Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

2.6. El espacio dual

El **espacio dual** V^* de un F-ev dado V se define muy sencillamente: $V^* := L(V, F)$, es decir, es el conjunto de transformaciones lineales de V en F. Más aún, como hemos visto, es un F-ev. Sus elementos de llaman **covectores** o **1-formas**.

El concepto de covectores aparece en la física al asociar a un vector un escalar. Por ejemplo, dada una viga, si consideramos trozos de igual longitud, cada trozo de viga (vector) tiene un peso (escalar). Muchos ejemplos más podemos construir de la física observando que una integral de línea es una 1-forma. En efecto, podemos pensar en el trabajo al moverse en un campo conservativo: a cada cambio de posición (vector) se le asocia el trabajo involucrado (escalar). Si observamos que las integrales dobles, triples, múltiples se obtienen a partir de las de línea (1-formas), anidadas, vemos cómo las 1-formas modelizan muchos más aspectos físicos, geométricos y analíticos. Pero no sólo eso. Los escalares, vectores, las matrices, las 1-formas son ejemplos de **tensores**, y conforman la base del álgebra multilineal (donde, por ejemplo, hacen su aparición estructuras como los *arrays*, que podemos pensar como *multimatrices*). Para que nos hagamos una idea, un tensor será un objeto algebraico que es independiente del sistema de coordenadas. Así es como a las aplicaciones (además del interés matemático en sí) a áreas como la físicas se le agregan aplicaciones a la ciencia de la computación, y dentro de éstas, y bastante recientemente, al desarrollo de redes neuronales (entre otras!).

Definición 1 *V F-ev. Llamamos **espacio dual de** V al F-ev*

$$V^* = L(V, F) = \{\varphi : V \to F : \varphi \text{ transformación lineal}\}.$$

Si $dim(V) = n < \infty$, dadas B base de V y B' base de F (como F-ev, cuál podría ser, por ejemplo?), sabemos que $V^* = L(V, F) \simeq F^{n\times 1}$, luego $dim(V^*) = n = dim(V)$.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 1 *$V = \mathbb{R}^3$, $V^* = (\mathbb{R}^3)^* = \{\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : \varphi$ transformación lineal$\}$.*

Definimos para $i = 1, 2, 3$ $\varphi_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$. Así, $\varphi_i \in (\mathbb{R}^3)^*$ y más aún, $span\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} = (\mathbb{R}^3)^*$.

Proposición 1 *V F-ev, $dim(V) = n$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Ents. existe una única base $B^* = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de V^* tal que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Llamamos a B^* **base de V^* dual de** B, o simplemente **base dual**.*

Demostración: P.c. $i = 1, \dots, n$ definimos $\varphi_i : V \to F$ en la base B como $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, n$. Sabemos que cada φ_i está bien definida (o sea, $\varphi_i \in V^*$) y es la única que asume estos valores en la base. Por otro lado, puesto que $dim(V^*) = n$, veamos que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es li. En efecto, consideremos $a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n = 0$. Evaluando esta tl en los vectores de la base, sigue que $a_i = 0$ pc $i = 1, \dots, n$. Lueo B^* es base.

$\square$

Ejemplo 2

1. *En el ejemplo anterior se trataba de la base dual.*
2. *$V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$. Hallar B^*. Solución: $\varphi_1(x, y) = \frac{x+y}{2}$ y $\varphi_2(x, y) = \frac{x-y}{2}$.*

Dadas una base B de un F-ev V de $dim(V) = n$, y B^* su base dual, es fácil obtener las coordenadas de un vector de V en B y las de un vector de V^* en B^*. En efecto: sean $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$. Luego,

- $v \in V$, $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, $\alpha_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$. P.c. $1 \leq j \leq n$, $\varphi_j(v) = \alpha_j$. Luego, $[v]_B = (\varphi_1(v), \ldots, \varphi_n(v))$.
- $\varphi \in V^*$, $\varphi = \beta_1\varphi_1 + \cdots + \beta_n\varphi_n$, $\beta_i \in F$, $i = 1, \ldots, n$. P.c. $1 \leq j \leq n$, $\varphi(v_j) = \beta_j$. Luego, $[\varphi]_{B^*} = (\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$.

Ejemplo 3 *En el ejemplo anterior,* $v = (5, 7) \in \mathbb{R}^2$, *luego* $[v]_B = (6, -1)$ *y* $\varphi(x, y) = 5x + 3y \in (\mathbb{R}^3)^*$, $[\varphi]_{B^*} = (8, 2)$.

