

Parte I

APROXIMACIÓN DE FUNCIONES POR POLINOMIOS

1. INTRODUCCIÓN

Los polinomios figuran entre las funciones más sencillas estudiadas en análisis. Son muy adecuadas para trabajar en cálculos numéricos porque sus valores se pueden obtener efectuando un número finito de sumas y multiplicaciones. Veremos que muchas funciones pueden aproximarse por polinomios, es decir si la diferencia entre una función y su aproximación polinómica es suficientemente pequeña, entonces podemos calcular con el polinomio en lugar de hacerlo con la función original,

$$f(x) \cong P(x) \text{ o sea } f(x) = P(x) + E(x) \text{ con } |E(x)| \leq M$$

Supongamos que de la función f conocemos el valor que ella y sus derivadas (hasta un cierto n) asumen en un punto a . Existen muchas maneras de aproximar una función dada por polinomios, ahora nos interesará obtener un polinomio que coincida con f y algunas de sus derivadas en un punto dado.

Por ejemplo: sea $f(x) = e^x$, en $x = 0$ el polinomio $g(x) = 1 + x$, verifica

$$g(0) = f(0) = 1 \quad g'(0) = f'(0) = 1$$

Geométricamente, la gráfica de g es la recta tangente a la de f en el punto $(0, 1)$, es decir, $g(x) = P_1(x) = f'(0)x + f(0)$.

Si aproximamos f por un polinomio Q de grado 2 que coincida con f y sus dos derivadas primeras en $x = 0$, podemos esperar una mejor aproximación de f que con la función lineal g , por lo menos cerca del punto $(0, 1)$.

El polinomio $Q(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ verifica

$$Q(0) = f(0) = 1 \quad Q'(0) = f'(0) = 1 \quad Q''(0) = f''(0) = 1$$

Vemos que Q aproxima mejor a f que g al menos cerca de $(0, 1)$.

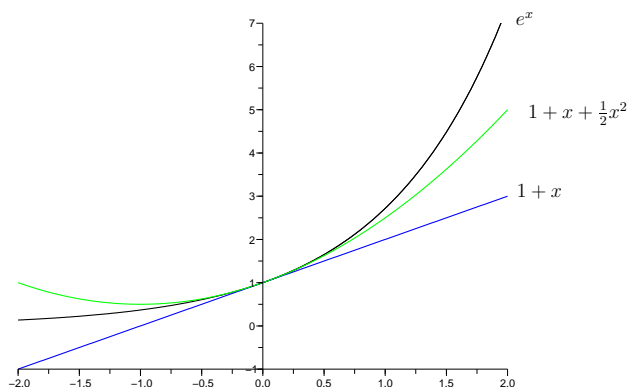


Figura 1: Polinomios de aproximación de e^x cerca de $x = 0$

Podemos mejorar aún más esta aproximación utilizando polinomios que, en el 0, coincidan con f y sus derivadas hasta el orden tres; o hasta el orden cuatro,... y hasta órdenes superiores. Es fácil comprobar que el polinomio

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad (1)$$

coincide con f y sus n primeras derivadas en $x = 0$. Esto nos permite obtener una aproximación polinómica de f , que nos facilitará el cálculo de algún valor de f en al menos las proximidades de $x = 0$, por ejemplo si queremos calcular $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \simeq 1,6487\dots$, podemos fijar un n y calcular $P\left(\frac{1}{2}\right)$, para distintos valores de n :

$$n = 3 \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^3 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = 1.6458$$

$$n = 4 \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^4 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = 1.6484$$

$$n = 5 \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^5 \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = 1.6487$$

Naturalmente, antes de que podamos usar este polinomio como aproximación de f para calcular valores aproximados de \sqrt{e} , necesitamos alguna información acerca del error cometido, es decir $E(x) = f(x) - P(x)$.

