1.4 Demostraciones inductivas

Existe una forma especial de demostración, denominada "inductiva", que es esencial a la hora de tratar con objetos definidos de forma recursiva. Muchas de las demostraciones inductivas más habituales trabajan con enteros, pero en la teoría de autómatas, también necesitamos demostraciones inductivas, por ejemplo, para conceptos definidos recursivamente como pueden ser árboles y expresiones de diversas clases, como expresiones regulares, las cuales hemos mencionado brevemente en la Sección 1.1.2. En esta sección, vamos a presentar el tema de las demostraciones inductivas mediante inducciones "sencillas" sobre enteros. A continuación, demostraremos cómo llevar a cabo inducciones "estructurales" sobre cualquier concepto definido de forma recursiva.

1.4.1 Inducciones sobre números enteros

Suponga que tenemos que demostrar una proposición $S(n)$ acerca de un número entero n. Un enfoque que se emplea habitualmente consiste en demostrar dos cosas:

1. El *caso base*, donde demostramos $S(i)$ para un determinado entero i. Normalmente, $i = 0$ o $i = 1$, pero habrá ejemplos en los que desearemos comenzar en cualquier valor mayor de i, quizá porque la proposición S sea falsa para los enteros más pequeños.

2. El *paso de inducción*, donde suponemos $n \geq i$, siendo i el entero empleado en el caso base, y demostramos que "si $S(n)$ entonces $S(n+1)$".

Intuitivamente, estas dos partes deberían convencernos de que $S(n)$ es verdadera para todo entero n que sea igual o mayor que el entero de partida i. Podemos argumentar de la forma siguiente: supongamos que $S(n)$ es falsa para uno o más enteros. Entonces debería existir un valor más pequeño que n, por ejemplo, j, para el que $S(j)$ fuera falsa, aún siendo $j \geq i$. Sin embargo, j no podría ser i, porque hemos demostrado en el caso base que $S(i)$ es verdadera. Luego, j tiene que ser mayor que i. Ahora sabemos que $j-1 \geq i$ y, por tanto, $S(j-1)$ es verdadera.

Sin embargo, en el paso de inducción, hemos demostrado que si $n \geq i$, entonces $S(n)$ implica $S(n+1)$. Suponga que ahora hacemos $n = j-1$. Luego por inducción sabemos que $S(j-1)$ implica $S(j)$. Dado que también sabemos que $S(j-1)$ es verdadero, podemos concluir que $S(j)$ lo es también.

Hemos partido de la negación de lo que deseábamos demostrar; es decir, hemos supuesto que $S(j)$ era falsa para algún $j \geq i$. En cada uno de los casos, hemos obtenido una contradicción, por lo que tenemos una "demostración por reducción al absurdo" de que $S(n)$ es verdadera para todo $n \geq i$.

Lamentablemente, existe un fallo sutil en el razonamiento anterior. La suposición de poder elegir un $j \geq i$ mínimo para el que $S(j)$ sea falsa depende de que conozcamos previamente el principio de induccción. Es decir, la única manera de demostrar que podemos hallar tal j es hacerlo mediante un método que sea fundamentalmente una demostración inductiva. Sin embargo, la "demostración" anterior hace un buen uso del sentido intutitivo y encaja con muestra percepción del mundo real. Por tanto, en general, se considera una parte integrante de nuestro sistema de razonamiento lógico:

- *Principio de inducción*. Si demostramos $S(i)$ y demostramos que para todo $n \geq i$, $S(n)$ implica $S(n+1)$, entonces podemos concluir que se cumple $S(n)$ para todo $n \geq i$.

Los dos ejemplos siguientes ilustran el uso del principio de inducción para demostrar teoremas sobre números enteros.

TEOREMA 1.16

Para todo $n \geq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1.1}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se lleva a cabo en dos partes: el caso base y el paso de inducción. Veamos cada una de ellas.

