Cadenas de Markov (CM)

Es un proceso estocástico con conjuntos de instantes de observación, T, infinito numerable y espacio de estados, E, discreto.

Además

$$\forall i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \; se\ cumple$$

$$P\left(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right) = P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$$

futuro

pasado

presente

Notación:

X_n=i el proceso está en el estado i en el instante n

$$P(i,j) = P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right)$$

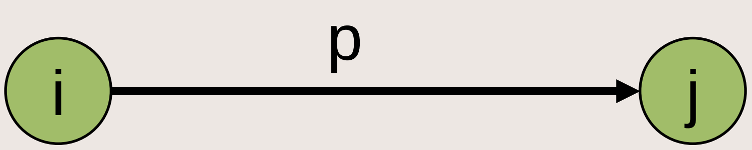
es la probabilidad de transición en un paso

$$P(i,j) \geq 0 \quad \forall i,j \in E$$

$$\sum_{j \in E} P(i,j) = \sum_{j \in E} P\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right) = 1 \quad \forall i \in E$$

Diagrama de transición de estados

- El diagrama de transición de estados de una CM es un grafo dirigido cuyos nodos son los estados de la cadena y cuyos arcos se etiquetan con la probabilidad de transición entre los estados que unen. Si dicha probabilidad es nula, no se pone arco.

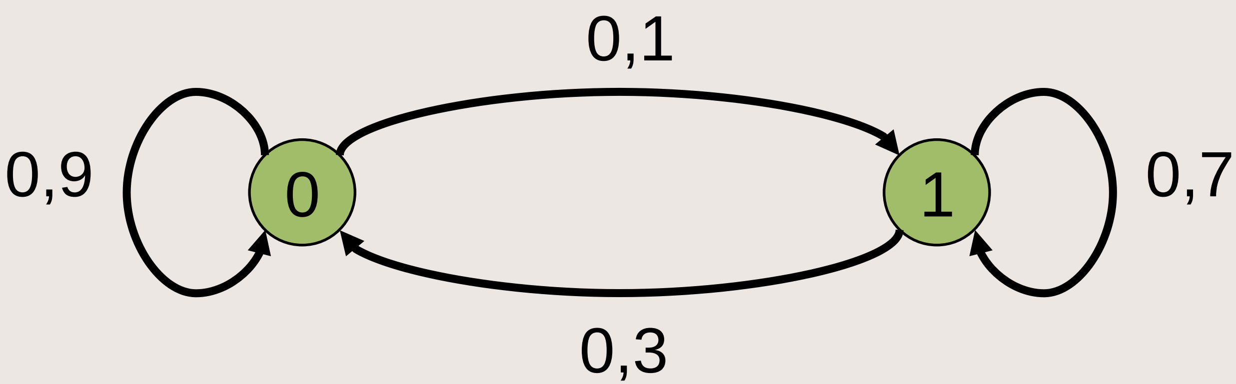


Ejemplo: línea telefónica

- Sea una línea telefónica de estados ocupado=1 y desocupado=0. Si en el instante t está ocupada, en el instante t+1 estará ocupada con probabilidad 0,7 y desocupada con probabilidad 0,3. Si en el instante t está desocupada, en el t+1 estará ocupada con probabilidad 0,1 y desocupada con probabilidad 0,9.

Ejemplo: línea telefónica

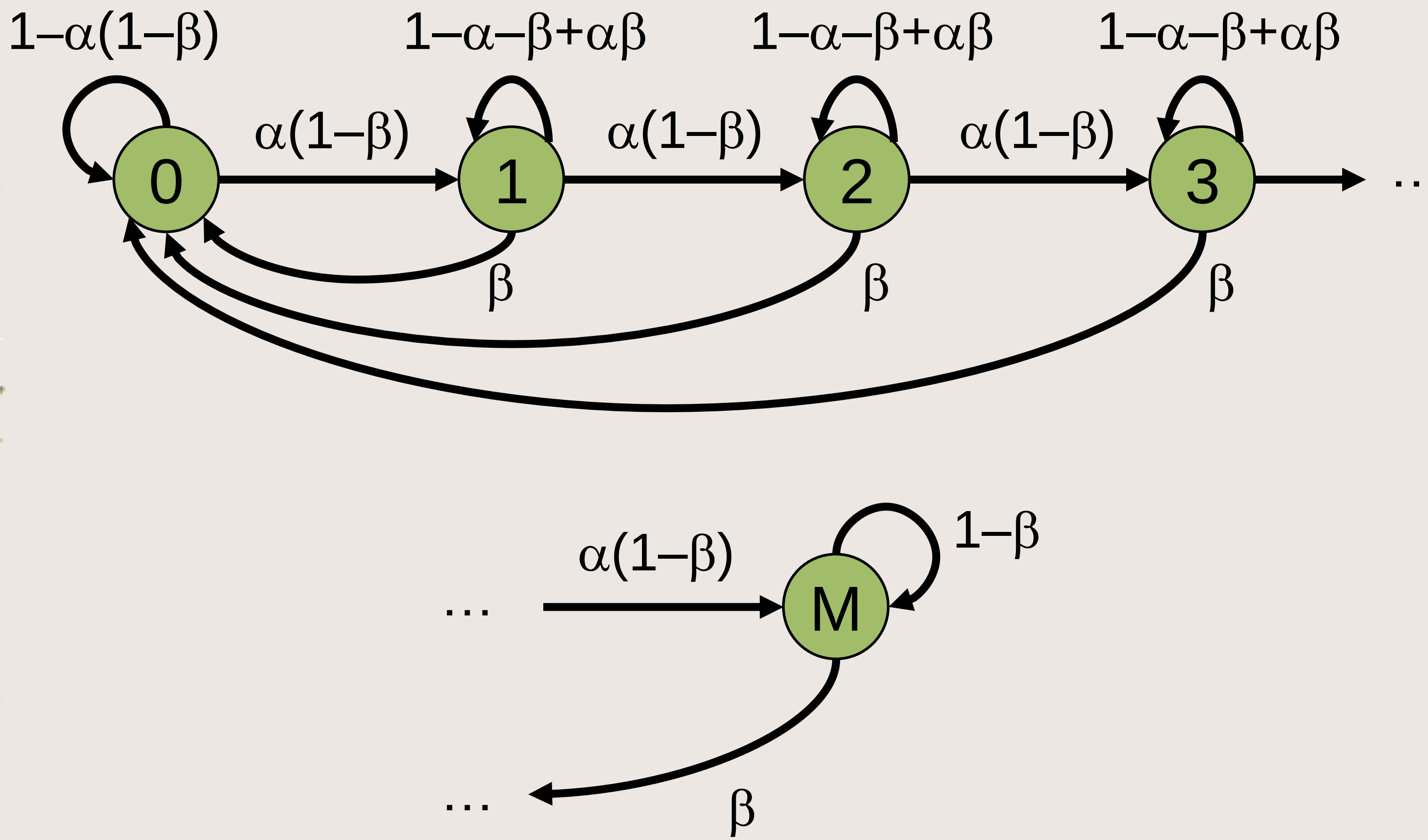
$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$



Ejemplo: *buffer* de E/S

- Supongamos que un *buffer* de E/S tiene espacio para M paquetes. En cualquier instante de tiempo podemos insertar un paquete en el *buffer* con probabilidad α o bien el *buffer* puede vaciarse con probabilidad β. Si ambos casos se dan en el mismo instante, primero se inserta y luego se vacía.
- Sea X_t=nº de paquetes en el *buffer* en el instante t. Suponiendo que las inserciones y vaciados son independientes entre sí e independientes de la historia pasada, $\{ X_t \}$ es una CM, donde E={0, 1, 2, …, *M*}

