Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2022

Unidad 7: Aplicaciones del cálculo diferencial.

---

1. La regla de L'Hôpital

La regla de L'Hôpital es la herramienta que nos permitirá calcular límites de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

en los casos de indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$", esto es cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Un ejemplo importante de este tipo es el límite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ que fue calculado en el curso de Análisis Matemático I siguiendo la definición formal de límite.

Teorema 82 (Regla de L'Hôpital)**.** *Supongamos que f y g son funciones derivables en un entorno reducido de un punto a, tales que*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

y tales que existe el límite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ o este límite es $\pm\infty$. Entonces existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ y se verifica

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

<u>Demostración:</u>

Supongamos que f y g son derivables en un intervalo $(a-\delta, a+\delta)$, excepto posiblemente en $x = a$. Observemos primero que la hipótesis de que existe $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ implica que podemos elegir el intervalo de modo que:

$$g'(x) \neq 0 \ \text{ en } \ (a-\delta, a+\delta) \tag{1}$$

nuevamente con la posible excepción de $x = a$.

Por otra parte, no se supone ni siquiera que f y g están definidas en a. Pero si definimos $f(a) = g(a) = 0$ (reemplazando si es necesario los valores anteriores de $f(a)$ y $g(a)$) entonces f y g son continuas en a, y por lo tanto en todo el intervalo $(a-\delta, a+\delta)$ (pues f y g son derivables en todos los puntos del intervalo distintos de a).

Tomemos x tal que $a < x < a+\delta$. Entonces f y g son continuas en $[a,x]$ y derivables en (a,x), y podemos aplicar el Teorema del Valor Medio de Lagrange (TVM) y de Cauchy (ver AMI, Unidad 4, Teoremas 10 y 11) a f y g.

Aplicamos el TVM a g, para concluir que debe ser $g(x) \neq 0$. En efecto, si fuese $g(x) = 0$, existiría $x_1 \in (a,x)$ tal que $g'(x_1) = \frac{g(a)-g(x)}{a-x} = 0$, lo que contradice (1).

Aplicamos ahora el Teorema de Cauchy a f y g en $[a,x]$. Como $f(a) = g(a) = 0$, deberá existir $c_x \in [a,x]$ (el subíndice en c_x subraya el hecho que este valor depende de cada x) tal que

$$f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

Ahora bien, como $c_x \in (a,x)$, se tiene que cuando x tiende a a, también c_x tiene a a. Como existe el límite de $f'(x)/g'(x)$ cuando x tiende a a, y este límite es único, tendremos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

de donde se obtiene la propiedad buscada. □

Observación 83. Existen muchas variantes de la regla de L'Hôpital. La mayoría de ellas se deducen directamente de la regla general o de adaptar ligeramente la demostración. Dejamos como **ejercicio** verificar que:

- Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$ o este límite es $\pm\infty$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a^+} f'(x)/g'(x)$.

  El mismo resultado vale reemplazando el límite por derecha por el límite por izquierda.

- Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ y existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$ o este límite es $\pm\infty$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x)$.

  El mismo resultado vale reemplazando el límite cuando x tiende a ∞ por el límite cuando x tiende a $-\infty$.

  Para probar este resultado se sugiere aplicar la Regla de L'Hôpital a las funciones $f(1/x)$ y $g(1/x)$.

- Un caso que requiere una manipulación más compleja y que no demostraremos es el siguiente:

  si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ y existe $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = l$, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = l$.

  Las ideas de la prueba pueden consultarse en el Ejercicio 52, Capítulo 11 del *Calculus* de M. Spivak.

- Es importante observar sin embargo que en la gran mayoría de los cálculos concretos, el límite que se pretende calcular puede llevarse a la forma base de la Regla de L'Hôpital sin necesidad de aplicar alguna de las múltiples variantes.

Ejemplos 84. 1. Consideremos el límite $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ anterior. Pongamos $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $g(x) = x$. Entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Por otra parte, $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = 1$ y por lo tanto existe

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\cos(x) = 1.$$

Concluimos (como ya sabíamos) que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$.

