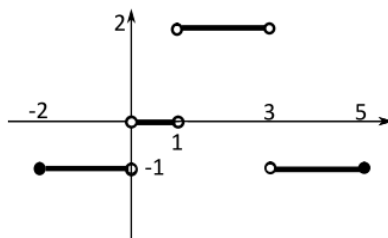
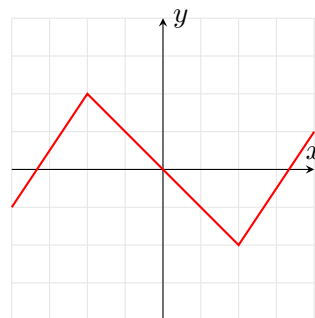
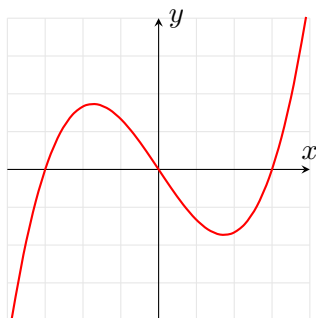


PRÁCTICA 4 - Cálculo Diferencial

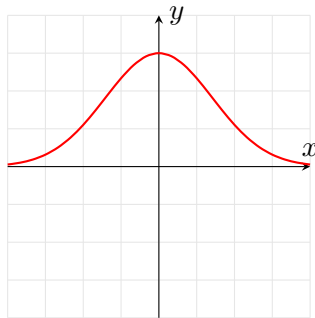
- En cada uno de los siguientes casos, calcular el cociente incremental en el punto $a \in \mathbb{R}$ indicado, determinar si la función es derivable en a y, si existe, calcular su derivada en el punto a .
 - $H(t) = \sqrt{5 - 4t}$, $a = -1$.
 - $\varphi(z) = z + \frac{9}{z}$, $a = -3$.
 - $f(x) = \cos(x)$, $a = 0$.
 - $g(t) = |t|$, $a = 0$.
- Se sabe que la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, donde $f(t) = t^3 - t^2 - t$, indica la posición de una partícula en el instante t . Se pide:
 - Calcular la velocidad promedio en un intervalo de tiempo $[a, a + h]$ (cociente incremental) para cada $a \in \mathbb{R}^+$.
 - Hallar la velocidad de la partícula en cada tiempo $a > 0$, utilizando la definición de derivada de una función en un punto.
 - Hallar el o los valores de a para los cuales la velocidad es nula.
- Utilizar la siguiente información para trazar la gráfica de la función f en el intervalo $[-2, 5]$:
 - $f(-2) = 3$,
 - f es continua,
 - la gráfica de f' es la que se muestra en la figura.



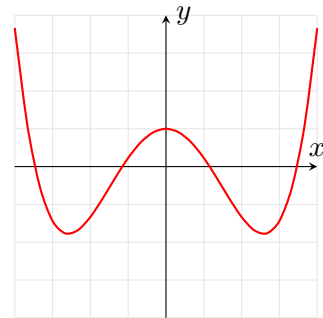
- Establezca una correspondencia entre la gráfica de cada función (a-d) con la gráfica de su función derivada (i-iv). Explique la razón de dicha correspondencia.
 -
 -



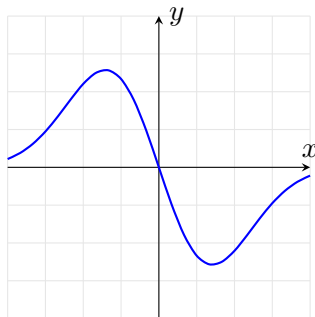
c)



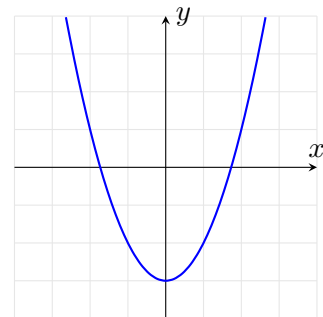
d)



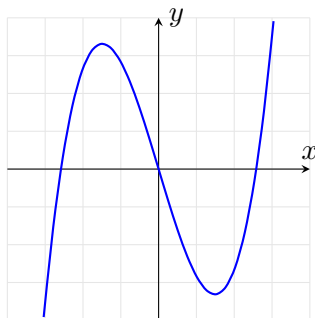
I)



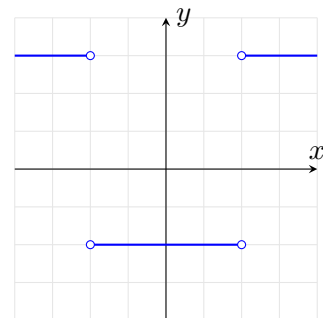
II)