Dada una base B de V obtuvimos una única base B^* de V^*. También tenemos que si B_1 base de V^*, existe una única base B de V tq $B^* = B_1$:

Proposición 2 *V F-ev, $dim(V) = n$, V^* su dual. Sea $B_1 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base de V^*. Ents. existe única B base de V tq $B^* = B_1$.*

Demostración: Sean $B_2 = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de V y B_2^* su base dual. Tenemos que pc $i = 1, \ldots, n$, $[\varphi_i]_{B_2^*} = (\varphi_i(w_1), \ldots, \varphi_i(w_n))$. Luego consideramos la matriz cuyas filas son $[\varphi_1]_{B_2^*}, \ldots [\varphi_1]_{B_2^*}$ (que son vectores li de F^n):

$$M = \begin{pmatrix} \varphi_1(w_1) & \varphi_1(w_2) & \ldots & \varphi_1(w_n) \\ \varphi_2(w_1) & \varphi_2(w_2) & \ldots & \varphi_2(w_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(w_1) & \varphi_n(w_2) & \ldots & \varphi_n(w_n) \end{pmatrix},$$

y sea $A = M^{-1}$. Así,

$$\delta_{ij} = (I_n)_{ij} = (MA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_i(w_k)A_{kj} = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} A_{kj}w_k\right).$$

Definimos entonces $v_j := \sum\limits_{k=1}^{n} A_{kj}w_k$ de modo que $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$. Veamos que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conj. li: si $\alpha_1 v_a + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ entonces

$$0 = \varphi_i(0) = \alpha_1\varphi_i(v_1) + \cdots + \alpha_n\varphi_i(v_n) = \alpha_i.$$

Luego $B := \{v_1, \ldots, v_n\}$ es la base buscada.

La unicidad sigue de lo siguiente: si $B' = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es otra tal base (es decir, $B^* = B'^* = B_1$). Entonces $[u_i]_B = (\varphi_1(u_i), \ldots, \varphi_1(u_i)) = e_i = [u_i]_{B'}$.

□

Ejemplo 4 *$V = \mathbb{R}_2[x]$, $V^* = (\mathbb{R}_2[x])^* = \{\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R} : \varphi \ tl\}$. Definimos $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \in (\mathbb{R}_2[x])^*$ según: $\epsilon_0(p(x)) = p(0)$, $\epsilon_1(p(x)) = p(1)$ y $\epsilon_2(p(x)) = p(2)$. Veamos que $B_1 = \{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ es base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$. Como $dim(\mathbb{R}_2[x])^* = 3$, veamos que es li. Consideremos $\alpha_0\epsilon_0 + \alpha_1\epsilon_1 + \alpha_2\epsilon_2 = 0$. Entonces p.t. $p(x) \in \mathbb{R}_2[x]$, $\alpha_0\epsilon_0(p(x)) + \alpha_1\epsilon_1(p(x)) + \alpha_2\epsilon_2(p(x)) = 0$, de donde $\alpha_0 p(0) + \alpha_1 p(1) + \alpha_2 p(2) = 0$. Si $p(x) = (x-1)(x-2)$ sigue que $\alpha_0 = 0$, si $p(x) = x(x-1)$ sigue que $\alpha_1 = 0$ y si $p(x) = x(x-2)$ sigue que $\alpha_2 = 0$. Luego B_1 es base. Buscamos B base de $\mathbb{R}_2[x]$ tq $B^* = B$. Es decir, buscamos $B = \{p_0, p_1, p_2\}$ tq $\epsilon_0(p_0) = 1$, $\epsilon_1(p_0) = 1$ y $\epsilon_2(p_0) = 1$, ... Luego $p_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{2}$ y análogamente $p_1(x) = -x(x-1)$,$p_2(x) = \frac{x(x-1)}{2}$.*

Estudiaremos ahora el *anulador* o *aniquilador* de un sev:

Definición 2 *V F-ev, $U \subset V$ sev. El* ***anulador*** *de U es el sev del dual V^* definido por*

$$U^0 := \{\varphi \in V^* : \varphi(u) = 0, \forall\, u \in U\} = \{\varphi \in V^* : U \subset ker(\varphi)\}.$$

Desafío 1 *Probar que U^* es, en efecto, un sev de V^*.*

Para dimensión finita, tenemos el siguiente resultado en cuanto a dimensiones:

Proposición 3 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev. Entonces*

$$dim(U) + dim(U^0) = n = dim(V).$$

Demostración: Consideremos $\{v_1, \ldots, v_r\}$ una base de U. Completamos a una base de V:

$B = \{v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n\}$ y sea $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ base dual. Entonces para $1 \leq j \leq r$ y $r+1 \leq i \leq n$, $\varphi_i(v_j) = 0$. Luego, $\varphi_i \in U^0$.

Además, $\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\} \subset U^*$ es un conjunto li, veamos que es generador. En efecto, si $\varphi \in U^0$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi_i$. Como para cada $1 \leq j \leq n$, $\varphi(v_j) = \beta_j$ y puesto que $\varphi \in U^0$ y $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es base de U, sigue que $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$. Luego $\varphi \in span\{\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n\}$, luego es base de U^0.

Sigue que $dim(U) + dim(U^0) = n = dim(V)$.

