Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2022

Unidad 2: Teorema Fundamental del cálculo infinitesimal.

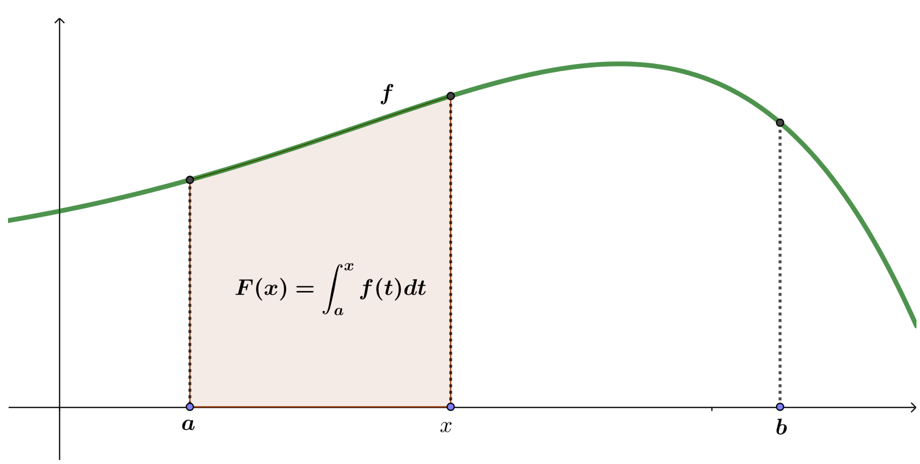
1. El Teorema Fundamental del Cálculo

En esta Unidad demostraremos uno de los resultados más importantes del cálculo infinitesimal. Mostraremos la relación entre derivadas e integrales, temas que integran el programa de este primer año y que son fundamentales en matemática y en muchas otras ciencias por sus amplias aplicaciones.

Supongamos que f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Podemos definir una nueva función F sobre $[a, b]$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Intuitivamente, si f es una función no negativa e integrable en $[a, b]$, el valor $F(x)$ representa el área bajo la gráfica de f comprendida en el intervalo $[a, x]$ como se muestra en la siguiente figura:



Veremos en los siguientes resultados que F tendrá características "buenas", que en cierto sentido mejoran las propiedades de f.

Teorema 36. *Si f es integrable en el intervalo $[a,b]$ y F está definida sobre $[a,b]$ como*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{1}$$

entonces F es continua sobre $[a,b]$.

Demostración:

Tomemos $c \in [a,b]$ cualquiera. Como f es integrable en $[a,b]$, entonces por definición, f es acotada. Por lo tanto existe M tal que

$$|f(x)| \leq M \qquad \text{para todo } x \in [a,b]. \tag{2}$$

Sea $h > 0$, entonces

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt = \int_c^{c+h} f(t)\,dt.$$

De la acotación dada en (2), se tiene que

$$-M \leq f(x) \leq M \qquad \text{para todo } x \in [a,b].$$

Luego, del Teorema 28 de la Unidad 1 resulta

$$-Mh \leq \int_c^{c+h} f(t)\,dt \leq Mh;$$

es decir que

$$-\,M\,h \leq F(c+h) - F(c) \leq M\,h. \tag{3}$$

Si $h < 0$ puede deducirse una desigualdad semejante. En efecto, $c + h < c$ y

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\,dt = -\int_{c+h}^c f(t)\,dt.$$

Aplicando nuevamente el Teorema 28 al intervalo $[c+h, c]$ de longitud $-h$, obtenemos

$$-M(-h) = Mh \leq \int_{c+h}^c f(t)\,dt \leq -Mh.$$

Multiplicando por -1 los tres miembros de la desigualdad tendremos

$$-\,Mh \leq F(c+h) - F(c) \leq Mh. \tag{4}$$

Las desigualdades (3) y (4) implican la siguiente desigualdad:

$$|F(c+h) - F(c)| \leq M\,|h|.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ arbitrario y sea $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$. De esta última desigualdad obtenemos que si $|h| < \delta$ entonces

$$|F(c+h) - F(c)| < \varepsilon,$$

con lo cual

$$\lim_{h\to 0} F(c+h) = F(c),$$

es decir F es continua en c. $\square$

Visto el resultado anterior, es natural preguntar cómo resulta F bajo la condición de que f sea continua. En este caso, como veremos en el siguiente resultado, F resultará derivable y su derivada es particularmente sencilla de obtener:

Teorema 37 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y sea F definida por la ecuación (1). Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es derivable en c y*

$$F'(c) = f(c).$$

(Si $c = a$ o b, entonces $F'(c)$ se entiende que representa la derivada por derecha o por izquierda respectivamente).

