Repaso de conceptos de teoría (ver bibliografía: Meyer)

En la unidad anterior se estudiaron variables aleatorias discretas, cada una con su respectiva *función de probabilidad puntual* $p_X(x)=P(X=x)$ y su *función de distribución acumulada* $F_X(x)=P(X\leq x)$.

Ahora estudiaremos las variables aleatorias continuas, cada una con su respectiva *función de densidad de probabilidad* $f_X(x)$ y su *función de distribución acumulada* $F_X(x)=P(X\leq x)$.
A diferencia del caso anterior, **$f_X(x)$ no es la probabilidad $P(X=x)$**. Para evaluar probabilidades debemos calcular la integral de $f_X(x)$ en un cierto intervalo. Es decir

$$\mathrm{P}(a \leq x \leq b) = \int_a^b \mathrm{f_X}(x)\,dx \qquad \text{donde } a, b \in \mathbb{R}$$

Si queremos calcular la probabilidad que X asuma un determinado valor particular, la integral anterior resulta 0. Por lo tanto, no podemos hablar de la probabilidad que $X=x$ porque siempre será 0. Por otra parte, tiene sentido calcular probabilidades en un intervalo de valores, como por ejemplo $P(a\leq x\leq b)$. Además, podemos decir que $P(a\leq x\leq b)=P(a\leq x<b)=P(a<x\leq b)=P(a<x<b)$.

La función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$\mathrm{F_X}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{f_X}(\tau)\,d\tau$$

Durante el desarrollo de los ejercicios se usará, cuando sea necesaria, la notación con subíndices como la usada en la integral precedente para indicar a qué variable aleatoria corresponde una dada función.

Generalidades

3. La duración en horas de un cierto tipo de tubos es una variable aleatoria con función densidad dada por

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{100}{t^2} & \text{si } t \geq 100 \\ 0 & \text{si } t < 100 \end{cases}$$

En este problema se define la variable aleatoria continua
T:” duración en horas de un cierto tipo de tubos”

A partir de la fdp $f(t)$, se calcula la función de distribución acumulada $F(t)$. Para ello deberemos integrar en cada uno de los tramos en que está definida $f(t)$.

Si $t<100$
$\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq t) = \mathrm{F}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}(x)\ dx = 0$

Si $t\geq 100$

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq t) = \mathrm{F}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{f}(x)\ dx = \int_{-\infty}^{100} 0\ dx + \int_{100}^{t} \frac{100}{x^2}\,dx = 1 - \frac{100}{t}$$

Finalmente

$$P(T \leq t) = F(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{100}{t} & \text{si } t \geq 100 \\ 0 & \text{si } t < 100 \end{cases}$$

a) Calcule la probabilidad de que un tubo dure menos de 200 horas cuando se sabe que aún funciona después de 150 horas.

Calcularemos la probabilidad del suceso "el tubo dura menos de 200 horas" condicionada al suceso "el tubo dura más de 150 horas" usando la definición de probabilidad condicional. Por simplicidad en la notación, emplearemos desigualdades para denotar a los sucesos anteriores y sus combinaciones.
Luego:

De (1) y (2)

$$P(T < 200 \,/\, T > 150) = \frac{P(150 < T < 200)}{P(T > 150)} = \frac{1}{4}$$

$P(150<T<200)=P(T<200)-P(T<150)=F(200)-F(150)=\ldots$ (1)
$P(T>150)=1-P(T\leq150)=1-F(150)=\ldots$ (2)

b) Si se instalan tres de tales tubos, calcule la probabilidad de que uno de ellos dure a lo sumo 150 horas.

Definimos la variable aleatoria discreta
X:"número de tubos que duran a lo sumo 150 horas de un total de 3 tubos"
Suponiendo que la duración T de cada tubo es independiente de la duración de los demás, podemos decir que:
$X \sim Bi(3,p)$ donde $p=P(T\leq150)$ (Completar con la expresión de la distribución de X)

Finalmente
$P(X=1)=\ldots$

c) ¿Cuál es el número mínimo de tubos que hay que colocar en conjunto para que la probabilidad de que todos funcionen más de 150 horas sea menor o igual que 0,5?

Definimos la variable aleatoria discreta
Y:"número de tubos que duran a más de 150 horas de un total de *n* tubos"
Suponiendo que la duración T de cada tubo es independiente de la duración de los demás, podemos decir que:
$Y \sim Bi(n,p)$ donde $p=P(T>150)$ (Completar con la expresión de la distribución de Y)

Del enunciado:
$P(Y=n)\leq0,5$
A partir de esta expresión se puede despejar el valor de *n*, o se puede probar para diferentes valores de *n* hasta encontrar el que satisface el enunciado.