2. Consideremos ahora el límite $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)$. En este caso la indeterminación es de la forma "$0.(-\infty)$" aparentemente no contemplada en la Regla de L'Hôpital. Observemos sin embargo que podemos escribir

$$-x\ln(x) = \frac{-\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

Tenemos ahora sí una indeterminación de la forma "$\frac{\infty}{\infty}$". Pongamos $f(x) = -\ln(x)$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Entonces $f'(x) = -\frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$ y por lo tanto

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = x \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

Concluimos que $\lim_{x\to 0^+}(-x\ln(x)) = 0$ y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

2. Análisis de una función a partir de sus derivadas

2.1. Extremos locales de una función.

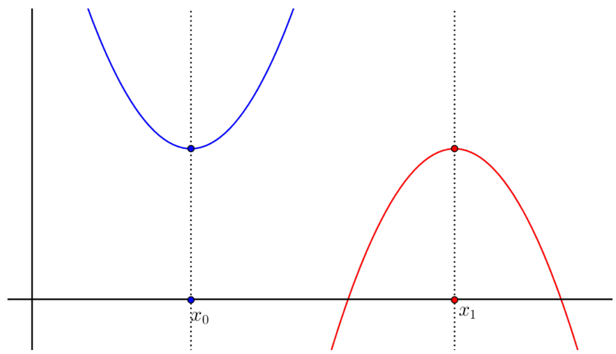
En el curso de Análisis Matemático I se estudiaron ya algunas propiedades de una función f que pueden determinarse a partir del análisis de su derivada f'. En particular recordamos la siguiente:

- Si f es una función derivable en un entorno de un punto x_0 y f alcanza un **extremo local o relativo** en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$. Recordemos que f alcanza un mínimo local en x_0 si $f(x_0) \leq f(x)$ para cada x en un entorno de x_0. De manera análoga (invirtiendo la desigualdad) se define cuando f asume un máximo local en x_0.

Esta propiedad nos dice que los candidatos a puntos donde una función f asume un extremo relativo son aquellos donde la derivada se anula o donde la función no es derivable (en particular, si f está definida en $[a, b]$, a y b son puntos donde f podría alcanzar un extremo relativo).

Las condiciones anteriores son necesarias y no suficientes (es decir, si $f'(x_0) = 0$ no podemos afirmar que x_0 sea un extremo relativo de f). Un ejemplo claro nos lo da la función $f(x) = x^3$. Tenemos en este caso que $f'(0) = 0$ pero f es creciente, y por lo tanto no asume un extremo relativo en $x_0 = 0$.

Resulta evidente en esta instancia que para determinar un extremo local es importante analizar el comportamiento de la función en un entorno de x_0, cuando esto sea posible. Si por ejemplo f es decreciente en un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ y creciente en $[x_0, x_0 + \varepsilon)$, resulta bastante claro que f asumirá un mínimo relativo en x_0. Una situación inversa se da si f asume un máximo relativo en x_0:



El primer resultado que probaremos busca determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f a partir del signo de su derivada:

Teorema 85. *Sea f una función derivable en (a, b). Entonces:*

1. *si $f'(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en (a, b).*
2. *si $f'(x) < 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en (a, b).*

Demostración:

Probaremos el caso en que $f'(x) < 0$ para cada $x \in (a, b)$ y dejamos el otro caso como **ejercicio**. Tomemos dos puntos cualesquiera $x_1, x_2 \in (a, b)$ tales que $x_1 < x_2$. Entonces f es continua en $[x_1, x_2]$ y derivable en (x_1, x_2) (¿por qué?). Luego por el Teorema del Valor Medio de Lagrange, existirá $\alpha \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\alpha).$$

Pero por hipótesis $f'(\alpha) < 0$, y como $x_2 - x_1 > 0$, resulta $f(x_2) - f(x_1) < 0$, o sea $f(x_2) < f(x_1)$. Como x_1 y x_2 son arbitrarios, resulta f decreciente en (a, b). $\square$

Observemos antes que nada que los recíprocos de los dos items del teorema anterior son **falsos**. Dejamos como ejercicio encontrar un contraejemplo para cada uno de ellos.

Ejemplo 86. Consideremos por ejemplo la función $f(x) = x^4 - 2x^2$. Intentaremos esbozar la gráfica de f a partir de sus propiedades y las propiedades de su derivada.

Lo primero que podemos observar es que f es una función **par**, esto es, $f(-x) = f(x)$ para cada x. Bastaría por lo tanto esbozar la gráfica de f para $x \geq 0$ y realizar la gráfica completa por simetría respecto del eje y. Haremos sin embargo en este caso el análisis global.

