Álgebra Lineal (R211 - CE9) 2024

4.5 Subespacios T-invariantes

Si E es un autoespacio, es claro que $T(E) \subset E$. Y si $V = \oplus E_i$, y T diagonalizable, hemos visto que podemos pensar en la restricción de T a cada autoespacio. Esta situación se generaliza mediante el concepto de sev T-invariante, y podemos replicar algunos resultados. La idea de descomponer un objeto de forma que se puedan estudiar las partes por separado, y recíprocamente, armar un objeto a partir de sus partes, se utiliza muchísimo en matemática. Por ejemplo, la rama del análisis armónico es básicamente esta idea tan simple en diversos contextos.

Para poder restringir una transformación $T \in L(V)$ en un subespacio $U \subset V$, necesitamos que $T|_U \in L(U)$. Lo cual nos lleva a la siguiente definición:

Definición 1 *V F-ev, $T \in L(V)$, $U \subset V$. Decimos que U es un subespacio T-invariante de V o que es invariante por T si $T(U) \subset U$.*

Ejemplo 1

1. *V, $\{\overline{0}\}$ son siempre T-invariantes.*

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. *Si $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ y $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ base canónica. Son invariantes por T: $span\{e_1\}, span\{e_1, e_2\}, span\{e_3\}, span\{e_4\}, span\{e_3, e_4\}, span\{e_1, e_3, e_4\}$.*

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
   - *Sev invariantes de dimensión 0: $\{\overline{0}\}$.*
   - *Sev invariantes de dimensión 2: $\mathbb{R}^2$.*
   - *Sev invariantes de dimensión 1: $U = span\{v\}$ es T_A-invariante sii $v \neq \overline{0}$ y $T_A v = Av \in U$ sii $v \neq \overline{0}$ y existe $\lambda \in F$ tq $Av = \lambda v \in U$ sii v es autovector de A. Luego $U = span\{(0,1)\}$ (EJERCICIO).*

Tenemos también los siguientes ejemplos de sev invariantes:

Proposición 1 *V F-ev, $T \in L(V)$.*

1. *$ker(T)$, $Im(T)$ son T-invariantes.*
2. *$U \subset V$, U es $T-$invariante de dimensión $dim U = 1$ sii $U = span\{v\}$ con v autovector de T.*
3. *U, W sev de V T-invariantes. Entonces $U \cap W$ y $U + W$ son sev T-invariantes.*

Demostración: EJERCICIO.

$\square$

Estudiaremos a continuación el comportamiento de los polinomios minimal y característico en un sev invariante por T.

Proposición 2 *V F-ev, $dimV = n$, $T \in L(V)$, $U \subset V$ sev T-invariante. Si $T|_U : U \to U$ es la función restricción, entonces:*

1. $m_{T_U} | m_T$.
2. $\chi_{T_U} | \chi_T$.

Demostración: Sea $s = dimU$ y $B_U = \{v_1, \dots, v_s\}$ base de U. Extendemos a una base $B = \{v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n\}$.

1. $m_{T_u} = m.c.m.\{m_{v_1}, \dots, m_{v_s}\}$ y $m_T = m.c.m.\{m_{v_1}, \dots, m_{v_n}\}$. Como $m_{v_i} | m_T$, tenemos que $m_{T|_U} | m_T$.
2. $[T]_B = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$, donde $A = [T|_U]_{B_U} \in F^{s \times s}$.

   Luego $\chi_T = \chi_{[T]_B} = det \begin{pmatrix} XI_s - A & -B \\ 0 & XI_{n-s} - C \end{pmatrix} = det(XI_s - A) det(XI_{n-s} - C) = \chi_{[T|_U]_{B_U}} Q(X)$.
   Sigue que $\chi_{[T|_U]_{B_U}} = \chi_{T|_U} | \chi_T$.

$\square$

Sea V es un F-ev de dimensión $dimV = n$, $T \in L(V)$ y $U, W \subset V$ son sev T-invariantes tales que $V = U \oplus W$ con $dimU = s, dimW = t$ y $B = B_U \cup B_W$. Tenemos que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_U]_{B_U} & 0 \\ 0 & [T|_W]_{B_W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

con $A \in F^{s \times s}$ y $A_2 \in F^{t \times t}$. Es decir, la forma matricial de la transformación T es diagonal por bloques, donde cada bloque corresponde a un sev invariante. Esto nos permite trabajar cómodamente con cada sev invariante. Esta observación conduce a la siguiente definición:

Definición 2 *V F-ev, $T \in L(V)$, $U \subset V$ sev T-invariante. Un **complemento invariante** para U es un sev $W \subset V$ tal que W es T-invariante y $U \oplus W = V$.*

Dado un sev invariante por T, éste no siempre tiene complemento invariante:

Ejemplo 2 *$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (0, x)$. $U = span\{(0, 1)\}$ es T-invariante (EJERCICIO. Ayuda: calcular $kerT$). U no admite complemento invariante: si $W \subset \mathbb{R}^2$ es tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^2$, entonces $dimW = 1$ y W es T-invariante, luego $W = span\{v\}$ con v autovector de T. Pero los únicos autovectores de T son los de U, luego debe ser $v \in U$, que es una contradicción.*

De tenerlo, ambos polinomios característico y minimal pueden ser calculados a partir de los característicos y minimales, respectivamente, de cada restricción a cada sev invariante:

Proposición 3 *V F-ev, $dimV = n$, $T \in L(V)$, $U, W \subset V$ sev T-invariantes tq $U \oplus W = V$.Entonces:*

1. $\chi_T = \chi_{T|_U} \chi_{T|_W}$.
2. $m_T = m.c.m.\{m_{T|_U}, m_{T|_W}\}$.

Demostración: Sean $s = dimU$ y $t = dimW$.

1. EJERCICIO (Ayuda: releer página anterior).

2. Sea $p = m.c.m.\{m_{T|_U}, m_{T|_W}\}$. Como $m_{T|_U} | m_T$ y $m_{T|_W} | m_T$ tenemos que $p | m_T$. Además, de (1), como $m_{T_U} | p$, $p(A_1) = 0 \in F^{s \times s}$, $m_{T_W} | p$, $p(A_2) = 0 \in F^{t \times t}$ y luego $p([T]_B) = \begin{pmatrix} p(A_1) & 0 \\ 0 & p(A_2) \end{pmatrix} = 0 \in F^{n \times n}$. Resulta $m_T | p$, luego $m_T = p$.

$\square$