4. Un proceso químico puede producir un organismo de tipo A o B difíciles de distinguir. Un organismo de tipo A contiene una proporción x de una sustancia química que varía aleatoriamente con función densidad

$$f(x)=\begin{cases}4(1-x)^3 & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Para un organismo de tipo B, la correspondiente función densidad es

$$g(x)=\begin{cases}6x(1-x) & \text{si} \quad 0\le x\le 1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Se propone clasificar el tipo de un organismo, en función de la proporción x de la sustancia química, con el siguiente criterio: si $x \le 1/3$ el organismo es clasificado de tipo A, y, en otro caso, es clasificado de tipo B. Calcule la probabilidad de que un organismo de tipo A sea clasificado de tipo B.

De acuerdo al enunciado, el valor hallado de la variable aleatoria continua
X:"proporción de una sustancia química que varía con la densidad"
servirá como criterio de clasificación entre dos organismos A y B.

Definimos los sucesos
O_A:"el organismo es tipo A"
C_B:"el organismo es clasificado tipo B"
No definimos más sucesos porque no serán necesarios en la resolución.

Sabemos que, si X> ⅓ el organismo se clasifica como tipo B. Además, si el organismo es de tipo A, la función de densidad de probabilidad de X es f(x).
Entonces

$$P(C_B / O_A) = P\left(X > \frac{1}{3} / O_A\right) = \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{16}{81}$$

Distribución uniforme

6. El tiempo en minutos que una persona demora en ir de su casa a una estación de tren es una variable aleatoria T con distribución uniforme en el intervalo [20, 25].

a) Calcule la probabilidad de que si la persona deja su casa a las 07:05:00, alcance el tren que parte a las 07:28:00.
b) Calcule el tiempo promedio que la persona demora en realizar el trayecto desde su casa a la estación de tren.

Definimos la v.a.c.
T:" tiempo en minutos que una persona demora en ir de su casa a una estación de tren"

$$\mathrm{T} \sim \mathrm{U}[20,25] \qquad \mathrm{f}(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } 20 \leq t \leq 25 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como T tiene distribución uniforme, sabemos que su función de distribución acumulada F(t) es

$$\mathrm{F}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ t < 20 \\ \dfrac{t-20}{5} & \text{si } 20 \leq t \leq 25 \\ 1 & \text{si } \ t > 25 \end{cases}$$

Deducir este resultado

Y su esperanza y varianza son:

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}) = \frac{20+25}{2} = 22{,}5 \qquad \mathrm{V}(\mathrm{T}) = \frac{(25-20)^2}{12} \approx 2{,}083$$

a) Si la persona deja su casa a las 07:05 y el tren parte a las 07:28, debe demorar menos de 23 min en llegar a la estación.

Luego, usando la expresión de F(t):

$$\mathrm{P}(\mathrm{T} \leq 23) = \mathrm{F}(23) = \frac{23-20}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

También es posible calcular P(T≤23) integrando f(t).

b) El tiempo promedio que la persona demora en realizar el trayecto es E(T)=22,5.
Luego, el tiempo promedio que la persona demora en realizar el trayecto desde su casa a la estación de tren es de 22,5 minutos.

Distribución exponencial

8. El número de accidentes en una fábrica se puede representar por una v.a. con distribución de Poisson con promedio dos accidentes considerando el intervalo de tiempo de una semana. Calcule la probabilidad de que el tiempo entre dos accidentes sea mayor que 3 días.

Como trabajaremos con intervalos en días, convertimos el intervalo de tiempo asociado a la variable aleatoria a días.
Luego definimos la variable aleatoria X de nuestro problema como:
X:” de accidentes en una fábrica en un intervalo de tiempo de 7 días”
X~Po(λ)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

E(X)=λ=2 V(X)= λ

Definimos la variable aleatoria continua
Y:”tiempo en días entre dos accidentes sucesivos en una fábrica”

Se puede demostrar (la demostración no entra en el contenido de la materia) que
Y~Exp(α) con α=λ/*t*, donde *t* es el intervalo de tiempo asociado a X (en este caso *t*=7 días).
Luego
E(Y)=1/α=*t*/λ V(Y)= 1/α^2 =(*t*/λ)^2

En este caso particular
Y~Exp(2/7)

$$\mathrm{f_Y}(y) = \begin{cases} \frac{2}{7} e^{-\frac{2}{7}y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Nota: como en el problema aparecen diferentes variables aleatorias, agregaremos un subíndice a la notación que usamos para la función de densidad de probabilidad **f** y para la función de distribución acumulada **F** para identificar **claramente** a qué variable aleatoria corresponden.

$$\mathrm{P(Y} \leq y) = \mathrm{F_Y}(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{7}y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego
P(Y>3)=1-P(Y<3)=1-F_Y(3)=1-1+$e^{-2/7*3}$=$e^{-6/7}$≈0,42437

9. El número de diarios que vende un canillita es una variable aleatoria X con distribución de Poisson con esperanza 50 diarios vendidos considerando un intervalo de tiempo de una hora.
a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.
b) Si el canillita tarda 5 minutos en preparar y tomar un café, calcule la probabilidad de que realice esas acciones sin ser interrumpido por un cliente.
c) Calcule el tiempo promedio que transcurre entre dos ventas.
d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.

