$ y el opuesto para la adición de u por $(-u_1, -u_2, \cdots, -u_n)$.
Casos particulares de estos espacios vectoriales son $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ya estudiados.

4. Sea $V = \{0\}$ es un espacio vectorial. (0 simboliza el elemento neutro de cualquier espacio vectorial).

5. Sea $n = 2$ y sea $0 \neq v_0 \in \mathbb{R}^2$ un vector no nulo fijo en el plano. Consideremos como V el conjunto de los vectores del plano ortogonales a v_0. Si dotamos a V de la adición y multiplicación por escalares usual en el plano, resulta V un espacio vectorial, en particular es una recta que pasa por el origen y tiene al vector v_0 como vector normal.
¿Qué sucede si consideramos $n = 3$?

Los siguientes ejemplos son espacios funcionales, es decir espacios vectoriales donde los elementos del conjunto V son funciones, con la suma entre funciones f y g definidas de modo estándar
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
para todo x en la intersección de los dominios de f y de g. La multiplicación por un escalar α de una función f se define como la función αf cuyo dominio coincide con el dominio de f y a cada $x \in Dom(f)$ le asigna $\alpha f(x)$. El elemento neutro es la función idénticamente igual a 0 para todo x.

6. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sea V el conjunto de todas las funciones definidas en $[a, b]$ a valores reales. V es un espacio vectorial.
7. El conjunto de todos los polinomios, es un espacio vectorial.
8. Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, luego el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a n es un espacio vectorial.
9. El conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre $[a, b]$ a valores reales es un espacio vectorial.
10. Sea $x_0 \in (a, b)$. El conjunto de todas las funciones definidas en $[a, b]$ a valores reales, derivables en x_0 es un espacio vectorial.
11. El conjunto de todas las funciones integrables en un intervalo dado es un espacio vectorial.
12. El conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(1) = 0$, constituye un espacio vectorial. ¿Qué sucede si cambiamos el valor 0 por otro valor real?

1.3. PROPIEDADES ELEMENTALES DE LOS ESPACIOS VECTORIALES

Demostraremos a continuación algunos resultados que se deducen de los axiomas de espacio vectorial. De aquí en más V representará un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$.

Proposición 1.1 *Unicidad del elemento neutro*
En todo espacio vectorial el elemento neutro es único.

Demos: Supongamos que existen dos elementos neutros para la adición, sean 0_1 y 0_2. Luego se tiene que

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$$

En la primera igualdad usamos el hecho que 0_2 es elemento neutro y en la segunda igualdad que 0_1 es neutro. Por lo tanto $0_1 = 0_2$. ■

Proposición 1.2 *Unicidad de elementos opuestos.*
En todo espacio vectorial cada elemento $x \in V$ tiene un único elemento opuesto. Es decir para cada $u \in V$ existe un único elemento $v \in V$ tal que $u + v = 0$.

Demos: El axioma 6 asegura que dado $u \in V$ al menos existe un elemento opuesto $-u$ tal que $u + (-u) = 0$. Supongamos que u tiene dos elementos opuestos v_1 y v_2, es decir que $0 = u + v_1$ y $0 = u + v_2$. Consideremos la primera igualdad, sumemos v_2 a ambos miembros

$$v_2 = 0 + v_2 = (u + v_1) + v_2 = (v_1 + u) + v_2 = v_1 + (u + v_2) = v_1 + 0 = v_1.$$

En consecuencia cada elemento tiene un único elemento opuesto. ■

Dada la unicidad del elemento opuesto para cada $u \in V$, este será notado como $-u$. Se define la diferencia de dos elementos de un espacio vectorial V, $v - u$, como $v + (-u)$.

Proposición 1.3 *Sea V un espacio vectorial, $u, v \in V$ dos elementos cualesquiera y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ dos elementos cualesquiera del cuerpo. Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $0u = 0$
2. $\alpha 0 = 0$
3. $(-\alpha)u = -(\alpha u) = \alpha(-u)$

4. *Si* $\alpha u = 0$, *entonces* $\alpha = 0$ *o* $u = 0$.

5. *Si* $\alpha u = \alpha v$ *y* $\alpha \neq 0$ *entonces* $u = v$.

6. *Si* $\alpha u = \beta u$ *y* $u \neq 0$ *entonces* $\alpha = \beta$.

7. $-(u+v) = (-u) + (-v) = -u - v$.

8. $u + u = 2u$, $u + u + u = 3u$ *y en general* $\sum_{i=1}^{n} u = nu$.

Demos:

1. Sea $w = 0u$, queremos ver que $w = 0$.

   $$w = 0+w = (-w+w)+w = -w+(w+w) = -w+(0u+0u) = -w+(0+0)u = -w+0u = -w+w = 0.$$

2. Sea $w = \alpha 0$.

   $$w = 0+w = (-w+w)+w = -w+(w+w) = -w+(\alpha 0+\alpha 0) = -w+\alpha(0+0) = -w+\alpha 0 = -w+w = 0.$$

3. Sea $w = (-\alpha)u$, luego usando el axioma 9 y $b)$ se tiene que

   $$\alpha u + w = \alpha u + (-\alpha)u = (\alpha - \alpha)u = 0u = 0.$$

   Por la unicidad del elemento opuesto resulta $(-\alpha)u = -(\alpha u)$. Análogamente, resulta

   $$\alpha u + \alpha(-u) = \alpha(u-u) = \alpha 0 = 0,$$

   y así $-(\alpha u) = \alpha(-u)$. En particular $(-1)u = -u$.