2. LOS POLINOMIOS DE TAYLOR.

2.1. POLINOMIOS DE TAYLOR ENGENDRADOS POR UNA FUNCIÓN.

Supongamos que f tiene derivadas hasta el orden n en el punto $x = 0$, e intentamos encontrar un polinomio P que coincida con f y sus n primeras derivadas en 0. Deben satisfacerse entonces las $n + 1$ condiciones,

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \dots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \quad (2)$$

Sea entonces P un polinomio de grado n

$$P(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (3)$$

Para determinar estos $n + 1$ coeficientes c_k , utilizaremos las $n + 1$ condiciones anteriores, evaluamos $P^{(k)}(0)$

$$\begin{cases} P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n & P(0) = 0! \cdot c_0 \\ P'(x) = 1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2x + 3 \cdot c_3x^2 + \dots + n \cdot c_nx^{n-1} & P'(0) = 1! \cdot c_1 \\ P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3x + 4 \cdot 3 \cdot c_4x^2 + \dots + n(n-1) \cdot c_nx^{n-2} & P''(0) = 2! \cdot c_2 \\ P'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4x + \dots + n(n-1)(n-2) \cdot c_nx^{n-3} & P'''(0) = 3! \cdot c_3 \\ P^{(k)}(x) = k!c_k + \frac{(k+1)!}{1!}c_{k+1}x + \frac{(k+2)!}{2!}c_{k+2}x^2 + \dots + \frac{n!}{(n-k)!}c_nx^{n-k} & P^{(k)}(0) = k! \cdot c_k \end{cases}$$

Así

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} k!c_k & \text{si } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

Por lo tanto, como $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) \forall k$

$$c_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (4)$$

Esto nos da la fórmula para los coeficientes en función de los valores de f y de sus derivadas en $x = 0$.

Hemos demostrado que existe un polinomio P que verifica las condiciones (2) cuyos coeficientes son los dados en (4). El **grado de** P será n si $f^{(n)}(0) \neq 0$, si no, será de grado $< n$.

Recíprocamente, el único polinomio P cuyos coeficientes son los dados en (4) satisface las condiciones (2). Se tiene entonces el siguiente:

Teorema 1 Sea f una función con derivadas hasta el orden n en el punto $x = 0$. Existe un único polinomio P de grado $\leq n$ que satisface las $n + 1$ condiciones

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \dots, P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

Tal polinomio viene dado por

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \quad (5)$$

Observación 1 De la misma manera podemos demostrar que existe único polinomio P (de grado $\leq n$) que coincide con f y sus derivadas en el punto $x = a \in \text{dom} f$. Escribir P ordenado según las potencias de $(x - a)$ y proceder como lo hecho anteriormente, llegamos a

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad (6)$$

Éste es el único polinomio de grado $\leq n$ que satisface las condiciones

$$P(a) = f(a), \quad P'(a) = f'(a), \dots, P^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) \quad (7)$$

Definición 1 Este polinomio se llama **Polinomio de Taylor de grado $\leq n$ generado por f en a** . En honor al matemático Brook Taylor (1685-1731).

Notación: Para indicar la dependencia del polinomio respecto de f , de n y del punto a , indicaremos a tal polinomio P por

$$P(x) = P_n(x) = T_n(f, a)(x) = T_n(f(x), a)$$

El símbolo T_n se denomina **operador de Taylor de grado n** cuando se aplica a una función produce una función $T_n f$ que es el polinomio de grado n . El valor de esa función en x se representa por $T_n f(x)$ o por $T_n(f(x)) = P(x)$. Esta es una aproximación de $f(x)$, cerca de a

$$f(x) \simeq T_n(f, a)(x)$$

2.2. LOS POLINOMIOS DE TAYLOR DE LAS FUNCIONES FUNDAMENTALES.

Ejemplo 1 Un polinomio de grado n .