BASE. Elegimos $n = 0$. Puede sorprender pensar que el teorema tenga sentido para $n = 0$, ya que el lado izquierdo de la Ecuación (1.1) es $\sum_{i=1}^{0}$ cuando $n = 0$. Sin embargo, existe un principio general que establece que cuando el límite superior de un sumatorio (0 en este caso) es menor que el límite inferior (1, en este caso), la suma no se realiza sobre ningún término y, por tanto, es igual a 0. Es decir, $\sum_{i=1}^{0} i^2 = 0$.

El lado derecho de la Ecuación (1.1) también es 0, ya que $0 \times (0+1) \times (2 \times 0+1)/6 = 0$. Por tanto, la Ecuación (1.1) se cumple cuando $n = 0$.

PASO INDUCTIVO. Supongamos ahora que $n \geq 0$. Tenemos que demostrar el paso de inducción, es decir, que la Ecuación (1.1) implica la misma fórmula si sustituimos n por $n+1$. Esta fórmula es

$$\sum_{i=1}^{[n+1]} i^2 = \frac{[n+1]([n+1]+1)(2[n+1]+1)}{6} \tag{1.2}$$

Podemos simplificar las Ecuaciones (1.1) y (1.2) expandiendo las sumas y productos del lado derecho de dichas ecuaciones, con lo que:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = (2n^3 + 3n^2 + n)/6 \tag{1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)/6 \tag{1.4}$$

Tenemos que demostrar (1.4) utilizando (1.3), ya que en el principio de inducción estas proposiciones corresponden a $S(n+1)$ y $S(n)$, respectivamente. El "truco" está en descomponer la suma hasta $n+1$ del lado derecho de la Ecuación (1.4) en una suma hasta n más el término correspondiente a $(n+1)$. De este modo, podemos reemplazar el sumatorio hasta n por el lado izquierdo de la Ecuación (1.3) y demostrar que (1.4) es cierta. Estos pasos son los siguientes:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i^2\right) + (n+1)^2 = (2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)/6 \tag{1.5}$$

$$(2n^3 + 3n^2 + n)/6 + (n^2 + 2n + 1) = (2n^3 + 9n^2 + 13n + 6)/6 \tag{1.6}$$

La verificación final de que (1.6) es verdadera sólo requiere aplicar al lado izquierdo de la ecuación algo de álgebra de polinomios para demostrar que es idéntido al lado derecho de la misma. □

EJEMPLO 1.17

En el siguiente ejemplo, vamos a demostrar el Teorema 1.3 de la Sección 1.2.1. Recuerde que este teorema establece que si $x \geq 4$, entonces $2^x \geq x^2$. Ya hemos proporcionado una demostración informal basada en la idea de que la relación $x^2/2^x$ disminuye cuando x es mayor que 4. Podemos precisar esta idea si demostramos por inducción la proposición $2^x \geq x^2$ sobre x, partiendo de que $x = 4$. Observe que la proposición es falsa para $x < 4$.

BASE. Si $x = 4$, entonces 2^x y x^2 son iguales a 16. Por tanto, $2^4 \geq 4^2$ se cumple.

PASO INDUCTIVO. Supongamos que se cumple que $2^x \geq x^2$ para algún $x \geq 4$. Estableciendo esta proposición como hipótesis, tenemos que demostrar la misma proposición con $x+1$ en el lugar de x, es decir, $2^{[x+1]} \geq [x+1]^2$. Éstas son las proposiciones $S(x)$ y $S(x+1)$ en el principio de inducción; el hecho de que estemos utilizando x en lugar de n como parámetro no es importante; x o n simplemente designan una variable local.

Como en el Teorema 1.16, tenemos que escribir $S(x+1)$ de manera que podamos emplear $S(x)$. En este caso, podemos escribir $2^{[x+1]}$ como 2×2^x. Puesto que $S(x)$ nos dice que $2^x \geq x^2$, podemos concluir que $2^{x+1} = 2 \times 2^x \geq 2x^2$.

Pero necesitamos algo diferente; tenemos que demostrar que $2^{x+1} \geq (x+1)^2$. Una forma de hacerlo sería demostrando que $2x^2 \geq (x+1)^2$ y luego aplicar la transitividad de $\geq$ para demostrar que $2^{x+1} \geq 2x^2 \geq (x+1)^2$. En nuestra demostración de que:

$$2x^2 \geq (x+1)^2 \tag{1.7}$$

podemos emplear la suposición de que $x \geq 4$. Comenzamos simplificando la Ecuación (1.7):

$$x^2 \geq 2x + 1 \tag{1.8}$$

Dividiendo (1.8) entre x, obtenemos:

$$x \geq 2 + \frac{1}{x} \tag{1.9}$$

Dado que $x \geq 4$, sabemos que $1/x \leq 1/4$. Por tanto, el lado izquierdo de la Ecuación (1.9) es 4 como mínimo, y el lado derecho es 2.25 como máximo. Hemos demostrado por tanto que la Ecuación (1.9) es verdadera. Luego las Ecuaciones (1.8) y (1.7) también son ciertas. La Ecuación (1.7) a su vez nos dice que $2x^2 \geq (x+1)^2$ para $x \geq 4$ y nos permite demostrar la proposición $S(x+1)$, la cual recordemos que era $2^{x+1} \geq (x+1)^2$. □

Números enteros como conceptos definidos recursivamente

Hemos mencionado que las demostraciones por inducción resultan útiles cuando el objeto en cuestión está definido de manera recursiva. Sin embargo, nuestros primeros ejemplos eran inducciones sobre números enteros, que normalmente no interpretamos como "definidos recursivamente". No obstante, existe una definición natural de carácter recursivo de los enteros no negativos, y esta definición se adapta a la forma en que se realizan las inducciones sobre los números enteros: desde objetos definidos en primer lugar a otros definidos con posterioridad.

BASE. 0 es un entero.

PASO INDUCTIVO. Si n es un entero, entonces $n+1$ también lo es.

1.4.2 Formas más generales de inducción sobre enteros

A veces, una demostración inductiva sólo es posible empleando un esquema más general que el propuesto en la Sección 1.4.1, donde hemos demostrado una proposición S para un valor base y luego hemos demostrado que "si $S(n)$ entonces $S(n+1)$". Dos generalizaciones importantes de este esquema son las siguientes:

1. Podemos utilizar varios casos base. Es decir, demostramos que $S(i), S(i+1), \ldots, S(j)$ para algunos valores $j > i$.

2. Para probar $S(n+1)$, podemos utilizar la validez de todas las proposiciones,

$$S(i), S(i+1), \ldots, S(n)$$

   en lugar de emplear únicamente $S(n)$. Además, si hemos demostrado los casos base hasta $S(j)$, entonces podemos suponer que $n \geq j$, en lugar de sólo $n \geq i$.

La conclusión que se obtendría a partir de estos casos base y del paso de inducción es que $S(n)$ es cierta para todo $n \geq i$.

EJEMPLO 1.18

El siguiente ejemplo ilustra el potencial de ambos principios. La proposición $S(n)$ que queremos demostrar es que si $n \geq 8$, entonces n puede expresarse como una suma de treses y cincos. Observe que 7 no se puede expresar como una suma de treses y cincos.

BASE. Los casos base son $S(8)$, $S(9)$ y $S(10)$. Las demostraciones son $8 = 3+5$, $9 = 3+3+3$ y $10 = 5+5$, respectivamente.

PASO INDUCTIVO. Suponemos que $n \geq 10$ y que $S(8), S(9), \ldots, S(n)$ son verdaderas. Tenemos que demostrar $S(n+1)$ a partir de los postulados dados. Nuestra estrategia va a consistir en restar 3 de $n+1$, observar que este número tiene que poder escribirse como una suma de treses y cincos y sumar un 3 más a la suma para obtener una forma de escribir $n+1$.

Dicho de manera más formal, observe que $n-2 \geq 8$, por lo que podemos suponer que $S(n-2)$ es verdadera. Es decir, $n-2 = 3a+5b$ para los enteros a y b. Luego, $n+1 = 3+3a+5b$, por lo que $n+1$ se puede escribir como la suma de $a+1$ treses y b cincos. Esto demuestra $S(n+1)$ y concluye el paso de inducción. $\square$

1.4.3 Inducciones estructurales

En la teoría de autómatas, existen varias estructuras definidas recursivamente sobre las que es necesario demostrar proposiciones. Los familiares conceptos sobre árboles y expresiones son ejemplos importantes de estas estructuras. Como las inducciones, todas las definiciones recursivas tienen un caso base, en el que se definen una o más estructuras elementales, y un paso de inducción, en el que se definen estructuras más complejas en función de las estructuras definidas previamente.

EJEMPLO 1.19

He aquí la definición recursiva de un árbol:

BASE. Un único nodo es un árbol y dicho nodo es la *raíz* del árbol.

PASO INDUCTIVO. Si $T_1, T_2, \ldots, T_k$ son árboles, entonces podemos formar un nuevo árbol de la forma siguiente:

1. Comenzamos con un nodo nuevo N, que es la raíz del árbol.
2. Añadimos copias de todos los árboles $T_1, T_2, \ldots, T_k$.
3. Añadimos arcos desde el nodo N hasta las raíces de cada uno de los nodos $T_1, T_2, \ldots, T_k$.

La Figura 1.7 muestra la construcción inductiva de un árbol cuya raíz es N a partir de k árboles más pequeños. $\Box$

EJEMPLO 1.20

He aquí otra definición recursiva. En esta ocasión, definimos *expresiones* utilizando los operadores aritméticos $+$ y $*$, pudiendo ser los operandos tanto números como variables.

BASE. Cualquier número o letra (es decir, una variable) es una expresión.

PASO INDUCTIVO. Si E y F son expresiones, entonces $E+F$, $E*F$ y (E) también lo son.
Por ejemplo, tanto 2 como x son expresiones de acuerdo con el caso base. El paso inductivo nos dice que $x+2$, $(x+2)$ y $2*(x+2)$ también son expresiones. Observe que cada una de estas expresiones depende de que todas las anteriores sean expresiones. $\Box$

Cuando se tiene una definición recursiva, es posible demostrar teoremas acerca de ella utilizando la siguiente forma de demostración, conocida como *inducción estructural*. Sea $S(X)$ una proposición sobre las estructuras X que están definidas mediante una determinada definición recursiva.

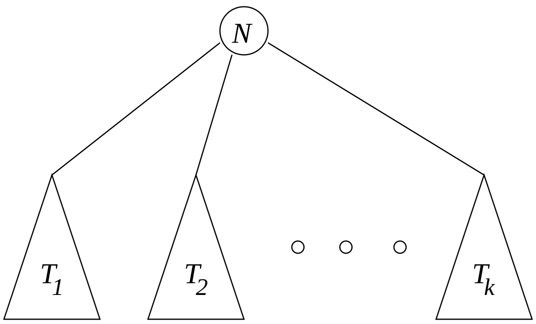

Figura 1.7. Construcción inductiva de un árbol.

Explicación intuitiva de la inducción estructural

Informalmente, podemos sugerir por qué la inducción estructural es un método válido de demostración. Imagine la definición recursiva que establece, una a una, que determinadas estructuras $X_1, X_2, \ldots$ cumplen la definición. En primer lugar, están los elementos base y el postulado de que X_i es el conjunto definido de estructuras que sólo puede depender del conjunto de miembros del conjunto definido de estructuras que precede a X_i en la lista. Desde este punto de vista, una inducción estructural no es nada más que una inducción sobre el número entero n de la proposición $S(X_n)$. Esta inducción puede ser de la forma generalizada vista en la Sección 1.4.2, con múltiples casos base y un paso inductivo que utiliza todas las instancias anteriores de la proposición. Sin embargo, recordemos que, como se ha explicado en la Sección 1.4.1, esta explicación intuitiva no es una demostración formal y, de hecho, tenemos que suponer la validez de este principio de inducción, tal y como se hizo con la validez del principio de inducción original en dicha sección.

1. Como caso base, probamos $S(X)$ para la(s) estructura(s) base X.
2. En el paso de inducción, tomamos una estructura X que según la definición recursiva establece que se forma a partir de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$. Suponemos que las proposiciones $S(Y_1), S(Y_2), \ldots, S(Y_k)$ son verdaderas y las utilizamos para probar $S(X)$.

La conclusión es que $S(X)$ es cierto para todo X. Los dos teoremas siguientes son ejemplos de hechos que pueden demostrarse para árboles y expresiones.

TEOREMA 1.21

El número de nodos de un árbol es superior al de arcos en una unidad.

DEMOSTRACIÓN. La proposición formal $S(T)$ que tenemos que demostrar por inducción estructural es: "si T es un árbol y T tiene n nodos y e arcos, entonces $n = e+1$".

BASE. El caso base es en el que T tiene un único nodo. Así, $n = 1$ y $e = 0$, por lo que la relación $n = e+1$ se cumple.

PASO INDUCTIVO. Sea T un árbol construido a partir del paso inductivo de la definición, a partir de N nodos y k árboles más pequeños $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Podemos suponer que las proposiciones $S(T_i)$ se cumplen para $i = 1, 2, \ldots, k$. Es decir, T_i tiene n_i nodos y e_i arcos; luego $n_i = e_i + 1$.

T tiene N nodos y son todos los nodos de los T_i árboles. Por tanto, T tiene $1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ nodos. Los arcos de T son los k arcos añadidos explícitamente en el paso de la definición inductiva más los arcos de los T_i. Por tanto, T tiene

$$k + e_1 + e_2 + \cdots + e_k \tag{1.10}$$

arcos. Si sustituimos n_i por $e_i + 1$ en la cuenta del número de nodos de T, vemos que T tiene

$$1 + [e_1 + 1] + [e_2 + 1] + \cdots + [e_k + 1] \tag{1.11}$$

nodos. Luego como tenemos k términos "+1" en (1.10), podemos reagrupar la Ecuación (1.11) de la forma siguiente:

$$k + 1 + e_1 + e_2 + \cdots + e_k \tag{1.12}$$

Esta expresión es exactamente más grande en una unidad que la expresión (1.10), la cual proporciona el número de arcos de T. Por tanto, el número de nodos de T es superior en una unidad al número de arcos. □

TEOREMA 1.22

Todas las expresiones tienen el mismo número de paréntesis de apertura que de cierre.

DEMOSTRACIÓN. Formalmente, la proposición $S(G)$ se demuestra sobre cualquier expresión G que esté definida mediante el proceso recursivo del Ejemplo 1.20:el número de paréntesis de apertura y de cierre de G es el mismo.

BASE. Si G se define a partir de la base, entonces G es un número o una variable. Estas expresiones tienen cero paréntesis de apertura y cero paréntesis de cierre, luego tienen los mismos paréntesis de apertura que de cierre.

PASO INDUCTIVO. Hay tres reglas mediante las que se puede construir la expresión G de acuerdo con el paso de inducción de la definición:

1. $G = E + F$.
2. $G = E * F$.
3. $G = (E)$.

Podemos suponer que $S(E)$ y $S(F)$ son verdaderas; es decir, E tiene el mismo número de paréntesis de apertura que de cierre, por ejemplo, n de cada clase, e igualmente F tiene el mismo número de paréntesis de apertura que de cierre, por ejemplo, m de cada clase. Entonces podemos calcular el número de paréntesis abiertos y cerrados de G para cada uno de los tres casos siguientes:

1. Si $G = E + F$, entonces G tiene $n + m$ paréntesis de apertura y $n + m$ paréntesis de cierre; n de cada tipo procedentes de E y m de cada tipo procedentes de F.
2. Si $G = E * F$, la cantidad de paréntesis de G es de nuevo $n + m$ de cada tipo por la misma razón que en el caso (1).
3. Si $G = (E)$, entonces habrá $n + 1$ paréntesis de apertura en G (uno de los cuales aparece explícitamente y los otros n proceden de E). Del mismo modo, hay $n + 1$ paréntesis de cierre en G; uno explícito y los otros n procedentes de E.

En cada uno de los tres casos, vemos que el número de paréntesis de apertura y de cierre de G es el mismo. Esta observación completa el paso de inducción y la demostración. $\square$