4. Supongamos que $\alpha u = 0$, y $\alpha \neq 0$ y veamos que resulta $u = 0$. Como $\alpha \neq 0$ luego existe $\frac{1}{\alpha} \neq 0$. Así

   $$0 = \alpha u \Rightarrow 0 = \frac{1}{\alpha}0 = \frac{1}{\alpha}(\alpha u) = (\frac{1}{\alpha}\alpha)u = 1u = u.$$

5. Como $\alpha \neq 0$ existe $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}$, luego

   $$u = (\frac{1}{\alpha}\alpha)u = \frac{1}{\alpha}(\alpha u) = \frac{1}{\alpha}(\alpha v) = (\frac{1}{\alpha}\alpha)v = v.$$

■

1.4. Subespacios de un espacio vectorial

Definición 1.4 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, y sea $\emptyset \neq U \subset V$. Diremos que U es un* ***subespacio vectorial de V*** *si U es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones que hereda de V.*

Teorema 1.1 *Sea U un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. Tal subconjunto U es un subespacio vectorial si y sólo si satisface los axiomas de clausura.*

Demos: Si U es un subespacio vectorial satisface todos los axiomas de un espacio vectorial, en particular los axiomas de clausura.
Supongamos que U satisface los axiomas de clausura (1 y 2), veamos que satisface los restantes. Las leyes de conmutatividad y asociatividad de la adición (axiomas 3 y 4) y los axiomas para la multiplicación por escalares (axiomas 7 al 10) se satisfacen automáticamente en U pues son válidos para todos los elementos de V. Falta ver la existencia del elemento neutro para la adición en U y

la existencia de un opuesto en U para cada elemento de U.
Sea $x \in U$ cualquiera (U tiene por lo menos un elemento pues es distinto de vacío). Por el axioma 2, $\alpha x \in U$ para todo escalar α. En particular tomando $\alpha = 0$, resulta que $0x = 0 \in U$, por lo tanto se verifica el axioma 5. Por otro lado, tomando $\alpha = -1$ se tiene que $(-1)x \in U$, pero $x + (-1)x = 0$, pues vimos que $(-1)x$ es el opuesto de x en V, luego se satisface el axioma 6. Concluimos que U es un subespacio vectorial. ■

Ejemplo 1.1

I *En todo espacio vectorial V, $\{0\}$ y V son subespacios, llamados* ***subespacio triviales de V****.*

II *$\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.*

III *$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Para comprobarlo debemos probar que ser verifican los axiomas de clausura.*
Veamos que la adición es cerrada, sean

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2, u_3) \in U \Rightarrow u_1 + 2u_2 = 0 \\ v &= (v_1, v_2, v_3) \in U \Rightarrow v_1 + 2v_2 = 0. \end{aligned}$$

Sumando se obtiene $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ satisface $(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) = 0$. Por lo tanto $u + v \in U$.
Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, luego $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3)$ satisface $\alpha u_1 + 2\alpha u_2 = 0$, luego $\alpha u \in U$.//

IV *Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las funciones continuas en $\mathbb{R}$. Si consideramos el subconjunto $C^\infty(\mathbb{R})$ formado por las funciones infinitamente derivables con continuidad, el mismo resulta un subespacio vectorial de $C(\mathbb{R})$.*

V *Los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^2$ son $\{0\}$, todas las rectas que pasan por el origen y $\mathbb{R}^2$.*
Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son $\{0\}$, todas las rectas que pasan por el origen, todos los planos que pasan por el origen y $\mathbb{R}^3$.
Estos son todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, ya lo probaremos más adelante. No es difícil probar que las rectas y planos que no pasan por el origen no son subespacios.

VI *Si U y W son subespacios de V, resulta $U \cup W$ subespacio de V.*
La unión de dos subespacios no necesariamente es un subespacio.

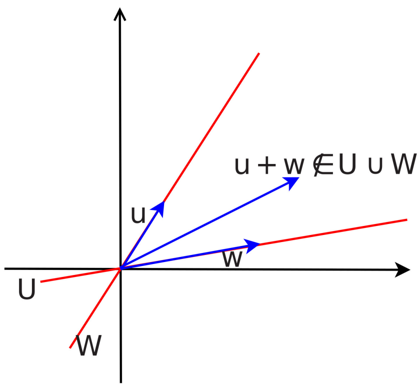

Figura 1: Unión de subespacios

1.5. Suma y suma directa de subespacios

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $U_1, U_2 \subset V$ subespacios vectoriales.