Como trabajaremos con intervalos en minutos, convertimos el intervalo de tiempo asociado a X a minutos.
Luego definimos la variable aleatoria X de nuestro problema como:
X:"número de diarios vendidos en un intervalo de tiempo de duración 60 minutos"
X~Po(λ)

$$\mathrm{P(X} = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

E(X)=λ=50 V(X)= λ

a) Calcule la probabilidad de que transcurran más de dos minutos entre dos ventas.
Definimos la variable aleatoria continua
Y:"tiempo en minutos entre dos ventas sucesivas de diarios"
Se puede demostrar que
Y~Exp(α) con α=λ/*t*, donde *t* es el intervalo de tiempo asociado a X (en este caso *t*=60 minutos).
Luego
E(Y)=1/α=*t*/λ V(Y)= 1/α^2 =(*t*/λ)^2

En este caso particular
Y~Exp(5/6)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{6} e^{-\frac{5}{6}y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$P(Y \leq y) = F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{5}{6}y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego $P(Y>2)=1-P(Y<2)=1-F_Y(2)=1-1+e^{-5/6*2}=e^{-10/6}\approx 0{,}18887$

b) Si el canillita tarda 5 minutos en preparar y tomar un café, calcule la probabilidad de que realice esas acciones sin ser interrumpido por un cliente.
En este caso, el intervalo de tiempo entre dos ventas sucesivas debería ser ≥ 5 min.
$P(Y\geq 5)=1-P(Y\leq 5)=1-F_Y(5)= e^{-25/6}\approx 0{,}0155$

c) Calcule el tiempo promedio que transcurre entre dos ventas.
Como Y tiene distribución exponencial, sabemos que
$E(Y)=1/\alpha=6/5=1{,}2$
Luego, el tiempo promedio entre dos ventas sucesivas es de 1,2 minutos.

d) Calcule la probabilidad de que transcurran en total más de siete minutos para la siguiente venta, dado que ya han transcurrido cinco minutos desde la última.
$P(Y>7/Y>5)=P(Y>(2+5)/Y>5)=P(Y>2) \approx 0{,}18887$

Por propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial

Distribución normal

12. Los alambres que se utilizan en cierta computadora deben tener una resistencia entre 0,12 y 0,14 ohms. Las resistencias de los alambres producidos por una empresa tienen una distribución normal con media μ = 0,13 ohms y desviación estándar σ = 0,005 ohms. Si se utilizan cuatro de estos alambres, ¿cuál es la probabilidad de que los cuatro cumplan con las especificaciones?

Definimos la v.a.c.
X:"resistencia de los alambres producidos por una empresa"
$X \sim N(\mu=0{,}13 , \sigma=0{,}005)$

Nota: se usaron los símbolos μ y σ para expresar claramente que el segundo parámetro es el desvío estándar.

La probabilidad que uno de estos alambres cumpla con las especificaciones es:
$P(0{,}12 < X < 0{,}14)=P(X<0{,}14)-P(X<0{,}12)=\ldots=0{,}9545$

Si se seleccionan cuatro alambres, y suponiendo que la resistencia de cada uno de ellos es independiente de la resistencia de los demás, la v.a.d.
Y:"número de alambres que cumple con las especificaciones de un total de 4 alambres"

tiene una distribución
Y~Bi(4 , 0,9545) (Completar con la expresión de la distribución de Y)

P(Y=4)=…≈0,83005

Otra forma de resolución sin usar la distribución binomial:
Definimos los sucesos:
A_1:"el alambre 1 cumple con las especificaciones"
A_2:"el alambre 2 cumple con las especificaciones"
A_3:"el alambre 3 cumple con las especificaciones"
A_4:"el alambre 4 cumple con las especificaciones"
B:"los cuatro alambres cumplen con las especificaciones"

Suponiendo que la resistencia de cada uno de los alambres es independiente de la resistencia de los demás, podemos decir
$P(B)=P(A_1) . P(A_2) . P(A_3) . P(A_4) =0{,}9545^4 \approx 0{,}83005$

16. La producción anual en una fábrica es una variable aleatoria X con distribución normal con media μ y desvío estándar σ. El 90% de los años la producción es inferior a 1300 y el 40% de los años es superior a 1100. Halle la probabilidad de que la producción durante un año sea superior a 1000.