Sea $f(x) = q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ con $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n$ y $a_n \neq 0$. Los coeficientes de $T_n(q, 0)(x)$ serán $c_k = \frac{q^{(k)}(0)}{k!}$, evaluamos $q(0) = a_0 = c_0$, $q'(0) = a_1$, $q''(0) = 2a_2, \dots, q^{(n)}(0) = n! a_n$, luego $c_k = \frac{k! a_k}{k!} = a_k$ para todo $k = 0, 1, \dots, n$. Además, como $c_n = a_n \neq 0$ el grado de $T_n(q, 0)$ es n . Dos polinomios del mismo grado y con todos sus coeficientes iguales, son iguales, por lo tanto

$$T_n(q(x), 0) = q(x)$$

Ejemplo 2 La función exponencial $f(x) = e^x$.

Para cada $x \in \mathbb{R}$, $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$, en $x = 0$ tenemos $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, luego el polinomio de Taylor de e^x de grado n en $x = 0$ es

$$T_n(e^x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad (8)$$

Como vimos antes tenemos una aproximación de e^x dada por un polinomio de grado n al menos cerca de $x = 0$

$$e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Así, para calcular un valor aproximado del número e , calculamos el polinomio en $x = 1$ y $n = 5$ (por ejemplo)

$$e^1 = e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71\bar{6}$$

Pero $e \simeq 2.718281$.

Si queremos por ejemplo $T_n(e^x, 2)$ debemos calcular $f^{(k)}(2) = e^2$ entonces según (6) se tiene

$$T_n(e^x, 2) = \sum_{k=0}^n \frac{e^2}{k!} (x-2)^k$$

Ejemplo 3 Las funciones trigonométricas, seno y coseno.

a) Sea $f(x) = \sin x$. Calculamos $f^{(k)}(0)$ para $k = 0, 1, \dots, n$

$$\begin{array}{llllll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x & f'''(x) = -\cos x & f^{(4)}(x) = \sin x & \\ f(0) = 0 & f'(0) = 1 & f''(0) = 0 & f'''(0) = -1 & f^{(4)}(0) = 0 & \end{array}$$

entonces para $k = 0, 1, \dots, n$ se tiene

$$\begin{array}{ll} f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x & f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k & f^{(2k)}(0) = 0 \end{array}$$

Los coeficientes serán

$$c_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad \text{y} \quad c_{2k} = 0 \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n$$

Luego sólo aparecen potencias impares, entonces el polinomio tiene la forma

$$T_{2n+1}(\sin x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Al menos cerca de $x = 0$, tenemos una aproximación polinómica del seno

$$\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

b) Sea $f(x) = \cos x$, análogamente tenemos sólo coeficientes no nulos en las potencias pares, pues para $k = 0, 1, \dots, n$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ y $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, entonces el polinomio tiene la forma

$$T_{2n}(\cos x, 0) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Cerca de $x = 0$, tenemos una aproximación del coseno por el polinomio

$$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Observación 2 Notemos que $T_{2n+1}(\sin x, 0) = T_{2n+2}(\sin x, 0)$ y $T_{2n}(\cos x, 0) = T_{2n+1}(\cos x, 0)$. Además cada polinomio $T_{2n}(\cos x, 0)$ es la derivada del polinomio de Taylor de $T_{2n+1}(\sin x, 0)$, como es el coseno la derivada del seno. También $T_{2n+1}(\sin x, 0)$ es una primitiva de $T_{2n}(\cos x, 0)$, veremos en las próximas secciones que ciertas relaciones válidas entre funciones se transmiten a sus polinomios de Taylor.

Ejemplo 4 Sea $f(x) = \ln(1+x)$, para $x \in (-1, \infty)$.

Calculamos $f^{(k)}(0)$, $f(0) = 0$, para $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f''(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} & f'''(x) &= \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3} & \dots & f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \\ f'(0) &= 1 & f''(0) &= -1 & f'''(0) &= 1 \cdot 2 & \dots & f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} (k-1)! \end{aligned}$$

entonces

$$T_n(\ln(1+x), 0) = f(0) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \quad (9)$$

Cerca de $x = 0$, tenemos la siguiente aproximación

$$\boxed{\ln(1+x) \simeq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}}$$

Observación: Siempre debemos probar por inducción sobre n la fórmula para $f^{(n)}(a) \forall n$.

