Probabilidad y Estadística

Unidad 4: Variables aleatorias discretas

Lic. Maite San Martín

Abril 2025

Variable aleatoria
Introducción

Hasta ahora, al describir el espacio muestral de un experimento, consideramos casos de distinto tipo: desde

$S = \{Cara, Cruz\}$ para ε: tirar una moneda y observar la cara superior, ó

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ para ε: tirar un dado y observar la cara superior

así como también podríamos haber considerado casos vinculados a experimentos del tipo ε: observar la temperatura de un paciente durante un período de 24 horas, para el cual podríamos definir $S = \{x/32°C \leq X \leq 42°C\}$ y mantener un registro de la curva trazada por el termómetro.

Variable aleatoria
Introducción

Sin embargo, hay situaciones en las que podría interesarnos medir algo y registrarlo como un número, incluso si los resultados del experimento no son numéricos. Por ejemplo, podríamos asignar el valor uno a los artículos defectuosos y el valor cero a los no defectuosos. De la misma forma, podríamos anotar la temperatura máxima alcanzada por el paciente ese día, o la mínima, o el promedio de las temperaturas máxima y mínima, o bien podríamos tirar un dado dos veces y anotar el valor de la suma de las caras superiores.

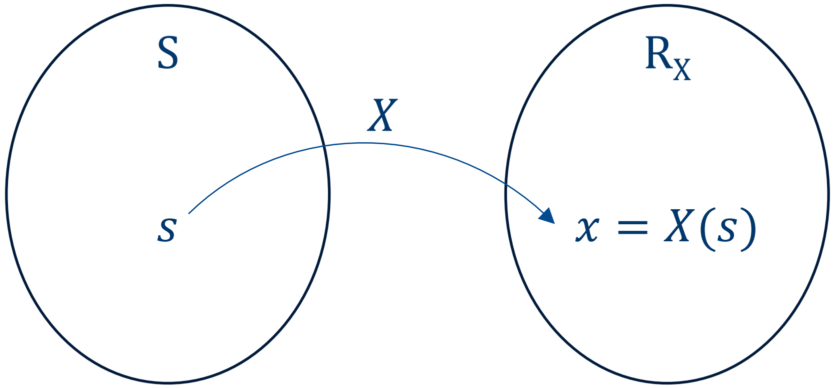
Estos son ejemplos de una clase muy general de problemas: situaciones experimentales en las que deseamos asignar un número real x a cada uno de los elementos s del espacio muestral S. Esto es, $x = X(s)$ es el valor de una función X que va del espacio muestral a los números reales. Teniendo esto presente, hagamos la siguiente definición formal.

Variable aleatoria
Definición

Sea un experimento ε y S el espacio muestral asociado con el experimento. Una función X que asigna a cada uno de los elementos $s \in S$ un número real $x = X(s)$ se llama variable aleatoria.

Es importante recalcar que a cada $s \in S$ le corresponde exactamente un valor $X(s)$; si bien distintos valores de s pueden dar lugar a un mismo valor $X(s)$, esto a la inversa no se cumple.

S: espacio muestral de ε



R_X: valores posibles para X

Variable aleatoria

Ejemplo

Es importante recalcar que a cada $s \in S$ le corresponde exactamente un valor $X(s)$; si bien distintos valores de s pueden dar lugar a un mismo valor $X(s)$, esto a la inversa no se cumple.

Supongamos que lanzamos dos monedas al aire. Consideremos el espacio muestral asociado con este experimento si nuestro objetivo está en observar las caras superiores de las monedas:

$$S = \{CC, CS, SC, SS\}$$

Luego, podemos definir la variable aleatoria X: $cantidad\ de\ caras\ observadas$, y notamos que:

$$X(CC) = 2 \qquad X(CS) = 1 \qquad X(SC) = 1 \qquad X(SS) = 0$$

Variable aleatoria
Observación

En algunos cabos el resultado s del espacio muestral es ya la característica numérica que queremos anotar; es decir, hay casos en los que $X(s) = s$, la función identidad. Sin embargo, en la mayoría de los casos no nos esforzaremos en identificar la forma funcional X sino en los distintos valores que puede tomar esa variable.