□

Ejemplo 5 *$U = span\{(1,1,1),(1,2,1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Para hallar una base de U^0, completamos a una base de V: $B = \{(1,1,1),(1,2,1),(1,0,0)\}$ y consideramos su base dual $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Luego, $\{\varphi_3\}$ es una base de U^0. EJERCICIO: $\varphi_3(x,y,z) = x - z$.*

En la siguiente proposición vemos cómo recuperamos un sev a partir de su anulador:

Proposición 4 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev. Entonces*

$$U = \{v \in V : \varphi(v) = 0, \ \forall\, \varphi \in U^0\}.$$

Demostración: Sea $W = \{v \in V : \varphi(v) = 0, \ \forall\, \varphi \in U^0\}$. Veamos que $U = W$.

$\subset$) $v \in U$. Luego $\varphi \in U^0$, luego $\varphi(v) = 0$. Como es para todo $\varphi \in U^0$, sigue que $v \in W$.

$\supset$) $v \in W$. Supongamos que $v \notin U$ (hence $v \neq 0$). Sea $\{v_1, \ldots, v_r\}$ base de U. Luego, $\{v_1, \ldots, v_r, v\}$ es un conjunto li. Completamos a una base de V: $B = \{v_1, \ldots, v_r, v, v_{r+2}, \ldots, v_n\}$. Como $\varphi_{r+1}(v_1) = \cdots = \varphi_{r+1}(v_r) = 0$, de donde $\varphi_{r+1} \in U^0$. Y como $v \in W$ sigue que $\varphi_{r+1}(v) = 0$, pero por construcción $\varphi_{r+1}(v) = 1$, contradicción. Luego $v \in U$ de donde $W \subset U$ y por lo tanto $U = W$.

□

Ejemplo 6 *En el ejemplo anterior, $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \lambda\varphi_3(x,y,z) = 0, \lambda \in F\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$.*

Corolario 1 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U \subset V$ sev, $B_1 = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$ base de U^0. Entonces*

$$U = \{v \in V : \varphi_1(v) = 0, \ldots \varphi_r(v) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{r} ker(\varphi_i).$$

Finalmente,

Proposición 5 *V F-ev, $dim(V) = n$, $U, W \subset V$ sev. Ents.*

- $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$,
- $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

Demostración:

- $\varphi \in V^*$.

$$\begin{aligned} \varphi \in (U+W)^0 &\iff \varphi(u+w) = 0 \ \forall u \in U, \forall w \in W \\ &\iff \varphi(u) = 0 \ \forall u \in U, \varphi(w) = 0, \forall w \in W \qquad \text{(EJERCICIO)} \\ &\iff \varphi \in U^0 \cap W^0. \end{aligned}$$

- Si $\varphi \in U^0 + W^0$, $\varphi = \varphi_U + \varphi_W$ con $\varphi_U \in U^0$ y $\varphi_W \in W^0$. Luego p.c. $v \in U \cap W$, $\varphi(v) = \varphi_U(v) + \varphi_W(v) = 0 + 0 = 0$, de donde $\varphi \in (U \cap W)^0$. Por lo tanto $U^0 + W^0 \subset (U \cap W)^0$. Tenemos por otro lado que

$$\begin{aligned} dim(U^0 + W^0) =& dim(U^0) + dim(W^0) - dim(U^0 \cap W^0) \\ =& dim(U^0) + dim(W^0) - dim(U + W)^0 \\ =& n - dim(U) + n - dim(W) - (n - dim(U + W)) \\ =& n - (dim(U) + dim(W) - dim(U + W)) \\ =& n - dim(U \cap W) = dim(U \cap W)^0, \end{aligned}$$

luego $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

$\square$

Terminamos la sección con el concepto de aplicación dual, o pullback, que aparece en la geometría y el álgebra multilineal.

Definición 3 *$T \in L(V, W)$ la* ***aplicación dual*** *es la aplicación $T^* \in L(W^*, V^*)$ definida para $\varphi \in W^*$ por $T^*(\varphi) = \varphi \circ T$.*

La aplicación dual T^* está bien definida, es decir, es una tl.

Ejemplo 7 *$D : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$. Sea $\varphi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definida por $\varphi(p(x)) = p(3)$. Luego, $D^*(p(x))\varphi = \varphi \circ D(p(x)) = \varphi(p'(x)) = p'(3)$. Sea $\psi \in (\mathbb{R}[x])^*$ definida por $\psi(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$. Luego, $D^*(p(x))\psi = \psi \circ D(p(x)) = \psi(p'(x)) = \int_0^1 p'(x)dx = p(1) - p(0)$.*

Desafío 2 ***El álgebra de aplicaciones duales.*** *Probar las siguientes proposiciones:*

- *$S, T \in L(V, W)$, $\alpha, \beta \in F$, entonces $(\alpha S + \beta T)^* = \alpha S^* + \beta T^*$.*
- *$T \in L(U, V)$, $S \in L(V, W)$, entonces $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.*