Algebra Lineal

Jerónimo Delorenzi

2024

1. Unidad 1 - Espacios Vectoriales

1.1. Cuerpos

Sea F un conjunto no vacío dotado de dos operaciones:

- $+ : F \times F \to F$ llamadada **Suma**
- $\cdot : F \times F \to F$ llamadada **Producto**

Decimos que es $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo si se verifican los siguentes axiomas:

1. **Asociatividad suma**: $\forall$ a,b,c $\in F$ tenemos que $a+(b+c) = (a+b)+c$
2. **Elemento neutro suma**: $\exists$ $0 \in F$ tal que $\forall$ a $\in F$, $a + 0 = 0 + a = a$
3. **Elemento opuesto**: dado $a \in F$, $\exists b \in \mathbf{F}$ tal que $a + b = b + a = 0$
4. **Conmutatividad suma**: $\forall$ a,b $\in F$ tenemos que $a + b = b + a$
5. **Asociatividad producto**: $\forall$ a,b $\in \mathbf{F}$ tenemos que $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
6. **Elemento neutro producto**: $\exists$ $1 \in F$ tal que $\forall$ a $\in F$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
7. **Elemento inverso multiplicativo**: dado a $\in F^*$ ($F^* := F - \{0\}$), $\exists$ b $\in F$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$
8. **Conmutatividad producto**: $\forall$ a,b $\in F$ tenemos que $a \cdot b = b \cdot a$
9. **Distributiva del producto respecto a la suma**: $\forall$ a,b,c $\in F$ tenemos que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

A los elementos de F se los llama *escalares*.

1.1.1. Subcuerpos

Un subconjunto $\mathbb{F} \subset \mathbb{C}$ es subcuerpo si con las operaciones restringidas tenemos que $(F, +, \cdot)$ es un cuerpo.
Puesto que la asociatividad, conmutatividad y distributivas se heredan del cuerpo, bastará solo verificar:

- $\forall$ a,b $\in \mathbb{F}$ tenemos que la suma es cerrada, es decir: $a + b \in \mathbb{F}$.
- $\forall$ a,b $\in \mathbb{F}$ tenemos que el producto es cerrado, es decir: $a \cdot b \in \mathbb{F}$.
- 0,1 $\in \mathbb{F}$ es decir, el neutro de la suma y el producto pernetencen a $\mathbb{F}$.
- $\forall$ a $\in \mathbb{F}$ el opuesto de a $\in \mathbb{C}$ tambien sera elemento de $\mathbb{F}$, $-a \in \mathbb{F}$
- $\forall$ a $\in \mathbb{F}$, el inverso de a $\in \mathbb{C}$ tambien sera elemento de $\mathbb{F}$, $a^{-1} \in \mathbb{F}$

1.1.2. Ejemplos

El conjunto $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{x + \sqrt{2} \cdot y : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Se le llama a $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ extensión de $\mathbb{Q}$ por $\sqrt{2}$.
Existen cuerpos que no son de los numéricos ni extensiones de los mismos, y ademas son finitos.
Por ejemplo $\mathbb{Z}_2$ definido por $\mathbb{Z}_2 := \{\bar{0}, \bar{1}\}$ donde es el cuerpo formado por la clases de equivalencia del 0 y el 1 definido por la congruencia modulo dos:

- $a \equiv b(mod\ 2) \iff 2|(b - a)$
- En general: Sea $n \in \mathbb{N}$, se define la relacion *de congruencia modulo* n:

  $$a \equiv b(mod\ n) \iff n|(b - a)$$

  donde la clase de equivalencia esta determinado de esta manera.

  $$Sea\ a \in \mathbb{Z} : \bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} : a \equiv b(mod\ n)\} = \{b \in \mathbb{Z} : n|(b - a)\}$$

  $= \{b \in \mathbb{Z} : b - a = kn,\ para\ algun\ k \in \mathbb{Z}\} = \{b \in \mathbb{Z} : a = b + kn,\ para\ algun\ k \in \mathbb{Z}\}$
  Luego $\mathbb{Z}_n := \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. Ahora, dados $\bar{i}, \bar{j} \in \mathbb{Z}_n$ definimos $\bar{i} + \bar{j} = \overline{i + j}$
  Y tenemos que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo $\iff$ n es primo.

