Complementos de Matemática I
Matemática Discreta

Depto de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
UNR

2025

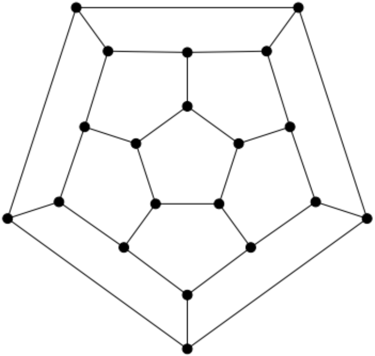
Ciclos Hamiltonianos

Definición

Un ciclo hamiltoniano en un grafo G es un ciclo que contiene todos los vértices de G.

DEFINICIÓN

Un ciclo hamiltoniano en un grafo G es un ciclo que contiene todos los vértices de G.Un grafo es hamiltoniano si tiene un ciclo hamiltoniano.



Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n
- K_n

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n
- K_n sii $n \geq 3$

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n
- K_n sii $n \geq 3$
- W_n

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

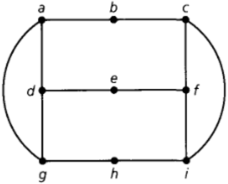
- C_n
- P_n
- K_n sii $n \geq 3$
- W_n
- $K_{n,m}$

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n
- K_n sii $n \geq 3$
- W_n
- $K_{n,m}$ sii $m = n$

Los siguientes grafos son hamiltonianos?

- C_n
- P_n
- K_n sii $n \geq 3$
- W_n
- $K_{n,m}$ sii $m = n$
- Grafo de Petersen
- El grafo siguiente, tiene un camino hamiltoniano? tiene un ciclo hamiltoniano?



Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.

Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos (cf. eulerianos).

Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos (cf. eulerianos).
- Si G hamiltoniano entonces:
  - es conexo

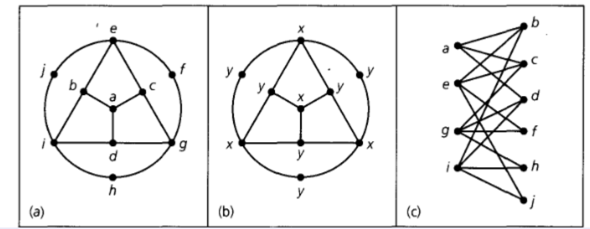
Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos (cf. eulerianos).
- Si G hamiltoniano entonces:
  - es conexo
  - $\delta(G) \geq 2$

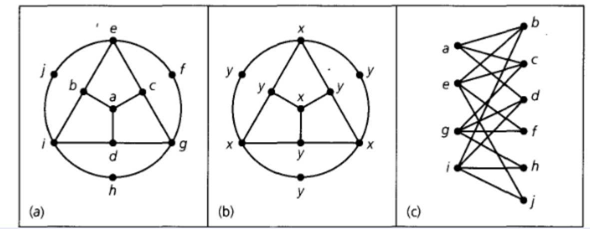
Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos (cf. eulerianos).
- Si G hamiltoniano entonces:
  - es conexo
  - $\delta(G) \geq 2$
  - si $gr(v) = 2$ ambas aristas están en todo ciclo hamiltoniano.

Ejemplo

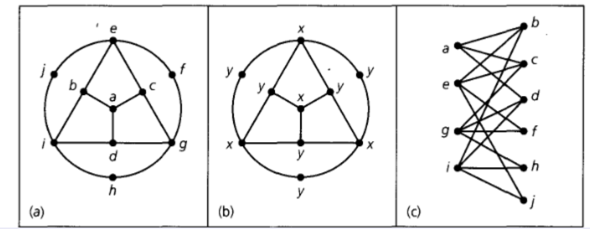


EJEMPLO



Si es bipartito y no son iguales los conjuntos de vértices de cada lado de la bipartición...NO tiene ciclo hamiltoniano.

EJEMPLO



Si es bipartito y no son iguales los conjuntos de vértices de cada lado de la bipartición...NO tiene ciclo hamiltoniano.

TEOREMA

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 2$. Si $gr(v)+gr(w)\geq n-1$ para todo $v,w\in V$, $v\neq w$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

PROOF.

Pizarra □

Corolario

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 2$. Si $gr(v)\geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v\in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Ejercicio

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 2$. Si $gr(v)\geq \frac{n-1}{2}$ para todo $v\in V$, entonces G tiene un camino hamiltoniano.

Ejercicio

TEOREMA

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 3$. Si $gr(v)+gr(w)\geq n$ para todo par de vértices $v,w\in V$ no adyacentes entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

PROOF.

Pizarra

$\square$

COROLARIO

Sea $G = (V, E)$ un grafo sin bucles con $|V| = n \geq 3$. Si $gr(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Ejercicio

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 3$. Si $gr(v)\geq \frac{n}{2}$ para todo $v\in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Ejercicio

COROLARIO

Sea $G=(V,E)$ un grafo sin bucles con $|V|=n\geq 3$. Si $|E|\geq \binom{n-1}{2}+2$ para todo $v\in V$, entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

PROOF.

Pizarra $\square$