Comencemos determinando los ceros de f. Para ello expresamos $f(x) = x^2(x^2 - 2)$, de donde resulta que $f(x) = 0$ sii $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$.

Busquemos ahora los **puntos singulares o críticos** de f, es decir, los puntos tales que $f'(x) = 0$. Tenemos

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x + 1)(x - 1).$$

Por lo tanto $f'(x) = 0$ sii $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

Como la función f' es continua, en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, \infty)$, f' no cambiará de signo. Por lo tanto para determinar el signo de f' en cada uno de estos intervalos basta evaluar la función en un punto de cada uno de estos intervalos. Tenemos entonces:

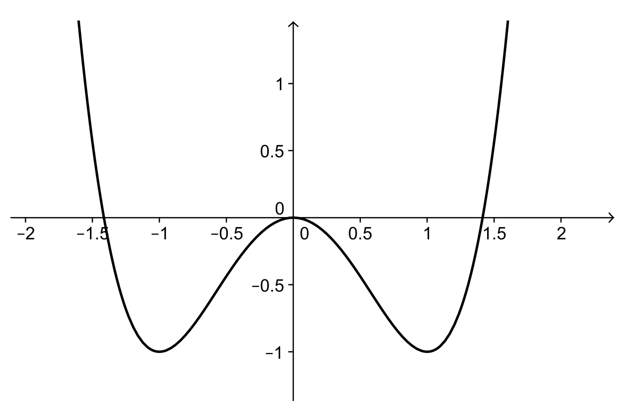
- $f'(-2) = -24$, entonces $f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ y por lo tanto f es decreciente en $(-\infty, 1)$.
- $f'(-1/2) = 3/2 > 0$, entonces $f'(x) > 0$ en $(-1, 0)$ y por lo tanto f es creciente en $(-1, 0)$.
- $f'(1/2) = -3/2$, entonces $f'(x) < 0$ en $(0, 1)$ y por lo tanto f es decreciente en $(0, 1)$.
- $f'(2) = 24$, entonces $f'(x) > 0$ y por lo tanto f es creciente en $(-1, 0)$.

Concluimos que f alcanza un mínimo local en $x = -1$ y en $x = 1$ y un máximo local en $x = 0$.

Finalmente, es fácil ver que f no tiene asíntotas verticales, horizontales ni oblicuas y que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty.$$

Podemos con estos datos esbozar la gráfica de f:



La gráfica anterior fue realizada con software. Observemos sin embargo que la información que tenemos aún es insuficiente para determinar como son las "panzas" de la función, o por qué la gráfica es tan "suave". Introduciremos estas herramientas más adelante.

En el ejemplo anterior hemos encontrado los extremos locales de f analizando sus puntos críticos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

A continuación daremos una caracterización directa:

Teorema 87. *Sea f una función dos veces derivable en un entorno de un punto a y tal que $f'(a) = 0$. Entonces:*

1. *Si $f''(a) > 0$ entonces f alcanza un mínimo local en a.*
2. *Si $f''(a) < 0$ entonces f alcanza un máximo local en a.*

Demostración: Por definición tenemos

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(a+h)}{h}$$

donde la última igualdad surge del hecho que $f'(a) = 0$.

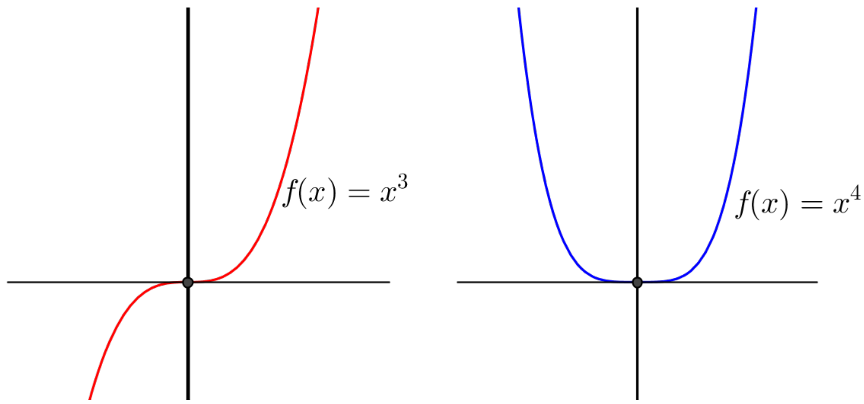
Supongamos que $f''(a) > 0$. Es decir que el límite anterior es positivo, y por lo tanto $f'(a+h)/h$ debe ser positivo para valores suficientemente pequeños de h. En efecto, sabemos que para cada $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que si $-\delta < h < \delta$, entonces $f''(a) - \varepsilon < \frac{f'(a+h)}{h} < f''(a) + \varepsilon$. Basta elegir entonces ε suficientemente pequeño tal que $\varepsilon < f''(a)$.