Demostración:

Supondremos que $c \in (a, b)$. Queda como **ejercicio** pensar los casos $c = a$ o b. Por definición,

$$F'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

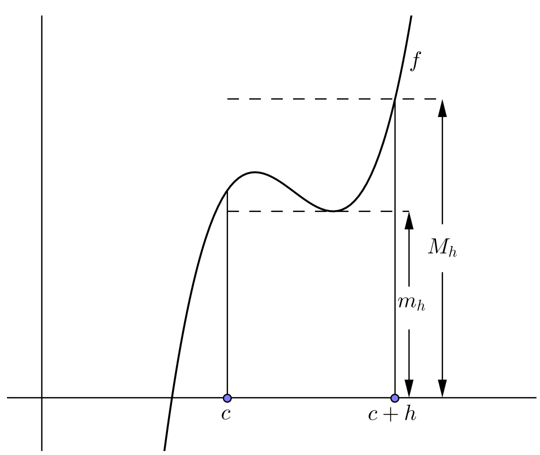
si este límite existe.

Supongamos primero $h > 0$. Luego

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\, dt.$$

Definamos m_h y M_h respectivamente por

$$m_h = \inf\{f(x) \,:\, c \le x \le c+h\}, \qquad M_h = \sup\{f(x) \,:\, c \le x \le c+h\}.$$



Entonces $m_h \leq f(t) \leq M_h$ para cada $t \in [c, c+h]$ y del Teorema 28 de la Unidad 1, sigue que

$$m_h\, h \leq \int_c^{c+h} f(t)\, dt \leq M_h\, h,$$

lo cual implica que

$$m_h \leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq M_h. \tag{5}$$

Si $h \leq 0$ razonamos como sigue. Definimos m_h y M_h de manera similar:

$$m_h = \inf\{f(x) \,:\, c+h \leq x \leq c\}, \qquad M_h = \sup\{f(x) \,:\, c+h \leq x \leq c\}.$$

Entonces con un razonamiento análogo al anterior y dado que el intervalo $[c+h, c]$ tiene longitud $-h$, obtenemos

$$m_h\,(-h) \leq \int_{c+h}^{c} f(t)\, dt \leq M_h\,(-h).$$

Dado que en este caso

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t)\, dt = -\int_{c+h}^{c} f(t)\, dt,$$

se obtiene

$$m_h\, h \geq F(c+h) - F(c) \geq M_h\, h.$$

Como $h < 0$, la división por h invierte nuevamente las desigualdades y obtenemos las mismas desigualdades que las dadas en (5). Observemos que (5) se cumple para cualquier función integrable. Puesto que tenemos la hipótesis de continuidad en c, resulta

$$\lim_{h \to 0} m_h = \lim_{h \to 0} M_h = f(c),$$

lo cual prueba que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

$\square$

Aunque el teorema anterior trata solamente de la función que se obtiene al variar el extremo superior de la integral, podemos hacer algo similar variando el extremo inferior. Para eso, consideremos una función f integrable en $[a, b]$ y definamos G por

$$G(x) = \int_x^b f(t)\, dt.$$

Entonces

$$G(x) = \int_a^b f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt = \int_a^b f(t) dt - F(x)$$

donde F es la función definida en (1). Luego G y F difieren sólo en signo y en la constante $\int_a^b f(t)dt$. Del Teorema 36 resulta entonces que G es continua en $[a, b]$ (pues F los es), y del Teorema 37 resulta que si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces G es derivable en c y vale

$$G'(c) = -F'(c) = -f(c).$$

Esta última relación permite extender el Teorema 37 al caso en que la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

esté definida incluso para $x < a$. En tal caso, escribimos

$$F(x) = -\int_x^a f(t)\,dt,$$

de modo que si $c < a$ y f es continua en c, tendremos

$$F'(c) = -(-f(c)) = f(c), \tag{6}$$

exactamente lo mismo que antes. (!!)

Observemos que en cualquier caso, la derivabilidad de F en c queda asegurada por la continuidad de f en c. Por lo tanto, si f es continua en todos los puntos de $[a, b]$ la función F resultará *derivable* en todos los puntos de $[a, b]$ y

$$F' = f.$$

Es decir, la función F es una **primitiva** de f.