Definición 1.5 *Sean $U_1, W_2 \subset V$ subespacios de V. Definimos el* ***subespacio suma de U_1 y U_2*** *al conjunto*

$$U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}.$$

Ejercicio: Probar que efectivamente $U_1 + U_2$ es un subespacio de V. Es más es el menor subespacio de V que contiene tanto a U_1 como a U_2.

Ejemplo 1.2 *Sean $U_1 = \{(x, 0, 0) \in \mathbb{K}^3 : x \in \mathbb{K}\}$ y $U_2 = \{(0, y, 0) \in \mathbb{K}^3 : y \in \mathbb{K}\}$. Luego*

$$U_1 + U_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{K}^3 : x, y \in \mathbb{K}\}.$$

Si consideramos $U_3 = \{y, y, 0) \in \mathbb{K}^3 : y \in \mathbb{K}\}$, observemos que también se verifica que $U_1 + U_3 = \mathbb{K}^2$.

Ejemplo 1.3 *Sea el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ y consideremos los subespacios $U_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $U_2 = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y, z \in \mathbb{R}\}$. Estos subespacios son el plano xy y el yz respectivamente. Es claro que*

$$U_1 + U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

Es decir que todo elemento $v \in \mathbb{R}^3$ podemos escribirlo como $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$. Esos elementos u_1, u_2 serán únicos? En este caso no pues

$$(0, 0, 0) = (0, 0, 0) + (0, 0, 0) = (0, 1, 0) + (0, -1, 0) = \cdots$$

Definición 1.6 *Supongamos que cada $u \in U$ puede escribirse de manera única como $u = u_1 + u_2$ con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$, luego U es la* ***suma directa U_1 y U_2*** *y se nota*

$$U = U_1 \oplus U_2$$

Ejemplo 1.4

*a) Sean $U_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$ y $U_2 = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\}$. Luego $\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2$.
Sin embargo si consideramos $U_3 = \{(0, w, z) \in \mathbb{R}^3 : w, z \in \mathbb{R}\}$ resulta $\mathbb{R}^3 = U_1 + U_3$ pero no es la suma directa de U_1 y U_3.*

b) Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio de los polinomios sobre $\mathbb{R}$. Sean

$$\begin{aligned} U_1 &= \{p \in \mathbb{R}[x] : p(x) = a_0 + a_2x^2 + \cdots + a_{2m}x^{2m}\}, \\ U_2 &= \{p \in \mathbb{R}[x] : p(x) = a_1x + a_3x^3 + \cdots + a_{2m+1}x^{2m+1}\}. \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{R}[x] = U_1 \oplus U_2$.

Proposición 1.4 *Sean $U_1, U_2 \subset V$ subespacios. Luego $V = U_1 \oplus U_2$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*
$i)$ $V = U_1 + U_2$.
$ii)$ Si $0 = u_1 + u_2$, con $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$, luego $u_1 = u_2 = 0$.

Demos: $\Rightarrow$) Sea $V = U_1 \oplus U_2$ luego la condición $i)$ se verifica por definición. Además $0 = 0 + 0$, por la unicidad e se tiene que es la única manera de escribir $0 \in V$, luego $u_1 = u_2 = 0$.
$\Leftarrow$) Se tiene $i)$ y $ii)$. Por $i)$ se tiene que para todo $v \in V$ existen $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $v = u_1 + u_2$. Supongamos que $v = w_1 + w_2$, con $w_1 \in U_1$ y $w_2 \in U_2$. Restando resulta

$$0 = (u_1 - w_1) + (u_2 - w_2),$$

con $(u_1 - w_1) \in U_1$ y $(u_2 - w_2) \in U_2$. Por $ii)$ resulta $u_1 - w_1 = 0$ y $u_2 - w_2 = 0$. Por lo tanto $u_1 = w_1$ y $u_2 = w_2$. ■

Lo presentado en esta sección puede extenderse sin dificultad a m subespacios $U_1, U_2, \cdots, U_m$.

1.6. Espacio generado y base

1.7. Espacio generado

Consideramos un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$.

Definición 1.7 *Dados los vectores $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$, un vector $v \in V$ es una **combinación lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_m$** si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tal que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m.$$

*El **espacio generado por $v_1, v_2, \cdots, v_m$** o **envolvente lineal de $v_1, v_2, \cdots, v_m$** se define como*

$$\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle = L(v_1, v_2, \cdots, v_m) := \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m : \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{K}\}.$$

Lema 1.1 *Sea V un espacio vectorial y $v_1, v_2, \cdots, v_m \in V$. Entonces*
i) $v_j \in L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$, $j = 1, \cdots, m$.
ii) $L(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ es un subespacio de V.
iii) Si $U \subseteq V$ es un subespacio tal que $v_1, \cdots, v_m \in U$, luego $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle \subseteq U$.

Demos: Ejercicio. ■

El lema anterior implica que $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle$ es el menor subespacio de V que contiene a $v_1, v_2, \cdots, v_m$.

