

# COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA I

## MATEMÁTICA DISCRETA

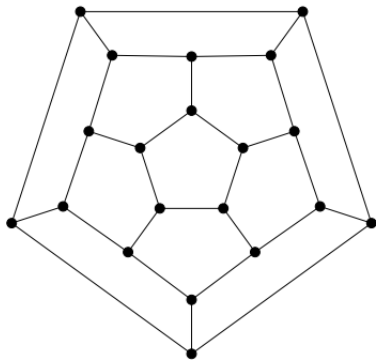
Depto de Matemática  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
UNR

2025

# CICLOS HAMILTONIANOS

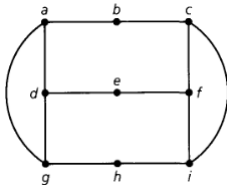
## DEFINICIÓN

Un ciclo *hamiltoniano* en un grafo  $G$  es un ciclo que contiene todos los vértices de  $G$ . Un *grafo es hamiltoniano* si tiene un ciclo hamiltoniano.



Los siguientes grafos son hamiltonianos?

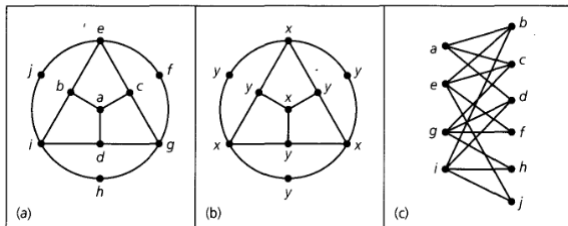
- $C_n$
- $P_n$
- $K_n$  sii  $n \geq 3$
- $W_n$
- $K_{n,m}$  sii  $m = n$
- Grafo de Petersen
- El grafo siguiente, tiene un camino hamiltoniano? tiene un ciclo hamiltoniano?



## Algunas observaciones:

- Los bucles y aristas múltiples no afectan a los ciclos, por eso consideramos grafos simples.
- No hay una caracterización sencilla para grafos hamiltonianos (cf. eulerianos).
- Si  $G$  hamiltoniano entonces:
  - ▶ es conexo
  - ▶  $\delta(G) \geq 2$
  - ▶ si  $gr(v) = 2$  ambas aristas están en todo ciclo hamiltoniano.

## EJEMPLO



*Si es bipartito y no son iguales los conjuntos de vértices de cada lado de la bipartición...NO tiene ciclo hamiltoniano.*

## TEOREMA

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin bucles con  $|V| = n \geq 2$ . Si  $gr(v) + gr(w) \geq n - 1$  para todo  $v, w \in V$ ,  $v \neq w$ , entonces  $G$  tiene un camino hamiltoniano.*

## PROOF.

Pizarra



## COROLARIO

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin bucles con  $|V| = n \geq 2$ . Si  $\text{gr}(v) \geq \frac{n-1}{2}$  para todo  $v \in V$ , entonces  $G$  tiene un camino hamiltoniano.*

Ejercicio

## TEOREMA

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin bucles con  $|V| = n \geq 3$ . Si  $\text{gr}(v) + \text{gr}(w) \geq n$  para todo par de vértices  $v, w \in V$  no adyacentes entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano.*

## PROOF.

Pizarra



## COROLARIO

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin bucles con  $|V| = n \geq 3$ . Si  $\text{gr}(v) \geq \frac{n}{2}$  para todo  $v \in V$ , entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano.*

Ejercicio

## COROLARIO

*Sea  $G = (V, E)$  un grafo sin bucles con  $|V| = n \geq 3$ . Si  $|E| \geq \binom{n-1}{2} + 2$  para todo  $v \in V$ , entonces  $G$  tiene un ciclo hamiltoniano.*

## PROOF.

Pizarra

