Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 1: Cálculo Integral

---

1. Utilizando el método de inducción matemática, demuestre las fórmulas de sumación utilizadas en los Ejemplos 16 y 17 del documento teórico, que establecen que para cada $n \in \mathbb{N}$ valen

   a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, y

   b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. *a)* 1) Si A es un conjunto acotado de números reales y sea $c \in \mathbb{R}$, se define el conjunto $cA = \{cx \,:\, x \in A\}$. Pruebe que si $c \geq 0$, entonces $\operatorname{ínf}(cA) = c \operatorname{ínf} A$ y $\sup(cA) = c \sup A$.

   2) Utilice lo anterior para mostrar que si f es una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y $c > 0$, entonces cf es acotada, y valen las desigualdades

   $$\operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]}(cf)(x) \;=\; c \operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad \sup_{x\in[a,b]}(cf)(x) \;=\; c \sup_{x\in[a,b]} f(x)\ .$$

   3) Analice cómo quedan las desigualdades de los dos apartados anteriores cuando $c < 0$.

   b) Si f y g son dos funciones acotadas en $[a, b]$, muestre que $f + g$ es una función acotada en $[a, b]$, y valen las desigualdades

   $$\operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]} f(x) + \operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]} g(x) \;\leq\; \operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]}(f+g)(x) \qquad \text{y} \qquad \sup_{x\in[a,b]}(f+g)(x) \;\leq\; \sup_{x\in[a,b]} f(x) + \sup_{x\in[a,b]} g(x)\ .$$

   c) Si f es una función acotada en $[a, b]$, muestre que $|f|$ es una función acotada en $[a, b]$, y vale la desigualdad

   $$\sup_{x\in[a,b]} |f|\,(x) - \operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]} |f|\,(x) \;\leq\; \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \operatorname*{ínf}_{x\in[a,b]} f(x)\ .$$

3. Una partición $P = \{t_0, \cdots, t_n\}$ del intervalo $[a, b]$ se dice **regular** si $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Utilice particiones regulares para $n = 3$, 4 y 5 para acotar inferior y superiormente el área de la región $R(f)$ para la función f y el intervalo $[a, b]$ dados en cada caso.

   a) $f(x) = 3x^2 + 1$, $[a, b] = [0, 1]$ *b)* $f(x) = -2x + 1$ $[a, b] = [-1, 0]$ *c)* $f(x) = x^3 - x^2$, $[a, b] = [1, 2]$.

4. Si f es una función acotada sobre un intervalo $[a, b]$, para la cual

   $$\sup\ \{L(f, P)\ ,\ P \in \mathcal{P}_r\} \;=\; \operatorname{ínf}\ \{U(f, P)\ ,\ P \in \mathcal{P}_r\}\ ,$$

   donde $\mathcal{P}_r$ denota al conjunto de todas las particiones regulares de $[a, b]$, muestre que f es integrable en dicho intervalo.

5. Pruebe que si $b < 0$, la función $f(x) = x$ es integrable en $[b, 0]$ y vale $\int_b^0 x dx = -\frac{b^2}{2}$. Concluya que cualesquiera sean $a < b \in \mathbb{R}$, f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

6. Para la función de ley $f(x) = x^2$,

   a) complete los detalles de la prueba de integrabilidad en intervalos de la forma $[0, b]$, con $b > 0$, y

   b) Pruebe que si $b < 0$, la función ésta es integrable en $[b, 0]$, resultando

   $$\int_b^0 x^2 dx \;= -\frac{b^3}{3}\ .$$

   c) Concluya que cualesquiera sean $a < b \in \mathbb{R}$, f es integrable en $[a, b]$ y

   $$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

7. Sean $a < b < c < d$ y f una función integrable en $[a, d]$. Pruebe que f es integrable en $[b, c]$.

8. Sean f y g funciones integrables en $[a, b]$.

   a) Pruebe que si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

   b) Pruebe que si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

9. Muestre que si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a, b]$, y vale la desigualdad

$$\left| \int_a^b f(x)\ dx \right| \;\leq\; \int_a^b |f|\ (x)\ dx\ .$$

10. Supongamos que f es una función integrable en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$. Pruebe quee cualesquiera sean $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\ dx \;= \int_a^c f(x)\ dx\; + \int_c^b f(x)\ dx$$

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \textsf{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \textsf{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}\ .$$

Pruebe que f es integrable en $[a, b]$ para cualquier $a < b$ y que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

12. Determine el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones f y g (en caso de que no se indique, las bandas laterales están determinadas por los puntos de intersección de ambas gráficas).

   a) $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$.

   b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = -x + 1$

   c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 - 2x + 4$, y la región está acotada por izquierda por el eje y.

13. Demuestre que $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\ dx$.

14. Suponga que f es no decreciente en $[a,b]$.

    a) Si $P = \{t_0, t_1, \ldots t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, ¿Cómo son $L(f,P)$ y $U(f,P)$?

    b) Suponga que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i. Demuestre que $U(f,P) - L(f,P) = \delta(f(b) - f(a))$.

    c) Demuestre que f es integrable.