Sea F un cuerpo, para $n \in \mathbb{N}$ consideramos el elemento $1 + \overset{n\ veces}{\cdots} + 1$ donde $n \in \mathbb{N}$ es n natural. Este elemento lo llamamos n e identificamos los números naturales con ciertos elementos del cuerpo. De esta forma, la expresión nx para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{Z}$: $nx = (1 + \overset{n\ veces}{\cdots} + 1)x = (1x + \overset{n\ veces}{\cdots} + 1x) = x + \overset{n\ veces}{\cdots} + x$, es decir, nx es el elemento de F que se obtiene sumando n veces el elemento x.
Un cuerpo F se dice de **caracteristica** n si $n \in \mathbb{N}$ es el menor número natural para el cual $1 + \overset{n\ veces}{\cdots} + 1 = 0$. Si no existe tal $n \in \mathbb{N}$, decimos que F es de **caracteristica** 0.

1.2. Espacios Vectoriales

Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo de escalares. Sea V dotado de dos operaciones, suma $(+)$, que a un par de elementos u y v les asigna un elemento $u + v$ y producto por escalar $(\cdot)$, que dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un elemento $v \in \mathbb{F}$ le asigna un elemento $\alpha \cdot v$. Decimos que la terna $(V, +, \cdot)$ es un $\mathbb{F} -$ *espacio vectorial* si se verifican los siguientes axiomas:

1. **Clausura de la suma**: si $u, v \in V$, entonces $u + v \in \mathbb{F}$.
2. **Asociatividad de la suma**: si $u, v, w \in V$, entonces $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. **Elemento neutro suma**: $\exists\ \bar{0} \in V$ tal que $u + \bar{0} = \bar{0} + u = u$.
4. **Elemento opuesto**: dado $u \in V$, $\exists v \in V$ tal que $u + v = v + u = 0$.
5. **Conmutatividad suma**: si $u, v \in V$, entonces $u + v = v + u$.
6. **Clausura del producto por escalar**: si $u, v \in V$, entonces $u \cdot v \in V$
7. **Asociatividad del producto por escalar**: $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $u \in V$, entonces $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$.
8. **Distributiva del producto con respecto a la suma de escalares**: si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $u \in V$,entonces $u \cdot (\alpha + \beta) = u \cdot \alpha + u \cdot \beta$.
9. **Distributiva del producto con respecto a la suma de vectores**: si $\alpha \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$,entonces $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$.
10. **Unitariedad del producto por escalar**: si $u \in V$,entonces $1 \cdot u = u$.

Proposición 1 En un $F - ev$ $(V, +, \cdot)$ se verifican:

1. El elemento neutro para la suma es único.

   Demostración. Dado $v \in V$, supongamos que existe otro elemento neutro para la suma, llamemoslo $w \in V$, tal que $\forall\ v \in V,\ v + w = w + v = v$. Entonces tenemos que, $0 = 0 + w = w$. □

2. Dado un vector $v \in V$, existe un único opuesto, denotado $-v \in V$.

   Demostración. Sea $v \in V$ vector, y $w \in V, z \in V$ dos vectores opuestos a v, es decir $v + z = z + w = \bar{0}$ y $v + w = w + v = \bar{0}$.
   Luego, $z = z + \bar{0} = z + (a + w) = (z + a) + w = \bar{0} + w = w$ □

3. Dado un vector $v \in V$, se tiene que $0 \cdot v = \bar{0}$.

Demostración. Tenemos que $0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$.
Luego $0 \cdot v + (-0) \cdot v = (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) = 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v))$
Con lo cual $\bar{0} = 0 \cdot v + \bar{0} = 0 \cdot v$ $\square$

4. Dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$, se tiene que $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

   Demostración. Tenemos que $\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (\bar{0} + \bar{0}) = \alpha \cdot \bar{0} + \alpha \cdot \bar{0}$.
   Luego $\alpha \cdot \bar{0} + (-\alpha \cdot \bar{0}) = (\alpha \cdot \bar{0} + \alpha \cdot \bar{0}) + (-\alpha \cdot \bar{0}) = \alpha \cdot \bar{0} + (\alpha \cdot \bar{0} + (-\alpha \cdot \bar{0}))$
   Con lo cual $\bar{0} = \alpha \cdot 0 + \bar{0} = \alpha \cdot \bar{0}$ $\square$

5. Dado un vector $v \in V$, se tiene que $(-1) \cdot v = -v$

   Demostración. Probar $(-1) \cdot v = -v$, es lo mismo que probar $v + (-1) \cdot v = 0$.
   Por lo tanto $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$ $\square$

6. Dado un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ y un vector $v \in V$ que verifican que $\alpha \cdot v = \bar{0}$, se tiene que o bien $\alpha = 0$ o bien $v = \bar{0}$ (sin excluir el caso simultaneo).