Definimos la v.a.c.
X:" producción anual en una fábrica"
X~N(μ, σ)

Suponiendo que se estudió la producción durante un número suficientemente grande de años, que el 90% de los años la producción sea inferior a 1300 significa que: P(X<1300)=0,9

De la misma manera, que el 40% de los años la producción sea superior a 1100 significa que: P(X>1100)=0,4

Para poder usar las tablas de la distribución normal estandarizada, es necesario hacer un cambio de variables. Definimos la variable estandarizada
$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma}$$
Luego
$P(X<1300)=P(Z<z_1)=0{,}9$
$P(X>1100)=1-P(X<1100)=1-P(Z<z_2)=0{,}4$

De tablas
$$z_1 = \frac{1300 - \mu}{\sigma} \approx 1{,}285$$
$$z_2 = \frac{1100 - \mu}{\sigma} \approx 0{,}255$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta
$\mu \approx 1050{,}49$
$\sigma \approx 194{,}17$

La probabilidad de que la producción durante un año sea superior a 1000 resulta
$P(X>1000)=1-P(X<1000)=1-P(Z<z_3)=1-0{,}39743=0{,}60257$

De (1) y de tabla de distribución normal estandarizada

Nuevamente, debemos usar la variable estandarizada para obtener $P(X<1000)=P(Z<z_3)$

$$z_3 = \frac{1000-\mu}{\sigma} \approx -0{,}26 \qquad (1)$$

18. La bebida "Delicia Jamaiquina" se vende en latas de 315 ml. El volumen promedio que vierte la máquina llenadora en una lata es 300 ml, con desvío estándar 6 ml. Si se supone que el volumen de bebida vertido por la llenadora sigue una distribución normal,
a) ¿Cuál es la probabilidad que la máquina llenadora provoque un derrame en una lata?
b) Las especificaciones del contenido son 300 ± 20 ml. ¿Qué proporción de latas cumple con el requisito?

a) Definimos la v.a.c.
X:"volumen de líquido que vierte la máquina llenadora"
X~N(300 ml, 6 ml)

Como el contenido máximo de una lata es de 315 ml, habrá derrame si X>315. Luego
$P(X>315)=1-P(X<315)=\ldots=1-0{,}9938=0{,}0062$

b) Definimos la v.a.c.
Y:"volumen de líquido que contiene una lata"

donde $$Y = \begin{cases} X & \text{si } x \leq 315 \\ 315 & \text{si } x > 315 \end{cases} \qquad (1)$$

Según las especificaciones, el contenido debe estar entre 280 ml y 320 ml. Como siempre es $Y \leq 315$, solamente habrá que determinar la probabilidad que $Y \geq 280$.

$P(Y\geq 280)=P(X\geq 280)=\ldots=0{,}99957$

De (1)

De tabla de distribución normal estandarizada

Finalmente, el 99,957% de latas cumple con el requisito del contenido de líquido en la lata.

Función de variable aleatoria

20. Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $p_X(x) = x/6$, donde x = 1, 2, 3 e $Y=(X-2)^2$.

a) Determine la distribución de probabilidad de Y.
b) Calcule E(Y) y V(Y).

Resolución:
X es una variable aleatoria discreta cuya distribución de probabilidad $p_X(x)$ es

$$p_X(x) = \begin{cases} x/6 & \text{si} \quad x = 1,\ 2,\ 3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$Y = H(X) = (X-2)^2$ es una variable aleatoria discreta

a) Analicemos los valores posibles de Y

Si X=1 => Y=H(1)=1
Si X=2 => Y=H(2)=0
Si X=3 => Y=H(3)=1

Luego, calculamos la distribución de probabilidad $p_Y(y)$ de la variable Y en base a los valores de $p_X(x)$

X	$p_X(x)$
1	1/6
2	2/6
3	3/6

$\Rightarrow$

Y	$p_Y(y)$
1	$p_X(1)+ p_X(3)=4/6$
0	$p_X(2)=2/6$

Por lo tanto

$$p_Y(y) = \begin{cases} 2/3 & \text{si} \quad y = 1 \\ 1/3 & \text{si} \quad y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

b)

Esperanza de Y: E(Y)= 2/3 * 1 + 1/3 * 0 = 2/3
$E(Y^2)$= 2/3 * 1^2 + 1/3 * 0^2 = 2/3
Varianza de Y: $V(Y)= E(Y^2)-(E(Y))^2=2/3-4/9=2/9$

22. Determine la función densidad de la variable aleatoria Y, siendo Y = 4 - X^2 y X ~ U [-1, 1].
Resolución:
X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ es

$$X \sim U[-1,1] \qquad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \ -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

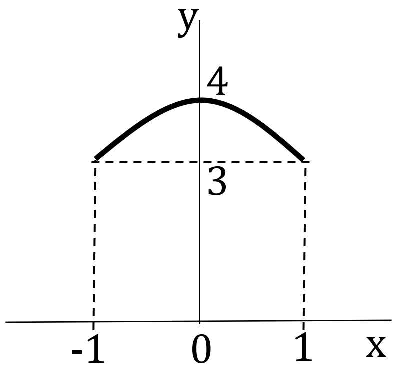
Como X tiene distribución uniforme, sabemos que su función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} \qquad (22)$$

Deducir este resultado

E(X)=0
V(X)=1/3

$Y = H(X) = 4 - X^2$ es una variable aleatoria continua porque X es una variable aleatoria continua y H(X) es una función continua en el intervalo [-1,1].