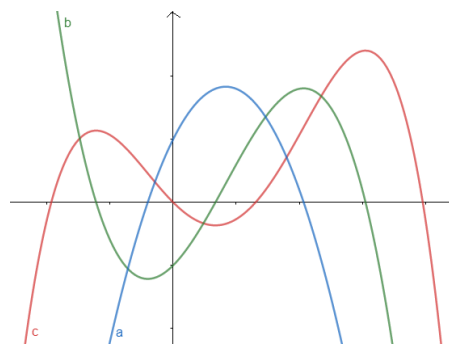
III)



IV)



5. A continuación se presentan las gráficas de tres funciones a , b y c , que se corresponden con una cierta función f , su derivada primera f' y su derivada segunda f'' . Determinar cuál corresponde a cada una.



6. Dada la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ ax + b, & x < 2. \end{cases}$$

determinar los posibles valores de a y b para los cuales la función g es derivable en el punto 2 y calcular, a continuación, la función derivada de g .

7. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \geq 0, \\ x^3 + 1, & x < 0. \end{cases}$$

- Calcular $f'(x)$ si $x \neq 0$.
- Mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$.
- Analizar la existencia de las derivadas laterales de la función f en el punto 0.
- Analizar la derivabilidad de la función f en el punto 0.

8. Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

- A partir de la definición de derivada en un punto demostrar que la función f es derivable en su dominio y, además, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
- Hallar los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $8x + 2y + 5 = 0$.
- Mostrar que la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto cualquiera se interseca con la misma en un único punto.

9. Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, donde D es un subconjunto de \mathbb{R} simétrico con respecto al origen.

- Probar que si f es una función par y derivable en un punto $x \in D$ entonces también es derivable en $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = -f'(x)$.
- Probar que si f es una función impar y derivable en un punto $x \in D$ entonces también es derivable en $-x$, resultando en tal caso $f'(-x) = f'(x)$.
- De lo anterior, obtener que la función derivada de una función par (impar) es una función impar (par).

10. Hallar la función derivada de cada una de las siguientes funciones, indicando su dominio.

a) $f_1(x) = x^2 + x + 2$;

b) $f_2(x) = 3x^3 - 7x^2 + 2x$;

c) $f_3(x) = \frac{-3x}{x+1}$;

d) $f_4(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{3x^2}$;

e) $f_5(x) = (x+2)\frac{x^2-1}{x+x^2}$;

f) $f_6(x) = x^4 + 2 \sin x$;

g) $f_7(x) = \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x}$;

h) $f_8(x) = x^5 \cos x$;

i) $f_9(x) = x^{-2} - 2x^2 + \sqrt{x} - \sqrt{3}$;

j) $f_{10}(x) = \frac{1}{1+x^2} + x^{-2} \tan x$.

11. Una pelota es lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de 49m/seg. La altura en el instante t viene dada por la función

$$x(t) = -4,9t^2 + 49t.$$

- a) Determinar la altura máxima alcanzada por la pelota.
 b) Calcular la velocidad de la pelota cuando se encuentra a 19,6m del suelo y va hacia arriba.
12. Un objeto se mueve por una línea recta con velocidad dada por la función $v(t) = 4t^5$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
13. Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.
14. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $(1, 5)$ y es tangente a la curva de ecuación $y = x^3$.
15. Hallar los números reales a, b, c para los cuales las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ son tangentes en el punto $(1, 2)$, es decir que se cortan en dicho punto y en él poseen la misma recta tangente.
16. Sea la función

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{x^3}{3} + x, & x \leq 0, \\ -\frac{x^2}{2} + bx + c, & x > 0. \end{cases}$$

- a) Determinar los valores de b y c para que la función h sea derivable en \mathbb{R} . Justificar.
 b) Para los valores encontrados en el ítem anterior, realizar la gráfica de la función h' .
17. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 12x$ que sean paralelas al eje x .
18. Determinar la parábola de ecuación cartesiana $y = x^2 + ax + b$ que sea tangente a la recta $y = x + 1$ en el punto $P(-2, -1)$.
19. Probar que en la parábola $y = rx^2 + sx + 1$, la cuerda que une los puntos de abscisas $x = a$ y $x = b$, respectivamente, es paralela a la tangente a la curva en el punto de abscisa $x = \frac{a+b}{2}$.
20. Sea f una función tal que $f(1) = 3$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ y $f''(1) = 4$. Se define la función $g(x) = x^2 f(x)$. Calcular $g(1)$, $g'(1)$ y $g''(1)$.
21. Sea f una función tal que $f(1) = 4$, $f'(1) = 2$ y $f''(1) = 4$. Se define la función $g(x) = \sqrt{x} f(x)$. Calcular $g(1)$, $g'(1)$ y $g''(1)$.
22. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función:

a) $f_1(x) = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x} \right)^4$,

d) $f_4(x) = \left(\frac{1 + \cos x}{\sin x} \right)^{-2}$,

b) $f_2(x) = \cos x \left(\frac{\sin x}{x} \right)$,

e) $f_5(x) = \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}$,

c) $f_3(x) = \frac{\cos(\sin x)}{x}$,

f) $f_6(x) = \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 (3-2x)^2$.

23. Siendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable, calcular la derivada de la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada en cada caso:

a) $g(x) = f(f(a) + x)$,

d) $g(x) = (x - a)f(x)$,

b) $g(x) = f(f(a)x)$,

e) $g(x) = (x - a)f(a)$,

c) $g(x) = f(x + f(x))$,

f) $g(x) = f((x - 3)^2)$.

24. Si $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(4) = 0$, $g'(4) = -1$ y la función h está definida por $h(x) = [f(g(x))]^2 + x$, hallar $h'(4)$.

25. Verificar que la función f es solución de la ecuación diferencial¹ exhibida en cada caso:

a) $f(x) = a \sin x + b \cos x$, con $a, b \in \mathbb{R}$; ecuación: $f''(x) + f(x) = 0$

b) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$; ecuación: $f'(x)f(x) = 1$.

26. Sea $f(x) = \tan x$ definida para todo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Si su función inversa es $f^{-1}(y) = \arctan y$, con $y \in \mathbb{R}$, demostrar que:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{1 + y^2}, \text{ para } y \in \mathbb{R}.$$

27. Sea la función $f(x) = x + \sin x + 1$, para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Demostrar que f admite inversa.

b) Calcular $(f^{-1})'(1)$.

28. Hallar las derivadas de las siguientes funciones, sobreentendiendo que los resultados son válidos para los valores en que está definida cada función.

a) $f_1(x) = 2x^{\frac{3}{2}} - 3 \left(x^{-\frac{3}{2}} + \pi^{\frac{1}{7}}\right)$,

d) $f_4(x) = \sin(x + \sqrt{2x + 1})$,

b) $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

e) $f_5(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$,

c) $f_3(x) = \ln(x + 1) + x^2 e^{-3x}$,

f) $f_6(x) = \arcsen x + \arccos x$.

29. Dada la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$

a) Encontrar una aproximación lineal para f en $a = 1$.

b) Utilizar el ítem anterior para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3,98}$ y $\sqrt{4,05}$.

c) ¿Las aproximaciones obtenidas en el ítem anterior son sobreestimaciones o subestimaciones?

30. Utilizar la aproximación lineal de una adecuada función para hallar un valor aproximado de los siguientes números:

a) $\sqrt[3]{1,1}$

b) $\sqrt[4]{15,8}$

c) $\sin 3$

¹Una ecuación diferencial es una ecuación donde la incógnita es una cierta función desconocida f , y la ecuación contiene por lo menos una de las derivadas de la función f .

31. Sea f la función cuya ley es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x & x \leq 3, \\ 6 & x > 3. \end{cases}$$

Determinar si f posee extremos relativos y absolutos.

32. Aplicando el teorema de Rolle, demostrar que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b .
33. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

- a) Obtener la gráfica de f en el intervalo $[0, 2]$.
- b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0, 2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.
34. Sea $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Probar que $f(1) = f(-1) = 0$ pero que f' no tiene raíces en el intervalo $[-1, 1]$. Explicar por qué este resultado no contradice el teorema de Rolle.
35. Probar que la ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x .
36. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse si el rectángulo tiene como lados:
- a) 10 y 10,
- b) 12 y 18.
37. Un cubo se expande de tal forma que su arista cambia a razón de 5cm por segundo. Cuando su arista es de 4 cm, hallar la razón de cambio del volumen.
38. Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 mm por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de 3 cm?
39. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \frac{1}{x^2 + 4}$ de tal forma que la abscisa cambia a razón de 3 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?
40. En lo alto de un farol brilla una luz a 6 metros del suelo. Una mujer de estatura 1,60 metros se aleja caminando desde el farol.
- a) Hallar la razón en que aumenta su sombra si se aleja a razón de 1,20 metros por segundo.
- b) Si ahora la mujer camina hacia la luz, hallar la razón en que su sombra decrece si camina a razón de 1 metro por segundo.
41. Un depósito de 3 m de altura tiene la forma de un cono con el vértice hacia abajo. El radio en la parte superior es de 1,25 m. Se le echa agua a razón de $0,15 \text{ m}^3$ por minuto, ¿a qué velocidad se está elevando el agua si la profundidad de ésta es de 1,5 m?