Ejemplo 5 Sea $f(x) = \ln x$ para $x > 0$.

Queremos calcular $f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \dots, n$ y $a > 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} & f''(x) &= -\frac{1}{x^2} & f'''(x) &= \frac{2}{x^3} & \dots & f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1} \frac{2 \cdot 3 \cdots (k-1)}{x^k} \\ f(a) &= \ln a & f'(a) &= \frac{1}{a} & f''(a) &= -\frac{1}{a^2} & f'''(a) &= \frac{2}{a^3} & \dots & f^{(k)}(a) &= (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{a^k} \end{aligned}$$

luego el polinomio de Taylor de $\ln x$ de grado n en a es

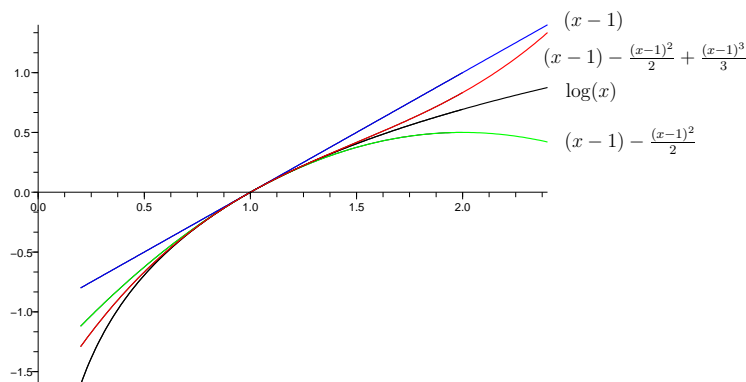
$$T_n(\ln x, a) = \ln a + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{a^k k} (x-a)^k$$

Por ejemplo si $a = 1$,

$$T_n(\ln x, 1) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$

Así, $\ln x$ se aproxima al polinomio, al menos cerca de $x = 1$

$$\boxed{\ln x \simeq (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}}$$

Figura 2: Polinomios de aproximación de $\ln x$ cerca de $x = 1$

2.3. CÁLCULO DE LOS POLINOMIOS DE TAYLOR.

Para calcular el $T_n(f(x), a)$ debemos calcular $f^{(k)}(a)$ para $k = 0, \dots, n$, (y probar por inducción sobre n) pero esto puede resultar muy tedioso, utilizaremos algunas propiedades del operador T_n que nos permiten obtener polinomios de Taylor a partir de otros dados. En el siguiente teorema se sobre entiende que todos los polinomios son obtenidos alrededor del mismo punto a .

Teorema 2 Sean f, g funciones derivables hasta el orden n en $a \in I \subset \text{dom} f \cap \text{dom} g$, entonces el operador T_n tiene las siguientes propiedades:

a) Linealidad. Si c_1 y c_2 son constantes,

$$T_n(c_1 f + c_2 g, a)(x) = c_1 T_n(f, a)(x) + c_2 T_n(g, a)(x)$$

b) Sustitución. Si $c \in \mathbb{R}$ y $g(x) = f(cx)$ entonces si $ca \in I$

$$T_n(g, a)(x) = T_n(f, ca)(cx)$$

En particular, cuando $a = 0$ tenemos

$$T_n(g, 0)(x) = T_n(f, 0)(cx)$$

c) Derivación. La derivada del polinomio de Taylor de f es el polinomio de Taylor de f' , es decir

$$(T_n(f, a))'(x) = T_{n-1}(f', a)(x)$$

d) Integración. Una integral indefinida del polinomio de Taylor de f es el polinomio de Taylor de una integral indefinida de f , es decir si $g(x) = \int_a^x f(t) dt$ se tiene

$$T_{n+1}(g, a)(x) = \int_a^x T_n(f, a)(t) dt$$

dem: Cada ecuación en a,c,d) liga dos polinomios del mismo grado. Para demostrarlas, observemos que el polinomio que aparece en el primer miembro tiene el mismo valor y las mismas derivadas en a que el que aparece en el segundo miembro. Entonces por la unicidad del polinomio de Taylor (generado por f en a) se obtiene el resultado.