   Demostración. Supongamos que para $\alpha \in \mathbb{F}$ y $v \in V$ tenemos que $\alpha \cdot v = \bar{0}$. Si $\alpha = 0$ no hay nada que probar. Supongamos que $\alpha \neq 0$, tenemos que $v = 1 \cdot v = (\frac{1}{\alpha}\alpha)v = \frac{1}{\alpha}(\alpha v) = \frac{1}{\alpha} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ $\square$

1.3. Subespacios Vectoriales

Sean $(V, +, \cdot)$ un F-*ev* y $U \subset V$. Decimos que U es un F-**subespacio vectorial de V** si con las operaciones restringidas en un F-*ev*. Es decir, dado $(V, +, \cdot)$ donde $+\colon V \times V \to V$ y $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$. Luego $U \subset V$ y tenemos $(U, +|_U, \cdot|_U)$ donde: $U \times U \to V$ y $\cdot : \mathbb{F} \times U \to V$.

Observaciones: En la definicion de *sev* U de V se debe considerar:

1. $U \subset V$
2. Las operaciones suma y producto por escalar restringidas.
3. El mismo cuerpo.

Proposición 2 - Caracterización Sea V un F-*ev*. Sea $U \subset V$. Tenemos que $U \subset V$ *sii* se satisfacen:

1. la suma es cerrada en U: $u, v \in U \ \forall \ u, v \in U$.
2. el producto por escalar es cerrado en U: $u \in U \ \forall \ \alpha \in \mathbb{F} \ y \ u \in U$.

Demostración. Tenemos que probar que U es *sev*, pero veamos que la asociatividad, conmutatividad para la suma y la asociatividad y unitariedad del producto por escalar, distributiva respecto a la suma de escalares y a la suma de vectores se heredan de V. Luego al probar que la suma es cerra y el producto por escalar también, tenemos que por las propiedades que verifican un *ev* ($(-1) \cdot v = -v$ y $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$). Luego U es un *sev*. □

Observaciones:

- Siempre tenemos dos subespacios: V al que se lo llama subespacio total y $\{\bar{0}\}$ llamado trivial.
- Si $\{\bar{0}\} \subsetneq U \subsetneq V$ *sev* se dice que U es no trivial o propio.

1.3.1. Suma de sev

Proposicion 3 Sea $(V, +, \cdot)$ un F-*ev*. Sean $U, W \subset V$, entonces $U \cap W \subset V$.

Demostración.

■ Cierre suma: sean $u, v \in U \cap W$, tenemos que $u \in U$ y $u \in W$, y también $v \in U$ y $v \in W$. Luego $u + v \in U$ pues $U \subset V sev$ y $u + v \in W$ pues $W \subset V sev$.

■ Cierre producto por escalar: sean $u, \in U \cap W$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, tenemos que $u \in U$ y $u \in W$. Luego $\alpha \cdot u \in U$ pues $U \subset V sev$ y $\alpha \cdot u \in W$ pues $W \subset V sev$.
$\therefore$ por (1) y (2), $U \cap W$ es sev.

□

Sea V un F-*ev* y sean $U_1, \ldots, U_n \subset V$. Definimos el **conjunto suma** de $U_1, \ldots, U_n$ como:

$$S = U_1 + \ldots + U_n := \{u_1 + \ldots + u_n \in V : u_i \in U_i \; para\; todo\; i = 1, \ldots, n\} \subset V$$

Proposición 4 Sea V un F-*ev* y sean $U_1, \ldots, U_n \subset V sev$. Si S es el conjunto suma de $U_1, \ldots, U_n$ entonces $S \subset V$. Más aún, es el *sev* de V más chico que contiene a $U = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ en el sentido de que si $U \subset W \subset V sev$ entonces $S \subset W$.

Demostración.

■ Sean $u = u_1 + \ldots + u_n$, $w = w_1 + \ldots + w_n \in S$, donde $u_i, w_i \in U_1 \; para\; todo\; i = 1, \ldots, n$, y sea $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que:

1. $u + w = (u_1 + \ldots + u_n) + (w_1 + \ldots + w_n) = (u_1 + w_1) + \ldots + (u_n + w_n) \in S$, ya que cada u_i es *sev*, con lo cual $u_i + w_i \in U_i \; para\; todo\; i = 1, \ldots, n$.
2. $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (u_1 + \ldots + u_n) = (\alpha \cdot u_1 + \ldots + \alpha \cdot u_n) \in S$, ya que cada u_i es *sev*, con lo cual $\alpha \cdot u_i \in U_i \; para\; todo\; i = 1, \ldots, n$.
   Por caracterización de *sev*, sigue que $S \subset V sev$.

■ Sea $U \subset W \subset V sev$. Si $u = u_1 + \ldots + u_n \in S$ con $u_i \in U_i$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$ tenemos que $u_1 \in U_i \subset U \subset W$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$. Luego $S \subset W$. □

Observaciones:

1. cada $U_i \subset S sev,\ i = 1, \ldots, n$.

2. $U \subset S$, aunque no necesariamente U es un *sev*.

3. si $U = S$ entonces U es un *sev*.

Sea V un F-*ev* y sean $U_1, \ldots, U_n \subset V sev$. Decimos que el *sev* suma $S = U_1 + \ldots + U_n$ es **suma directa** si para cada $s \in S$ exiten únicos $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n \in U_n$ tales que $u = u_1 + \ldots + u_n$ Y lo denotamos como:

$$S = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$$

Proposicion 5 Sea V un F-*ev* y sean $U, W \subset V sev$ Consideremos el subespacio suma $S = U + W$. Tenemos que $S = U \oplus W$ *sii* $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $S = U \oplus W$, sea $u \in U \cap W$. Como $\bar{0} = u + (-u) = -u + u$ y la escritura es única, entonces tiene que ser $u = -u$, luego $u = \bar{0}$

($\Leftarrow$) Tenemos que si $v = u + w = u^{'} + w^{'} \in S$ con $u, u^{'} \in U$ y $w, w^{'} \in W$. Luego $\bar{0} = u - u^{'} = w - w^{'} \in U \cap W$, de modo que $u, u^{'} = -w + w^{'} \in U \cap W = \{\bar{0}\}$. Esto nos dice que $u = u^{'}$y $w = w^{'}$, de modo que la escritura es única. □

Proposicion 6 Sean V un F-*ev*, $U_1, \ldots, U_n \subset V$ y $S = U_1 + \ldots + U_n$. Entonces es suma directa *sii* el vector $\bar{0}$ sólo se puede obtener sumando el elemento trivial de cada *sev* $U_1, \ldots, U_n$.

Demostración.

($\Rightarrow$) $S = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$. Si $\{\bar{0}\} = u_1 \oplus \ldots \oplus u_n \in S$, por unicidad de escritura debe ser $u_i = \{\bar{0}\}\ i = 1, \ldots, n$.

($\Leftarrow$) Sea $u = u_1 \oplus \ldots \oplus u_n = v_1 \oplus \ldots \oplus v_n \in S$ con $u_i, v_i \in U_i\ i = 1, \ldots, n$. Entonces $\{\bar{0}\} = (u_1 - v_1) + \ldots + (u_n - v_n)$ y por hipotesis debe ser $u_i = v_i,\ i = 1, \ldots, n$. Luego la suma es directa. □

1.4. Conjunto Generador

Sean V F-*ev*, $v_1, \ldots, v_n \in V$. Una **combinación lineal** (*cl*) de los vectores $v_1, \ldots, v_n \in V$ es un vector de la forma:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$

con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. Las *cl* de vectores de un *ev* siempre tienen una cantidad finita de términos.

Sea V F-*ev* y $\emptyset \subsetneq S \subset V$. El **conjunto generado** por S o **Span** de S es el conjunto de todas las *cl* posibles de elementos de S:

$$span(S) := \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n : v_1, \ldots, v_n \in V, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F, n \in \mathbb{N}\}$$

Si $S = \emptyset$ definimos $span(S) := \{\bar{0}\}$.
Ejemplos:

- $(17, -4, 2) \in span((2, 1, -3), (1, -2, 4))$
- $span((1, 0), (0, 1))$ es el plano xy, ya que cualquier vector del plano se puede escribir como *cl* de esos vectores.

Proposición 6 Sean V un F-*ev* y $S \subset V$. Entonces $span(S) \subset V sev$.

Demostración. Usamos caracterización de subespacios.
Sean $\alpha, \beta \in F, u, v \in span(S)$. Veamos que $\alpha u + \beta v \in span(S)$. En efecto:

- $u \in span(S) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tal que $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$.