Por lo tanto tenemos que si $0 < h < \delta$, $f'(a+h) > 0$ y si $-\delta < h < 0$, $f'(a+h) < 0$. En función del Teorema 50, f es decreciente en $(a-\delta, a)$ y creciente en $(a, a+\delta)$, con lo cual f alcanza un mínimo en a.

De manera análoga se prueba el caso en que $f''(a) < 0$. La dejamos como **ejercicio** $\square$

Ejemplo 88. Continuando con el ejemplo anterior, es decir $f(x) = x^4 - 2x^2$, ya hemos visto que $f'(-1) = f'(0) = f'(1) = 0$. Por otra parte, $f''(x) = 12x^2 - 4$. Luego $f''(-1) = 8 > 0$, $f''(0) = -4 < 0$ y $f''(1) = 8 > 0$. Luego, como ya habíamos visto, f asume un mínimo local en $x = 1$ y en $x = 1$ y un máximo local en $x = 1$.

Ejemplo 89. Consideremos ahora las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^4$. Observemos que en ambos casos el único punto crítico es $x = 0$. Ahora, $f''(x) = 6x$, $g''(x) = 12x^2$. Entonces $f''(0) = g''(0) = 0$ y no podemos aplicar el Teorema 87. Observemos que en el caso de f no tenemos un extremo local en $x = 0$ y en el caso de g, $x = 0$ es un mínimo local. En estos casos (por el momento) no tenemos más opción que analizar el comportamiento de la función alrededor del punto.



Observemos que estos ejemplos muestran que la recíproca del Teorema 87 es falsa. Existe sin embargo una especie de recíproca más debil:

Teorema 90. *Sea f una función dos veces derivable en a. Entonces:*

1. *Si f tiene un mínimo local en a, entonces $f''(a) \geq 0$.*
2. *Si f tiene un máximo local en a, entonces $f''(a) \leq 0$.*

Demostración:

Probaremos el item 1. La prueba del item 2 es análoga y se deja como **ejercicio**. Supongamos que f tiene un mínimo local en a, esto es, para cualquier x en un entorno de a, $f(x) \geq f(a)$. Supongamos que $f''(a) < 0$, por el Teorema 87 f tendría un máximo local en a, con lo cual en un entorno de a valdría $f(x) \leq f(a)$. Concluimos que en un entorno de a la función f debe ser constante, con lo cual $f''(a) = 0$, lo que contradice nuestra suposición que $f''(a) < 0$. Luego $f''(a) \geq 0$. □

2.2. Convexidad y concavidad.

Definiremos ahora los conceptos de convexidad y concavidad que nos permitirá esbozar con más exactitud la gráfica de una función.

Comencemos analizando el concepto de convexidad. Recordemos que una región del plano es convexa si el segmento que une dos puntos cualesquiera de esta región está completamente contenido en la región. Si pensamos en una función, decimos que es convexa en un intervalo I, si para cualquier $a, b \in I$, el segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ queda por encima de la gráfica de f. Intentaremos encontrar una formulación analítica de esta propiedad geométrica. La recta que determinan $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ puede representarse por la gráfica de la función

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Esta recta queda por encima de la gráfica de f si para cada x entre a y b se tiene que $g(x) > f(x)$, es decir, si para cada $x \in [a, b]$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) > f(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) > f(x) - f(a)$$

$$\Leftrightarrow \;\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si en cambio este segmento queda debajo de la gráfica de la función, decimos que f es cóncava.