Para b) como $g(x) = f(cx)$, la regla de la cadena nos da

$$g'(x) = cf'(cx), \quad g''(x) = c^2 f''(cx), \quad \dots \quad g^{(k)}(x) = c^k f^{(k)}(cx)$$

y en $x = a$ resulta $g^{(k)}(a) = c^k f^{(k)}(ca)$. Por lo tanto tenemos

$$T_n(g, a)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{c^k f^{(k)}(ca)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(ca)}{k!} (cx-ca)^k = T_n(f, ca)(cx)$$

□

Ejemplo 6 La función $f(x) = e^{-x}$.

Usando (8), por propiedad de sustitución, reemplazando x por $-x$ podemos encontrar el polinomio de Taylor de e^{-x} alrededor de $a = 0$.

$$T_n(e^{-x}, 0)(x) = T_n(e^x, \underbrace{0}_{(-1) \cdot 0})(-x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Ejemplo 7 Las funciones trigonométricas hiperbólicas.

Como $\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, podemos utilizar la propiedad de linealidad para obtener

$$T_{2n}(\cosh x, 0) = \frac{1}{2}T_{2n}(e^x, 0) + \frac{1}{2}T_{2n}(e^{-x}, 0) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

La propiedad de derivación nos da

$$T_{2n-1}(\sinh x, 0) = (T_{2n}(\cosh x, 0))' = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Nota 1 Recordemos que una función definida en un dominio simétrico puede representarse de manera única como la suma su parte par f_p y su parte impar f_i , siendo

$$f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{y} \quad f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Por ejemplo, $\cosh x$ y $\sinh x$ son la parte par e impar de e^x . En el caso general $f = f_p + f_i$ y usando propiedades de T_n se tiene

$$T_n(f_p(x), 0)(x) = T_n\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x), 0\right)(x) = \frac{1}{2}T_n(f(x), 0)(x) + \frac{1}{2}T_n(f(x), 0)(-x)$$

Al hacer esta suma se cancelan los sumandos con potencias impares, quedando únicamente los sumandos con potencias pares del polinomio de Taylor de f . Esto es válido para toda función par. Análogamente siendo

$$T_n(f_i(x), 0)(x) = \frac{1}{2}T_n(f(x), 0)(x) - \frac{1}{2}T_n(f(x), 0)(-x)$$

se cancelan todos los sumandos de potencias pares quedando sólo los impares.

Proposición 1 Los polinomios de Taylor de la parte par e impar de una función f , $T_n(f_p, 0)$ y $T_n(f_i, 0)$ se obtienen tomando los sumandos con potencias pares e impares respectivamente de $T_n(f, 0)$. Más aún, el polinomio de Taylor de una función par (impar) tiene solamente sumandos con potencias pares (impares).

Ejemplo 8 La función $g(x) = -\ln(1-x)$.

a) Sea $f(x) = \ln(1+x)$ para $x > -1$, ponemos $g(x) = -f(-x)$ para $-1 < x < 1$, a partir de (9), por sustitución y linealidad resulta

$$T_n(-\ln(1-x), 0)(x) = -T_n(\ln(1+x), 0)(-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

y luego cerca de $x = 0$ es

$$-\ln(1-x) \simeq x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n}$$

b) Podemos calcular el de $h(x) = \frac{1}{1+x}$ por derivación pues $h(x) = f'(x)$, usando (9), si $x > -1$ tenemos

$$T_n\left(\frac{1}{1+x}, 0\right)(x) = (T_{n+1}(f, 0)(x))' = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

luego cerca de $x = 0$ tenemos

$$\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$$

c) También el de $r(x) = \frac{1}{1-x}$ para $-1 < x < 1$ por sustitución $r(x) = h(-x)$, con $c = -1$