Definición 1.8 *Si $\langle v_1, v_2, \cdots, v_m \rangle = V$, diremos que $v_1, v_2, \cdots, v_m$ **generan V** y diremos que V es de **dimensión finita**. Un espacio vectorial que no es de dimensión finita, es llamado de **dimensión infinita**.*

Ejemplo 1.5

1. *Los vectores $e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_m = (0, \cdots, 0, 1)$ generan $\mathbb{K}^m$. Por lo tanto $\mathbb{K}^m$ es de dimensión finita.*

2. *Los vectores $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, -1, 0)$ generan un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Más precisamente, si $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$, luego el espacio generado por v_1 y v_2 es el plano xy de $\mathbb{R}^3$.*

3. *Sea $\mathbb{K}_m[x]$ el conjunto de los polinomios en $\mathbb{K}[x]$ de grado menos o igual a m. Se tiene que $\mathbb{K}_m[x] \subseteq \mathbb{K}[x]$ es un subespacio, por lo tanto contiene al polinomio nulo y es cerrado por sumas y productos por escalar. $\mathbb{K}_m[x]$ es un subespacio de dimensión finita pues*

$$\mathbb{K}_m[x] = \langle 1, x^2, \cdots, x^m \rangle.$$

Al mismo tiempo notemos que $\mathbb{K}[x]$ en si mismo es de dimensión infinita. Para ver esto supongamos por el contrario que es generado por un número finito de k polinomios

$$\mathbb{K}[x] = \langle p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x) \rangle.$$

Sea $m = max(gr(p_1(x), gr(p_2(x)), \cdots, gr(p_k(x)))$. Luego $x^{m+1} \in \mathbb{K}[x]$ pero $x^{m+1} \notin \langle p_1(x), p_2(x), \cdots, p_k(x) \rangle$.

1.8. Independencia lineal

Definición 1.9 *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Un subconjunto $S \subseteq V$ se dice **linealmente dependiente** si existen distintos vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n \in S$ y escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

*Un conjunto que no es linealmente dependiente se dice **linealmente independiente** . Si el conjunto S contiene una cantidad finita de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ a menudo se dice que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ son linealmente dependientes (independientes) en lugar de decir que S lo sea.*

Observación 1.1 1. *Cualquier conjunto que contenga un conjunto linealmente dependiente es linealmente dependiente.*

2. *Cualquier subconjunto de un conjunto linealmente independiente es linealmente independiente.*

3. *Cualquier conjunto que contenga al vector* 0 *es linealmente dependiente.*

4. *Un conjunto* S *de vectores es l.i. si y sólo si cada subconjunto finito de* S *es l.i., vale decir, si y sólo si para cualquiera sean los distintos vectores* $v_1, v_2 \cdots, v_m \in S$*, se tiene que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = 0,$$

implica que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m = 0$.

Ejemplo 1.6 *Los vectores* $\{e_1, e_2, \cdots, e_m\} \subseteq \mathbb{K}^m$ *son linealmente independientes. Vemos que la única solución de*

$$0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m),$$

es $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. *Podemos reinterpretarlo como el sistema lineal homogéneo*

$$\begin{array}{cccccc} \alpha_1 & & & & = & 0 \\ & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & \cdots & & \vdots = & \vdots \\ & & & \alpha_m & = & 0 \end{array}$$

que claramente tiene la solución trivial.

Ejemplo 1.7 *Los vectores* $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,-1), v_3 = (1,2,0)$ *son linealmente dependientes:*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(0,1,-1) + \alpha_3(1,2,0) = (0,0,0)$$

es decir $(\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2 = (0,0,0)$. *Resolviendo para las incógnitas* $\alpha_{1,2,3}$ *se ve que por ejemplo* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1,1,-1)$ *es una solución no trivial.*
Si lo vemos como un sistema lineal se tiene

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & & & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0 \end{array}$$

Usando eliminación gaussiana llegamos al sistema equivalente

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1 & + & & & \alpha_3 & = & 0 \\ & & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Este nuevo sistema, ahora ya con la matriz de coeficientes siendo triangular superior, claramente tiene infinitas soluciones (tiene un pivote igual a 0). En particular el conjunto de soluciones está dado por

$$N = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3 : \alpha_1 = \alpha_2 = -\alpha_3\} \langle (1,1,-1) \rangle.$$

Ejemplo 1.8 *Los vectores* $\{1, z, z^2, \cdots, z^m\}$ *en el espacio vectorial* $\mathbb{K}_m[z]$*, son linealmente independientes. Para demostrarlo consideramos la combinación lineal*

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 z + \cdots + \alpha_m z^m = 0,$$

Para que esto se verifique debe darse que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$.

Ejemplo 1.9 *Sea $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{K}]$, sea $A = (a_{ij})$.Consideramos los vectores columnas de A $A_1, A_2, \cdots, A_n$, donde para $j = 1, \cdots, n$ se tiene $A_j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$.*
El subespacio de $\mathbb{K}^n$ generado por los vectores columnas de A se denomina **espacio columna de A** .
En particular si la matriz A es inversible, se tiene que sus vectores columna son linealmente independientes, pues sean $c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nAn = 0$$

podemos pensar $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{K}^n$, así reescribimos la expresión anterior como $Ac = 0$, como A es inversible resulta $c = A^{-1}0 = 0$ resulta que la única solución del sistema es la solución trivial, luego $A_1, A_2, \cdots, A_n$ son linealmente independientes.

