Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 8: Aproximación de funciones por polinomios.

---

1. Halle los polinomios de Taylor (del orden indicado y en el punto indicado) para cada una de las siguientes funciones:

   a) $f_1(x) = xe^x, \quad n = 5, a = 1.$

   b) $f_2(x) = x^5 + x^3 + x, \quad n = 4,\ a = 0$

   c) $f_3(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \quad n = 3,\ a = 0.$

   d) $f_4(x) = x \operatorname{sen} x, \quad n = 9,\ a = 0.$

2. Escriba cada uno de los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-1)$. Ayuda: Piense en el polinomio de Taylor alrededor de 1.

   a) $x^2 - 4x - 9$ *b)* $x^4 - 12x^3 - 44x^2 + 2x + 1$ *c)* x^5

3. Muestre que los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0, verifican las igualdades correspondientes:

   a) Para $f_1(x) = \operatorname{sen}(3x)$ $\quad P_{2n-1,0}(x) = P_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

   b) Para $f_2(x) = \operatorname{senh}(x)$ $\quad P_{2n-1,0}(x) = T_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$

   c) Para $f_3(x) = (1+x)^\alpha$ $\quad P_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k,$ donde $\displaystyle\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$

   d) Para $f_4(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ $\quad P_{2n,0}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} 2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}.$ Recuerde que: $\cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

4. Suponga que a_i y b_i son los coeficientes de Taylor en a de f y g respectivamente. Es decir $a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ y $b_i = \frac{g^{(i)}(a)}{i!}$.

   a) Halle los coeficientes c_i de los polinomios de Taylor en a de las siguientes funciones en términos de a_i b_i:

   $$(a)\ f+g, \qquad (b)\ f', \qquad (c)\ h_1(x) = \int_a^x f(t)\ dt\ .$$

   b) Mostrar que si f es una función par (impar), el polinomio de Taylor de f alrededor de 0 de cualquier orden está formado sólo por potencias de exponentes pares (impares).

   c) Halle el polinomio de Taylor de la función de ley $h_2(x) = f(cx)$, alrededor del punto a.

   d) Utilizando los polinomios de Taylor de las funciones seno, coseno y exponencial vistos en clases de teoría, y los dos apartados anteriores, vuelva a concluir las expresiones halladas en las partes a), b) y d) del Ejercicio 3.

5. A partir de la igualdad válida para todo $x \neq 1$

   $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

   obtenga los polinomios de Taylor asociados a las siguientes funciones en el punto 0 y una expresión del resto correspondiente:

   $$f_1(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f_2(x) = \frac{2+x-x^2}{1-x} \qquad f_3(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad f_4(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

6. a) Si a_i son los coeficientes de Taylor en a de f, hallar la expresión del polinomio de Taylor de la función de ley $g(x) = (x-a)^k f(x)$, para $k \in \mathbb{N}$, fijo.

   b) Encontrar los polinomios de Taylor de orden 8 y alrededor del origen, de las funciones $g_1(x) = x^2 \operatorname{sen}(3x)$ y $g_2(x) = x^{20} \operatorname{senh}(x)$.

7. Sea la función

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Obtenga el polinomio de Taylor de orden 9 de f alrededor del origen. (Ayuda: Tal vez lo más conveniente no sea calcular las derivadas... revise la teoría para obtener un polinomio conveniente.)

   b) Calcule $f^{(9)}(0)$.

8. Algunas veces en el modelado de fenómenos de oscilación, se recurre a la simplificación $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, para ángulos pequeños. Determine el error en esta aproximación, para ángulos (medidos en grados sexagesimales) de 5°, 10°, 15° y 20°.

9. Para cada una de las funciones dadas:

   a) Halle la forma integral y la forma de Lagrange de los restos de la fórmula de Taylor asociada a dichas funciones en el punto 0, indicando el conjunto de validez de la expresión obtenida.

   b) Demuestre que los restos obtenidos en la parte i) verifican las acotaciones indicadas.

      a) $f(x) = \cosh x, \qquad |R_{2n,0,f}(x)| = |R_{2n+1,0,f}(x)| \leq \frac{1}{(2n+2)!}\cosh(x)|x|^{2n+2}$

      b) $f(x) = \ln(1+x), \qquad |R_{n,0,f}(x)| \leq \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+x)^{n+1}}|x|^{n+1} & \text{si } -1 < x < 0 \end{cases}$

      c) $f(x) = \cos x, \qquad |R_{2n+1,0,f}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$

10. Demuestre que $0,493957 < \int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^4}dx < 0,493959$.

11. *a*) Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, demuestre que $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + r(x)$, donde $|r(x)| \leq \frac{1}{2^5\ 5!}$.

    b) Halle un valor aproximado de la integral $\int_0^{\sqrt{2}/2} \operatorname{sen} x^2 dx$, acotando el error cometido.

12. Halle un valor aproximado de los siguientes números con error menor que $\frac{1}{2}10^{-6}$.

    a) $e^{-0,1}$ b) $\cos\left(\frac{\pi}{36}\right)$ c) $\operatorname{sen}(0{,}5)$ d) $\sqrt[4]{1{,}1}$

13. Demuestre que la ecuación $x^2 - \cos(x) = 0$, tiene exactamente dos soluciones. Utilice un adecuado polinomio de Taylor para probar que las soluciones son aproximadamente $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y obtener cotas para el error cometido.

14. Calcule el orden del polinomio de Taylor necesario para obtener las siete primeras cifras decimales del número ln(1,5) utilizando la formula de Taylor correspondiente a las funciones: $f(x) = \ln(x+1)$ y $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ y compare la cantidad de términos necesarios en las dos aproximaciones.

15. Los polinomios de Taylor de la función arcotangente trabajados permiten aproximar el valor del número π con tantas cifras decimales como se desee.

    a) Utilizando la fórmula $4\arctan 1 = \pi$, dar una expresión que permita hallar el valor de π con un error menor a 10^{-10}. Ésta, con los infinitos términos, es el desarrollo de Leibniz del número π.

b) Demuestre las fórmulas

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right) \;=\; \frac{\pi}{4} \qquad \text{y} \qquad 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \;=\; \frac{\pi}{4}\ .$$

Ayuda: calcule y tome argumentos en los respectivos complejos $(2+i)(3+i)$ y $\frac{(5+i)^4}{239+i}$

c) Utilizando cada una de las fórmulas anteriores, dar nuevamente expresiones para aproximar π con un error menor a 10^{-10}. Sugerencia: aproximar a cada sumando con un error menor a $10^{-10}/2$.

d) Compare la cantidad de términos necesarios en las tres aproximaciones.

16. Justifique la existencia de cada integral y calcule un valor aproximado con error menor que 10^{-5}.

$$\text{a)} \int_0^1 e^{-x^2}dx \qquad\qquad \text{b)} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \qquad\qquad \text{c)} \int_0^1 \frac{1^x-1}{x}dx$$

17. (a) Demuestre que si $f''(a)$ existe, entonces

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}.$$

El límite de la derecha es denominado *derivada segunda de Schwarz* de f en a.

Ayuda: Utilice el polinomio de Taylor de orden 2 con $x=a+h$ y con $x=a-h$.

(b) Sea $f(x)=x^2$ para $x\geq 0$ y $-x^2$ para $x\leq 0$. Demuestre que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2},$$

existe, a pesar de no existir $f''(0)$.

(c) Demuestre que si f tiene un máximo local en a, entonces la derivada segunda de Schwarz de f en a es ≤ 0.

(d) Demuestre que si $f'''(a)$ existe, entonces

$$\frac{f'''(a)}{3}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f'(a)}{h^3}.$$