El espacio R_X, el conjunto de todos los valores posibles de X, se suele llamar “el recorrido de X”. En cierto sentido, podemos considerar a R_X como otro espacio muestral. El espacio muestral original S corresponde a los resultados del experimento ε, que pueden ser no numéricos, mientras que R_X es el espacio muestral asociado con la variable aleatoria X, que representa la característica numérica que puede ser de interés.

Variable aleatoria
Ejemplo

Supongamos que tiramos 3 monedas sobre una mesa. Si nuestro experimento consiste en tirar las tres monedas y registrar la cara superior, entonces el espacio muestral será

$$S = \{(M_1, M_2, M_3) \ / \ M_i \in \{C, S\}, i = 1,2,3\}$$

Luego, podríamos definir la variable aleatoria X: cantidad de caras tal que

s	$x = X(s)$
S,S,S	0
C,S,S	1
S,C,S	1
S,S,C	1

s	$x = X(s)$
C,C,S	2
C,S,C	2
S,C,C	2
C,C,C	3

$$R_X = \{0,1,2,3\}$$

Variable aleatoria
Ejemplo

Sin embargo, si el experimento consistiese en tirar las tres monedas y contar la cantidad de caras observadas entonces tendríamos

$$S = \{0,1,2,3\}$$

y los valores de la variable aleatoria X se obtendrían haciendo $x = X(s) = s$ y, al igual que antes, $R_X = \{0,1,2,3\}$.

Cabe destacar que, en el primer caso, la cuenta del número de caras se realiza en una etapa posterior a la experiencia aleatoria, siendo un paso puramente determinístico, mientras que en el segundo caso la experiencia aleatoria ya incluye la tirada de caras y no las tuplas ordenadas. Cualquiera sea el enfoque, en general vamos a centrarnos en la variable aleatoria X.

Variable aleatoria
Observación

Al referirnos a variables aleatorias vamos a usar siempre letras mayúsculas, como X, Y, Z. A su vez, si hablamos de un valor observado para una variable aleatoria vamos a usar letras en minúscula (x, y, z). Esta es una distinción muy importante, ¿por qué?

Si, por ejemplo, habláramos de elegir una persona al azar de una población y medir su altura (en cm), podríamos pensar en una variable aleatoria X: altura de la persona (en cm). Luego, podríamos hacernos preguntas sobre X tales como ¿cuál es la $P(X \geq 180)$? Sin embargo, una vez que seleccionamos a una persona y medimos su altura, obtenemos un valor específico de X, por ejemplo $x = 163\ cm$. En este caso, no tendría demasiado sentido preguntarnos ¿cuál es la $P(x \geq 180)$?, ya que x es o no es ≥ 180.

Variable aleatoria
Definición

Así como en su momento nos interesamos por los sucesos asociados con el espacio muestral S, también aquí necesitamos pensar en sucesos con respecto a la variable aleatoria X, es decir, subconjuntos del recorrido R_X. Y tendría sentido pensar en que existe alguna relación entre sucesos definidos en el entorno de S y sucesos definidos en el entorno de R_X, ¿no?

Sea ε un experimento y S su espacio muestral. Sea X una variable aleatoria definida en S y sea R_X su recorrido. Sea B un suceso respecto a R_X, por lo que $B \subset R_X$. Supongamos que se define el suceso A como

$$A = \{s \in S \;/\; X(s) \in B\}$$

Luego, diremos que los sucesos A y B son equivalentes.

Variable aleatoria
Definición

Sea B un suceso en el recorrido R_X. Definimos entonces $P(B)$ como

$$P(B) = P(A), \text{ donde } A = \{s \in S \ / \ X(s) \in B\}$$

Como los sucesos A y B son equivalentes, entonces la ocurrencia de uno implica la ocurrencia del otro y viceversa. En este sentido, sería lógico pensar que es tan probable que ocurra uno como el otro. En la unidad 3 vimos cómo asignar probabilidades a sucesos definidos sobre S, por lo que a partir de ello vamos a poder asignar probabilidades a sucesos definidos sobre R_X.