- $v \in span(S) \Rightarrow \exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ tal que $v = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n$ con $w_i \in S$.

Luego $\alpha u + \beta v = \alpha(\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_n w_n)$

Entonces tenemos $\alpha u + \beta v = \alpha\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 w_1 + \ldots + \beta\beta_n w_n \in span(S)$ pues es una *cl* de elementos de S. □

Llamaremos al span(S) como el **subespacio generado por S**.

Observación Sean V un F-*ev* y $S \subset V$. Entonces $S \subset span(S)$. En efecto, cada $u \in S$ tenemos $u = 1 \cdot u$, que es una *cl* de elementos de S, luego está en $span(S)$. También, si $S \subseteq T \Rightarrow span(S) \subseteq span(T)$.

Proposición 7 Sean V un F-*ev* y $S \subset V$. Entonces $span(S) = \bigcap\{U \subset V : U \ sev \ y \ S \subset U\}$.

Demostración. Llamemos $\mathcal{F} = \{U \subset V : U sev \ y \ S \subset U\}$ a la familia de sev que contienen a S. Queremos llegar a que $span(S) = \bigcap\limits_{U \in \mathcal{F}} U$.

($\subset$) Veamos que $span(S) \subset U \ \forall \ U \in \mathcal{F}$.
Sea $U \in \mathcal{F}$. Entonces $S \subset U$. Sea $u \in span(S) = \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tq $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$., luego $v_i \in U$, y como $U \in V sev$, sigue que $u \in U$.

($\supset$) $span \in \mathcal{F}$, luego la intersección de $span(S)$ con el resto de los sev de la familia $\mathcal{F}$ está contenida en span(S). □

Corolario 1 $S \subset V sev$ sii $S = span(S)$

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea S un subespacio de V. Debemos probar igualdad de conjuntos.

- $S \subseteq span(S)$: es directo ya que $u \in S$ tenemos $u = 1 \cdot u$, que es una *cl* de elementos de S, luego está en $span(S)$.
- $span(S) \subseteq S$: sea $w \in span(S)$, por definicion de *span*, w es una *cl* de los vectores de S, es decir $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n$ tq $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$. Como S es un *sev*, sabemos que la suma y el producto son cerrados en S. Luego $w \in S$ y por lo tanto todo elemento de $span(S)$ pertenece a S.

($\Leftarrow$) Por proposición, sabemos que $span(S)$ es *sev* de V, como $S = span(S)$ entonces S también es *sev* de V. □

Sean V un F-*ev* y $S \subset V$. Si $span(S) = V$ decimos que S **genera** a V, o que V **es generado** por S o que S es un **subconjunto generador** de V o que S es un **sistema generador** de V.
Si existe un conjunto generador de V que es finito, decimos que V es **finitamente generado**. Si no exista tal S decimos que V es **infinito dimensional**.

Ejemplos:

- Base canonica de $\mathbb{R}^3$ $\{i, j, k\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.
- $\{1, x, x^2\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{C}_2[x]$ como $\mathbb{C}$-*ev*.
- $\mathbb{C}[x]$ es infinito dimensional: ningún conjunto finito de elementos puede generarlo.
- El conjunto solucion del sistema $AX = 0$ donde

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  está generado por $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, -1, 1, 0)\}$.

1.5. Independencia Lineal

Sean V un F-*ev* y $S \subset V$

- Si S es finito ($S = \{v_1, \dots, v_n\}$) decimos que S es **linealmente independiente** (*li*) si la única *cl* de elementos de S que resulta en el vector nulo es la trivial.
  Es decir: si $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ para algún $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ entonces $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.
- Si $S = \emptyset$ decretamos que S es *li*.
- Si S es un conjunto infinito, decimos que es *li* si todo subconjunto finito de S es *li*.
- Si S no es *li* decimos que S es **linealmente dependiente** (*ld*).