En general es muy difícil decidir cuándo una función dada f es la derivada de alguna otra función. Sin embargo si f es continua, por el Teorema 37 sabemos que f es la derivada de la función F. Es decir, toda función continua en $[a, b]$ tiene una primitiva.

Corolario 38 (Regla de Barrow)**.** *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ tal que $f = g'$ para alguna función g. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

Demostración:

Consideremos nuevamente la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Entonces por el Teorema 37, $F' = f = g'$ en $[a, b]$. En consecuencia existe una constante c tal que $F = g + c$. Tal número c puede calcularse fácilmente haciendo

$$F(a) = 0 = g(a) + c,$$

de modo que $c = -g(a)$. Así tenemos

$$F(x) = g(x) - g(a), \qquad \text{para todo x},$$

y en particular para $x = b$ se tiene

$$\int_a^{x=b} f(t)\,dt = F(b) = g(b) - g(a),$$

$\square$

Observemos que usando este corolario y sin calcular sumas superiores ni inferiores, obtenemos

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Análogamente, se pueden tratar otras potencias: si n es un número natural y $g(x) = x^{n+1}/(n+1)$, entonces $g'(x) = x^n$, de modo que

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Por otro lado, para cualquier número natural $n \neq 1$, la función $f(x) = x^{-n}$ no está acotada en ningún intervalo que contenga 0, pero si a y b son ambos positivos, o ambos negativos, entonces f es integrable en $[a, b]$ (por ser continua) y

$$\int_a^b x^{-n}\,dx = \frac{b^{-n+1}}{-n+1} - \frac{a^{-n+1}}{-n+1}.$$

Es importante remarcar que estamos considerando $n \neq 1$. *En efecto, no existe ninguna expresión sencilla (que dependa de expresiones polinómicas) para*

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx.$$

Sin embargo, puesto que si $a, b > 0$ la función $f(x) = 1/x$ es continua en $[a, b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ está bien definida y verifica $F'(x) = 1/x$. Sin embargo no conocemos ninguna función F que pueda expresarse en términos elementales (sumas y productos de funciones polinómicas y trigonométricas) cuya derivada sea f. Estudiaremos esta función más adelante.

Observación 39. *La conclusión del Corolario 38 a veces se confunde con la definición de la integral. Debemos remarcar siempre el buen concepto de integrabilidad a través de sumas superiores e inferiores, que no depende de la existencia de una primitiva de la función. En efecto, una función puede ser integrable sin ser la derivada de ninguna función. Por ejemplo definamos* $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}.$$

El Lema 27 de la Unidad 1 garantiza que f *es integrable en* $[0, 2]$. *Sin embargo,* f no *puede ser la derivada de una función* g... *(¿por qué? Dejamos como* **ejercicio** *probar este hecho).*

Si observamos bien las hipótesis del Corolario 38, necesitamos que la función f sea continua. En ese caso, el Teorema fundamental del cálculo nos garantiza que la función integral $F(x)$ es derivable y es una primitiva de f y la prueba del Corolario es inmediata. Sin embargo, una función f no necesariamente debe ser continua para admitir una primitiva, sólo que no podemos garantizar que ésta esté dada por la ecuación 1. La regla de Barrow sigue valiendo, aunque la prueba es diferente y hace uso de la definición misma de la integral:

Teorema 40. *Sea f una función integrable sobre $[a,b]$ y supongamos que $f = g'$ para alguna función g. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\,dt = g(b) - g(a).$$

<u>Demostración:</u>

Sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Por el Teorema del Valor Medio existe un punto $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = g'(x_i)(t_i - t_{i-1}) = f(x_i)(t_i - t_{i-1}). \tag{7}$$

Sean $m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, entonces ocurre

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}),$$

y por la ecuación 7 resulta

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(t_i) - g(t_{i-1}) \leq M_i(t_i - t_{i-1}).$$

