Análisis Matemático I - 2023
(Lic. y Prof. en Matemática, Lic. en Cs. de la Computación, Lic. y Prof. en Física)

Unidad 5 – Introducción al Cálculo Integral

1 Primitiva de una función

Integración y derivación
Aunque el cálculo diferencial y el cálculo integral surgieron de problemas en apariencia no relacionados, el de la tangente y el del área, Isaac Barrow (1630-1677) descubrió que estos dos problemas estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dió cuenta que la derivación y la integración son, de alguna forma, procesos inversos. Newton y Leibnitz explotaron esta relación y lograron transformar el cálculo en un método matemático sistemático.

1.1 Primitivas de funciones elementales

Definición. Decimos que F es una *primitiva* de f sobre el conjunto I si $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$. También suele decirse que F es una *antiderivada* de f en I.

Observación.
• Si F es una primitiva de f y si c es una constante cualquiera, entonces $F+c$ también es una primitiva de f. En efecto $(F+c)' = F'+c' = f+0 = f$.
• Si F y G son dos primitivas cualesquiera de f, entonces dichas funciones difieren en una constante, es decir, $G-F = c$ o bien $G(x) = F(x)+c\ \forall x \in I$.
• Por lo tanto, $F(x)+c$ (donde F es una primitiva particular de f y c es una constante arbitraria) describe la *familia de todas las primitivas* de f sobre I.

Definición. Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, y la notamos $\int f(x)dx$. Luego, si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x)+c$$

Es decir, $\int f(x)dx$ nos da una familia de funciones, todas ellas primitivas de f, que difieren entre sí en una constante.

$$\underbrace{\int}_{\text{símbolo integral}} \overbrace{f(x)}^{\text{integrando}} \underbrace{dx}_{\substack{\text{indica la}\\ \text{variable de}\\ \text{integración}}} = \underbrace{\overbrace{F(x)}^{\text{Primitiva de } f} + c}_{\substack{\text{familia de funciones que}\\ \text{constituyen la integral}\\ \text{indefinida}}}$$

Ejemplo.
1) Si $f(x) = 1$ entonces $F(x) = x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x) = (x)' = 1 = f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 1\,dx = x+c$$

2) Si $f(x)=2x$ entonces $F(x)=x^2$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x)=(x^2)'=2x=f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int 2x\,dx = x^2+c$$

3) Si $f(x)=\cos x$ entonces $F(x)=\sin x$ es una primitiva de $f(x)$ pues $F'(x)=(\sin x)'=\cos x=f(x)$, entonces la integral de f será,

$$\int \cos x\,dx = \sin x+c$$

Observación. Las gráficas de las funciones primitivas de una función dada, definida sobre I, son traslaciones verticales una de la otra. Por ejemplo x^3 y x^3+5 son primitivas de la función $3x^2$ y la gráfica de x^3+5 es un corrimiento de la gráfica de x^3 en 5 unidades hacia arriba.

De lo expuesto, conociendo las derivadas de algunas funciones elementales, podemos confeccionar una primera tabla de antiderivadas o integrales indefinidas.

Tabla de integrales inmediatas.

$\int 1dx = x+c$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\ \text{si } \alpha \neq -1$
$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$	$\int \cos x\,dx = \sin x+c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x+c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \text{cotan} x+c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x+c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x+c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x+c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\|+c$
$\int e^x dx = e^x+c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$

Proposición 1. *(Linealidad) Si F y G son primitivas de f y g respectivamente, y a es una constante real entonces*

a) aF es una primitiva de af, es decir

$$\int af(x)\,dx = aF(x)+c$$

b) $F+G$ es una primitiva de $f+g$, es decir

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+c$$

Demostración:

a) Como F es una primitiva de f, es $F'=f$, luego $(aF)'=aF'=af$ y entonces aF es una primitiva de af.

b) Por ser F es una primitiva de f y G una primitiva de g, tenemos que $(F+G)' = F' + G' = f + g$, luego $F + G$ es una primitiva de $f + g$. $\square$

En general es válido:

$$\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

A partir de la tabla de integrales inmediatas y la proposición 1, podemos encontrar las primitivas de las siguientes funciones:

Ejemplo.

1. $\int (4x-2)dx = 4\frac{x^2}{2} - 2x + c = 2x^2 - 2x + c$
2. $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{2}{x} + c$
3. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$
4. $\int \left(\frac{e^x}{2} + 3\sin x\right) dx = \frac{1}{2}e^x - 3\cos x + c$
5. $\int \tan^2 x\,dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \tan x - x + c$

1.2 La regla de sustitución

Observemos lo siguiente:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x))\,g'(x) \Longrightarrow \int F'(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$

De lo anterior, surge el siguiente:

Teorema 1. *(Método de sustitución o cambio de variable): Sea f continua en I. Sea g una función derivable con derivada continua en I tal que $\mathrm{Im}(g) \subset I$. Entonces*

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{t=g(x)}{=} \int f(t)\,dt$$

donde $dt = g'(x)dx$.

Ejemplo. Hallar las primitivas de:

1. $\int e^{\alpha x}\,dx$

   Consideremos $f(x)=e^x$ y $g(x)=\alpha x$, entonces la integral $\int e^{\alpha x}\,dx=\int f(g(x))dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t=g(x)=\alpha x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x)=\alpha$ tendremos que

$$\int e^{\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha}\int e^{\alpha x}\,\alpha\,dx=\frac{1}{\alpha}\int f(g(x))g'(x)\,dx \overset{t=\alpha x}{\underset{dt=\alpha dx}{=}} \frac{1}{\alpha}\int f(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{\alpha}\int e^t dt=\frac{1}{\alpha}(e^t+c') \overset{t=\alpha x}{=} \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}+c$$

2. $\int(4x-2)^2dx$.

   Consideramos $f(x)=x^2$ y $g(x)=4x-2$, entonces la integral $\int(4x-2)^2dx=\int f(g(x))dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t=g(x)=4x-2$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x)=4$ tendremos que

$$\int(4x-2)^2dx=\frac{1}{4}\int(4x-2)^2\cdot 4\,dx \overset{t=4x-2}{\underset{dt=4dx}{=}} \frac{1}{4}\int f(t)\,dt=\frac{1}{4}(\frac{t^3}{3}+c') \overset{t=4x-2}{=} \frac{(4x-2)^3}{12}+c$$

3. $\int\cos(3x)dx$.

   Consideramos $f(x)=\cos x$ y $g(x)=3x$, entonces la integral $\int\cos(3x)dx=\int f(g(x))dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t=g(x)=3x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x)=3$ tendremos que

$$\int\cos(3x)dx=\frac{1}{3}\int\cos(3x)\cdot 3\,dx \overset{t=3x}{\underset{dt=3dx}{=}} \frac{1}{3}\int f(t)\,dt=\frac{1}{3}(\sin t+c') \overset{t=3x}{=} \frac{1}{3}\sin(3x)+c$$

4. $\int\frac{3}{1+4x^2}dx$.

   Observemos primero que $\int\frac{3}{1+4x^2}dx=3\int\frac{1}{1+(2x)^2}dx$, ahora consideramos $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ y $g(x)=2x$, entonces la integral $\int\frac{3}{1+4x^2}\,dx=3\int f(g(x))\,dx$. Luego si hacemos el cambio de variable $t=g(x)=2x$ y multiplicamos y dividimos por $g'(x)=2$ tendremos que

$$\int\frac{3}{1+4x^2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot 2dx \overset{t=2x}{\underset{dt=2dx}{=}} \frac{3}{2}\int f(t)\,dt=\frac{3}{2}(\arctan t+c') \overset{t=2x}{=} \frac{3}{2}\arctan(2x)+c$$

1.3 Integración por partes

Observemos lo siguiente:

$$[f(x).g(x)]'=f(x)\,g'(x)+f'(x)\,g(x) \implies f(x)g(x)=\int\big(f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\big)\,dx$$

De aquí surge el siguiente:

Teorema 2. *(Integración por partes): Sean f y g derivables con derivada continua en I. Entonces*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)\,g(x)dx$$

Veamos algunos casos particulares que se resuelven con este método

- $\int x^m e^{\alpha x} dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $m = 1, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\int x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c$$
  $m = 2, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 2x e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \int x e^{\alpha x} dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} x e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha x} + c' \right] = \frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c$$
  $m = 3, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\int x^3 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha} \int 3x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha} \int x^2 e^{\alpha x} dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} x^2 e^{\alpha x} - \frac{2}{\alpha^2} x e^{\alpha x} + \frac{2}{\alpha^3} e^{\alpha x} + c' \right] =$$
$$= \frac{1}{\alpha} x^3 e^{\alpha x} - \frac{3}{\alpha^2} x^2 e^{\alpha x} + \frac{6}{\alpha^3} x e^{\alpha x} - \frac{6}{\alpha^4} e^{\alpha x} + c$$

- $\int x^m \cos(\alpha x)\, dx$ ó $\int x^m \sin(\alpha x)\, dx$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $m = 1, \alpha = 1$
$$\int x \cos x\, dx = x \sin x - \int \sin x\, dx = x \sin x + \cos x + c$$
$$\int x \sin x\, dx = -x \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cos x + \sin x + c$$

- $\int \sin(\alpha x) e^{\beta x} dx$ ó $\int \cos(\alpha x) e^{\beta x} dx$ donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

  $\alpha = 1, \beta = 1$
$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \left[\cos x\, e^x - \int (-\sin x)\, e^x\, dx \right]$$
  Es decir que
$$\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x - \int \sin x\, e^x\, dx$$

y por lo tanto

$$2\int \sin x\, e^x\, dx = \sin x\, e^x - \cos x\, e^x + c' \Longrightarrow \int \sin x\, e^x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$$

- $\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \neq -1, \beta \neq 0$

$\alpha = 0,\, \beta = 1$

$$\int \ln x\, dx = \int 1.\ln x\, dx = x \ln x - \int x.\frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + c$$

$\alpha \neq -1,\, \beta \neq 0$

$$\int x^{\alpha} \ln(\beta x)\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(\beta x) - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\frac{1}{\beta x}\beta\, dx =$$

$$= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(\beta x) - \int \frac{x^{\alpha}}{\alpha+1}\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln(\beta x) - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + c$$

Ejemplo. Hallar las primitivas de:

1. $\int (4x-2)\sin x\, dx$.
   Consideramos $f(x) = 4x-2$ y $g'(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = 4$ y una primitiva de g' es $g(x) = -\cos x$. Luego

$$\int (4x-2)\sin x\, dx = (4x-2)(-\cos x) - \int 4(-\cos x)\, dx = -(4x-2)\cos x + 4\sin x + c$$

2. $\int \cos x.\sin x\, dx$.
   Consideramos $f(x) = \cos x$ y $g'(x) = \sin x$, entonces $f'(x) = -\sin x$ y una primitiva de g' es $g(x) = -\cos x$. Luego

$$\int \cos x \sin x\, dx = \cos x(-\cos x) - \int (-\sin x)(-\cos x)\, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x\, dx + c'$$

luego

$$2\int \cos x \sin x\, dx = -\cos^2 x + c' \Rightarrow \int \cos x \sin x\, dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c$$

3. $\int e^x(x^2-5x+3)dx$.
   Observemos primero que tanto la derivada como una primitiva de la función e^x es también e^x, luego para calcular $\int e^x(x^2-5x+3)dx$ podemos (por propiedad conmutativa del producto) considerar $f(x) = x^2-5x+3$ (que es la función que tenemos que derivar) y $g'(x) = e^x$ (que es la función que tenemos que integrar); entonces $f'(x) = 2x-5$ y $g(x) = e^x$, luego la integral

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = \int (x^2-5x+3)e^x dx = (x^2-5x+3)e^x - \int (2x-5)e^x dx =$$

$$= (x^2-5x+3)e^x - 2\int xe^x dx + 5\int e^x dx = (x^2-5x+3)e^x + 5e^x - 2\underbrace{\int xe^x dx}_{A} ....(**)$$

Nos resta aún calcular $A = \int xe^x dx$, considerando ahora $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$, siendo $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$ nuevamente aplicando partes, tendremos que

$$A = \int xe^x dx = xe^x - \int 1e^x dx = xe^x - e^x + c'$$

Volviendo a (**) tendremos

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = (x^2-5x+3)e^x + 5e^x - 2(xe^x - e^x + c') = (x^2-5x+8)e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

O sea,

$$\int e^x(x^2-5x+3)dx = e^x(x^2-7x+10) + c$$

1.4 Integración de funciones racionales propias.

Definición. Llamamos función racional propia al cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son polinomios y $\mathrm{gr}(P) < \mathrm{gr}(Q)$.

Si $\mathrm{gr}(P) \geq \mathrm{gr}(Q)$ sabemos que existen únicos polinomios C y R con $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$ tales $P = CQ + R$ y luego $\dfrac{P}{Q} = C + \dfrac{R}{Q}$ donde será $\dfrac{R}{Q}$ propia.

Veremos algunos casos según sean las raíces del polinomio Q.

<u>1º caso</u>: Q tiene sólo raíces reales simples.
Entonces (si suponemos que el coeficiente principal de Q es 1) el polinomio Q factorizado es

$$Q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

Será

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \tag{1}$$

con A_i constantes a determinar de manera tal que se verifique (1).

Ejemplo. Calcular $\int \dfrac{dx}{x^2-2x-3}$.
En este caso $P(x) = 1$ y $Q(x) = x^2-2x-3$; las raíces de Q son -1 y 3, será entonces $Q(x) = (x+1)(x-3)$, luego

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-3}=\frac{A_1\,(x-3)+A_2\,(x+1)}{(x+1)\,(x-3)}=\frac{(A_1+A_2)\,x+(-3A_1+A_2)}{(x+1)\,(x-3)}$$

$$\Longleftrightarrow (A_1+A_2)\,x+(-3A_1+A_2)=P(x)=1 \Longleftrightarrow \begin{cases} A_1+A_2=0 \\ -3A_1+A_2=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{A_2=\tfrac{1}{4},A_1=-\tfrac{1}{4}\right\}$$

Por lo tanto

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-3}=\int \frac{-1/4}{x+1}dx+\int \frac{1/4}{x-3}dx=-\frac{1}{4}\ln|x+1|+\frac{1}{4}\ln|x-3|+c$$

<u>2º caso</u>: Q tiene raíces reales múltiples.
Entonces (podemos suponer que el coeficiente principal de Q es 1) el polinomio Q factorizado es

$$Q(x)=(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_n)^{r_n}$$

Será

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1}+\frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}+\\ &+\frac{A_{21}}{x-\alpha_2}+\frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2r_2}}{(x-\alpha_2)^{r_2}}+\\ &+\cdots\cdots+\\ &+\frac{A_{n1}}{x-\alpha_n}+\frac{A_{n2}}{(x-\alpha_n)^2}+\cdots+\frac{A_{nr_n}}{(x-\alpha_n)^{r_n}}\end{aligned} \tag{2}$$

con A_{ij} constantes a determinar de manera tal que se verifique (2).

Ejemplo. Calcular $\int \dfrac{dx}{(x^2-1)^2}$.
En este caso $P(x)=1$ y $Q(x)=(x^2-1)^2$; las raíces de Q son -1 y 1, ambas dobles, entonces $Q(x)=(x-1)^2(x+1)^2$ luego

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}&=\frac{1}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{(x-1)^2\,(x+1)^2}=\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{12}}{(x-1)^2}+\frac{A_{21}}{x+1}+\frac{A_{22}}{(x+1)^2}=\\ &=\frac{A_{11}\,(x-1)\,(x+1)^2+A_{12}\,(x+1)^2+A_{21}\,(x+1)\,(x-1)^2+A_{22}\,(x-1)^2}{(x-1)^2\,(x+1)^2}=\\ &=\frac{(A_{11}+A_{21})x^3+(A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22})x^2}{(x-1)^2\,(x+1)^2}+\\ &\quad+\frac{(-A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22})x+(-A_{11}+A_{12}+A_{21}+A_{22})}{(x-1)^2\,(x+1)^2}\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow (A_{11}+A_{21})x^3+(A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22})x^2+(-A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22})x+(-A_{11}+A_{12}+A_{21}+A_{22})=P(x)=1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_{11}+A_{21}=0 \\ A_{11}+A_{12}-A_{21}+A_{22}=0 \\ -A_{11}+2A_{12}-A_{21}-2A_{22}=0 \\ -A_{11}+A_{12}+A_{21}+A_{22}=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \left\{A_{11}=-\tfrac{1}{4},\, A_{12}=\tfrac{1}{4},\, A_{12}=\tfrac{1}{4},\, A_{22}=\tfrac{1}{4}\right\}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} &= \frac{1}{4}\left(-\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+\ln|x+1|-\frac{1}{x+1}\right)+c \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)+c \end{aligned}$$

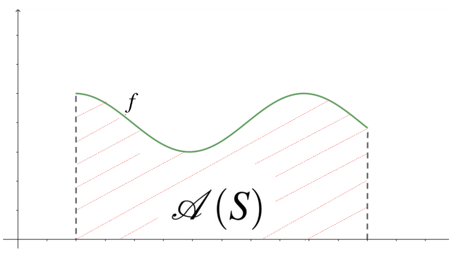
Los casos donde las raíces de Q son complejas se verán en otros cursos de Análisis.

2 Cálculo de integrales definidas

Hay un concepto matemático que aprenderemos mas adelante: el de integral definida. Será introducido con toda formalidad en cursos de Análisis Matemático II. Aquí solamente vamos a vincularlo con el cálculo de primitivas mediante el Teorema de Barrow.

Introducción. El problema del área.
Históricamente el concepto de integral nació a partir de la necesidad de calcular el área de S, una región del plano (debajo de la gráfica de una función no negativa).

Problema: Si f está definida en $[a,b]$ y $f(x)\geq 0$ en $[a,b]$ queremos calcular el área de $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b,\, 0\leq y\leq f(x)\right\}$.



En cursos avanzados de Análisis Matemático veremos que bajo ciertas hipótesis sobre la función f podemos calcular el área de la región S como la integral definida de f en $[a,b]$, es decir

$$\mathscr{A}(S)=\int_a^b f(x)dx$$

Como podemos ver aquí, la integral definida es un número, a diferencia de la integral indefinida que, como estudiamos en esta Unidad, es una familia de funciones. También se demostrarán en cursos más avanzados los teoremas fundamentales del cálculo:

Teorema 3. *(Primer teorema fundamental del cálculo): Sea f integrable en $[a,x]$ para cada $x \in [a,b]$ y sea $c \in [a,b]$, definimos*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{para } x \in [a,b]$$

Entonces F_c es continua en $[a,b]$ y además, si f es continua en $x \in (a,b)$, F_c es derivable en x y $F_c'(x) = f(x)$.

Observación. El teorema nos dice, bajo hipótesis de continuidad de f, que

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt \quad \text{es una primitiva de } f.$$

Teorema 4. *(Segundo teorema fundamental del cálculo): Sea f continua en $[a,b]$ y sea P una primitiva de f en (a,b). Entonces para todo $c \in (a,b)$ vale*

$$P(x) = P(c) + \int_c^x f(t)dt \quad \text{para todo } x \in (a,b)$$

O bien

$$\int_c^x f(t)dt = P(x) - P(c)$$

Observación. El teorema anterior nos permite calcular integrales definidas, conocida una primitiva de la función integrando. Más precisamente, se tiene

Regla de Barrow Si P es una primitiva de f entonces

$$\int_a^b f(t)dt = P(b) - P(a)$$

Notación

$$P(x)|_a^b = P(b) - P(a)$$

Ejemplo.

$$\int_1^3 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$$

Vimos que (Regla de Barrow) si f es continua en $[a,b]$ y P es una primitiva de f entonces podemos calular la integral definida de f en $[a,b]$ como $P(b) - P(a)$, por lo tanto, el problema se centrará en hallar primitivas de f para luego aplicar Barrow.

Ejemplo. Calcular $\int_0^1 \frac{2}{x^2+1}dx$, para ello buscamos primitivas de $\frac{2}{x^2+1}$, o sea $\int \frac{2dx}{x^2+1} = 2\arctan x + c$. Luego aplicamos Barrow, entonces

$$\int_0^1 \frac{2dx}{x^2+1} = 2\arctan x|_0^1 = 2(\arctan 1 - \arctan 0) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Integración por sustitución y por partes en integrales definidas.

Combinando las fórmulas de integración por sustitución o por partes, con el 2º TFCI se puede probar que:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Ejemplo.

1) $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$, haciendo la sustitución $\ln x = t$, es $\frac{1}{x} dx = dt$ y si $x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0$ y si $x = e \Rightarrow t = \ln e = 1$ luego

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

2) $\int_0^1 x e^x dx$, por partes ponemos $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ y $g'(x) = e^x \Rightarrow g(x) = e^x$ entonces

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1e^1 - 0e^0 - e^x|_0^1 = e - \left(e^1 - e^0\right) = 1$$

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119