Ejemplo 1.10 *Ejemplo de conjunto linealmente independiente, infinito. Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{K}[x]$ de los polinomios sobre $\mathbb{K}$. Consideremos los vectores $p_k = x^k, k \in \mathbb{N}_0$ y el conjunto de cardinal infinito $S = \{p_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. Resulta:*
$i)$ S genera el espacio V.
$ii)$ S es l.i.
Para ver $i)$ resulta claro que cualquier polinomio $p \in V$ es de la forma

$$p = a_0 + a_1x + \cdots + c_nx^n = a_0p_0 + a_1p_1 + \cdots + c_np_n.$$

Para ver que S es l.i. debemos ver que todo subconjunto finito de este conjunto es l.i. Basta mostrarlo que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $\{p_0, p_1, \cdots, p_n$ es l.i.. Supongamos que

$$a_0p_0 + a_1p_1 + \cdots + c_np_n = 0.$$

Esto implica que para cada $x \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$a_0 + a_1x + \cdots + c_nx^n = 0.$$

Dicho de otro modo, cada $x \in \mathbb{K}$ es raíz del polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + c_nx^n$. Como un polinomio de grado n no puede tener más de n raíces distintas, se deduce que estamos en presencia del polinomio idénticamente cero y así resulta $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Podemos enunciar los siguientes resultados

Lema 1.2 *Los vectores $v_1, \cdots, v_m$ son linealmente independientes si y sólo si para todo $v \in \langle v_1, \cdots, v_m\rangle$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de $v_1, \cdots, v_m$.*

Demos: : Ejercicio. ■

Lema 1.3 *Si $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ es linealmente dependientes y $v_1 \neq 0$, luego existe un índice $j \in \{2, \cdots, m\}$ tal que se verifican las siguientes dos condiciones:*
$i)$ $v_j \in \langle v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_m\rangle$.
$ii)$ Si quitamos el vector v_j del conjunto el espacio generado sigue siendo el mismo, i.e. $\langle v_1, \cdots, v_m\rangle = \langle v_1, \cdots, v_{j-1}, v_{j+1}, \cdots, v_m\rangle$

Demos: Como S es linealmente dependiente, existen $c_1, \cdots, c_m \in \mathbb{K}$ no todos cero tales que $c_1v_1 + \cdots + c_mv_m = 0$. Como por hipótesis $v_1 \neq 0$, no todos los elementos $c_2, \cdots, c_m$ pueden ser 0. Sea

$j \in \{2, \cdots, m\}$ el mayor índice tal que $c_j \neq 0$.
Luego se tiene que

$$v_j = -\frac{c_1}{c_j} v_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1}, \tag{1}$$

con esto obtenemos i).
Sea $v \in \langle v_1, \cdots, v_m \rangle$, es decir que existen escalares $b_1, \cdots, b_m \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_j v_j + \cdots + b_m v_m.$$

Utilizando la expresión en (1) se tiene que

$$v = b_1 v_1 + \cdots + b_j \left(-\frac{c_1}{c_j} v_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j} v_{j-1}\right) + \cdots + b_m v_m,$$

de donde surge la igualdad de los espacios generados. ■

Ejemplo 1.11 *Los vectores* $(1,1), (1,2), (1,0)$ *generan* $\mathbb{R}^2$ *(probarlo). Además dichos vectores son linealmente dependientes. Luego por el resultado anterior, sabemos que podemos eliminar uno de los vectores y obtener el mismo espacio generado. Comprobar que*

$$\langle (1,1), (1,2), (1,0) \rangle = \langle (1,1), (1,2) \rangle.$$

Teorema 1.2 *Sea V un espacio vectorial generado por un conjunto finito de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Entonces cualquier conjunto linealmente independiente de vectores en V es finito y no contiene más de n elementos.*

Demos: Alcanza con mostrar que cada subconjunto $S \subseteq V$ que contiene más de n vectores es linealmente dependiente.
Sea S un conjunto que contiene m vectores distintos $w_1, \cdots, w_m$, $m > n$. Como $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$ existen escalares $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

esto para cada $j = 1, \cdots, m$.
Ahora para cualesquiera escalares $x_1, \cdots, x_m$ se tiene

$$\begin{aligned} x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m &= \sum_{j=1}^{m} x_j w_j = \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} x_j) v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right) v_i \end{aligned}$$

Como $m > n$ pensando en la ecuación $Ax = 0$, existen escalares $x_1, \cdots, x_m$ no todos nulos tales que

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = 0, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Por lo tanto para esos escalares se tiene que $x_1 w_1 + \cdots + x_m w_m = 0$, y esto prueba que S es linealmente dependiente. ■

Corolario 1.1 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y sea $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un conjunto l.i. tal que $V = \langle \{v_1, \cdots, v_n\} \rangle$. Entonces:*
a) Cualquier subconjunto de V que contenga más de n vectores es l.d.
b) No existe un subconjunto de V que contenga menos de n vectores que genere V.