Proposición 8 Sean V un F-*ev* y $S \subset V$

1. S es *ld* sii $\exists v_1, \dots, v_m \in S$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ no todos nulos tq $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \bar{0}$.
2. $\bar{0} \in S \Rightarrow S$ *ld*.
3. S *ld* entonces todo $T \supset S$ es *ld*.
4. S *li* entonces todo $T \subset S$ es *li*.
5. $v \in V$, $\{v\}$ *ld* sii $v = \bar{0}$.
6. $u, v \in V$, $\{u, v\}$ *ld* sii $\exists \lambda \in F$ tq $u = \lambda v$.
7. S *ld* sii $\exists$ un vector en S que es *cl* de los demás.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Es directa.
   ($\Leftarrow$) Supongamos que $\exists v_1, \dots, v_m \in S$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ no todos nulos tq $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = \bar{0}$. Como no todos los $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ son nulos, sin perder generalidad tomamos $\alpha_1 \neq 0$. Entonces podemos expresar a $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_m}{\alpha_1} v_m$. Es decir, se puede escribir a v_1 como combinacion lineal de otros vectores. Luego S es *ld*.
2. Por hipotesis $\bar{0}$ está en S, entonces tenemos $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k \bar{0} + \dots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ donde $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ no todos son nulos, entonces si tomamos $\alpha_k \neq 0$ tenemos una combinación lineal no trivial, luego S es *ld*.

3. S es ld, es decir que existen $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ tq la solución es la no trivial. Tomemos $S \subset$ T. Como S es ld y $S \subset T$, sea $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$ entonces, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m = \bar{0}$ como $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ es ld en consecuencia T será ld.

4. Dado S li, tenemos que $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ es una combinación lineal trivial. Dado $T \subset S$ supongamos que T no es li, es decir, ld. Como T es ld, entonces tenemos que existe una combinación lineal no trivial, entonces encontramos un subconjunto ld en S, y esto contradice que S sea li. Luego T es li.

5. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\{v\}$ es ld es decir que existe combinación lineal no trivial, $\alpha v = \bar{0}$, donde $\alpha \neq 0$. Como el resultado es $\bar{0}$ implica necesariamente que $v = \bar{0}$.
   ($\Leftarrow$) Proposición 8.2.

6. ($\Rightarrow$) Supongamos que $\{u, v\}$ es ld, entonces tenemos $\alpha_1 u + \alpha_2 v = \bar{0}$ donde al menos α_1 o α_2 es no nulo, tomemos $\alpha_1 \neq 0$, entonces podemos reescribir, $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v = u$ y si llamamos $-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda$ llegamos a que $\lambda v = u$.
   ($\Leftarrow$) $\lambda v = u \Rightarrow u - \lambda v = \bar{0}$. Si tomamos $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = -\lambda$ como ambos son no nulos llegamos a que $\{u, v\}$ es ld.

7. ($\Rightarrow$) Si S es ld entonces $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \bar{0}$ donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no son todos nulos. Sin perder generalidad tomamos $\alpha_1 \neq 0$, entonces $v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} v_n$ y vemos que v_1 es combinación lineal de los vectores de S.
   ($\Leftarrow$) Si $\exists$ un vector de S que es cl de los demas tomemos, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} = v_n \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{n-1} v_{n-1} - v_n = \bar{0}$ y vemos que $\alpha_n \neq 0$ es decir que S es ld.

$\square$

Ejemplo:

- Los vectores i, j, k son li en $\mathbb{R}^3$.
- El conjunto $\{x^2, x^4, x^6, x^8\}$ es li en $\mathbb{R}[x]$.
- El conjunto $\{sin(x), cos(x)\}$ es li en $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$.

1.6. Bases y dimensión

Sea V un F-ev. Una **base** de V es un conjunto generador li.
V se dice que es **finito dimensional** si tiene una base finita.

Ejemplos:

- $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$.
- $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$.
- $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, es infinito dimensional.
- $\mathbb{F}^{m\times n}$, $B = \{E_{ij} = 1, \ldots, m \ j = 1, \ldots, n\}$.
- $\mathbb{F}^\infty$, $B = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. es infinito dimensional.

Proposición 9 Sea V un F-ev. Si V está generado por un conjunto S de cardinal finito n, entonces todo conjunto T de vectores li de V es finito y más aún, si su cardinal es m, entonces $m \leq n$.