Variable aleatoria
Ejemplo

Volvamos al experimento ε que consistía en tirar 3 monedas y observar caras superiores. Ya definimos $S = \{(M_1, M_2, M_3)\ /\ M_i \in \{C, S\}, i = 1,2,3\}$

a) ¿Cuál $\#S$, la cardinalidad de S?

b) ¿Son equiprobables los elementos de S?

c) ¿Cuál es la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos?

Supongamos que definimos la variable aleatoria X: cantidad de caras en las 3 monedas. También definimos $R_X = \{0,1,2,3\}$

d) ¿Cuál es $P(X = x)$ para todos los x $\in R_X$?

e) Ahora definimos Z: sale al menos una cara en las 3 monedas. Determinar R_Z y $P(Z = z)\ \ \forall z \in R_Z$.

Variable aleatoria discreta
Definición

Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X (es decir, R_X) es finito o infinito numerable vamos a decir que X es una variable aleatoria discreta. Dicho de otro modo, X es variable aleatoria discreta si los valores que puede tomar pueden listarse como $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

A su vez, a cada posible resultado x_i vamos a asociar un número $\mathrm{p}(x_i) = P(X = x_i)$, llamado probabilidad de x_i tales que:

(a) $\mathrm{p}(x_i) \geq 0 \ \forall i$ (b) $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{p}(x_i) = 1$

Esta función p se llama función de probabilidad (puntual) de la variable aleatoria X, y la colección de pares $\left(x_i, \mathrm{p}(x_i)\right) \forall i$ se la llama distribución de probabilidad de X.

Variable aleatoria discreta
Definición

Volvamos a considerar a B, un suceso definido en R_X. Si B es un suceso asociado con la variable aleatoria X, entonces $B \subset R_X$. Específicamente, supongamos que $B = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots\}$. Entonces:

$$P(B) = P(s \;\; X(s) \in B) = P\big(s \;\; X(s) = x_{ij}, j = 1,2, \dots\big) = \sum_{j=1}^{\infty} P(x_{ij})$$

Es decir, la probabilidad de un suceso B es igual a la suma de las probabilidades de los resultados individuales asociados a B.

Variable aleatoria
Ejemplo

Consideremos el experimento de arrojar dos dados y definamos la variable aleatoria X: suma de los valores de las dos caras visibles.

a) Detallar R_X.

b) Escribir la distribución de frecuencias de X, es decir la lista de valores posibles de X y sus respectivas probabilidades.

c) Representar dicha distribución a través de un gráfico de bastones.

d) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 7 u 11 en la próxima tirada?

e) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de al menos 3 en la próxima tirada?

f) ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma de a lo sumo 5 en la próxima tirada?

Variable aleatoria discreta
Definición

Si X es una variable aleatoria discreta, entonces es posible definir F, la función de distribución acumulada de X como

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum p(x_i) \;\; con \; x_i \leq x$$

El tratamiento de la función de distribución acumulada para una variable aleatoria X puede pensarse análogo al de las frecuencias acumuladas en las tablas de distribución de frecuencia que vimos en la unidad 2. De hecho, podríamos pensar que en la unidad 2 trabajamos con estimaciones (obtenidas a través de una muestra) de la función de distribución acumulada de las variables aleatorias trabajadas.

Variable aleatoria
Ejemplo

Consideremos la variable aleatoria X que puede tomar los valores 0, 1 y 2 con probabilidades 1/3, 1/6 y 1/2 respectivamente. Entonces:

a) Definir la función de probabilidad puntual de X.

b) Definir la función de densidad acumulada de X.

c) Graficar $F(x)$.

Variable aleatoria
Observaciones

- Si X es una variable aleatoria discreta con un número finito de valores posibles, el gráfico de la $F(x)$ se formará de trazos horizontales (se llama función escalonada). La función F es continua excepto para los valores posibles de X $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, y en el valor x_i el gráfico tendrá un salto de magnitud $\mathrm{p}(x_i) = P(X = x_i)$.

- La función $F(x)$ es no decreciente. Es decir, para $x_1 \leq x_2$ tendremos $\mathrm{F}(x_1) \leq F(x_2)$

- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. Esto también se puede indicar como $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$

- Para una variable aleatoria discreta X, $p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Valores característicos de v.a.
Definición: esperanza

Con cada distribución de probabilidades se puede asociar ciertos parámetros que dan información valiosa acerca de la distribución.

Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$ y sea $\mathrm{p}(x_i) = P(X = x_i), \mathrm{i} = 1,2, \ldots, \mathrm{n}, \ldots$. El valor esperado de X (esperanza matemática de X) se define como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \mathrm{p}(x_i)$$

siempre y cuando la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \mathrm{p}(x_i)$ converja absolutamente en el caso de que R_X sea infinito numerable.

La $E(X)$ es llamada esperanza de X, valor esperado de X o valor promedio de X.

Valores característicos de v.a.

Definición: esperanza

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \, \mathrm{p}(x_i)$$

Si X sólo puede tomar una cantidad finita de valores, la expresión anterior se transforma entonces en $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathrm{p}(x_i)$. Es posible notar que $E(X)$ es un promedio ponderado: es un promedio de los valores x_i que puede tomar la variable ponderado por la probabilidad de observar cada valor $\mathrm{p}(x_i)$. Aún más, si todos los valores que puede tomar X son equiprobables, entonces $E(X) = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} x_i$, la media aritmética de los n valores posibles x_i.

Valores característicos de v.a.
Propiedades de la esperanza

- Si $X = c$, donde c es una constante, entonces $E(X) = E(c) = c$
- Si c es una constante y X es una variable aleatoria, entonces $E(cX) = cE(X)$
- Sean X e Y dos variables aleatorias cualesquiera, $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- La $E(X)$ no necesariamente es un valor perteneciente al R_X

Valores característicos de v.a.

Ejemplo: esperanza

Se lanza un dado regular y defino las siguientes variables aleatorias:

- X: número que queda en la cara superior
- Y: doble del número que queda en la cara superior
- Z: suma de las caras superiores de los dados al realizar dos tiradas.

a) Las variables Y y Z ¿simbolizan lo mismo?

b) Calcular $E(X)$, $E(Y)$ y $E(Z)$.

Valores característicos de v.a.

Definición: variancia

Sea X una variable aleatoria. Vamos a definir la variancia de X como

$$\sigma^2 = V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

En vez de trabajar con la variancia, que tal como vimos en la unidad 2 se encuentra expresada en unidades al cuadrado, deseamos trabajar con el desvío estándar, podemos obtener la raíz cuadrada positiva de la variancia de X: $\sigma_X = +\sqrt{V(X)}$

Propiedades

- Si c es una constante, entonces $V(X + c) = V(X)$ y $V(cX) = c^2V(X)$
- Si X e Y son dos variables aleatorias *independientes*, entonces $\mathrm{V}(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Valores característicos de v.a.
Ejemplo: variancia

Si se lanza un dado regular y se define la variable aleatoria X: número que queda en la cara superior. ¿Cuál es $V(X)$?

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 15{,}1\hat{6} - 3{,}5^2 \cong 2{,}92$$

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{6} x^2\, p(x^2)$$
$$= \sum_{x=1}^{6} x^2\, p(x)$$
$$= 1^2 * \frac{1}{6} + 2^2 * \frac{1}{6} + \cdots 6^2 * \frac{1}{6} = 15{,}17$$

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x\, p(x)$$
$$= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$$

Variable aleatoria discreta
Ejemplo

Supongamos el experimento ε: tirar dos dados regulares y registrar las caras superiores.

Tenemos:

- $S = \{(s_1, s_2) \ / \ s_1, s_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$
- $P(s_1, s_2) = \frac{1}{36}, \ \forall \ s_1, s_2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Supongamos ahora que definimos X: suma de las caras de los dos dados, con $R_X = \{\overline{2, 12}\}$.

a) Calcula la función de probabilidad de X en términos teóricos.

b) Calcular $E(X)$ y $V(X)$.

c) Aproximar los ítems a) y b) mediante la simulación de 100.000 tiradas de dos dados.

Variables aleatorias discretas
Algunos modelos conocidos

Hasta ahora trabajamos de forma genérica con cualquier variable aleatoria discreta para definir nociones como la función de probabilidad puntual, la de distribución, o parámetros como la esperanza y la variancia.