Lema 1.4 *Sea S un subconjunto l.i. de un espacio vectorial V. Supongamos que $v \in V$ pero $v \notin \langle S \rangle$. Entonces el conjunto $S \cup \{v\}$ es l.i.*

Demos: Supongamos que $w_1, \cdots, w_n \in S$ distintos, y que

$$c_1 w_1 + \cdots + c_n w_n + bv = 0.$$

Si $b \neq 0$ puede escribirse

$$v = -\frac{c_1}{b} w_1 - \frac{c_2}{b} w_2 - \cdots - \frac{c_n}{b} w_n,$$

y así sería $v \in \langle S \rangle$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $b = 0$ y surge que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ por ser S *l.i.*. ■

Definición 1.10 *En un espacio vectorial de dimensión finita una* **base** *es un conjunto de vectores l.i. que genera el espacio.*

Definición 1.11 *El cardinal de cualquier base de un espacio vectorial V de dimensión finita es llamada la* ***dimensión de V*** *, y se nota* $\dim(V)$.

Teorema 1.3 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Luego toda base de V tiene la misma cantidad de vectores.*

Demos: Sean $\{v_i, \cdots, v_m\}$ y $\{w_i, \cdots, w_n\}$ dos bases de V. Ambas generan V, luego por teorema 1.2 y siendo ambos conjuntos de vectores *l.i* se tiene que $n \leqslant m$ y $m \leqslant n$. Así $m = n$ como queríamos probar. ■

Nota 1.1 *Hemos visto en el ejemplo 1.10 un conjunto de vectores linealmente independientes que genera el espacio vectorial $\mathbb{K}[x]$ y cuya cardinalidad es infinito. Vimos entonces que dicho espacio tiene dimensión infinita. Observemos que no hablaremos de "bases infinitas.º "bases de espacios de dimensión infinitaz dichos conjuntos infinitos de generadores, no están en absoluto relacionados con combinaciones lineales infinitas.*

Teorema 1.4 *Si W es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V, cada subconjunto l.i. de W es finito y es parte de una base (finita) de W.*

Demos: Supongamos que S_0 es un subconjunto *l.i.* de W. Si S es también un subconjunto *l.i.* de V, y como V es de dimensión finita, S no contiene más de $\dim V$ vectores.
Extendemos S_0 a ser una base de W como sigue:
Si S_0 genera W, entonces S_0 es una base para W.
Si S_0 no genera, usamos el lema anterior para hallar un vector $v_1 \in W$ tal que el conjunto $S_1 = S_0 \cup \{v_1\}$ sea *l.i.* Si S_1 genera W, listo. Si no lo hace aplicamos nuevamente el lema para obtener un vector $v_2 \in W$ tal que $S_2 = S_1 \cup \{v_2\}$ sea *l.i.*.
Continuando de esta manera, entonces (en no más de $\dim V$ pasos) llegamos a obtener un conjunto $S_m = S_0 \cup \{v_1, \cdots, v_m\}$ que sea base de W. ■

Corolario 1.2 *Si W es un subespacio propio de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces W es de dimensión finita y* $\dim W < \dim V$.

Demos: Supongamos que W contiene un vector $u \neq 0$. Por el Teorema 1.4, hay una base de W que contiene a u que no contiene más de $\dim V$ vectores. Por lo tanto W es de dimensión finita, y $\dim W \leqslant \dim V$. Como W es un subespacio propio de V, existe un vector $v \in V$ que no está en W. Agregando v a cualquier base de W obtenemos un subconjunto *l.i.* de V. Luego $\dim W < \dim V$. ■

Corolario 1.3 *En un espacio vectorial de dimensión finita V cada conjunto de vectores l.i. no vacío es parte de una base.*

Corolario 1.4 *Sea A una matriz $n \times n$ sobre el campo $\mathbb{K}$, y supongamos que los vectores fila de A forman un conjunto l.i. de vectores de $\mathbb{K}^n$. Entonces A es inversible.*

Demos: Sean $v_1, \cdots, v_n$ los vectores fila de la matriz A, y supongamos que W es el subespacio generado de $\mathbb{K}^n$ generado por ellos. Como $v_1, \cdots, v_n$ son *l.i.* la dimensión de W es n. Por el Corolario 1.2, $W = \mathbb{K}^n$. Por lo tanto existen escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{K}$ tales que

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

donde $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es la base estándar de $\mathbb{K}^n$. Luego para la matriz B de entradas α_{ij} se tiene que

$$BA = I,$$

con lo cual B es la inversa de A y A es inversible. ■

Teorema 1.5 *Si W_1 y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es de dimensión finita y vale*

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2)$$

Demos: Por el Teorema 1.4 y sus corolarios $W_1 \cap W_2$ tiene una base finita $\{v_1, \cdots, v_r\}$ que es parte de una base $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m\}$ de W_1 y parte de una base $\{v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_n\}$ de W_2.
El subespacio $W_1 + W_2$ está generado por el conjunto de vectores $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n\}$ y este conjunto es *l.i.*. Para ver esto supongamos que