Sumamos miembro a miembro estas desigualdades sobre i para obtener

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq g(b) - g(a) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}),$$

de donde se deduce que para cualquier partición P se tiene

$$L(f,P) \leq g(b) - g(a) \leq U(f,P).$$

Luego tomando supremo a la izquierda e ínfimo a la derecha, resulta que

$$g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

$\square$

2. Cálculo de áreas

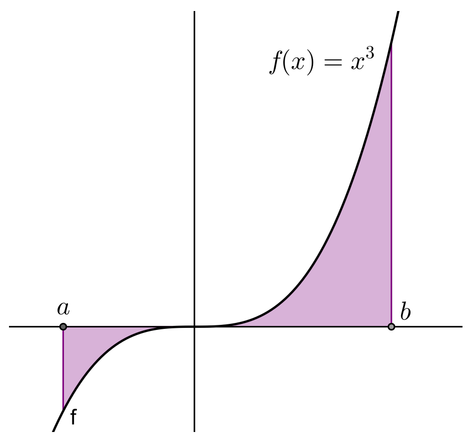
Como indicamos en la Unidad 1, la integral $\int_a^b f(x)dx$ define el área de la reginón $R(f, a, b)$ limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal y las verticales que pasan por $(a, 0)$ y $(b, 0)$ **siempre que** $f \geq 0$.

En los otros casos, deberemos interpretar el área que queremos calcular y plantear las integrales correctas, siempre que sea posible. Analicemos algunos ejemplos:

Ejemplo 41. Consideremos la función $f(x) = x^3$ para $a < x < b$ con $a < 0$ y $b > 0$. Entonces la integral

$$\int_a^b f(x)\, dx,$$

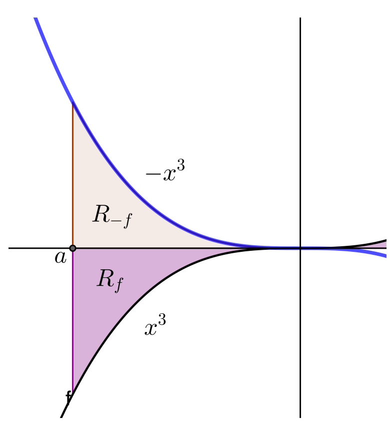
no representa el área de la región indicada en la siguiente figura.



El área (que es siempre no negativa!) viene dada por

$$-\int_a^0 x^3\, dx + \int_0^b x^3\, dx = \frac{a^4}{4} - \frac{b^4}{4}.$$

En efecto, podemos observar que $-\int_a^0 x^3 dx = \int_a^0 (-x^3) dx$. En este caso, $-x^3$ si es una función positiva, y por lo tanto la integral determina el área de la región bajo la curva. Geométricamente, esta región es congruente con la que define f, ya que se obtiene de reflejar esta última por el eje x:



En términos generales, si f es una función **no positiva** en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la región $R(f,a,b)$ delimitada por el eje x, la gráfica de f y las verticales $x=a$ y $x=b$ es

$$\text{Área}(R(f,a,b)) = -\int_a^b f(x)dx.$$

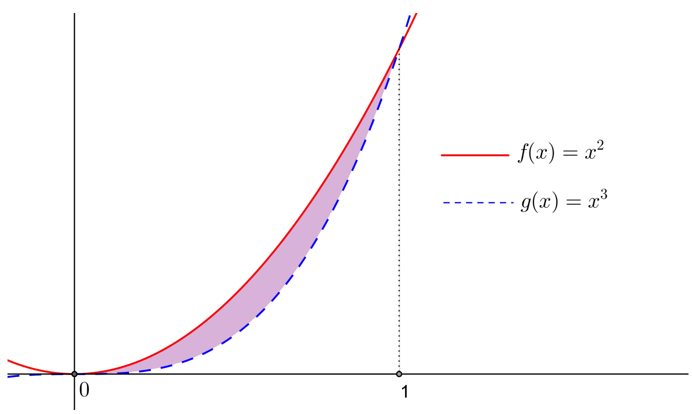
Para una función que alterne el signo, deberemos partir el dominio en intervalos adecuados interpretando siempre el área que nos interesa calcular.

Ejemplo 42. Supongamos ahora que queremos hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$ en el intervalo $[0,1]$. Lo que hay que pensar es cómo son estas funciones. Claramente ambas son positivas en $(0,1]$ y además para cada x con $0 \leq x \leq 1$ se tiene que $0 \leq x^3 \leq x^2$. Luego para hallar el área entre estas dos funciones en el intervalo $[0,1]$ procedemos calculando el área bajo la gráfica de x^2 en el $[0,1]$ y restamos el área bajo la gráfica de x^3 en el $[0,1]$, es decir

$$\text{área } R(f,0,1) - \text{ área } R(g,0,1),$$

la cual es

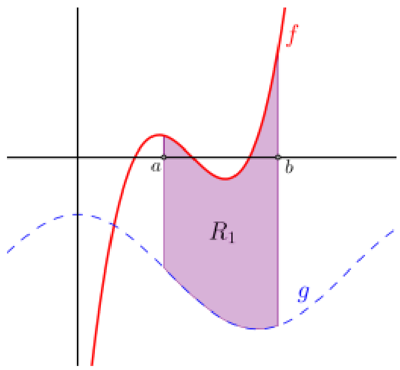
$$\int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 x^3\,dx = 1/3 - 1/4 = 1/12.$$