Ahora bien, hay ciertos modelos aleatorios que se presentan con frecuencia en fenómenos observables y que merecen especial atención. Por más extraño que parezca, ciertos modelos matemáticos relativamente simples son capaces de describir un gran número de fenómenos.

Variables aleatorias discretas
Distribución binomial: ejemplo

Supongamos que los artículos que salen de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) o no defectuosos (N). Supongamos que se eligen al azar tres artículos de la producción de un día y se clasifican de acuerdo con este esquema. El espacio muestral para este experimento sería

$$S = \{DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN\}$$

Supongamos que $P(D) = 0{,}2$ y por lo tanto $P(N) = 0{,}8$, y que estas probabilidades no varían entre artículos (orden de extracción), por lo que la clasificación de cualquier artículo como D o N es independiente de la clasificación de cualquier otro artículo.

Variables aleatorias discretas
Distribución binomial: ejemplo

Las probabilidades asociadas a cada elemento de S serán respectivamente:

$$0{,}2^3 \;\; ; \;\; 0{,}2^2\,0{,}8 \;\; ; \;\; 0{,}2^2\,0{,}8 \;\; ; \;\; 0{,}2^2\,0{,}8 \;\; ; \;\; 0{,}2\,0{,}8^2 \;\; ; \;\; 0{,}2\,0{,}8^2 \;\; ; \;\; 0{,}2\,0{,}8^2 \;\; ; \;\; 0{,}8^3$$

Dado que nuestro interés en general no se enfoca hacia los resultados individuales de S, sino que sería más útil saber cuántos artículos fueron defectuosos (sin considerar el orden en que ocurrieron), podríamos definir la variable aleatoria X: cantidad de artículos defectuosos, con $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$.

Luego, para cada valor posible de X podríamos hacer, por ejemplo:

$$p_X(2) = P(X = 2) = P(DDN \vee DND \vee NDD) = P(DDN) + P(DND) + P(NDD)$$

$$p_X(2) = P(X = 2) = 3(0{,}2)^2(0{,}8)$$

Variables aleatorias discretas

Distribución binomial y Bernoulli: definición

Sea ε un experimento y A un suceso asociado con ε. Supongamos que $P(A) = p$ y que $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Consideremos n repeticiones independientes de ε.

El espacio muestral S consistirá en todas las sucesiones posibles $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ donde cada a_i es A o $\bar{A}$ según si se presenta el suceso A o no en la i-ésima repetición de ε. Supongamos a su vez que $P(A) = p$ para todas las repeticiones.

Definimos entonces la variable aleatoria X como la cantidad de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones de ε. Entonces X es una variable aleatoria binomial con parámetros n y p (también podemos decir que X tiene/sigue una distribución binomial) y lo simbolizamos como $X \sim Bi(n, p)$.

Variables aleatorias discretas

Distribución binomial y Bernoulli: definición

Bajo estas condiciones, X: cantidad de veces que ocurre el suceso A en las n repeticiones de ε es tal que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots n$$

Un caso particular de esta distribución es cuando $n = 1$, es decir cuando se realiza una única repetición de ε. Si definiéramos a X: resultado de ε, entonces estaríamos ante una variable aleatoria Bernoulli, y la simbolizamos $X \sim Be(p)$.

Variables aleatorias discretas

Distribución binomial y Bernoulli: ejemplo

Supongamos que el próximo examen de Probabilidad y Estadística consiste de 4 preguntas de elección múltiple. Cada pregunta tiene tres posibles respuestas.

Supongamos que un estudiante va a adivinar cada una de las preguntas, eligiendo aleatoriamente una de las 3 respuestas posibles. Supongamos que la elección de alguna opción en una pregunta es independiente de la elección en el resto de las preguntas.

a) ¿Cómo podríamos definir a X pensando en el modelo binomial?

b) ¿Cuál es la distribución de probabilidad de X?

Variables aleatorias discretas
Distribución binomial y Bernoulli: valores característicos

Si $X \sim Bi(n, p)$, es decir X es una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p (probabilidad de éxito) basada en n repeticiones de un experimento, entonces:

- $E(X) = np$
- $\mathrm{V}(X) = np(1 - p)$

Por extensión, si $X \sim Be(p)$ entonces $E(X) = p$ y $\mathrm{V}(X) = p(1 - p)$.

