

## ÁLGEBRA LINEAL 2024-2DO C (LM - PM - LCC)

### PRÁCTICA 1: ELIMINACIÓN GAUSSIANA - FACTORIZACIÓN $LU$

1. ¿Qué sucede si una matriz  $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$  es premultiplicada por las matrices

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Qué sucede si  $A$  es postmultiplicada por  $E_{31}$  y  $E_{23}$ ?

2. a) Determinar las matrices  $E_{21}$ ,  $E_{31}$  y  $E_{32}$  que llevan la siguiente matriz  $A$  a su forma triangular  $U$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Calcular la matriz  $E = E_{32}E_{31}E_{21}$  que realiza todos los pasos de la eliminación  $EA = U$ .

3. Considere el sistema de ecuaciones  $Ax = b$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Hallar la factorización  $LU$  de  $A$ , escribir y resolver el sistema triangular superior  $Ux = \tilde{b}$  que se obtiene luego de la eliminación gaussiana.

4. Encontrar la matriz inversa de

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + & 2x_4 = 6 \\ & 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 8 \\ & 6x_3 + 5x_4 = -4 \end{cases}$$

a) Hallar la factorización  $LU$  de  $A$ , matriz de coeficientes del sistema y resolver el mismo.

b) Resolver el sistema  $Ax = \tilde{b}$ , con  $\tilde{b} = (6, 2, 10, 2)^t$ .

c) Resolver el sistema  $Ax = \hat{b}$ , con  $\hat{b} = (5, 0, 2, 0)^t$ .

6. Encontrar los factores  $L, D, U$  para la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolver el sistema  $Ax = b$  con  $b = (6, 0, -6)^t$ .

7. Sea  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ . Mostrar que

a)  $AA^t$  y  $A^tA$  son matrices simétricas.

b) Para  $m = n$ , la matriz  $A + A^t$  es simétrica. ¿Qué sucede con  $A - A^t$ ?

8. Mostrar que los pivotes de  $A$  son también los pivotes de  $A^t$ .

ÁLGEBRA LINEAL 2024-2DO C (LM - PM - LCC)

9. Recordemos que la matriz  $E_{ij}(a)$  con  $i > j$  está definida por

$$E_{ij}(a) = (m_{kl})_{n \times n}, \quad \text{con} \quad m_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq i \text{ o } l \neq j, \text{ y } k \neq l \\ a & k = i \text{ y } l = j \end{cases}$$

a) Probar que  $E_{ij}(a)e_l$  (columna  $l$ -ésima de  $E_{ij}(a)$ ) verifica:

$$E_{ij}(a)e_l = \begin{cases} e_l, & l \neq j, \\ e_j + ae_i, & l = j. \end{cases}$$

b) Dado  $r \in \mathbb{N}$ , probar que  $[E_{ij}(a)]^r = E_{ij}(ra)$ .

c) Determinar la matriz  $[E_{ij}(a)]^{-1}$ .

d) Determinar la matriz  $E_{ij}(a)E_{\tilde{i}\tilde{j}}(b)$ , donde  $\tilde{i} > \tilde{j}$ ,  $i \leq \tilde{i}$  y  $j \leq \tilde{j}$ .

10. Encontrar la factorización  $PA = LDU$  de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Determinar los valores de  $a$  y  $b$  que conducen a un intercambio de filas y cuáles son los que hacen a la matriz singular.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ a & 8 & 3 \\ 0 & b & 3 \end{bmatrix}$$

12. Demostrar los siguientes enunciados

a) Si  $E_{ij}(-a)$  sustrae de la fila  $i$  un múltiplo de la fila  $j$  entonces  $[E_{ij}(-a)]^{-1}$  lo suma nuevamente.

b) Si  $P_{ij}$  intercambia dos filas, entonces  $P_{ij}^{-1}$  las vuelve a intercambiar, es decir  $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$ .

c) Si  $D$  es una matriz diagonal, con entradas  $d_1, \dots, d_n$  no nulas, entonces  $D^{-1}$  es una matriz diagonal con entradas  $\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}$ .

d) Si  $P$  es una matriz de permutación, entonces  $P^t = P^{-1}$ .

13. a) Hallar la factorización  $LDU$  de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

b) Usar lo realizado en el ítem anterior para resolver el sistema  $A^t x = (2, 5, 5)^t$ .