Formalizamos estos conceptos en la siguiente:

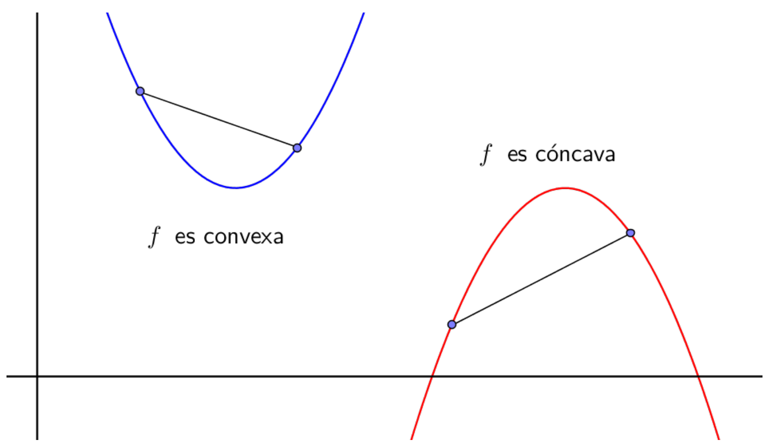
Definición 91. *Decimos que una función f es **convexa** en un intervalo I, si para todos los puntos a, x y b del intervalo con $a < x < b$ se verifica*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Si se verifica la relación inversa, esto es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*decimos que f es **cóncava** en I.*



Es importante notar que en mucha de la bibliografía lo que hemos definido como una función convexa aparece como cóncava hacia arriba, y lo que hemos definido como una función cóncava aparece como cóncava hacia abajo.

Veremos a continuación una caracterización de la convexidad:

Teorema 92. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces f es convexa en I si y sólo si para cada $a \in I$ la gráfica de f queda por encima de la recta tangente por $(a, f(a))$, exepto en $(a, f(a))$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Elijamos $\delta > 0$ arbitrario suficientemente pequeño tal que $a+\delta \in I$. Entonces para cada $0 < h < \delta$ se tiene $a < a+h < a+\delta$ y como f es convexa en I, resulta

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}.$$

Siendo f derivable en a y h arbitrario, tomando límite cuando h tiende a 0^+ concluimos que

$$f'(a) < \frac{f(a+\delta)-f(a)}{\delta}$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeño.

Ahora bien, la recta tangente a f en $(a, f(a))$ es la gráfica de la función

$$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Tomando $x = a+\delta$, tenemos que para x suficientemente cercano a y a la derecha de a, resulta

$$f'(a) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;\Rightarrow f'(a)(x-a) < f(x)-f(a) \;\Rightarrow f'(a)(x-a)+f(a) < f(x)$$

Es decir, $g(x) < f(x)$ para $x > a$. Un razonamiento análogo muestra que el mismo resultado es válido si $x < a$, lo dejamos como **ejercicio**.

$\Leftarrow$) Esta implicación es más compleja y la prueba consta de varias etapas.

1) f' *es creciente*. Consideremos primero dos puntos a y b en I tales que $a < b$. Puesto que por hipótesis $(b, f(b))$ es un punto por encima de la recta tangente a f en $(a, f(a))$, tendremos que

$$f(b) > f'(a)(b-a) + f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(a) \tag{2}$$

puesto que $b-a > 0$. Por otra parte, $(a, f(a))$ también es un punto por encima de la recta tangente a f en $(b, f(b))$ y puesto que $a-b < 0$, tendremos que

$$f(a) > f'(b)(a-b) + f(b) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(a)-f(b)}{a-b} < f'(b) \tag{3}$$

Comparando (2) y (3) resulta

$$f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$$

y por lo tanto f' es creciente.

2) *Si* $a < b$ *y* $f(a) = f(b)$, *entonces* $f(x) < f(a) = f(b)$ *para* $a < x < b$.

Supongamos que existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$. Como f es continua en $[a, b]$, tendrá un máximo en $[a, b]$ que se asume en un punto $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > f(a)$. Tendremos además $f'(x_0) = 0$. Aplicando el Teorema del Valor Medio al intervalo $[a, x_0]$, existirá $x_1 \in (a, x_0)$ tal que