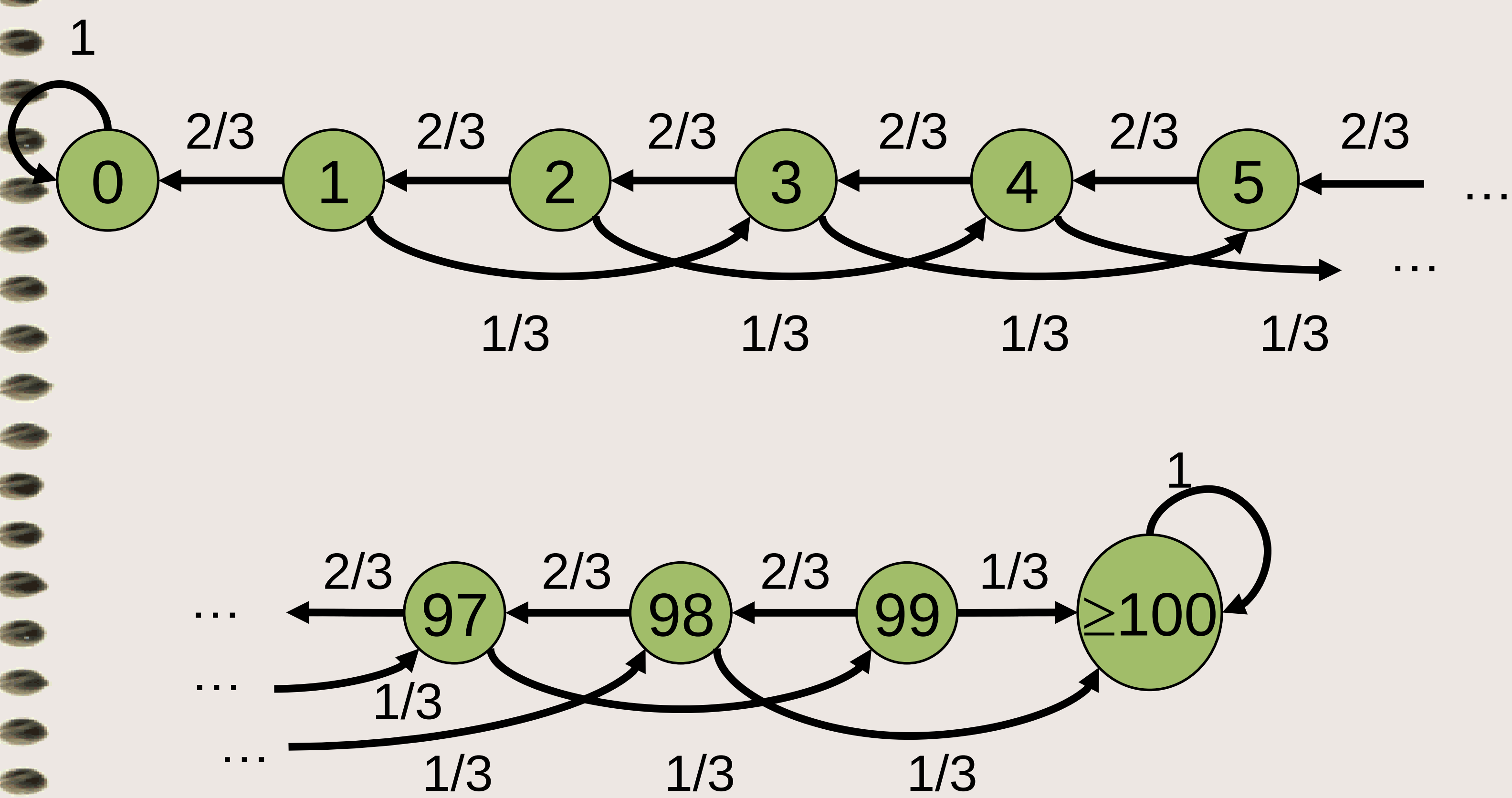
Ejemplo: *buffer* de E/S



Ejemplo: Lanzamiento de un dado

- Se lanza un dado repetidas veces. Cada vez que sale menor que 5 se pierde 1 \$, y cada vez que sale 5 ó 6 se gana 2 \$. El juego acaba cuando se tienen 0 \$ ó 100 \$.
- Sea X_t=estado de cuentas en el instante t. Tenemos que { X_t } es una CM
- E={0, 1, 2, …, 100}

Ejemplo: Lanzamiento de un dado



Propiedades de las cadenas de Markov

1. Conociendo la matriz de transición P y la distribución inicial de la cadena (distribución de X_0) podemos conocer el comportamiento completo de *X*

$$P\left(X_0=i_0,X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n\right)=P\left(i_{n-1,}i_n\right)\ldots P\left(i_0,i_1\right)P\left(X_0=i_0\right)$$

2. Para todo $n, m \in \mathbb{N}_0$ vale que:

$$P\left(X_{m+n}=j/X_m=i\right)=P^n(i,j)\ \forall i,j\in E$$

donde P^n ***es la potencia n-ésima de*** P

En particular si n=1 , $P\left(X_{m+1}=j/X_m=i\right)=P(i,j)\ \forall i,j\in E$

más propiedades.....

3. Propiedad de Chapman-kolmogorov

$$P^{n+m}(i,j)=\sum_{k\in E}P^{n}(i,k)P^{m}(k,j)\ \forall n,m$$

4. Las ecuaciones 1 y 2 indican que:

$$P\left(X_n = j\right)=\left(\pi_0 P^n\right)(j)\ \ \forall n, j\in E$$

$$donde\ \pi_0(i)=P\left(X_0=i\right)\quad \forall i\in E$$

Si queremos conocer el estado de la cadena a largo plazo.....

$$\lim_{n\to\infty}P\left(X_n = j\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\pi_0 P^n\right)(j)$$

Cuándo será posible??

Algunos nombres

Supongamos que $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ *es una cadena de Markov.*
Se desprenden algunas definiciones:

N_j: *número de visitas al estado* j.
N_j *cuenta para cuántos* $m \in \mathbb{N}_0, X_m = j$

$F_n(i,j)$: *probabilidad de llegar por primera vez a* j *partiendo de* i *en exactamente* n *pasos*

$F(i,j)$: *probabilidad de llegar de* i *a* j *en un número finito de pasos. Luego,* $1 - F(i,j)$ *será la probabilidad de no llegar nunca a* j *cuando se parte desde* i.

$R(i,j) = E_i(N_j)$: *cantidad promedio de visitas al estado* j *que la cadena realiza cuando parte de* i.

Clasificación de estados

Clasificación de los estados

- El estado j es recurrente si $F(j,j)=1$,
- En otro caso se dice transitorio.

✓ Un estado j es **transitorio** si hay probabilidad positiva de abandonarlo para siempre $\Rightarrow$ $(1-F(j,j))>0$

✓ Un estado j es **recurrente** si el tiempo promedio que pasa entre dos visitas sucesivas a él es finito.

más sobre clasificación de los estados….

- Un estado recurrente se dice periódico de período δ cuando:

$$\delta = mcd\left\{n \geq 1 : P^n\left(j, j\right) > 0\right\} \quad y \quad \delta \geq 2$$

$$Si \quad \delta = 1,$$

el estado j se dice **aperiódico.**

✓Decimos que el estado j es **accesible** desde i si para algún $n \in \mathbb{N}_0\ P^n\left(i, j\right) > 0 \quad \left(i \to j\right)$

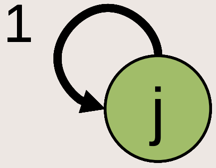
✓Si i es accesible desde j y viceversa, se dice que i y j están comunicados. $(i \leftrightarrow j)$

expresado más formal…..

- Probabilidad de alcanzar un estado:

$$\forall i, j \in E, \quad P^n(i,j) = P\left[X_n = j \text{ para algún } n > 0 \middle/ X_0 = i \right]$$

- Diremos que un estado j∈E es accesible o alcanzable desde el estado i∈E sii $P^n(i,j) \neq 0$. Esto significa que existe una sucesión de arcos (camino) en el grafo que van desde i hasta j.
- Un estado j∈E es absorbente sii p(j,j)=1.



Conjuntos cerrados

- ✓ Un conjunto de estados es **cerrado** si ningún punto del estado que esté afuera del conj. es accesible desde alguno de los estados del conjunto.

Formalicemos…..

- Sea $C \subseteq E$, con $C \neq \emptyset$. Diremos que C es cerrado sii $\forall i \in C\ \forall j \notin C$, j no es alcanzable desde i, o lo que es lo mismo, $P^n(i,j)=0$. En particular, si C={i}, entonces i es absorbente.
- E siempre es cerrado.
- Un subconjunto cerrado $C \subseteq E$ se dice que es irreducible sii no contiene ningún subconjunto propio cerrado.

Estados recurrentes y transitorios

- Si E es irreducible, se dice que la CM es irreducible. En el grafo, esto se visualiza si dados i,j cualesquiera, j es alcanzable desde i.

- Diremos que un estado j$\in$E es recurrente sii $F(j,j) = 1$

- En otro caso diremos que j es transitorio. Se demuestra que una CM sólo puede pasar por un estado transitorio como máximo una cantidad finita de veces. En cambio, si un estado es recurrente, entonces lo visitaremos infinitas veces.

…más sobre estados recurrentes y transitorios

- **Proposición:** Sea $C \subseteq E$ cerrado, irreducible y finito. Entonces $\forall i \in C$, i es recurrente
- **Ejemplos:** La CM de la línea telefónica es irreducible. Como además es finita, todos los estados serán recurrentes. Lo mismo ocurre con el ejemplo del *buffer*
- **Ejemplo:** En el lanzamiento del dado, tenemos los subconjuntos cerrados $\{0\}$, $\{\geq 100\}$, con lo que la CM no es irreducible. Los estados 0 y ≥ 100 son absorbentes, y el resto son transitorios

Importante

- Si j es **transitorio**, $R(j,j)<\infty$,

  $R(i,j)$ es la suma de $P^n(i,j)$ para todo n
  .. por lo tanto $R(i,j)$ puede ser finito sólo si
  $P^n(i,j)\to 0$ cuando $n\to\infty$

- Si j es **recurrente**, luego $R(j,j)=+\infty$,
  entonces $P^n(i,j)$ será positiva en el límite.

para recordar….

- Teorema:

(a) Si j es transitorio, luego para cualquier i ϵ E

$$\lim_{n \to \infty} P^n(i, j) = 0$$

(b) Si j es recurrente aperiódico, luego:

$$\pi(j) = \lim_{n \to \infty} P^n(i, j) > 0$$

Y para cualquier i ϵE,

$$\lim_{n \to \infty} P^n(i, j) = F(i, j)\pi(j)$$

Estados recurrentes y transitorios

- **Proposición:** Sea $i \in E$ recurrente, y sea $j \in E$ un estado accesible o alcanzable desde i. Entonces j es recurrente.
- **Demostración:** Por reducción al absurdo, supongamos que j es transitorio. En tal caso, existe un camino A que sale de j y nunca más vuelve. Por ser j alcanzable desde i, existe un camino B que va desde i hasta j. Concatenando el camino B con el A, obtengo el camino BA que sale de i y nunca más vuelve. Entonces i es transitorio, lo cual es absurdo porque contradice una hipótesis.

Recordar…

- **Lema:**

  Para cada estado recurrente j existe un conjunto C irreducible cerrado el cual incluye a j.
- **Teorema**:

  En una CM los estados recurrentes pueden ser divididos de una única manera, en conjuntos cerrados irreducibles $C_1, C_2, \ldots$.

Cadenas….

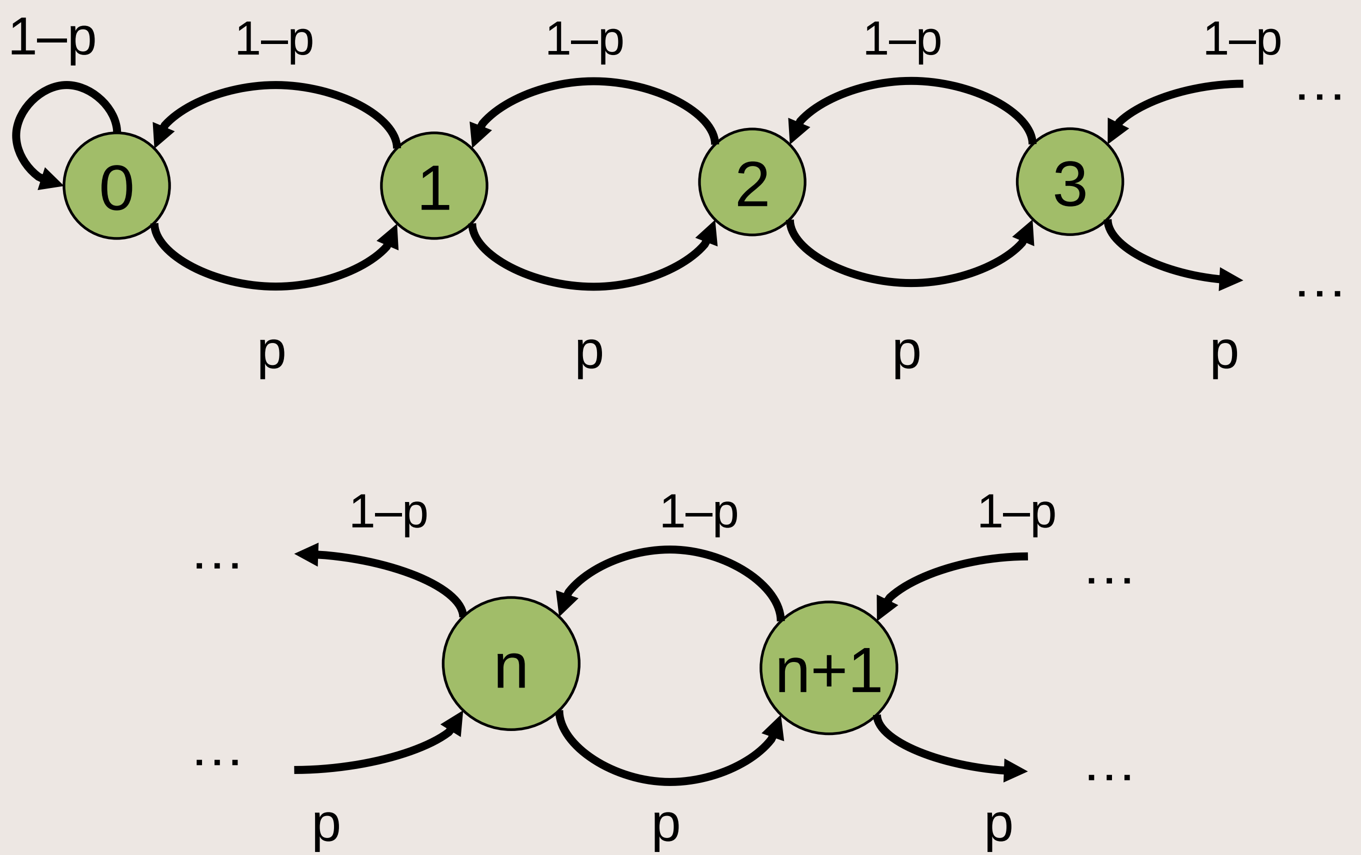
- Además del conjunto cerrado $C = C_1 \cup C_2 \cup ....$ de estados recurrentes, las cadenas en general contienen estados transitorios. Esto es posible porque a los estados recurrentes se puede acceder desde un estado transitorio (pero no al reves!!!!).

Si restringimos nuestra atención a uno de los conjuntos cerrados, obtenemos una cadena de Markov irreducible.

Cadenas recurrentes y transitorias

- **Proposición:** Sea *X* una CM irreducible. Entonces, o bien todos sus estados son recurrentes (y decimos que *X* es recurrente), o bien todos sus estados son transitorios (y decimos que *X* es transitoria).
- **Ejemplo:** Estado de cuentas con un tío rico (*fortunes with the rich uncle*). Probabilidad p de ganar 1 $ y 1–p de perder 1 $. Cuando me arruino, mi tío me presta dinero para la próxima tirada:

Cadenas recurrentes y transitorias



Cadenas recurrentes y transitorias

- Esta cadena es irreducible e infinita. Se demuestra que es transitoria sii $p>0,5$ y recurrente en otro caso ($p\leq 0,5$)

- La cadena es transitoria cuando la “tendencia global” es ir ganando dinero. Esto implica que una vez visitado un estado, al final dejaremos de visitarlo porque tendremos más dinero.

Corolarios….

- Sea C un conjunto irreducible cerrado con un número de estados finito. Luego todos los estados en C son recurrentes.
- Si C es irreducible cerrado con un número finito de estados, luego no tiene estados transitivos.
- Si E es finito,
  - luego al menos un estado es recurrente, y
  - todos los estados no pueden ser transitivos

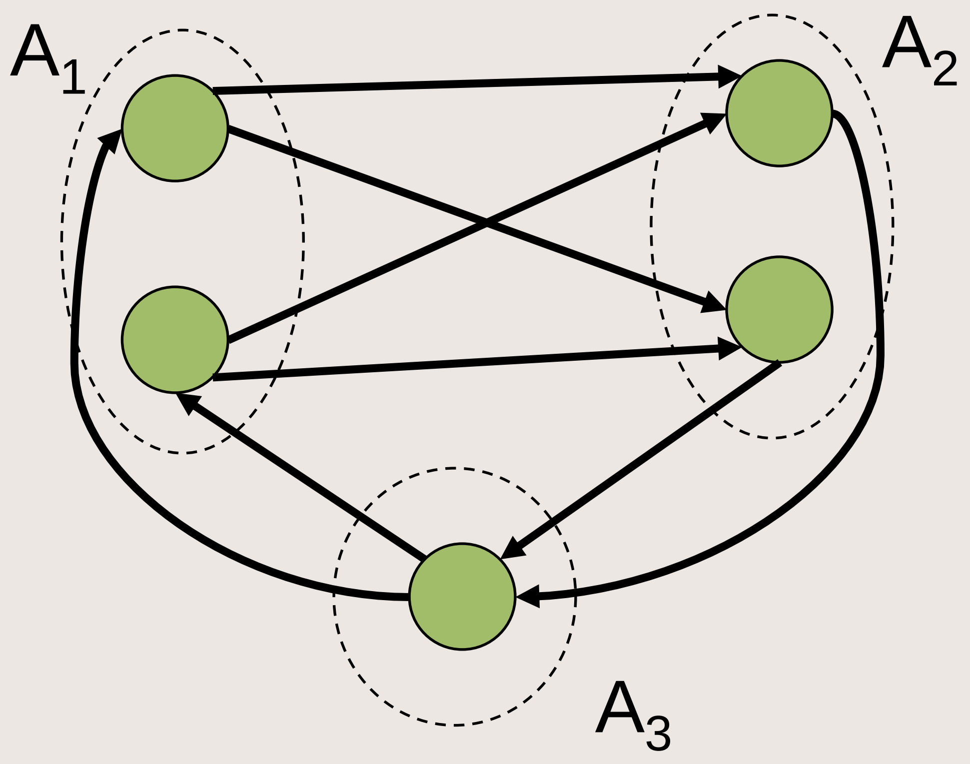
Periodicidad

- **Proposición:** Sea *X* una CM irreducible. Entonces, o bien todos los estados son periódicos de periodo δ (y decimos que *X* es periódica de periodo δ), o bien ningún estado es periódico (y decimos que *X* es aperiódica)

Lema: Sea X es una CM irreducible con estados recurrentes periódicos de período δ. Luego los estados pueden dividirse en δ conjuntos disjuntos (A_1, A_2, …,A_δ), tales que la P(i,j)=0 a menos que i pertenezca a A_1 y j a A_2, o i a A_2 y j a A_3 ,o ……i a A_δ y j a A_1.

Periodicidad

- CM periódica de periodo k=3:



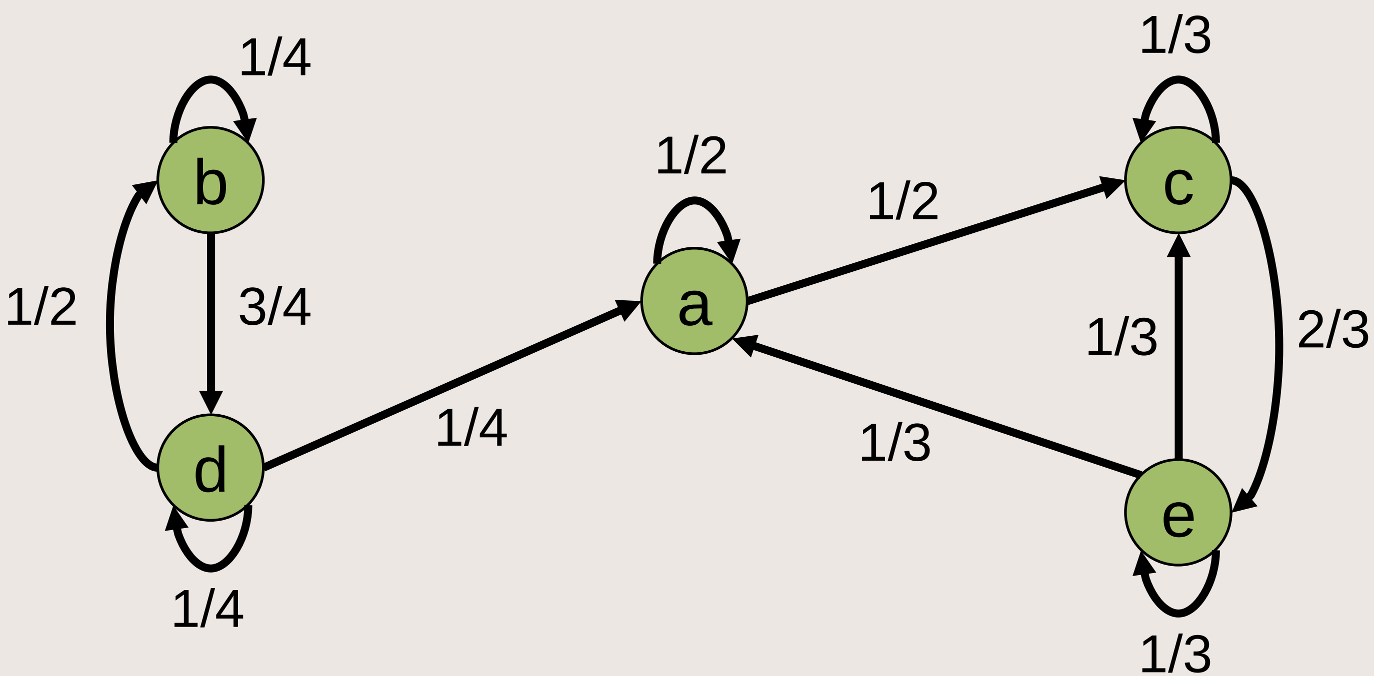
Cadenas ergódicas

- Sea X una CM finita. Diremos que X es ergódica si es irreducible, recurrente y aperiódica
- **Ejemplo:** Analizar la siguiente CM, con E={a, b, c, d, e}:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ejemplos

- grafo:

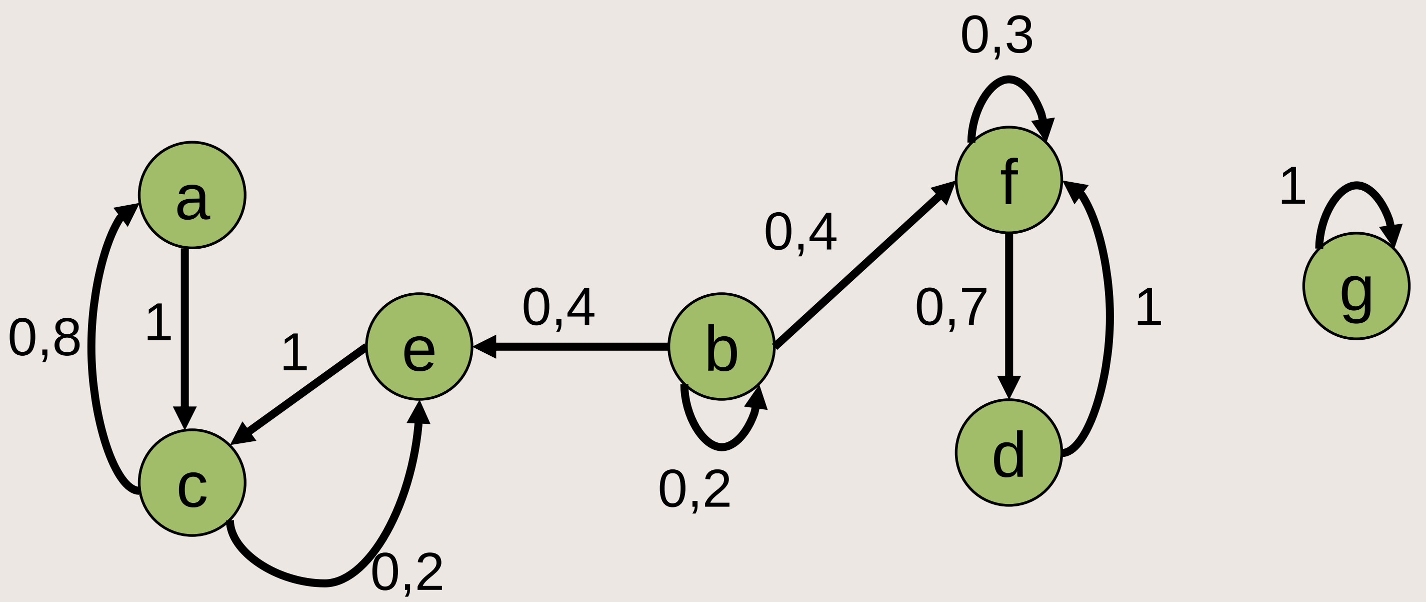


Ejemplos

- Hallar los conjuntos cerrados
  - Tomado un estado i, construimos un conjunto cerrado C_i con todos los alcanzables desde él en una o más etapas (el propio i también se pone):
  - C_a={a, c, e}=C_c=C_e
  - C_b={b, d, a, c, e}=C_d=E
  - La CM no será irreducible, ya que C_a es un subconjunto propio cerrado de E

Ejemplos

Grafo

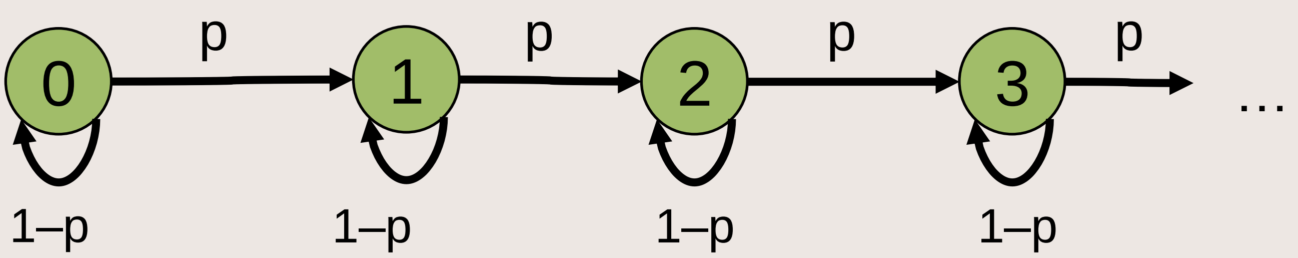


A pensar!!!....

- Hallar los conjuntos cerrados
  - $C_a=\{a, c, e\}=C_c=C_e$
  - $C_b=\{a, b, c, d, e, f\}$
  - $C_f=\{f, d\}=C_d$
  - $C_g=\{g\}$
  - E
- Clasificar los estados
  - Recurrentes: a, c, d, e, f, g
  - Transitorios: b
  - Periódicos: a, c, e (todos de periodo 2)
  - Absorbentes: g

Ejemplos

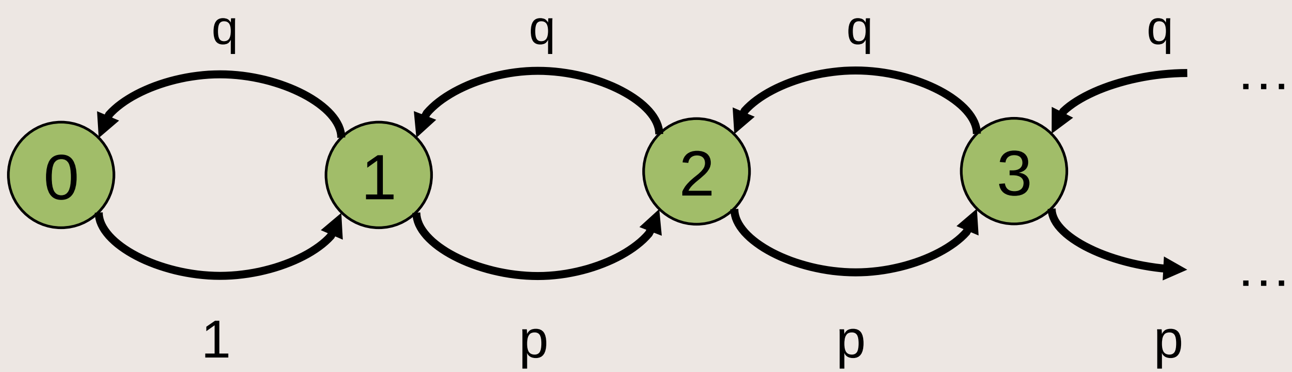
- Número de éxitos al repetir indefinidamente una prueba de Bernoulli (probabilidad p de éxito). No es CM irreducible, porque por ejemplo $C_1=\{1, 2, 3, \ldots\}$ es cerrado. Todos los estados son transitorios.



Ejemplos

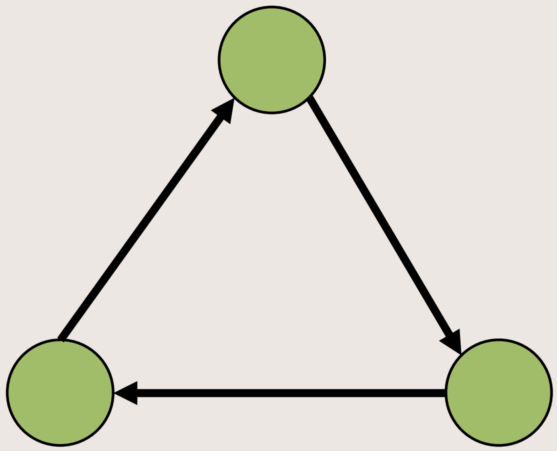
- ***Caminata aleatoria:***

Es una CM irreducible y periódica de periodo 2. Se demuestra que si $p \leq q$, todos los estados son recurrentes, y que si $p > q$, todos son transitorios.



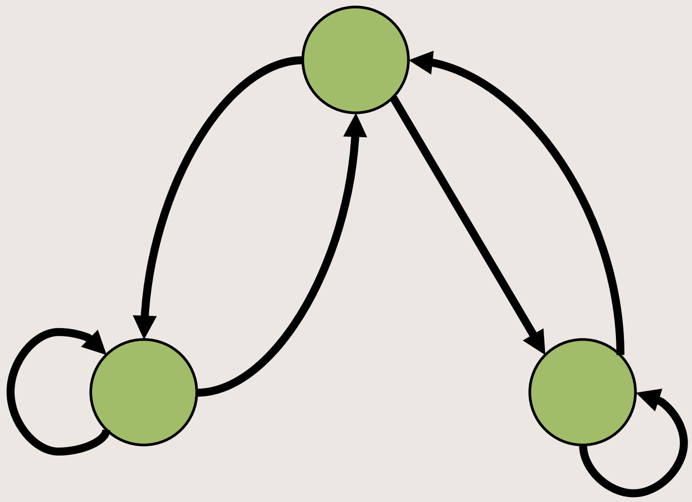
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



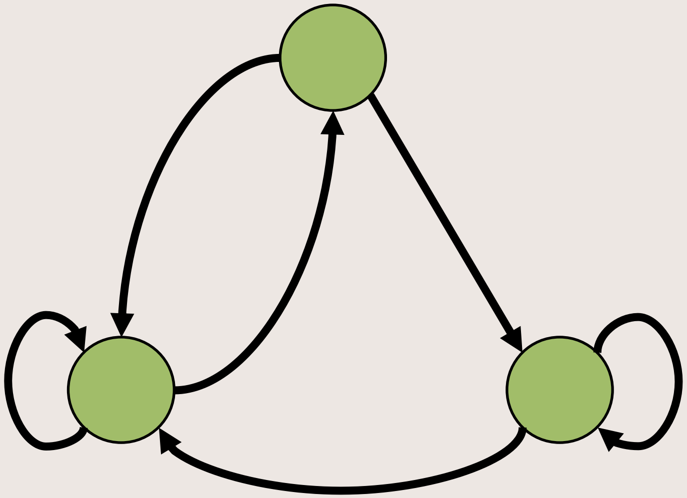
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente (ergódica).



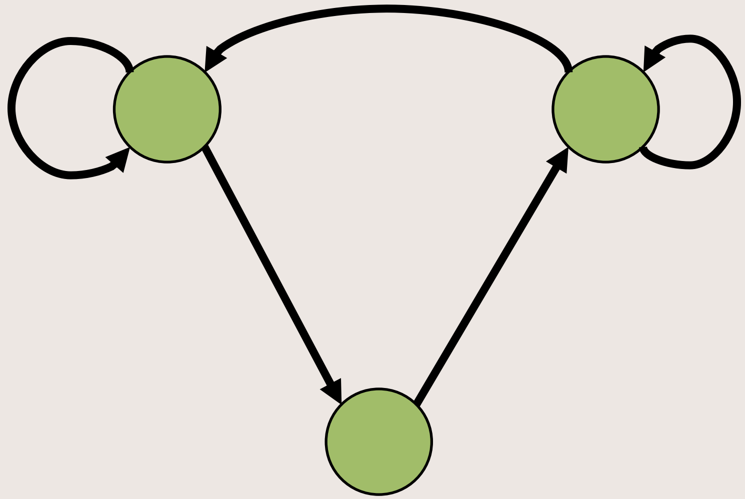
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente (ergódica)



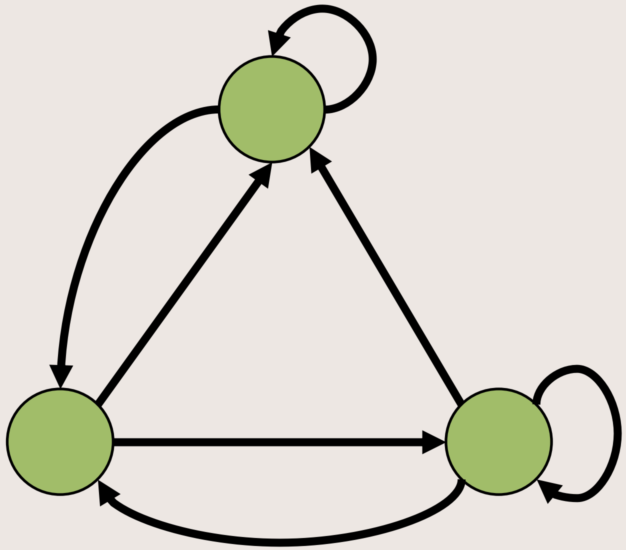
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente (ergódica)



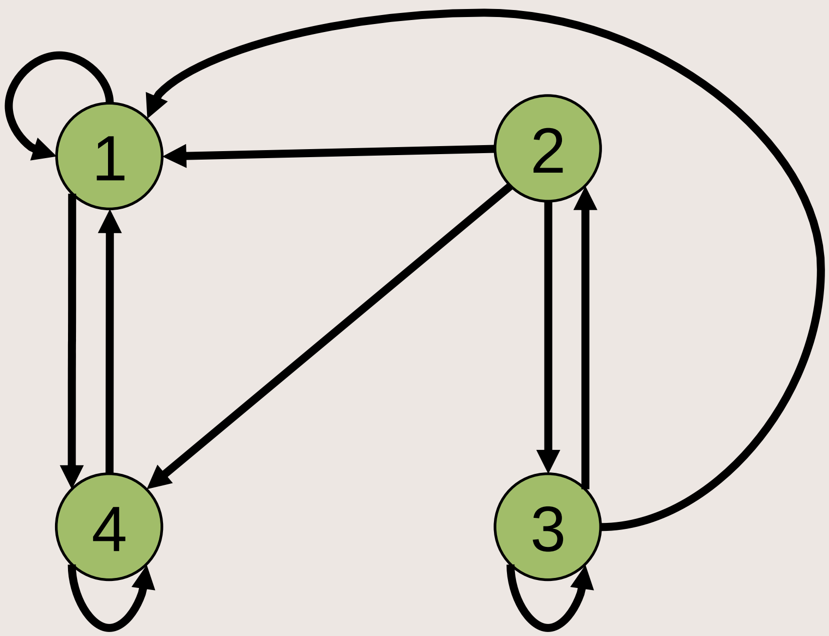
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, aperiódica, recurrente (ergódica)



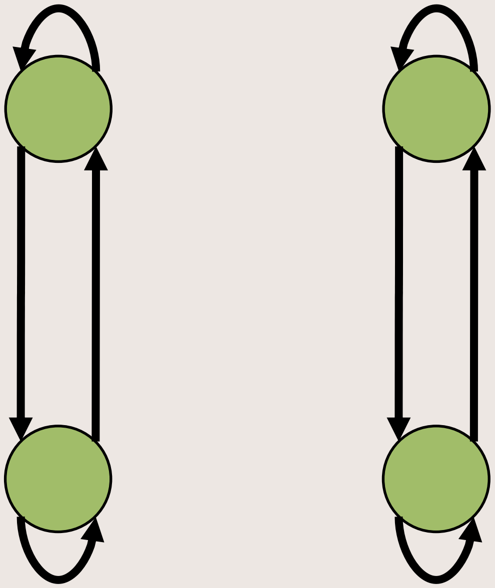
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1 y 4 son recurrentes; 2 y 3 son transitorios.



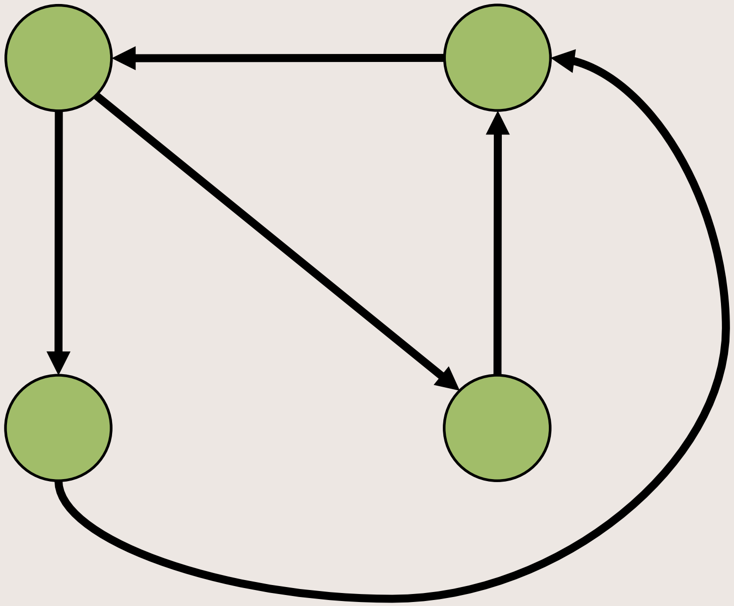
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Todos los estados son recurrentes y ninguno es periódico.



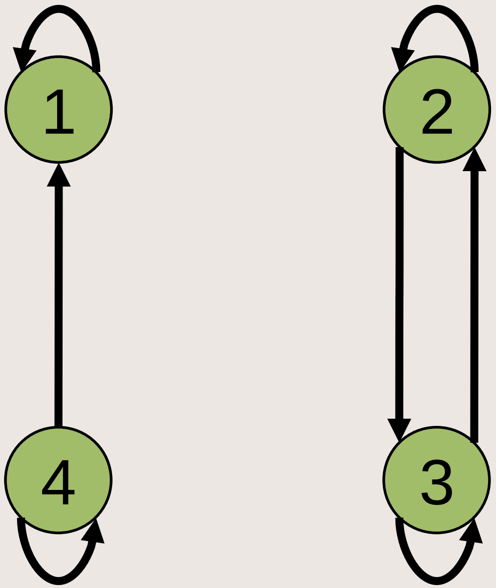
Ejemplos

- La siguiente CM es irreducible, recurrente y periódica de periodo 3. No es ergódica.



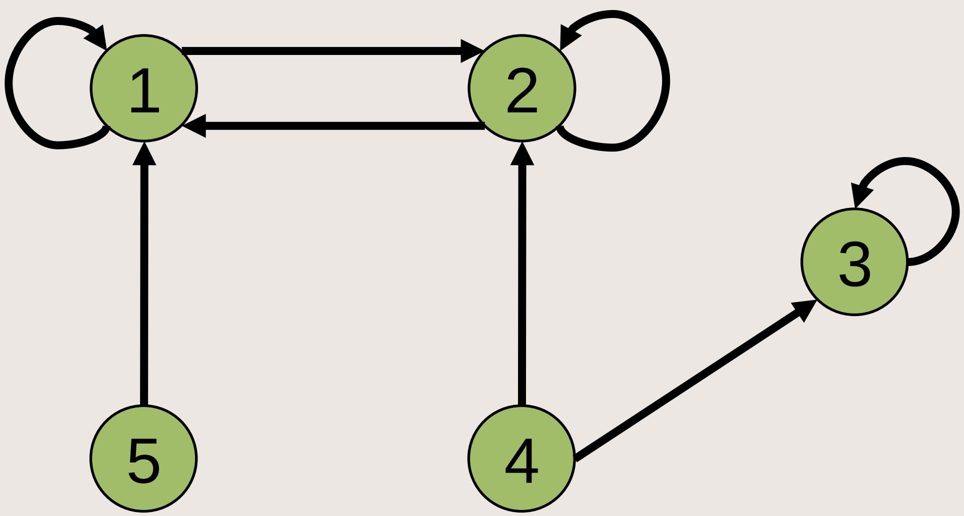
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 es transitorio, y el resto recurrentes. 1 es absorbente.



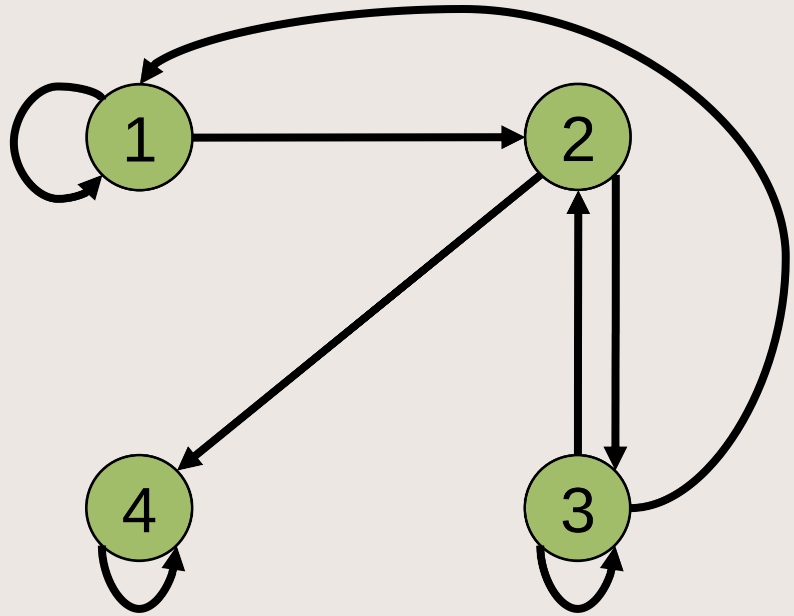
Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible, y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. Ningún estado es periódico. 4 y 5 son transitorios, y el resto recurrentes. 3 es absorbente.



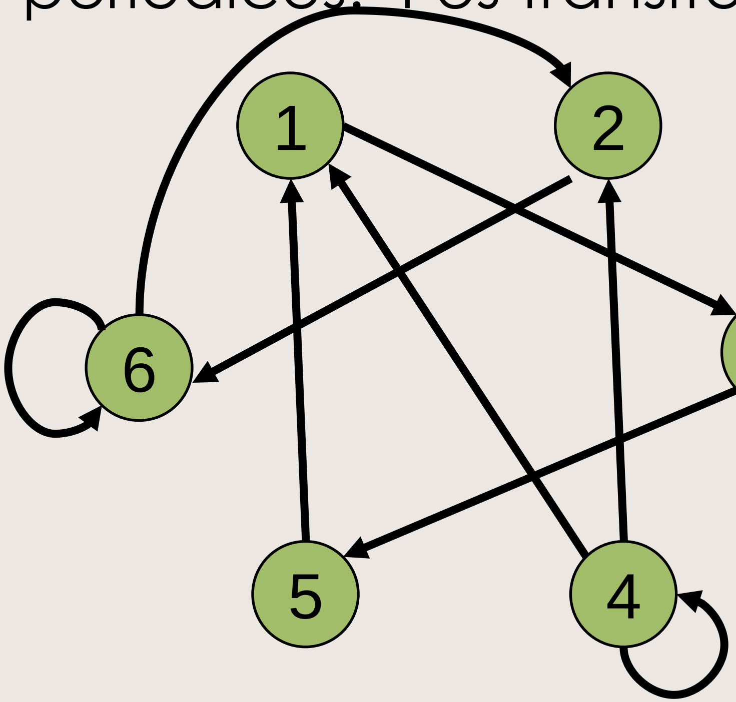
Ejemplos

- La siguiente CM es no es irreducible, y por tanto tampoco de ninguno de los demás tipos. 4 es absorbente, y el resto son transitorios.



Ejemplos

- La siguiente CM no es irreducible y por tanto no es de ninguno de los demás tipos. 1,3 y 5 son recurrentes de periodo 3. 2 y 6 son recurrentes, pero no periódicos. 4 es transitorio.



Comportamiento límite…

Recordar

- Si i y j son ambos recurrentes y ambos pertenecen al mismo cerrado, se tiene F(i,j)=1
- Si i es recurrente y j transitivo, o si i y j son recurrentes pero pertenecen a conjuntos irreducibles diferentes, se tiene F(i,j)=0
- Si i y j son ambos transitorios, luego R(i,j)<∞, entonces:

$$F(j,j)=1-\frac{1}{R(j,j)} \quad F(i,j)=\frac{R(i,j)}{R(j,j)}$$ para i ≠ j.

Pero.....

- Si *i es transitivo* y *j es recurrente*, es útil el siguiente lema:

  Sea C un conjunto de estados recurrentes irreducibles. Luego para cualquier estado transitorio i,

  $$F(i, j) = F(i, k) \qquad \forall j, k \in C$$

- Entonces es necesario ordenar convenientemente la matriz de transición, etiquetando primero los estados recurrentes C_1, C_2....y luego los transitivos y reescribirla de la forma

reordenando….

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 & 0 \\ \vdots \; \vdots & \vdots \; \vdots & \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ b_1 & b_2 \cdots b_m & Q \end{pmatrix}$$

$$b_j(i) = \sum_{k \in C_j} P(i,k) \quad i \in D \quad D: \textit{conjunto de estados transitivos}$$

Q : matriz obtenida a partir de P, eliminando todas las filas y columnas correspondientes a los estados recurrentes.