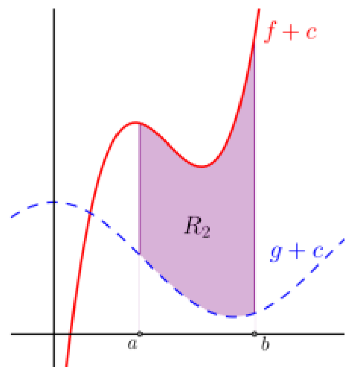


Esta área podría haberse expresado por

$$\int_a^b (f-g)(x)\,dx.$$

Si $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces esta integral coincide con el área limitada por f y g, aunque f y g sean algunas veces negativas, como se puede ver en la figura siguiente.





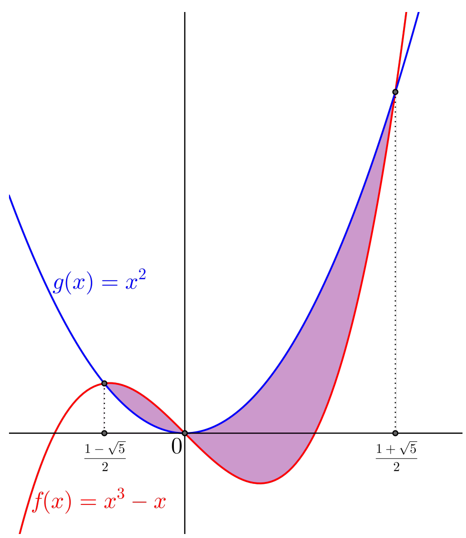
En efecto, si c es un número tal que $f+c$ y $g+c$ son no negativas sobre $[a,b]$, entonces la región limitada por f y g, R_1, tiene la misma área que la región R_2, limitada por $f+c$ y $g+c$. Luego,

$$\begin{aligned}
\text{área } R_1 = \text{área } R_2 &= \int_a^b (f+c)(x)\,dx - \int_a^b (g+c)(x)\,dx \\
&= \int_a^b [(f+c)-(g+c)](x)\,dx \\
&= \int_a^b (f-g)(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Ejemplo 43. Consideremos ahora el siguiente problema: hallar el área de la región limitada por las gráficas de

$$f(x) = x^3 - x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

entre sus puntos de intersección. Lo primero es *determinar precisamente* la región. Como puede observarse en la gráfica, existe un intervalo en el que $f \geq g$ y un intervalo en el que $g \geq f$.



Para determinar estos intervalos, necesitamos primero saber en qué puntos se intersecan las gráficas de ambas funciones. Planteamos entonces la ecuación

$$x^3 - x = x^2$$

y encontramos sus soluciones, esto es

$$0 = x^3 - x - x^2 = x(x^2 - 1 - x).$$

Está claro que una de las soluciones es $x = 0$ y las restantes son las soluciones de la ecuación cuadrática, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Entre estos puntos queda determinada entonces la región buscada. Observemos que

- $x^3 - x \geq x^2$ en el intervalo $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$,
- $x^2 \geq x^3 - x$ en el intervalo $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

Por el Teorema de los Valores Intermedios, como $f - g$ es continua, no cambia de signo sobre los intervalos $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Para comprobar las desigualdades de arriba basta entonces elegir puntos en esos intervalos y evaluar en ellos la función $f - g$. Por ejemplo en $-1/2$ y en 1 y se tiene

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} > 0, \qquad 1^3 - 1 - 1^2 = -1 < 0,$$

con lo que probamos lo dicho antes.

Entonces el área que buscamos resulta de las siguientes integrales

$$\int_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 - x - x^2)\, dx + \int_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} [x^2 - (x^3 - x)]\, dx,$$

lo cual nos hace calcular por un lado:
$\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{0} = 0 - \frac{1}{4}(1-\sqrt{5})^4 - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})^2 - \frac{1}{3}(1-\sqrt{5})^3,$
y por otro lado
$[x^2 - (x^3 - x)]\Big|_{0}^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{3}(1+\sqrt{5})^3 - \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})^4 + \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2.$

Sumamos ambos resultados y obtenemos el área buscada.

Como se vio en este ejemplo, uno de los mayores problemas que se encuentran al intentar hallar el área de una región puede ser explicitar precisamente esa región y determinar qué integral es la que representa efectivamente el área que queremos calcular.

3. Otras aplicaciones del Teorema Fundamental del Cálculo

La motivación principal para definir la integral de una función fue el deseo de encontrar una forma adecuada de definir el área limitada por una función no negativa. El Teorema 37 nos proporciona sin embargo una de las aplicaciones más destacadas de la integral : si f es continua, la integral suministra una función y tal que

$$y'(x) = f(x),$$

la cual resulta ser una "ecuación diferencial". El teorema fundamental del cálculo infinitesimal dice que esta ecuación diferencial tiene solución.

Consideremos el siguiente problema:

Ejemplo 44. Una partícula se mueve en una línea recta en la cual se ha fijado un sistema de coordenadas tal que en el timpo t, la partícula se encuentra en el punto de coordenada $x(t)$. Si la velocidad con que se mueve viene dada por $v(t) = t^2 + t$ y en el instante $t = 1$ se encuentra en la posición $x(1) = 1$, ¿Cuán es su posición para cualquier tiempo t?

Para resolver este problema, debemos plantear la ecuación diferencial

$$x'(t) = v(t) = t^2 + t \tag{8}$$

con la condición inicial $x(1) = 1$.

Puesto que la función $v(t)$ es continua, el Teorema Fundamental del Cálculo nos permite hallar una solución $x_0(t)$ de (8):

$$x_0(t) = \int_0^t (s^2 + s)ds = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}.$$

Puesto que $x_0(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \neq 1$, x_0 no es una solución a nuestro problema. En realidad la ecuación (8) tiene infinitas soluciones, y dos cualesquiera de ellas difieren en una constante. Esto es, cualquier otra solución de (8) será de la forma

$$x(t) = x_0(t) + c$$

para alguna constante c. Como queremos una solución tal que $x(1) = 1$, debemos encontrar c tal que $1 = \frac{5}{6} + c$, de donde $c = \frac{1}{6}$ y la función posición está dada por $x(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{6}$.

Para terminar esta unidad, notemos que dada una función continua f, la función integral $F(x)$ que se obtiene de la ecuación (1) es una nueva función que puede combinarse con otras para hallar nuevas funciones. En este caso, sus derivadas pueden hallarse mediante la regla de la cadena. Recordemos entonces primero la regla de la cadena: si h y g son funciones derivables, entonces $h \circ g$ es derivable y vale

$$(h \circ g)'(x) = h'(g(x))g'(x).$$

Analizaremos algunos casos en los que h o g son la función $F(x)$ en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 45. 1. Sea f dada por

$$f(x) = \int_a^{x^3} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt.$$

Esta f resulta de la composición de las funciones

$$C(x) = x^3 \qquad \text{y} \qquad F(x) = \int_a^{x} \frac{1}{1 + sen^2(t)}\, dt.$$

Y como $f(x) = F(C(x))$, resulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= F'(C(x))C'(x) \\ &= F'(x^3)3x^2 \\ &= \tfrac{1}{1+sen^2(x^3)}3x^2. \end{aligned}$$

2. Sea f ahora dada por

$$f(x) = \int_{x^3}^{a} \frac{1}{1+sen^2(t)}\, dt.$$

Entonces

$$f'(x) = -\left(\int_{a}^{x^3} \frac{1}{1+sen^2(t)}\, dt\right)'.$$

Y por lo tanto la derivada resulta

$$f'(x) = -\frac{1}{1+sen^2(x^3)}3x^2.$$

3. Tomemos f ahora como la otra composición, es decir $f(x) = C(F(x))$, esto es

$$f(x) = \left(\int_{a}^{x} \frac{1}{1+sen^2(t)}\, dt\right)^3,$$

con lo cual la derivada resulta $f'(x) = C'(F(x))F'(x)$ y obtenemos

$$f'(x) = 3\left(\int_{a}^{x} \frac{1}{1+sen^2(t)}\, dt\right)^2 \frac{1}{1+sen^2(x)}.$$

Vemos que se pueden tener ejemplos muy variados de este tipo. En cualquier caso, al aplicar la regla de la cadena es importante comprender el orden de la composición.