Demostración. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tq $span(S) = V$ y sea $T \subset V li$. Supongamos que T es finito, sea $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Tenemos por hipótesis que T es li. Queremos probar que debe ser $m \leq n$.
Como $span(S) = V$, todo vector de T se escribe como cl de los elementos de S

$$u_1 = \alpha_{11}v_1 + \ldots + \alpha_{1n}v_n$$
$$\vdots$$
$$u_m = \alpha_{m1}v_1 + \ldots + \alpha_{mn}v_n$$

Llamemos $A = (a_{ij})$ a la matriz en $\mathbb{F}^{m\times n}$ de coeficientes de las expresiones anteriores.
Consideremos el sistema homogéneo $A^tX = 0$, luego X es el vector de m incógnitas $x_1, \ldots, x_m$ y el sistema consta de n ecuaciones y m incógnitas.
Sea $(\beta_1, \ldots, \beta_m)^t$ una solución del sistema, y vemaos que debe ser trivial, es decir, que el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Para esto, plantemos la cl de vectores de T y la reescribimos como cl de elementos de S

$$\beta_1u_1+\ldots+\beta_mu_m = \beta_1(\alpha_{11}v_1+\ldots+\alpha_{1n}v_n)+\ldots+\beta_m(\alpha_m1v_1+\ldots+\alpha_{mn}v_n)$$

$$= \beta_1\alpha_{11}v_1 + \ldots + \beta_1\alpha_{1n}v_n + \ldots + \beta_m\alpha_{m1}v_1 + \ldots + \beta_m\alpha_{mn}v_n$$
$$= (\beta_1\alpha_{11} + \ldots + \beta_m\alpha_{m1})v_1 + \ldots + (\beta_1\alpha_{1n} + \ldots + \beta_m\alpha_{mn})v_n$$

y puesto que $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ es una solución de $A^TX = 0$, tenemos que cada coeficiente de la cl resultante debe ser 0- Entonces la cl de elementos de T

resultantes es igual al vector nulo, luego cada coeficiente $\beta_i = 0$. Es decir, la solución del sistema es la trivial y no puede haber otr, Sigue que no hay variables libres, y como tiene n filas y m columnos, debe ser $m \leq n$.

Supongamos que T es infinito, y consideremos un subconjunto U de T de n vectores. Tal conjunto es *li* por definición. Si agregamos un elemento de T, digamos u_{n+1}, tenemos un subconjunto $U' = U \cup \{u_{n+1}\}$ de T de $n+1$ vectores. Esto contradice lo que probamos anteriormente, luego T no puede ser infinito. □

Corolario 2 Sea V un F-*ev* finito dimensional. Entonces todas sus bases tienen igual cantidad de elementos.

Demostración. Si B_1, B_2 bases de V de cardinales n_1, n_2, entonces:

- como B_1 genera y B_2 *li*, debe ser $n_2 \leq n_1$

- como B_2 genera y B_1 *li*, debe ser $n_1 \leq n_2$ Asi $n_1 = n_2$. □

Sea V un F-*ev* finito dimensional. La **dimensión** de V sobre F es la cantidad de elementos de sus bases. Denotamos $dim_F V$. Definimos la dimensión del espacio trivial como $dim_F\{\bar{0}\} = 0$.

Corolario 3 Sea V un F-*ev* finito dimensional con $dim_F V = n$. Entonces.

- Si $S \subset V$ y $|S| > n$ entonces S es *ld*.
- Si $S \subset V$ y $|S| < n$ entonces S no genera V.

Demostración.

1.
2.

□

Proposición 10 Sea V un F-*ev* finito dimensional con $dim_F V = n$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$. B es base de V sii para cada $v \in V$ $\exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Demostración.

($\Rightarrow$) Como $span(B) = V$, existen tales escalares. Como B es *li*, son únicos. En efecto, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ tq:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \ y \ v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

restando ambas expresiones tenemos que

$$\bar{0} = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n$$

y puesto que B es *li*, cada coeficiente debe ser 0, luego $\alpha_i = \beta_i$.

($\Leftarrow$) Puesto que, por hipotesis todo vector de V es cl de elementos de V, B genera V. La unicidad de escritura se da en particular para $\bar{0}$, luego tenemos que B debe ser li. $\square$

Proposición 6 Sea V un F-*ev* finito dimensional con $dim_F V = n$. Sea $S = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$

1. Si S genera V entonces existe $B \subset S$ tal que B es base de V.
2. Si S es li entonces existe $T = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V.

Demostración.

1. Si S es li, $B = S$ es base de V.
   Si S no es li, debe ser $s > n$, luego existe $v \in S$ tq $v \in span(S/\{v\})$, y más aún, $span(S/\{v\}) = span(S) = V$.
   Ahora bien, si $S/\{v\}$ es li, $B = S/\{v\}$ es base. Si no es li, procedemos inductivamente.
   El proceso se detiene pues no puede existir un conjunto generador con menos de n elementos.
2. Si S genera V, $B = S$ es base de V.
   Si S no genera V debe ser $s < n$. Sea B una base cualquiera de V, luego existe $v \in B$ tq $v \notin span(S)$. Entonces $S \cup \{v\}$ es li.
   Ahora bien, si B $= S \cup \{v\}$ genera V, B es base. Si no genera, procedemos inductivamente.
   El proceso se detiene al completar un conjunto li de n elementos.

$\square$

Corolario 4 Sea V un F-*ev* con $dim_F V = n$. Entonces tiene base.

Corolario 5 Sea V un F-*ev* finito dimensional con $dim_F V = n$. $U \subset V sev$. Entonces $dim_F U \leq n$ y existe $W \subset V sev$ tq $V = U \oplus W$.

Demostración. Si $dim_F U > n$ y S es una base de U, entonces S es li y su cardinal es mayor a n. No puede ser por Corolario 3. Luego $dim_F U \leq n$.

Sea entonces $S = \{v_1, \dots, v_m$ y por por la proposición sabemos que existe $T = \{v_{s+1}, \dots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de V. Sea $W = span(T)$. Veamos que W es el compelento buscado, vd, $V = U \oplus W$. Para esto usamos caracterizacion de suma directa. Bastará probar que $V = U + W$ y que $U \cap W = \{\bar{0}\}$.

Veamos que $V = U + W$. Necesitamos probar que todo $v \in V$ puede escribirse como suma de un elemento de U y uno de W. En efecto, dado $v \in V$ al ser B base, existen $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in F$ tq $v =$

$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} \ldots + \alpha_n v_n$, de donde observamos que $u = v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in U$ y $w = \alpha_{m+1} v_{m+1} \ldots + \alpha_n v_n \in W$ y $v = u + w$.

Finalmente sea $v \in U \cap W$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ y $v = \alpha_{m+1} v_{m+1} \ldots + \alpha_n v_n$, de donde sigue que

$$\bar{0} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m - \alpha_{m+1} v_{m+1} - \ldots + \alpha_n v_n$$

Luego cada $\alpha_i = 0$, $v = \bar{0}$. □

Teorema 1 Sea V un F-*ev* y $U_1, U_2 \subset V$ *sev* finitos dimensionales. Entonces

$$dim(U_1 + U_2) = dim U_1 + dim U_2 - dim(U_1 \cap U_2)$$

Demostración. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U_1 \cap U_2$.
- Completamos S a una base de $U_1 : T_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$.
- Completamos S a una base de $U_2 : T_2 = \{w_1, \ldots, w_s\}$.
Asi tenemos, $dim U_1 = m + r$ u $dim U_2 = m + s$. Veamos que $B = S \cup T_1 \cup T_2$ es base de $U_1 + U_2$.

Tenemos en primer lugar que $U_1 \subset span(B)$ y $U_2 \subset span(B)$, luego $U_1 + U_2 = span(B)$. Veamos que es *li*. Para esto plantemos:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_r u_r + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_s w_s = \bar{0}$$

donde $a = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m \in span(S)$, $b = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_r u_r \in span(T_1) \subset U_1$ y $c = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_s w_s \in span(T_2) \subset U_2$. Luego, $c = -a - b \in U_1 \cap U_2$. Entonces existen, $d_1, \ldots, d_, \in S$ tq $c = d_1 v_1 + \ldots + d_m v_m$. Asi,

$$c = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_s w_s = d1_v 1 + \ldots + d_m v_m$$

de donde $\bar{0} = \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_s w_s - d1_v 1 - \ldots - d_m v_m$, esto es una *cl* de elementos de $S \cup T_2$ que es base de U_2 y por lo tanto *li*. Como esta igualada al vector nulo, resulta que $c_i = d_i = 0$. Sigue entonces que $a_i = b_i = 0$. Asi, B es base del espacio suma $U_1 + U_2$. Finalmente,

$$dim(U_1 + U_2) = m + r + s = m + r + m + s - m = dim(U_1) + dim(U_2) - (dim U_1 \cap U_2)$$

□

Ejemplos

- $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}$ $dim \mathbb{F}^n = n$.
- $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots, n\}$, $dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$.
- $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, es infinito dimensional.
- $\mathbb{F}^{m \times n}$, $B = \{E_{ij} = 1, \ldots, m \; j = 1, \ldots, n\}$, $dim \mathbb{F}^{m \times n} = mn$.
- $\mathbb{F}^\infty$, $B = \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. es infinito dimensional.

2. Unidad 2 - Transformaciones Lineales