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}, 0\right)(x) = T_n\left(\frac{1}{1+x}, 0\right)(-x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (-x)^k = \sum_{k=0}^n x^k$$

luego cerca de $x = 0$

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

Observación 3 Vimos que si f es derivable en a vale:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E(x)(x-a) \quad \text{donde } \lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0$$

Pero $T_1(f, a)(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, luego

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_1(f, a)(x)}{x-a} = 0$$

Este hecho es más general, y es una **muy importante** propiedad de los polinomios de Taylor:

Teorema 3 Sea f derivable en a hasta el orden n entonces vale

$$f(x) = T_n(f, a)(x) + E(x)(x-a)^n \quad \text{donde } \lim_{x \rightarrow a} E(x) = 0$$

es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x-a)^n} = 0 \quad (10)$$

dem: Sea $T_n(f, a)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$, recordemos que $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, \dots, n$ luego el límite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x-a)^n} \text{ es de tipo } \frac{0}{0}$$

Aplicando L'Hôpital,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - T'_n(f, a)(x)}{n(x-a)^{n-1}} \stackrel{L'H}{=} \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - [(n-1)!a_{n-1} + n!a_n(x-a)]}{n!(x-a)} \quad \text{🗨️}$$

pero $(n-1)!a_{n-1} = f^{(n-1)}(a)$, luego

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{n!(x-a)} - a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} - a_n = 0.$$

□

Definición 2 Dos funciones f y g son iguales hasta el orden $n \in \mathbb{N}$ en a si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Teorema 4 Sean p y q dos polinomios en potencias de $(x-a)$ de grado $\leq n$ tales que son iguales hasta el orden n en a entonces $p(x) = q(x)$.

dem: Sea $R(x) = p(x) - q(x)$, entonces $\text{gr}(R) \leq n$, supongamos

$$R(x) = b_0 + b_1(x-a) + \dots + b_n(x-a)^n$$

Por hipótesis, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^n} = 0$, veamos que $b_k = 0 \forall k = 0, \dots, n$.

Obviamente $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{(x-a)^k} = 0 \forall k \leq n$, en particular si $k = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} R(x) = 0 = R(a) = b_0$,

pues R es un polinomio, luego es continuo. Si $k = 1$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{R(x)}{x-a} = 0 = b_1$, y así resultan todos los $b_k = 0$ para $k = 0, \dots, n$. □

Corolario 1 Sea f una función para la cual existe $T_n(f, a)(x)$ y sea P un polinomio en potencias de $(x-a)$ igual a f hasta el orden n en a , entonces P es el polinomio de Taylor de f alrededor de a , es decir

$$P(x) = T_n(f, a)(x)$$

dem: $\frac{T_n(f, a)(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \frac{T_n(f, a)(x) - f(x)}{(x-a)^n} - \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$,
 $\rightarrow 0$ por teorema 3 $\quad \quad \quad \rightarrow 0$ por hipótesis

entonces por el Teorema 4, los polinomios son iguales. □

El siguiente teorema es de utilidad en la simplificación de cálculos con polinomios de Taylor.

Teorema 5 Sea P_n un polinomio de grado $n \geq 1$. Sean f y g dos funciones con derivadas de orden n en a y tales que

$$f(x) = P_n(x) + (x-a)^n g(x) \quad (11)$$

en donde $g(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow a$. Entonces $P_n(x) = T_n(f, a)(x)$.

dem: Como $g(x) = \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} \rightarrow 0$ entonces $f = P_n$ hasta el orden n en a , por corolario 1, resulta $P_n(x) = T_n(f, a)(x)$. \square

Proposición 2 Para $x \neq 1$ es válida la identidad

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x} \quad (12)$$

dem: En efecto, ponemos

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \\ xS_n &= x + x^2 + \cdots + x^{n+1} \\ (1-x)S_n &= 1 - x^{n+1} \end{aligned}$$

Luego si $x \neq 1$ es

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

\square

Ejemplo 9 El polinomio de Taylor de grado n de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ alrededor de $a = 0$ es $1 + x + \cdots + x^n$.