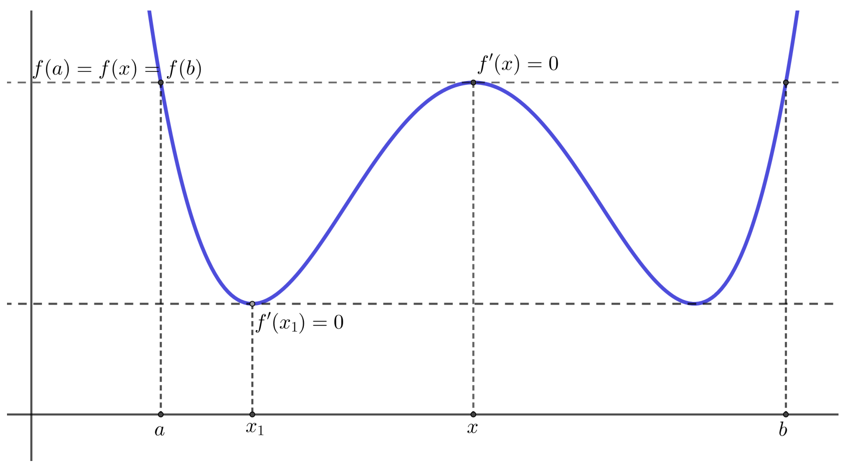
$$f'(x_1) = \frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a} > 0 = f'(x_0)$$

lo que contradice el hecho que f' sea creciente.

Concluimos que para cada $x \in (a, b)$, $f(x) \leq f(a) = f(b)$. Entonces a y b son máximos absolutos de la f en $[a, b]$

Supongamos finalmente que existe un punto $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = f(a) = f(b)$. Entonces x también es un máximo de f en $[a, b]$, y como es un punto interior al intervalo deberá ser $f'(x) = 0$.

Observemos que f no puede ser constante en $[a, x]$ (pues en ese caso, $f'|_{(a,x)} \equiv 0$ y f' no sería creciente). Luego debe existir un mínimo local de f en $x_1 \in (a, x)$ con $f(x_1) < f(a) = f(x)$, en el cual tendremos $f'(x_1) = 0$. Pero entonces $x_1 < x$ y $f'(x_1) = f'(x) = 0$, lo que contradice el hecho que f' es creciente.



3)f *es convexa*

Recordemos nuestras hipótesis: la gráfica de f está por encima de la recta tangente por $(a, f(a))$, excepto en $(a, f(a))$, para cualquier a del intervalo. Por el punto 1, f' es creciente.

Consideremos ahora dos puntos $a < b$ en I y la función auxiliar

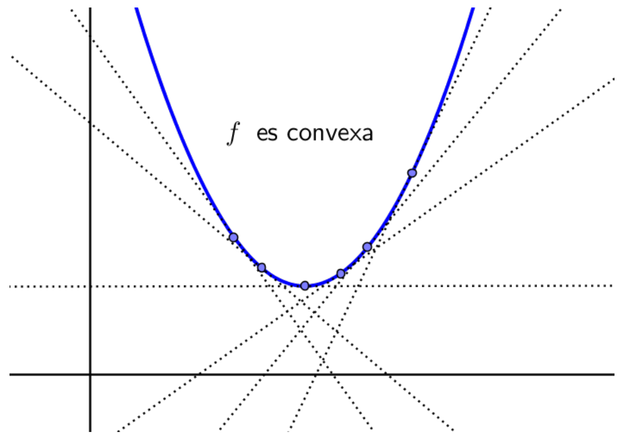
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

para $a < x < b$. Entonces g' y f' difieren en una constante, y por lo tanto como f' es creciente, g' también lo es. Además $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(a)$ con lo cual podemos aplicar la parte 2 a g y concluir que para cada $x \in (a, b)$, $g(x) < g(a) = f(a)$. Esto es

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) < f(a) \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y por lo tanto f es convexa. $\square$

Observemos que esta caracterización nos permite determinar como se "curva" la gráfica de una función, teniendo en cuenta que una función convexa queda siempre sobre la recta tangente en cada punto, la gráfica caractarística es la de una "panza" hacia arriba:



Dado que una función f es cóncava si y sólo si $(-f)$ es convexa, podemos probar:

Teorema 93. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces f es cóncava en I si y sólo si para cada $a \in I$ la gráfica de f queda por debajo de la recta tangente por $(a, f(a))$, excepto en $(a, f(a))$.*

Observación 94. *En muchos textos aparece como definición de función convexa (o cóncava hacia arriba) la caracterización del Teorema 92 y como definición de función cóncava (hacia abajo) la caracterización del Teorema 93. Es importante notar que en la definición que hemos dado en este apunte, además de la motivación geométrica, no hemos pedido que la función sea derivable, con lo cual nuestra definición es más general. En el caso en que f sea derivable ambas definiciones son equivalentes.*