...en forma más sintética!!!

$$P' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & Q \end{pmatrix}$$

Donde B la matriz formada con las columnas de b_1, b_2,…, de la forma

$$B(i, j) = \sum_{k \in C_j} P(i,k) \quad i \in D,\ j = 1, 2, ..$$

transitorio vs recurrente y transitorio-transitorio

- Calculando: $G = SB$

  para cada estado transitorio i y clase C_j recurrente se tiene:

$$G(i, j) = F(i,k) \quad \forall k \in C_j$$

Donde

$$S = \left(I - Q\right)^{-1}$$

Es decir, es la matriz que se obtiene al suprimir de R las filas y las columnas correspondientes a los estados recurrentes

Pensemos….

- Si hay sólo una clase recurrente y un número finito de estados transitorios la matriz B es un vector y $G=1$

Corolario: Sea i un estado transitorio y a partir del cual sólo un número finito de estados transitorios pueden ser alcanzados. Además supóngase que hay una sola clase recurrente C la cual puede ser alcanzada desde i. Luego

$$F(i,j)=1 \quad \forall j \in C$$

Estados recurrentes y probabilidades límite

- Sea X una CM irreducible y aperiódica con matriz de transición P. Luego sus estados son recurrentes si y sólo si existe solución al sistema:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in E} \pi_i P(i.j) \quad j \in E \\ \sum_{i \in E} \pi_i = 1 \end{cases}$$

Cuando existe solución al sistema, $\pi_j > 0, \quad \forall i, j \in E,$ es solución única.

Comportamiento límite

Entonces....

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P^n(i,j) \quad \forall i,j \in E$$

Pensemos…

- Matricialmente:

$$\pi = \pi P$$

Esto significa que si π existe, es un autovector a la izquierda de la matriz P asociado a un autovalor igual a 1. La recurrencia positiva de los estados está relacionada con que 1 sea autovalor de P.

Si π existe, se cumple:

Distribución invariante

$$\pi P^2 = (\pi P) P = \pi P = \pi$$

Analogamente

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = ... = \pi P^n = ...$$

Entonces se dice que π es un vector invariante. Además como

$$\sum_{i \in E} \pi_i = 1$$

se lo denomina ***distribución invariante***

Corolario..

Si X es una CM irreducible y aperiódica con conjunto de estados finito, luego:

$$\pi P = \pi \qquad \pi \underset{\sim}{1} = 1$$

tiene una única solución. La solución es estrictamente positiva, y

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} P^n(i, j) \quad \forall i, j \in E$$

Un poquito más!!

- Si j es un estado positivamente recurrente aperiódico existe

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j)$$

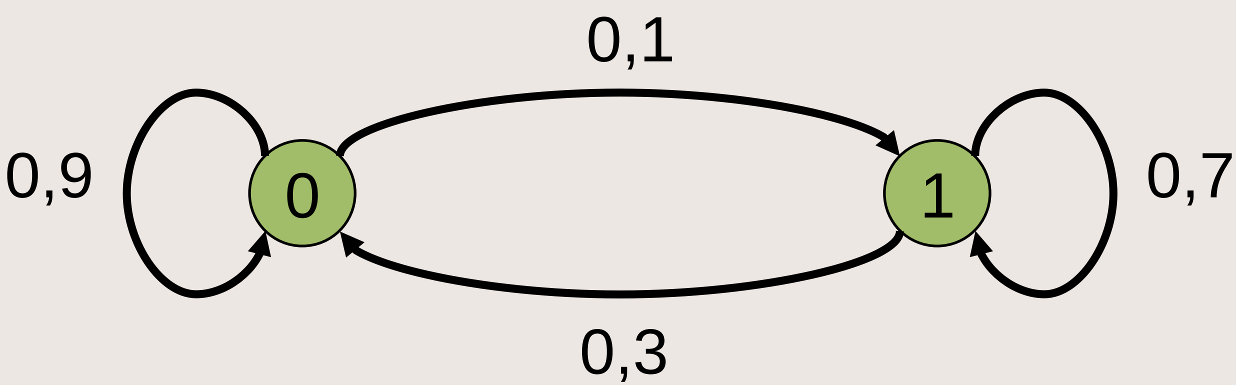
Vamos a considerar un conjunto irreducible que lo contenga a j y vamos a aplicar la distribución invariante al conjunto de X restringido. Entonces

$\forall i \in E, se\ tiene:$

$$\lim_{n\to\infty} P^n(i,j) = F(i,j) \lim_{n\to\infty} P^n(j,j)$$

Ejemplos sencillos…

- **Ejemplo:** Hallar la distribución invariante (si existe) del ejemplo de la línea telefónica.



- 1° Comprobar que la CM es finita y ergódica, para así saber que existe la distribución invariante. Lo es, con lo cual dicha distribución existe.

Continuamos con el ejemplo….

- 2º Plantear las ecuaciones de equilibrio (una por nodo):

$$Nodo\,0: \quad \pi_0 = 0,9\pi_0 + 0,3\pi_1$$

$$Nodo\,1: \quad \pi_1 = 0,1\pi_0 + 0,7\pi_1$$

- 3º Plantear la ecuación normalizadora:

$$p_0 + p_1 = 1$$

Ejemplos

- 4º Resolver el sistema. Utilizar un algoritmo estándar de sistemas de ecuaciones lineales para resolver todas las ecuaciones conjuntamente.
- El sistema debe tener solución única. En nuestro caso,

$$p_0 = 0{,}75; \quad p_1 = 0{,}25$$

También se puede armar el sistema tomando sólo una de las ecuaciones planteadas en el 2º paso, junto con la ecuación planteada en el paso 3º .

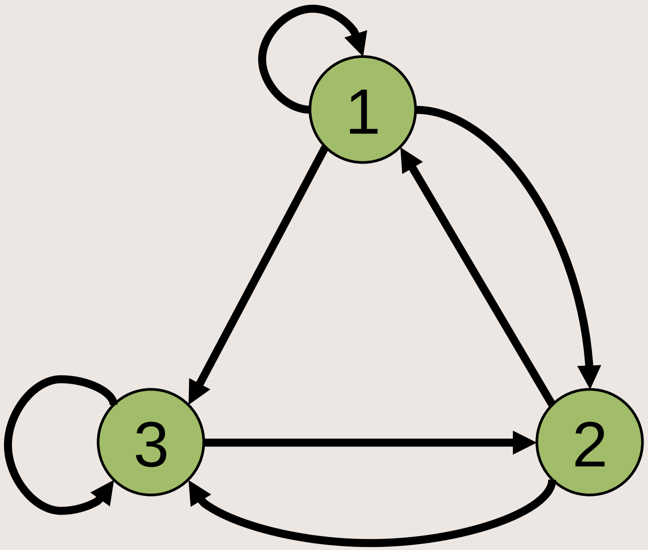
Otro ejemplo sencillo….

- **Ejemplo:** Hallar, si existe, la distribución estacionaria para esta CM con E={1, 2, 3}:

$$P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Ordenar las ideas!!...

- 1º Construcción del grafo y así comprobamos más fácilmente que la CM es finita y ergódica:



y calcular…..

- 2º y 3º Planteamos las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,3 & 0,6 & 0\\ 0,5 & 0 & 0,4\\ 0,2 & 0,4 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{pmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

- 4º Resolvemos.

$$\left(\frac{6}{23}, \frac{7}{23}, \frac{10}{23}\right)^T$$

A integrar conocimientos!!

- Sea X una cadena de Markov con espacio de estados E={1,2,3,4,5,6,7}

  y matriz de transición P. Hallar el

  $$P^{\infty} = \lim_{n \to \infty} P^n$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Referencias

- Cinlar Erhan. Introuction to stochasstic processes. Prentioce Hall.1975
- Ezequiel López Rubio. Cadenas de Markov. Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación. Universidad de Málaga.2008
- Rincón, Luis. Introducción a los Procesos Estocásticos. Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias UNAM.. 2012