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k w_k = 0,$$

entonces

$$-\sum_{k=1}^{n} \gamma_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j,$$

lo que muestra que $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k w_k \in W_1$. Como $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k w_k$ también está en W_2 se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k w_k = \sum_{i=1}^{r} \delta_i v_i,$$

para ciertos escalares $\delta_1, \cdots, \delta_r$. Puesto que $\{v_1, \cdots, v_r, w_1, \cdots, w_n\}$ es *l.i.*, se tiene que $\gamma_k = 0, \forall k$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j u_j = 0,$$

y como $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m\}$ es *l.i.*, resulta $\alpha_i = 0, \forall i$ y $\beta_j = 0, \forall j$. Luego $\{v_1, \cdots, v_r, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_n\}$ es una base de $W_1 + W_2$.
Finalmente,

$$\dim W_1 + \dim W_2 = (r+m) + (r+m) = r + (r+m+n) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2),$$

como queríamos demostrar. ■

1.9. Coordenadas

Nuestro objetivo es poder hablar de coordenada en un espacio vectorial de dimensión finita. Para tal fin empecemos analizando la diferencia que existe entre una sucesión finita de vectores $v_1, v_2, \cdots, v_n$ y un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$.
Si consideramos el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ se supone que no hay dos elementos iguales en el conjunto ($\{v_1, v_2\} = \{v_1, v_1, v_2, v_2, v_2\}$), mientras que en una sucesión finita $v_1, v_2, \cdots, v_n$ todos los elementos podrían ser iguales. Si $v_k = v_j$ para algunos $k \neq j$, entonces la sucesión de vectores es *l.d.* pues $v_k + (-1)v_j = 0$. Luego si $v_1, v_2, \cdots, v_n$ es *l.i.*, necesariamente todos los vectores son distintos y en ese caso el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ tiene n elementos.

Los elementos de una sucesión se enumeran en un orden determinado, un conjunto es una colección de objetos sin ningún orden específico. Por ejemplo $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}$ pero $1, 2, 3$ no es lo mismo que $2, 1, 3$. El orden en una sucesión no afecta las cuestiones de independencia de los vectores, ya que $v_1, v_2, \cdots, v_n$ es *l.d.* si sólo si $\{v_n, v_{n-1}, \cdots, v_1\}$ es *l.d.*

Una de las características más útiles de una base $\mathcal{B}$ en un espacio de n-dimensional V es que permite introducir coordenadas, como sucede con el espacio $\mathbb{K}^n$. En dicho espacio, la base estándar es la formada por los versores coordenados e_j y eso nos permite escribir a cualquier vector $x = \mathbb{K}^n$ como $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ o más comúnmente como $x = (x_1, \cdots, x_n)$ donde sólo hacemos referencia a las coordenadas o coeficientes que le corresponde a cada elemento de la base estándar de $\mathbb{K}^n$ pensadas en un cierto orden. Esto es posible pues un vector $x \in \mathbb{K}^n$ tiene una única representación como combinación lineal de los vectores de la base.

Si ahora consideramos un espacio n-dimensional V cualquiera y una base para el mismo $\mathcal{B}$ lo más probable es que no tengamos un orden "natural"para los n vectores que están en $\mathcal{B}$, con lo cual nos será necesario imponer un orden para dichos vectores antes de poder definir "la coordenada ï-ésima"para algún vector $v \in V$ relativa a la base $\mathcal{B}$.

Definición 1.12 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, una* **base ordenada de V** *es una sucesión finita de vectores que es l.i. y genera V.*

Observación 1.2 *Si la sucesión $v_1, v_2, \cdots, v_n$ es una base ordenada de V, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base de V. La base ordenada es el conjunto de vectores junto con un orden específico. Por abuso de notación se dice que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ es una base ordenada.*

Nota 1.2 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V. Dado $v \in V$ existe una única n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de escalares tal que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

Es única puesto que por ser $\mathcal{B}$ una base sabemos que la misma es l.i. y genera todo el espacio, luego cada elemento de V puede escribirse de manera única como combinación lineal de los elementos de la base.
Llamemos a x_i la coordenada i-ésima de v respecto de la base ordenada $\mathcal{B}$.
Si $u = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$, entonces $v + u = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) v_i$ y surge que la coordenada i-ésima de $v + u$ en esta base ordenada es $(x_i + y_i)$.

Similarmente la coordenada i-ésima de cv es cx_i

Además notemos que cada n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ es la n-upla de coordenadas de algún vector en V respecto de la base $\mathcal{B}$, efectivamente $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$.

Resumiendo cada base ordenada de V establece una correspondencia uno a uno

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \to & \mathbb{K}^n \\ & v & \mapsto & (x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{array}$$

Esta aplicación verifica que $F(v+u) = F(v) + F(u)$ y $F(cv) = cF(v)$.

Observación 1.3 *Por conveniencia usaremos como coordenadas relativas a una base ordenada $\mathcal{B}$ de V en lugar de una n-upla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ un vector columna o matriz*

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para indicar la dependencia de esta matriz de coordenadas respecto de la base ordenada $\mathcal{B}$ se nota $[v]_{\mathcal{B}}$, esta notación será muy útil cuando estudiemos el cambio de bases de coordenadas.