Si analizamos en detenimiento la prueba del Teorema 92, observaremos que tomando como hipótesis el punto 1 de la segunda implicación, podemos probar los puntos 2 y 3. Es decir, si f' es creciente, entonces f es convexa. Recíprocamente, si f es convexa, entonces por la caracterización anterior la gráfica de f está por encima de la recta tangente en $(a, f(a))$ y por lo tanto vale el punto 1, es decir, f' es creciente. Hemos probado entonces la siguiente caracterización:

Teorema 95. *Sea f una función derivable en un intervalo I. Entonces:*

1. *f es convexa en I si y sólo si f' es creciente.*
2. *f es cóncava en I si y sólo si f' es decreciente.*

Como consecuencia inmediata del Teorema 87, tenemos el siguiente resultado, conocido como **criterio de la derivada segunda:**

Teorema 96. *Sea f una función dos veces derivable en un intervalo I. Entonces:*

1. *Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa.*

2. Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava.

Definición 97. *Sea f una función y a un punto de su dominio. Decimos que a es un* ***punto de infexión*** *de f si f es convexa (resp. cóncava) en $(a-\varepsilon, a)$ y cóncava (resp. convexa) en $(a, a+\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$.*

En pocas palabras, suele decirse que un punto de inflexión hay un *cambio de concavidad* de f.

Observemos que si es posible determinar los intervalos de convexidad/concavidad de una función f por medio del Teorema 96 y f'' es continua, entonces necesariamente en un punto de inflexión deberá ser $f''(a) = 0$.

La recíproca es **falsa**. ¿Ejemplo?

2.3. Ejemplo de análisis de una función.

Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Como $1 + x^2 > 0$ para todo x, el dominio de f es todo $\mathbb{R}$. Claramente la función no tiene cero, es decir, no corta al eje x. $f(0) = 1$, con lo cual la gráfica de f corta en $(0, 1)$ al eje y.

f es continua y dos veces derivable en todo su dominio. Procedamos a encontrar los puntos críticos de f. Para ello hacemos

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Observamos que $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Determinamos ahora los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Esto nos permitirá ver si en $x = 0$ f alcanza un extremo local o global.

Observemos que al ser $(1 + x^2)^2 > 0$ para todo x, tenemos que

$$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x > 0; \quad f'(x) > 0 \quad\Leftrightarrow\quad x < 0.$$

Luego f es creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$ y por lo tanto alcanza un máximo global en $x = 0$.

Analicemos ahora los intervalos de convexidad y concavidad de f. Para ello determinamos la derivada segunda de f. Un simple cálculo muestra que

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

Nuevamente el denominador es siempre positivo, y f'' es continua. Los posibles puntos de inflexión de f son entonces aquellos que hacen $f''(x) = 0$, o sea

$$x = -\sqrt{1/3}, \quad x = \sqrt{1/3}.$$

Como f'' es continua, no podrá cambiar de signo en cada uno de los intervalos $I_1 = (-\infty, -\sqrt{1/3})$, $I_2 = (-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$ y $I_3 = (\sqrt{1/3}, \infty)$. Por lo tanto para determinar el signo de f'' en cada intervalo basta con evaluarla en un punto del intervalo correspondiente.

Tenemos:

- $f''(-1) = 1/2 > 0$, entonces $f''(x) > 0$ para cada $x \in I_1$, con lo cual f es convexa en I_1.
- $f''(0) = -2 < 0$, con lo cual f es cóncava en I_2,
- $f''(1) = 1/2 > 0$, con lo cual f es convexa en I_3.

Además conluimos que $x = \pm\sqrt{1/3}$ son puntos de inflexión de f.

Finalmente observemos que $f(x) > 0$ para cada x, y que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

con lo cual el eje x es una asíntota horizontal de x.

Podríamos haber notado de entrada (y en efecto esto será útil para muchas funciones) que f es par. Con lo cual hubiese bastado hacer el análisis para $x \geq 0$ y reconstruir la gráfica de f (y en consecuencia deducir su comportamiento) por medio de una reflexión según el eje y.

Con todos estos datos podemos reconstruir la gráfica de f: