FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

LCC - LF - LM - PF - PM

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA II - Año 2023

PRÁCTICA 6: GEOMETRÍA ANALÍTICA DEL ESPACIO.

---

1. Sea r la recta que pasa por los puntos $P_0(1,1,1)$ y $P_1(-3,-1,-2)$
   a) Determinar las ecuaciones paramétricas de r.
   b) Calcular la distancia del origen de coordenadas a r.
   c) Determinar si r interseca a los planos coordenados, y en caso que lo haga, en qué puntos.

2. Sea π el plano determinado por los puntos $P(1,-1,0)$, $Q(4,0,1)$ y $R(0,1,0)$.
   a) Determinar las ecuaciones paramétricas de π.
   b) Determinar z_1 sabiendo que $S(10,-5,z_1) \in \pi$.
   c) Determinar las ecuaciones de una recta perpendicular a π por el origen de coordenadas y determinar el punto en que esta recta interseca a π.

3. Sea P_0 un punto de coordenadas $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y sean

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \qquad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{cases}$$

   las ecuaciones paramétricas de un plano π que contiene a P_0. Supongamos que S es el punto de π que se obtiene a partir de los parámetros α_1, β_1. Demostrar que el punto T simétrico de S en π respecto de P_0 es el punto que se obtiene a partir de los parámetros $-\alpha_1$, $-\beta_1$.

4. Dada la familia de planos de ecuación $\alpha x + 2\alpha y + 10z - 2 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, encontrar en cada caso cuál de ellos verifica:
   a) es paralelo al plano de ecuación $x + 2y + 8z - 7 = 0$;
   b) es paralelo al plano de ecuación $-x + y - 3z + 1 = 0$;
   c) es perpendicular al plano $-5x + y - 3z + 2 = 0$;
   d) forma con el plano $4y + 3z - 9 = 0$ un ángulo cuyo coseno vale $14/15$.

5. a) Hallar la ecuación del plano que contiene a los puntos $P_1(1,-2,2)$ y $P_2(-3,1,-2)$ y es perpendicular al plano de ecuación $2x + y - z + 6 = 0$.
   b) Hallar un punto P_3 tal que el problema análogo al planteado en el item anterior con P_1 y P_3 tenga infinitas soluciones.

6. Hallar la intersección de los siguientes tres planos:

$$\pi_1)\, 2x + 4y + 2z = 3, \quad \pi_2)\, 3x + 3y - z = 0 \quad \pi_3)\, 3x - 6y - 5z = 8.$$

7. Demostrar que la ecuación del plano que determinan los tres puntos no alineados $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ y $P_3(x_3,y_3,z_3)$ resulta de plantear:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Determinar utilizando este método el plano que contiene a los puntos $P_1(3,2,-5)$, $P_2(0,1,-1)$ y $P_3(2,5,-1)$.

8. Hallar en cada caso la la ecuación de un plano que verifique las condiciones pedidas:
   a) su punto más cercano al origen es $P(1,-2,1)$;
   b) determina con los ejes coordenados segmentos de longitudes 2, 3 y 1 respectivamente;
   c) es paralelo al de ecuación $2x+3y-6z-14=0$ y que dista 5 unidades del origen.
9. Si dos planos son paralelos, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano. Demostrar que los planos de ecuaciones $\pi_1)\ 6x+2y-3z-63=0$ y $\pi_2)\ -3x-y+\frac{3}{2}z+25=0$ son paralelos y encontrar la distancia entre ellos.
10. Determinar la distancia del punto $P_0(-1,1,-2)$ al plano determinado por los puntos $A(1,-1,1)$, $B(4,-5,-2)$ y $C(-2,1,3)$.
11. Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta r determinada por los puntos $A(3,8,-4)$ y $B(-2,5,1)$. Determinar la ecuación de dos planos que se intersequen en r.
12. Hallar las ecuaciones paramétricas de cada una de las siguientes rectas:

$$i)\ \begin{cases} 6x+2y-z=8 \\ 14x+y=24 \end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases} 3x-5y+2z=4 \\ 4x+2y-3z=2 \end{cases}$$

13. En cada caso hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(2,-1,3)$ y verifica la condición pedida:
    a) es paralela al eje y;
    b) es perpendicular al plano de ecuación $3x-6y-5z=8$;
    c) es paralela a la recta de ecuación $\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$;
    d) es perpendicular al plano de ecuación $y=0$;
    e) es perpendicular a los vectores $\overline{u}=(3,-1,-2)$ y $\overline{v}=(4,2,-4)$;
    f) es paralela a la recta de ecuación $\begin{cases} 3x-5y+2z=4 \\ 4x+2y-3z=2 \end{cases}$.
14. Determinar α y β para que la recta

$$r)\ \begin{cases} 2x+y-z-6=0 \\ \alpha x+y+3z+\beta=0 \end{cases}$$

esté contendia en el plano xz.

15. Dados los vértices de un triángulo $A(1,-2,4)$, $B(3,1,-3)$ y $C(5,1,-7)$ hallar las ecuaciones de la recta que contiene a la altura trazada desde el vértice B.
16. Sean r_1 y r_2 dos rectas en el espacio con direcciones $\overline{u}_1$ y $\overline{u}_2$ y sean $P_0 \in r_1$ y $P_1 \in r_2$.
    a) Demostrar que si r_1 y r_2 son paralelas, entonces

$$d(r_1,r_2)=\frac{|\overline{u}_1 \wedge \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\overline{u}_1|}$$

.

    b) Si r_1 y r_2 son alabeadas, la distancia entre r_1 y r_2 es la distancia entre los puntos de intersección de r_1 y r_2 con una recta perpendicular a ambas. Demostrar que

$$d(r_1,r_2)=\frac{|[\overline{u}_1,\overline{u}_2,\overrightarrow{P_0P_1}]|}{|\overline{u}_1 \wedge \overline{u}_2|}.$$

17. Determinar si las rectas

$$r_1)\ \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-t \\ z = 3+3t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}, \qquad r_2)\ \begin{cases} x = 1-3r \\ y = 2r \\ z = 2+4r \end{cases},\ r \in \mathbb{R}$$

son coplanares. Calcular la distancia entre r_1 y r_2.

18. Demostrar que las rectas r_1 y r_2 de ecuaciones

$$r_1)\ \frac{x+4}{3} = y-1 = \frac{z}{2}, \quad r_2)\ \begin{cases} 2x - z - 8 = 0 \\ 2y - z - 9 = 0 \end{cases}$$

son alabeadas y determinar la ecuación de un plano r_1 que contenga a r_2.

19. Determinar en cada item las ecuaciones de una recta perpendicular a r_1 y r_2 que interseque a ambas y calcular $d(r_1, r_2)$.

    a) r_1 está determinada por $M(2,1,3)$ y $N(1,2,1)$;

    b) $r_1)\ \dfrac{x+3}{-4} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z}{2}$, $r_2)\ \begin{cases} x+5y-z+9=0 \\ x+3y+z-5=0 \end{cases}$

20. Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,2,3)$ y que además se interseca con las rectas

$$r_1)\ \frac{x}{2} = y-6 = \frac{z+3}{-4} \ \text{ y } \ r_2)\ \frac{x-12}{13} = y-3 = \frac{z+3}{-4}.$$

21. Determinar la distancia del punto $P(3,2,1)$ a la recta

$$r)\ \begin{cases} 3x - 4y + 9 = 0 \\ 7x - y - 12z + 16 = 0 \end{cases}$$

22. Determinar los puntos de la recta $\begin{cases} x+y-z=2 \\ -x-y+3z=0 \end{cases}$ que se encuentran a 5 unidades del plano $2x-2y+3z=0$.

23. Hallar las ecuaciones de la recta r_1 que contiene al punto $M(3,-2,-4)$, es paralela al plano $\pi)\ 3x-2y-3z=7$ y se interseca con la recta $r_2)\ \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+4}{-2} = \dfrac{z-1}{2}$. Determinar el ángulo entre r_1 y r_2.

24. Determinar las ecuaciones de la superficie esférica indicada en cada caso:

    a) Tiene centro $P(1,2,-4)$ y radio 3.

    b) Tiene centro en $P(1,1,1)$ y pasa contiene al punto $Q(1,3,-5)$.

    c) Tiene centro en $P(3,6,-4)$ y es tangente al plano de ecuación $2x-2y-z-10=0$.

    d) La circunferencia de ecuación $\begin{cases} (x-1)^2+(y+3)^2=2 \\ z=3 \end{cases}$ es un círculo máximo de la esfera.

    e) $\overline{PQ}$ es un diámetro, con $P(-1,2,-3)$, $Q(2,3,-1)$.

    f) Está inscripta en el cilindro de ecuación $(x-4)^2+(y-5)^2=9$ y su centro está en el plano $3x+8y-8z=4$.

    g) Pasa por los puntos de coordenadas $(7,9,1)$, $(-2,-3,2)$, $(1,5,5)$, $(-6,2,5)$.

25. Dada la esfera $\mathcal{E}$ de ecuación $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$:

    a) determinar las ecuciones del plano tangente a $\mathcal{E}$ en en punto $Q(1,0,2)$;

    b) determinar las ecuaciones de la circunferencia que se obtiene de intersecar $\mathcal{E}$ con el plano $z=1$.

26. Hallar el vértice y el foco de la parábola que resulta al intersectar el paraboloide hiperbólico de ecuación $\dfrac{z^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{y}{3}$ con el plano de ecuación $x = 1$.

27. En cada uno de los siguientes items, identificar qué superficie en el espacio está determinada por las ecuaciones dadas y esbozar su gráfica.

    a) $x^2 + y^2 = 1$;

    b) $3z^2 = 0$

    c) $4x^2 + 9z^2 = 36$.

28. Determinar qué superficie determina cada una de las ecuaciones siguientes y esbozar su gráfica:

    a) $x^2 + 2y^2 - 6z = 0$;

    b) $4x^2 + 12y^2 + 36z^2 = 36$;

    c) $9x^2 - 4z^2 = 36$

    d) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{9} = 1$;

    e) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$;

    f) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{9} = 0$;

    g) $y^2 + z^2 = 4$

    h) $x^2 - 4y^2 = 8z$.

    i) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 3z = 15$.

    j) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 0$.

    k) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} + \dfrac{z^2}{9} = 0$.

    l) $3x^2 + 8y^2 - 4z^2 - 24 = 0$.

    m) $y^2 + z = 2$

    n) $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

    ñ) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6x - 8y + 8z + 9 = 0$.

    o) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6x - 8y + 8z + 9 = 0$.

    p) $\dfrac{(x-2)^2}{36} + \dfrac{(z-1)^2}{25} = 4y$.

    q) $\dfrac{(z-2)^2}{36} - \dfrac{(y-2)^2}{25} - x = 0$.

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya diferencia a los puntos fijos de coordenadas $(-4,3,1)$ $(4,3,1)$ es igual a 6. Determinar qué tipo de superficie es.

30. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio cuya distancia al punto de coordenadas $(2,-1,3)$ es igual al doble de su distancia al eje x. Determinar qué tipo de superficie es.

31. Identificar y esbozar las gráficas de las curvas en $\mathbb{R}^3$ dadas por los sistemas de ecuaciones siguientes:

    a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = -1 \end{cases}$

    b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 2 \end{cases}$

    c) $\begin{cases} y^2 = 4z \\ x = 3 \end{cases}$

    d) $\begin{cases} 9x^2 + 4y^2 = 36 \\ z = 5 \end{cases}$

32. Hallar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas:

    a) Una circunferencia de centro $P_0(1,1,1)$ y radio 5 en el plano de ecuación $x + 2y - 3z = 0$.

    b) Una elipse de vértices V_1, V_2, V_3 y V_4, donde V_1 y V_2 están sobre el eje focal, con $d(V_1,V_2) = 3$, $d(V_3,V_4) = 2$, centro $C = (1,2,3)$, eje focal paralelo al eje z y contenida en un plano paralelo al plano yz.

    c) La intersección de una esfera centrada en el origen de radio 2 y el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$. Mostrar que se trata de una circunferencia y hallar su centro y su radio.

33. Encontrar las ecuaciones paramétricas de las curvas del ejercicio anterior.

34. En cada caso, hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la curva γ dada con la superficie S dada.

a)

$$\gamma)\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\sin\theta \\ z = 2\sin\theta \end{cases} ,\theta \in \mathbb{R},\, S) x^2 - y^2 + z^2 = 4.$$

b)

$$\gamma)\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases} ,\ t \in \mathbb{R}, \quad S) x^2 + 2y - z = 2.$$

35. Esbozar las gráficas de las curvas del espacio dadas por las siguientes ecuaciones paramétricas. Cuando sea posible describirlas como intersección de dos superficies.

$$a)\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 8 + 2t \end{cases} \quad t \in [0, 25]$$

$$b)\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 5 \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$c)\begin{cases} x = 2 + \sin t \\ y = 3 \\ z = \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

$$d)\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 5t \\ z = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$e)\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + \sinh t \\ z = 2\cosh t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$f)\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$