Teorema 1.6 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el campo $\mathbb{K}$, y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases ordenadas de V. Entonces existe una única matriz $n \times n$ inversible $A \in \mathcal{M}[\mathbb{K}]$ tal que*

$$[v]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}'}, \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1}[v]_{\mathcal{B}},$$

para todo vector $v \in V$. Las columnas de la matriz A están dadas por

$$A_j = [v'_j]_{\mathcal{B}}$$

Demos: Sean $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ dos bases ordenadas de V. Luego hay únicos escalares a_{ij} tales que

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Sean $x'_1, \cdots, x'_n$ las coordenadas de un vector dado u en la base ordenada $\mathcal{B}'$. Entonces

$$\begin{aligned} u &= x'_1 v'_1 + \cdots + x'_n v'_n = \sum_{j=1}^{n} x'_j v'_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} x'_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (x'_j a_{ij}) v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij} \right) v_i \end{aligned}$$

Como las coordenadas $x_1, \cdots, x_n$ de u en la base ordenada $\mathcal{B}$ son únicas se deduce que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j a_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \tag{2}$$

Sea A la matriz $n \times n$ cuya entrada ij es el escalar a_{ij} y sean X y X' las matrices coordenadas del vector u en las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ respectivamente. Entonces podemos escribir (2) como

$$X = AX' \tag{3}$$

Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son conjuntos *l.i.*, $X = 0 \Leftrightarrow X' = 0$ luego considerando (3) resulta que los vectores columnas de A son *l.i.* y entonces resulta A inversible. Luego

$$X' = A^{-1}X.$$

Usando la notación presentada anteriormente se tiene:

$$[v]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}'}, \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = A[v]_{\mathcal{B}},$$

como queríamos probar. ■

Teorema 1.7 *Sea A una matriz inversible $n \times n$ sobre $\mathbb{K}$. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathcal{B}$ una base ordenada de V. Entonces existe una única base ordenada $\mathcal{B}'$ de V tal que*

$$i)[v]_{\mathcal{B}} = A[v]_{\mathcal{B}'}, \qquad ii)[v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1}[v]_{\mathcal{B}}/,$$

para cada vector $v \in V$.

Demos: Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Si $\mathcal{B}' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ es una base ordenada de V para la que vale $i)$ es claro que $v'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Así que sólo falta probar que los vectores v'_j definidos por estas ecuaciones forman una base.
Sea $Q = A^{-1}$, luego

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} q_{jk} v'_j &= \sum_{j=1}^{n} q_{jk} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i \\ &\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} q_{jk} a_{ij} v_i \\ &\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_{jk} \right) v_i \quad = v_k. \end{aligned}$$

Luego el subespacio generado por $\mathcal{B}' = \{v'_1, \cdots, v'_n\}$ contiene a $\mathcal{B}$ y por lo tanto es V. Así $\mathcal{B}'$ es una base de V y de su definición y el teorema anterior, surge tanto $i)$ como $ii)$ son válidos. ■

Ejemplo 1.12 *Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Si $\mathcal{B}$ es la base ordenada estándar de $\mathbb{K}^n$, la matriz de coordenadas del vector x en dicha base es*

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.13 *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, y sea θ un número real fijo. La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

es inversible, con inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Entonces para cada θ, el conjunto $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2\}$ donde $v_1 = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ y $v_2 = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ es una base de $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente esta base puede describirse como la que se obtiene al rotar la base canónica $\mathcal{B} = \{i, j\}$ un ángulo θ. Si $v = (x_1, x_2)$ luego

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta \\ x'_2 &= -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta \end{aligned}$$

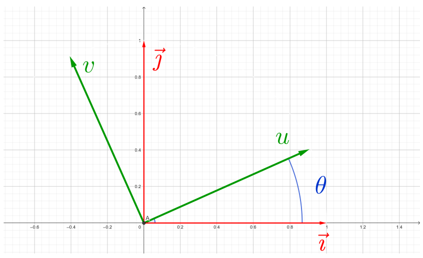

Figura 2: Matriz rotación

Índice alfabético

Referencias

[1] Apostol T., *Calculus*, Tomo 2 (2da edición, Reverté S.A., Barcelona. 1979.

[2] Axler S., *Linear Algebra done right*, (3era edición), Springer, 2015.

[3] Friedberg S.H., Insel A.J., Spence L.E., *Linear Algebra*, Prentice Hall, New York,1989.

[4] Hoffman K., Kunze R., *Linear algebra*, Prentice Hall, México 1971.

[5] Lankham I., Nachtergaele B., Schilling A., *Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, World Scientific, 2016.

[6] Lay D.C., *Álgebra lineal y sus aplicaciones*, Pearson Educación, México 2007.

[7] Strang G., *Linear algebra and its applications, 3rd ed*, Harcourt College Publishers. 1988.

[8] Strang G., *Introduction to linear algebra, 4th ed.*, Wellesley. Cambridge Press, 2009.