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: definición

Sea X una variable aleatoria que puede tomar los valores $0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Si

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2 \dots, n, \dots$$

entonces decimos que X sigue una distribución Poisson con parámetro $\lambda > 0$ y simbolizamos $\mathrm{X} \sim Po(\lambda)$.

Además, cumple que $\mathrm{E(X)} = \lambda$ y que $\mathrm{V(X)} = \lambda$.

Esta distribución suele ser utilizada para modelar las ocurrencias de algún evento en un periodo concreto, normalmente de tiempo o espacio. Particularmente se utiliza para modelar sucesos de ocurrencia poco probable.

Variables aleatorias discretas
Distribución Poisson: ejemplo

Ejercicio 12, Práctica 4

El número de clientes que entran en un negocio en un intervalo de tiempo de 2 min es una variable aleatoria Poisson con esperanza igual a 1.

a) Calcule la probabilidad de que en un período de 2 minutos no ingresen clientes al negocio.

b) Se observa el número de clientes que ingresan al negocio durante 15 intervalos de 2 minutos. Calcule la probabilidad de que en a lo sumo 5 de esos intervalos no se registren ingresos.

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: aproximación de la binomial

Ejemplo: Supongamos que las llamadas telefónicas llegan a una gran central telefónica y que en un período de tres horas (180 minutos) se han recibido un total de 270 llamadas, o sea 1.5 llamadas por minuto. Supongamos que, con base en la evidencia anterior, queremos calcular la probabilidad de recibir 0, 1, 2, etc. llamadas durante los próximos tres minutos.

Por un lado, podríamos considerar que en cualquier instante es tan probable que ocurra una llamada telefónica como en cualquier otro instante. Es decir, la probabilidad permanece constante en un intervalo de tiempo.

¿Podemos adaptar este problema para usar una distribución binomial?

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: aproximación de la binomial

Necesitamos identificar n y p.

¿Qué pasa si partimos los 180 segundos en 9 subintervalos de 20 segundos? Podríamos considerar entonces cada uno de esos nueve intervalos como un experimento de Bernoulli durante el cual observamos una llamada (éxito) o ninguna llamada (fracaso) con $P(\text{é}xito) = (1{,}5)\frac{20}{60} = 0{,}5$.

Sin embargo, podría ocurrir que en un intervalo de 20 segundos se reciba más de una llamada, y eso viola la definición de la variable Bernoulli, que sólo considera fenómenos dicotómicos (en este caso, desearíamos "se recibe una llamada" o "no se recibe una llamada").

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: aproximación de la binomial

Podemos entonces considerar intervalos más pequeños. Por ejemplo, 18 intervalos de 10 segundos, para los cuales $P(éxito) = (1{,}5)\frac{10}{60} = 0{,}25$. O podríamos considerar 180 intervalos de 1 segundo, para los que $P(éxito) = (1{,}5)\frac{1}{60} = 0{,}025$.

Vemos que a medida que aumentamos la cantidad de intervalos (n) la probabilidad de ocurrencia del evento bajo estudio disminuye (p), pero de forma tal que np se mantiene constante.

Tanto de forma analítica (Meyer, sección 8.2) como de manera empírica es posible verificar que bajo estas condiciones las probabilidades bajo un modelo binomial pueden aproximarse mediante un modelo Poisson.

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: aproximación de la binomial

Sea X una variable aleatoria distribuida binomialmente con parámetro p basada en n repeticiones de ε. Para esta variable X se tiene que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Si se cuenta con muchas repeticiones del experimento ($n \to \infty$) y la probabilidad de ocurrencia del evento bajo estudio es muy baja ($p \to 0$) entonces

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad donde\ \lambda = np$$

Variables aleatorias discretas

Distribución Poisson: aproximación de la binomial

Ejemplo

En una concurrida intersección de la ciudad, la probabilidad p de que un auto tenga un accidente es muy baja, digamos $p = 0{,}0001$. Sin embargo, durante cierta parte del día, entre las 16hs y las 18hs, por esta intersección pasa un gran número de autos, digamos 1000. Bajo dichas condiciones, ¿cuál es la probabilidad de que dos o más accidentes ocurran durante ese período?

Respuesta: 0,0045

Variables aleatorias discretas

Distribución Geométrica: definición

Supongamos que efectuamos un experimento ε y estamos interesados sólo en la ocurrencia o no ocurrencia de algún suceso A. Supongamos como en el caso de la distribución binomial, que realizamos repetidamente ε, que las repeticiones son independientes, y que en cada una de las repeticiones $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ permanecen constantes.

Supongamos ahora que repetimos el experimento hasta que A ocurre por primera vez. Aquí nos separamos de las hipótesis que conducen a la distribución binomial. Allí el número de repeticiones era n, predeterminado, mientras que aquí es una variable aleatoria.

Variables aleatorias discretas

Distribución Geométrica: definición

En este contexto, definamos la variable aleatoria X como el número de repeticiones necesarias de ε hasta que ocurra A por primera vez. Así, X puede tomar los valores 1, 2, …

Puesto que $X = k$ si y sólo si las primeras $(k - 1)$ repeticiones de ε resultan en $\bar{A}$ mientras que la k-ésima resulta en A, tenemos entonces que

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

En este caso, la variable X tiene una distribución geométrica. Simbolizamos $X \sim Ge(p)$

Para una variable de este tipo, $E(X) = \frac{1}{p}$ y $\mathrm{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Variables aleatorias discretas
Distribución Geométrica: ejemplo

Si la probabilidad de que cierto examen dé una reacción "positiva" es igual a 0.4, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran menos de 5 reacciones "negativas" antes de la primera positiva?

X: cantidad de pruebas realizadas hasta que se obtiene la primera reacción positiva

$X \sim Ge(0{,}4)$ por lo que $P(X = k) = (0{,}6)^{k-1}(0{,}4)$

$$P(X \leq 5) = \sum_{x=1}^{5} p(x) = \sum_{x=1}^{5} (0{,}6)^{k-1}(0{,}4)$$

Variables aleatorias discretas

Distribución de Pascal: definición

Una generalización obvia de la distribución geométrica aparece si hacemos un pequeño cambio a la consigna.

Supongamos que un experimento se continúa hasta que un suceso particular A ocurre por r-ésima vez. Supongamos que $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ en cada una de las repeticiones.

Si definimos la variable aleatoria Y: número de repeticiones necesarias a fin que A ocurra exactamente r veces, es evidente que si $r = 1$, $Y \sim Ge(p)$. Pero, ¿cuál es la distribución de probabilidades de Y si $r > 1$?

Variables aleatorias discretas
Distribución de Pascal: definición

Ahora $Y = k$ si y sólo si A ocurre en la k-ésima repetición y A ocurrió exactamente $(r - 1)$ veces en las $(k - 1)$ repeticiones previas. Por lo que la probabilidad de necesitar k realizaciones de ε hasta que aparezcan los primeros r éxitos viene dada por

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}, \qquad k = r, r+1, \dots$$

Una variable de este tipo es una variable con distribución de Pascal, también llamada distribución binomial negativa, y simbolizamos $X \sim Pa(r, p)$.

Para una variable de este tipo, $E(X) = \frac{r}{p}$ y $\mathrm{V}(X) = \frac{rq}{p^2}$

Variables aleatorias discretas

Distribución de Pascal: ejemplo

La probabilidad de un lanzamiento exitoso es igual a 0,8. Supongamos que se hacen ensayos independientes de lanzamientos hasta que han ocurrido tres exitosos.

a) ¿Cuál es la probabilidad que sean necesarios 6 intentos?

b) ¿Cuál es la probabilidad que sean necesarios menos de 6 lanzamientos?

c) ¿Cuál es el número esperado de repeticiones necesarias?

Variables aleatorias discretas
Distribución de Pascal: relación con la binomial

Consideremos dos variables aleatorias:

- X, tal que $X \sim Bi(n, p)$. Dicho de otro modo, X es la cantidad de éxitos en n repeticiones de un experimento Bernoulli con probabilidad de éxito igual a p.
- Y, tal que $X \sim Pa(r, p)$. Dicho de otro modo, Y es la cantidad de repeticiones de un experimento Bernoulli con probabilidad de éxito igual a p que son necesarias para hallar r éxitos.