Analizando la gráfica de H(*x*) encontramos los recorridos de X e Y
$R_X = [-1,1]$
$R_Y = [3,4]$

Luego, podemos afirmar que H(X) no es monótona en R_X pero si derivable. En consecuencia, no podremos aplicar el teorema visto en teoría y calcularemos $f_Y(y)$ a partir de $F_Y(y)$.
Para determinar $F_Y(y)=P(Y \le y)$, calcularemos la probabilidad del suceso equivalente en R_X.

Como $Y=H(X)=4-X^2$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-X^2 + 4 \le y) = P(X^2 \ge 4 - y) = P\left(|X| \ge \sqrt{4-y}\right)$$

Entonces, el suceso equivalente a $Y \le y$ es $|X| \ge \sqrt{4-y}$. Continuamos el desarrollo para encontrar expresiones en función de la distribución acumulada de X definida en (22).

$$F_Y(y) = P\left(X \le -\sqrt{4-y}\right) + P\left(X \ge \sqrt{4-y}\right) = F_X\left(-\sqrt{4-y}\right) + 1 - F_X\left(\sqrt{4-y}\right) \qquad (22.1)$$

Por propiedad del valor absoluto

¿Por qué pueden sumarse estas probabilidades?

Por definición de función de distribución acumulada

Analizamos el comportamiento de cada miembro de la suma en R_X buscando determinar los valores correspondientes en R_Y.

De la definición de $F_X(x)$:

$$F_X\left(-\sqrt{4-y}\right) = \frac{-\sqrt{4-y}+1}{2} \qquad si \ -1 \le x = -\sqrt{4-y} \le 1$$

Buscamos los valores de *y* para los cuales es válida la expresión anterior.

$$-1 \le -\sqrt{4-y} \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sqrt{4-y} \le 0 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-y} \le 1 \Rightarrow 0 \le 4-y \le 1 \ \Rightarrow y \ge 3$$

Como $-\sqrt{4-y} \le 0$

Considerando $y \le 4$

Luego, resulta

$$\mathrm{F_X}\left(-\sqrt{4-y}\right) = \frac{-\sqrt{4-y}+1}{2} \qquad si\ \ 3 \le y \le 4 \qquad (22.2)$$

De manera similar, analizamos el último sumando de (22.1)

$$\mathrm{F_X}\left(\sqrt{4-y}\right) = \frac{\sqrt{4-y}+1}{2} \qquad si\ -1 \le x = \sqrt{4-y} \le 1$$

Nuevamente buscamos los valores de *y* para los cuales es válida la expresión anterior.

$$-1 \le \sqrt{4-y} \le 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{4-y} \le 1 \Rightarrow 0 \le 4-y \le 1 \Rightarrow\ y \ge 3$$

Como $\sqrt{4-y} \ge 0$

Considerando $y \le 4$

Luego, resulta

$$\mathrm{F_X}\left(\sqrt{4-y}\right) = \frac{\sqrt{4-y}+1}{2} \qquad si\ \ 3 \le y \le 4 \qquad (22.3)$$

Reemplazando (22.2) y (22.3) en (22.1)

$$\begin{aligned}\mathrm{F_Y}(y) &= \mathrm{F_X}\left(-\sqrt{4-y}\right) + 1 - \mathrm{F_X}\left(\sqrt{4-y}\right) = \frac{-\sqrt{4-y}+1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{4-y}+1}{2} \\ &= 1 - \sqrt{4-y} \qquad si\ \ 3 \le y \le 4 \qquad (22.4)\end{aligned}$$

Analizando (22.4), podemos comprobar que $F_Y(3)=0$, $F_Y(4)=1$, $F_Y(y)$ es continua y derivable en R_Y, y además $F_Y(y)$ es no decreciente en R_Y.

Finalmente, la expresión de $F_Y(y)$ que cumple las condiciones para ser considerada una función de distribución acumulada es:

$$\mathrm{F_Y}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y < 3 \\ 1 - \sqrt{4-y} & \text{si } 3 \le y \le 4 \\ 1 & \text{si} \quad y > 4 \end{cases}$$

Luego, derivamos $F_Y(y)$ para encontrar $f_Y(y)$

Si $3 \le y \le 4$

$$\frac{\partial \mathrm{F_Y}(y)}{\partial y} = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)(4-y)^{-\frac{1}{2}}$$

Como $F_Y(y)$ es constante para las otras dos ramas, su derivada es 0.
Finalmente

$$\mathrm{f_Y}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{4-y}} & \text{si } 3 \le y \le 4 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

23. Un cierto tipo de instrumento electrónico tiene una duración X (en unidades de 1.000 hs.) que varía aleatoriamente con función densidad $f_X(x) = e^{-x}$, $x > 0$. El costo de fabricar tal instrumento es de \$2. El fabricante vende el instrumento por \$5, pero garantiza un reembolso total si $X \le 0{,}9$. Determine la esperanza matemática de la utilidad por instrumento.

Resolución:
X:"duración de un instrumento electrónico en unidades de 1000 horas"
X es una variable aleatoria continua cuya función de densidad de probabilidad $f_X(x)$ es

$$X \sim \mathrm{Exp}(1) \qquad \mathrm{f_X}(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

Por ser una distribución exponencial, sabemos que su función de distribución acumulada $F_X(x)$ resulta

$$\mathrm{F_X}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$$

y además
E(X)=1
V(X)=1

Definimos:
C: "costo de fabricación del instrumento en pesos"
V: "precio de venta del instrumento"
R: "reembolso en pesos si la duración es menor a 900 horas"
T: "utilidad por instrumento en pesos"

Veamos los valores que asumen estas variables:
C=2 es una constante
V=5 es una constante

$$\mathrm{R{=}H}(x) = \begin{cases} 5 & \text{si} \quad x \le 0{,}9 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0{,}9 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

La utilidad T resulta

$$\mathrm{T{=}5{-}2{-}R{=}} \begin{cases} -2 & \text{si} \quad r = 5 \\ 3 & \text{si} \quad r = 0 \end{cases} = \mathrm{J}(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \le 0{,}9 \\ 3 & \text{si} \quad x > 0{,}9 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

Calculamos la probabilidad para cada valor posible de T:
$P(T=-2)=P(X\leq 0,9)=F_X(0,9)=1-e^{-0,9}\approx 0,59$
$P(T=3)=P(X>0,9)=1-F_X(0,9)=e^{-0,9}\approx 0,41$

Por lo tanto, la distribución de probabilidad $p_T(t)$ es

$$p_T(t)=\begin{cases} 0,59 & \text{si } t=-2 \\ 0,41 & \text{si } t=3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Finalmente, la esperanza matemática de T es
E(T) = 0,59 * (-2) + 0,41 * 3 = 0,05
Luego, la utilidad promedio por instrumento será $0,05.

25. Considere una v.a X ~ U[0, 1]. Halle la función de densidad de la v.a. Y cuando:
   a) Y = $a + (b - a)X$, $b > a$.
   b) Y = $-\frac{1}{\lambda}\ln X$, $\lambda > 0$.

Resolución:
Sabemos que X es una variable aleatoria continua y

$$X\sim U[0,1] \qquad f_X(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Como X tiene una distribución uniforme, su función de distribución acumulada $F_X(x)$ es

$$F_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases} \tag{23}$$

   a) Definimos Y=H(X)=$a+(b-a)$X, con $b>a$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow 0\leq (b-a)x\leq b-a \Leftrightarrow a\leq a+(b-a)x\leq b \Leftrightarrow a\leq y\leq b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo [a,b] porque X es v.a. continua y H(X) es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Sabemos que H(X) es continua, estrictamente monótona creciente y derivable en el conjunto de números reales por ser la ecuación de una recta, en particular lo sigue siendo en el intervalo [0,1].
Por lo tanto, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y)=f_X(H^{-1}(y))\cdot\left|\frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y}\right|$$

Sabemos que

$$\mathrm{Y} = \mathrm{H}(\mathrm{X}) = a + (b-a)\mathrm{X} \Rightarrow \frac{\mathrm{Y}-a}{b-a} = \mathrm{X} = \mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Y})$$

Luego, podemos escribir

$$\mathrm{f_X}(\mathrm{H}^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le \mathrm{H}^{-1}(y) \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(23.a.1)}$$

$$\left| \frac{\partial \mathrm{H}^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| \frac{1}{b-a} \right| = \frac{1}{b-a} \quad \text{porque } b>a \qquad \text{(23.a.2)}$$

Por lo tanto, utilizando los resultados encontrados en (23.a.1) y (23.a.2), podemos decir que

$\mathrm{X} \sim \mathrm{U}[a, b]$ $\qquad \mathrm{f_Y}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo [0,1], es posible obtener otra variable aleatoria distribuida uniformemente en un intervalo [*a*,*b*] deseado usando la función H(X) =*a*+(*b*-*a*)X, con *b*>*a*.

Otra forma: resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X

$$0 \le x \le 1 \Leftrightarrow 0 \le (b-a)x \le b-a \Leftrightarrow a \le a+(b-a)x \le b \Leftrightarrow a \le y \le b$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el intervalo [*a*,*b*] porque X es v.a.c. y H(X) es una función continua por ser la ecuación de una recta en el plano.

Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$F_Y(y)=P(Y \le y)=P(a+(b-a)X \le y)=P\left(X \le \frac{y-a}{b-a}\right)= F_X\left(\frac{y-a}{b-a}\right)$

Utilizando la ecuación (23), podemos escribir

$$\mathrm{F_Y}(\mathrm{y}) = \mathrm{F_X}\left(\frac{\mathrm{y}-a}{b-a}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \dfrac{\mathrm{y}-a}{b-a} < 0 \\ \dfrac{\mathrm{y}-a}{b-a} & \text{si } 0 \le \dfrac{\mathrm{y}-a}{b-a} \le 1 \\ 1 & \text{si } \dfrac{\mathrm{y}-a}{b-a} > 1 \end{cases}$$

Analizando cada expresión para $F_Y(y)$

$F_Y(y)=0$ si $\dfrac{y-a}{b-a} < 0 \Leftrightarrow y < a$

$F_Y(y)$=1 si $\frac{y-a}{b-a} > 1 \Leftrightarrow y > b$

$F_Y(y)$= $\frac{y-a}{b-a}$ si $0 \le \frac{y-a}{b-a} \le 1 \Leftrightarrow 0 \le y-a \le b-a \Leftrightarrow a \le y \le b$

Por lo tanto, $F_Y(y)$ resulta

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a \\ \dfrac{y-a}{b-a} & \text{si } a \le y \le b \\ 1 & \text{si } y > b \end{cases}$$

Luego, la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ resulta

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le y \le b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En base a la expresión hallada para $f_Y(y)$ es posible afirmar que Y es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en el intervalo [*a*,*b*], es decir Y~U[*a*,*b*].

b) Definimos Y = $-\frac{1}{\lambda}$ ln X, $\lambda > 0$.

Analizamos los valores posibles para Y a partir de los valores posibles de X. Como ln X no está definido para X=0, analizaremos el intervalo (0,1]

$$0 < x \le 1 \Leftrightarrow \ln x \le \ln(1) = 0 \Leftrightarrow 0 \le -\frac{1}{\lambda}\ln x \Leftrightarrow 0 \le y$$

Luego, Y es una variable aleatoria continua definida en el conjunto de reales positivos porque X es una v.a.c. y H(X) = $-\frac{1}{\lambda}$ ln X es una función continua en el intervalo (0,1].

Como H(X) es continua, estrictamente monótona y derivable en el conjunto de números reales positivos, podemos calcular la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ directamente a partir de $f_X(x)$ como

$$f_Y(y) = f_X(H^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right|$$

Sabemos que

$$Y = H(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln X \Rightarrow e^{-\lambda Y} = X = H^{-1}(Y)$$

Luego, podemos escribir

$$f_X(H^{-1}(y)) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < H^{-1}(y) \le 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (23.b.1)$$

Por otra parte

$$\left| \frac{\partial H^{-1}(y)}{\partial y} \right| = \left| e^{-\lambda y} \cdot (-\lambda) \right| = \lambda\ e^{-\lambda y} \quad \text{porque } \lambda > 0 \qquad (23.b.2)$$

Luego, de (7.b.1) y (7.b.2), podemos decir que

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \qquad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

Debemos aclarar que se asignó 0 a la función de distribución de probabilidad cuando $y \le 0$.
Este resultado nos muestra que, a partir de una variable con distribución uniforme en el intervalo (0,1), es posible obtener otra variable aleatoria con distribución exponencial con un parámetro λ dado usando la función $H(X) = -\frac{1}{\lambda} \ln X$, con $\lambda > 0$.

Otra forma: resolvemos el problema a partir de la función de distribución acumulada de Y.
Buscamos $F_Y(y)$ en base a la función de distribución acumulada de X:

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-\frac{1}{\lambda} \ln X \le y) = P(-\ln X \le \lambda y) = P(e^{-\ln X} \le e^{\lambda y}) = P(\frac{1}{X} \le e^{\lambda y}) = P(X \ge e^{-\lambda y}) = 1 - P(X \le e^{-\lambda y})$

En el intervalo analizado, y de acuerdo a la ecuación (23), podemos decir que
$P(Y \le y) = 1 - P(X \le e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}$
Luego

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

Finalmente, podemos decir que

$$Y \sim \text{Exp}(\lambda) \qquad f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{si } y \le 0 \end{cases}$$

27. En una empresa embotelladora de jugos, la cantidad de líquido por botella es una variable aleatoria X~N(500 ml, 30 ml).
a) Calcule la probabilidad de que una botella contenga menos de 430 ml.
b) Las botellas se venden en pack de 12 de ellas. Calcule la probabilidad de que, en un pack, por lo menos 3 de ellas contengan menos de 430 ml.
c) El costo de producción de cada botella es $0,20 y cada pack se vende al supermercadista a $4,80. Si en el pack se detectan 3 o más unidades con menos de 430 ml, el pack se considera defectuoso y la empresa reembolsa al supermercadista el doble del dinero recibido por el pack. Calcule la ganancia promedio por cada pack.

