Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 2: Integral definida - Teorema fundamental del Cálculo

---

1. Suponga que f y h son integrables y que vale que $\int_1^9 f(x)\,dx = -1$, $\int_7^9 f(x)\,dx = 5$ y $\int_7^9 h(x)\,dx = 4$. Determine:

   a) $\int_1^9 -2f(x)\,dx$,
   b) $\int_7^9 [f(x)+h(x)]\,dx$,
   c) $\int_7^9 [4f(x)-3h(x)]\,dx$
   d) $\int_1^7 f(x)\,dx$
   e) $\int_9^1 f(u)\,du$
   f) $\int_9^7 [h(t)-f(t)]\,dt$.

2. a) Muestre que si f es una función continua en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = 0$, entonces la función f tiene al menos un cero en $[a,b]$.

   b) Sea f una función continua y no negativa en $[a,b]$ con $\int_a^b f(x) = 0$. Pruebe que $f(x)=0$ para todo $x \in [a,b]$.

3. Sea $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una función integrable en su dominio. Demuestre las siguientes afirmaciones:

   a) Si f es una función par en $[-a,a]$ entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

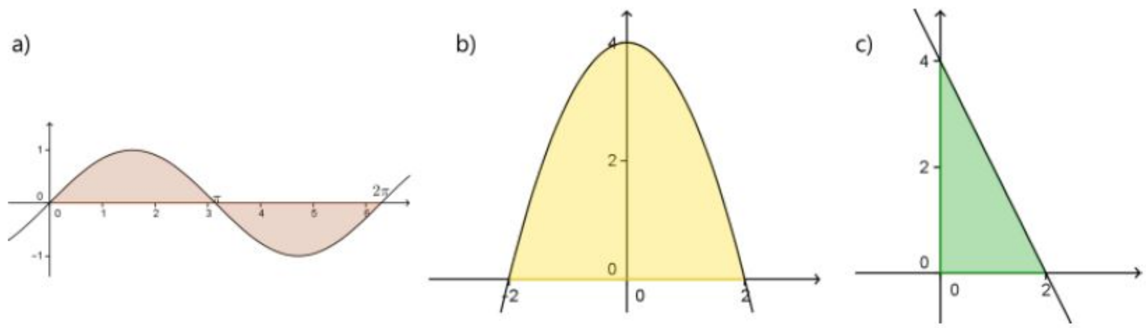
   b) Si f es una función impar en $[-a,a]$ entonces $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

4. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y sea $c \in [a,b]$. Suponga que $\int_a^b f(x)\,dx = 8$ y $\int_c^b f(x)\,dx = 6$. Halle:

   a) $\int_b^c f(x)\,dx$,

   b) $\int_a^c f(x)\,dx$ e indique qué representa.

5. Escriba, sin calcular, una integral definida que indique el área de la región sombreada.



6. Determine el área total de la región encerrada entre la función $y = -x^2 - 2x$, $-3 \leq x \leq 2$ y el eje x.

7. Determine las áreas de las regiones encerradas entre las curvas:

   a) $y = |x| + |x-1|$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

   b) $y = 2x - x^2$, $y = -3$;

   c) $y = x^4$, $y = 3x^2 - 2$;

   d) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;

   e) $y = x^2$, $y = -x^2 + 4x$;

   f) $y = x(x^2-1)$, $y = x$, $x = -1$;

   g) $x - y^2 = 0$, $x + 2y^2 = 3$;

   h) $x = y^2 - y$, $x = 2y^2 - 2y - 6$;

   i) $x + 4y^2 = 4$, $x + y^4 = 1$, para $x \geq 0$;

8. Determine el área de la región encerrada entre la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -1$ mediante la integración con respecto a x primero, y luego integrando respecto a y.

9. Suponga que el área de la región determinada por la gráfica de una función continua positiva f y el eje x desde $x = a$ a $x = b$ es 4 unidades. Determine el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = 2f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

10. Siendo $f(x) = 2x^2$ se definen las funciones:

    $i)\ F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \qquad ii)\ G(x) = \int\limits_{-2}^x f(t)dt, \qquad iii)\ H(x) = \int\limits_1^x f(t)dt.$

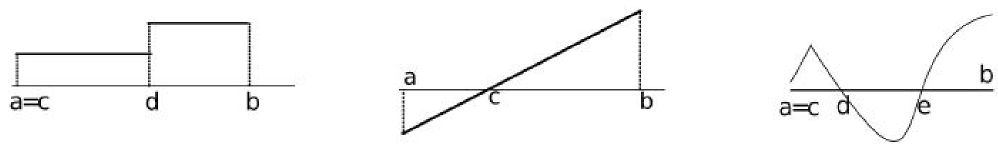
    Se pide:

    a) Analice las relaciones existentes entre las funciones F, G y H.

b) Trace la gráfica de dichas funciones.

c) Analice las relaciones existentes entre las funciones F', G' y H'.

11. En cada uno de los siguientes casos la figura muestra la gráfica de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Trace, para cada una de ellos, un croquis aproximado de la función $g(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$.



12. Para cada una de las siguientes funciones $f_i : [a, b] \to \mathbb{R}$ con $i = 1, 2$

$$i)\ \ f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ x & \text{si } \ 0 < x \leq 2, \end{cases} \qquad ii)\ f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0, \\ x+1 & \text{si } \ 0 < x \leq 2, \end{cases}$$

se define la función $F_i(x) = \int\limits_0^x f_i(t)dt$. Se pide:

a) Represente gráficamente la función f_i y justificar su integrabilidad.

b) Halle los puntos de continuidad de la función F_i.

c) Halle los puntos de derivabilidad de la función F_i.

d) Represente gráficamente las funciones F_i y F_i'.

13. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en $[a, b]$.

a) Sean $c \in [a, b]$ y la función $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $G(x) = \int\limits_x^c f(t)dt$. Muestre que G es continua y, además, derivable en cada punto de continuidad de f, valiendo en tal caso $G'(x) = -f(x)$.

b) Sean $\alpha \in [a, b]$ y la función $\phi : [c, d] \to \mathbb{R}$ derivable en (c, d) tal que $\alpha < \phi(x) < b$ para todo $x \in [c, d]$. Se define la función $H : [c, d] \to \mathbb{R}$ como $H(x) = \int\limits_\alpha^{\phi(x)} f(t)dt$.

Muestre que H es continua y, además, derivable en cada punto x tal que $\phi(x)$ es un punto de continuidad de la función f, valiendo en tal caso $H'(x) = (f \circ \phi)(x)\ \phi'(x) = f[\phi(x)]\ \phi'(x)$.

14. Halle el dominio de las funciones siguientes, y sin intentar el cálculo de las integrales, halle la función derivada (dominio y ley) de las siguientes funciones:

$$a) f_1(x) = \int\limits_0^{\sqrt{x}} \cos t dt, \qquad b) f_2(x) = \int\limits_1^{\operatorname{sen} x} 3t^2 dt, \qquad c) f_3(x) = \int\limits_{x^4}^2 \sqrt{t} dt.$$

15. Pruebe que

a) para cada $x \in [-1, 1]$ se verifica la igualdad

$$\operatorname{arc}\cos x + \operatorname{arc}\operatorname{sen} x = \frac{\pi}{2}$$

b) y para todo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se tiene

$$\int_0^{\cos^2 x} \operatorname{arc}\cos(\sqrt{t})dt \ + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc}\operatorname{sen}(\sqrt{t})dt = \frac{\pi}{4}\ .$$