Entonces se cumple que

$$P(Y \leq n) = P(X \geq r)$$
$$P(Y > n) = P(X < r)$$

Variables aleatorias discretas

Distribución de Pascal: relación con la binomial

¿Por qué?

$$P(Y \leq n) = P(X \geq r)$$

Si hay r éxitos o más en los primeros n ensayos, entonces son necesarios n ensayos o menos para obtener los primeros r éxitos.

$$P(Y > n) = P(X < r)$$

Si hay menos de r éxitos en los primeros n ensayos, entonces se necesitan más de n ensayos para obtener r éxitos.

Variables aleatorias discretas

Distribución de Pascal: relación con la binomial

Ejemplo

Deseamos calcular la probabilidad de que sean necesarias más de 10 repeticiones de un experimento para obtener el tercer éxito cuando $p = 0{,}2$.

- X: cantidad de éxitos en 10 repeticiones de un experimento con $p = 0{,}2$, $X \sim Bi(n, p)$

$$P(X < 3) = \sum_{i=0}^{2} \binom{10}{i} 0{,}2^i 0{,}8^{10-i} = 0{,}678$$

- Y: cantidad de repeticiones de un experimento con $p = 0{,}2$ hasta conseguir el tercer éxito, $X \sim Pa(r, p)$

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = \sum_{i=3}^{10} \binom{i-1}{2} 0{,}2^3 0{,}8^{i-3} = 0{,}678$$

Variables aleatorias discretas

Distribución Hipergeométrica: definición

Supongamos que tenemos un lote de N artículos. de los cuales r son defectuosos y, en consecuencia, $(N - r)$ son no defectuosos. Supongamos que elegimos al azar n artículos del lote (n $\leq N$), *sin sustitución*. Sea X el número de artículos defectuosos encontrados. Puesto que $X = k$ si y sólo si obtenemos exactamente k artículos defectuosos (de los r defectuosos del lote) y exactamente $(n - k)$ no defectuosos (de los $(N - r)$ no defectuosos del lote), tenemos

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Si definimos $p = \frac{r}{N}$ y $q = 1 - p$ entonces tenemos que $E(X) = np$ y $V(X) = npq\,\frac{N-n}{N-1}$

Además, si N es grande $P(X = k) \cong \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Variables aleatorias discretas

Distribución Hipergeométrica: ejemplo

Se embarcan motores eléctricos pequeños en lotes de 50. Antes de que cada cargamento sea aceptado, un inspector elige 5 motores y los inspecciona. Si ninguno de los motores probados es defectuoso, el lote es aceptado. Si se encuentra que uno o más motores tienen algún defecto, entonces se inspecciona el cargamento completo. Supongamos que hay 3 motores defectuosos en el lote. ¿Cuál es la probabilidad de que sea necesaria una inspección del 100% del cargamento?

X: número de motores defectuosos encontrados entre los 5 inspeccionados de un lote de 50 motores de los cuales 3 son defectuosos

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} = 0{,}28$$

Variables aleatorias discretas

Distribución Multinomial: definición

Consideremos un experimento ε, su espacio muestral S, y una partición de S en k sucesos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \dots, A_k$. Considérense n repeticiones independientes de ε. Sea $p_i = P(A_i)$ y supóngase que p_i permanece constante durante todas las repeticiones, además de que $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Se definen las variables X_i : cantidad de veces que ocurre el evento A_i en las n repeticiones de ε, $i = 1, 2, \dots, k$. Cabe destacar que las X_i no son independientes, ya que $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$. Tenemos que:

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \dots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}, \qquad donde\ n = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$E(X_i) = np_i \qquad\qquad V(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

Variables aleatorias discretas

Distribución Multinomial: ejemplo

Los artículos que produce una máquina se pueden clasificar en cuatro grados: A, B, C y D. Se sabe que estos artículos se producen en las siguientes proporciones:

Grado A: 0.3 Grado B: 0.4

Grado C: 0.2 Grado D: 0.1

¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente un artículo de cada grado en una muestra de 4 artículos seleccionados al azar de un lote de producido de la máquina?