Resolución:
Sabemos que X: "cantidad de líquido de una botella en ml" es una v.a.c. y

$X \sim N(500 \text{ ml}, 30 \text{ ml}) \qquad f_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, 30} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-500}{30}\right)^2} \quad , x \in \mathbb{R}$

a) Definimos la variable estandarizada $Z = \dfrac{X-500}{30}$.

Luego

$P(X < 430) = P\left(Z < -\dfrac{7}{3}\right) \approx 0,0099$

b) Suponiendo que el contenido de líquido de cada botella es independiente del contenido de las demás, definimos la variable aleatoria Y como
Y:"número de botellas que contienen menos de 430 ml en un pack de 12 botellas"

Y es una variable aleatoria discreta que se distribuye como una binomial de esta manera:
Y~Bi(12 , 0,0099)

$$P(Y = y) = \binom{12}{y} \, 0,0099^{y} \, (1\text{-}0,0099)^{12-y}, \quad y = \overline{0,12}$$

Entonces
P(Y≥3)=1-P(Y<3)=1-P(Y=0)-P(Y=1)-P(Y=2)=0,0002

c) Definimos:
C: "costo de producción por pack de 12 botellas en $"
V: "precio de venta en $ del pack"
R: "reembolso en $ si hay al menos 3 botellas con menos de 430 ml"
G: "ganancia por pack en $"

Veamos los valores que asumen estas variables:
C = 0,20 * 12 = 2,4 es una constante
V= 4,8 es una constante

$$R = H(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 3 \\ 2 \cdot 4,8 = 9,6 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$ es una variable aleatoria discreta

La ganancia G resulta

$$G = V - C - R = \begin{cases} 2,4 & \text{si } r = 9,6 \\ -7,2 & \text{si } r = 0 \end{cases} = J(y) = \begin{cases} 2,4 & \text{si } y < 3 \\ -7,2 & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$

G es una variable aleatoria discreta.
P(G=-7,2)=P(Y≥3)=0,0002
P(G=2,4)=P(Y<3)=1-0,0002=0,9998

Entonces, la distribución de probabilidad $p_G(g)$ resulta

$$p_G(g) = \begin{cases} 0{,}0002 & \text{si } g = -7{,}2 \\ 0{,}9998 & \text{si } g = 2{,}4 \end{cases}$$

Finalmente, la ganancia promedio por pack será la esperanza matemática de G
E(G) = -7,2 * P(G=-7,2) + 2,4 * P(G=2,4) = -7,2 * 0,0002 + 2,4 * 0,9998 = 2,39808

28. El intervalo de tiempo empleado en determinado trabajo en la construcción de una casa es una variable aleatoria X cuya distribución es exponencial con un promedio de 10 horas. El costo de ese trabajo es $C = 100 + 40X + 3X^2$. Calcule la esperanza matemática de C. ¿Espera que el valor de C sea mayor que $2000 con mucha frecuencia?

Definimos la variable aleatoria
X:"intervalo de tiempo empleado determinado trabajo en la construcción de una casa"

Según el enunciado del problema:
$X \sim Exp(\alpha)$ $E(X)=10$ hs $= 1/\alpha$ $V(X)=100$ hs^2
Por lo tanto: $\alpha=0{,}1$
Luego: $f_X(x) = \begin{cases} 0{,}1\ e^{-0{,}1\,x} & x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ $F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0{,}1\,x} & x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$

Definimos la variable aleatoria C:"costo del trabajo" donde
$C=100+40\,X+3\,X^2$

$E(C)=E(100+40\,X+3\,X^2)=E(100)+E(40\,X)+E(3\,X^2)=100+40\,E(X)+3\,E(X^2)$ (1)
$V(X)=E(X^2) - (E(X))^2 \rightarrow E(X^2)=V(X) + (E(X))^2=100 + 10^2=200$
Reemplazando por lo valores de E(X) y $E(X^2)$ en (1)
E(C)=100+400+600=1100
Luego, la esperanza de C es **1100**.

El problema pide calcular la probabilidad que C sea mayor a 2000. Entonces, analizamos para qué rango de valores de X se cumple que C>2000. Entonces:
$C > 2000 \Rightarrow 100 + 40X + 3X^2 > 2000 \Rightarrow 3X^2 + 40X - 1900 > 0$

Luego, calculamos X tal que: $g(X)=3X^2+40X-1900=0$ (2)
Resolviendo (2) obtenemos
$X_1=-32{,}701$
$X_2=19{,}367$

Como X>0, analizamos g(X) alrededor de X_2. Por ejemplo, calculamos g(19) y g(20)
g(19)=…=-57 < 0
g(20)=…=100 > 0
Por lo tanto, si X > 19,367 → C > 2000.

Entonces, como ambos sucesos son equivalentes, podemos calcular
$P(C > 2000) = P(X > 19{,}367) = 1 - P(X < 19{,}367) = e^{-1{,}9367} \cong 0{,}14418$
Finalmente, alrededor del 14,42% de las veces el costo será mayor a 2000.