Ponemos $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ y $g(x) = \frac{x}{1-x}$, como $f(x) = P_n(x) + x^n g(x)$ y $g(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, entonces por teorema 5

$$T_n\left(\frac{1}{1-x}, 0\right)(x) = P_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Como habíamos probado en el ejemplo 8 c).

a) A partir de (12), integrando obtenemos

$$T_{n+1}(-\ln(1-x), 0)(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

como en el ejemplo 8 a).

b) Reemplazando x por $-x^2$ en (12) tenemos

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

luego aplicando el teorema anterior con $g(x) = (-1)^{n+1} \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$, tenemos

$$T_{2n} \left(\frac{1}{1+x^2}, 0 \right) (x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}$$

c) Integrando tenemos

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + \cdots + (-1)^n t^{2n}) dt + \int_0^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt \quad (13)$$

como la integral del Taylor es el Taylor de la integral resulta

$$T_{2n+1} (\arctan x, 0) (x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

Aplicación. Calcular un valor aproximado de π y estimar el error cometido. La igualdad (13) evaluada en $x = 1$ es

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2k+1} + \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

Luego

$$\pi \simeq 4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} \right)$$

Para $\frac{\pi}{4}$ el error $|E| = |\arctan 1 - T_{2n+1} (\arctan x, 0) (1)|$ será entonces para π

$$|E| = 4 \left| \int_0^1 (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}}_{\geq 1} dt \right| \leq 4 \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{4}{2n+3}$$

Entonces si quiero, $|E| \leq \frac{4}{2n+3} < \frac{1}{2} 10^{-3} \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \cdot 10^3 < 2n+3 \Leftrightarrow n \geq 3999$. Es decir, si queremos que el error cometido para calcular un valor aproximado de π sea menor que 0,0005 debemos hacer cálculos con un polinomio de grado superior a $2(3999) + 1$.

3. LA FÓRMULA DE TAYLOR CON RESTO.

3.1. RESTO EN FORMA INTEGRAL.

La utilidad de los polinomios de Taylor es la posibilidad de calcular un valor aproximado de $f(x)$ mediante el cálculo de $T_n(f, a)(x)$ y la posibilidad de estimar el error cometido en esa aproximación:

Definición 3 Definimos el **error o resto** de aproximar una función f mediante su polinomio de Taylor $T_n(f, a)(x)$ en un punto x como la diferencia

$$E_n(x) = R_n(f, a)(x) = f(x) - T_n(f, a)(x)$$

Definición 4 Si f tiene derivadas hasta el orden n en a , podemos escribir la **Fórmula de Taylor con Resto**

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(f, a)(x) \quad (14)$$

Para obtener una expresión de $R_n(f, a)(x) = R_n(x)$, consideremos primero el error que aparece en una aproximación lineal.

Teorema 6 *Supongamos que f tiene derivada segunda continua en un cierto entorno de a . Entonces, para todo x en ese entorno, se tiene*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + R_1(x)$$

en donde

$$R_1(x) = \int_a^x (x - t) f''(t) dt \quad (15)$$

dem: Según la definición de error escribimos

$$R_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) = \int_a^x f'(t) dt - f'(a) \int_a^x dt = \int_a^x (f'(t) - f'(a)) dt$$

Ponemos la última integral como $\int_a^x u dv$, donde $u = f'(t) - f'(a)$ y $v = t - x$. Así, $\frac{du}{dt} = f''(t)$ y $\frac{dv}{dt} = 1$, integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \int_a^x u dv = uv|_a^x - \int_a^x v du = \underbrace{(f'(t) - f'(a))(t - x)|_a^x}_{=0} - \int_a^x (t - x) f''(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) f''(t) dt \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

El error al aproximar f por un polinomio de grado n viene dado por:

Teorema 7 *Supongamos que f tiene derivada continua de orden $n + 1$ en un intervalo que contiene a a . Entonces, para todo x en ese intervalo tenemos*

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt \quad (16)$$

dem: Por inducción respecto a n . Ya hemos demostrado para $n = 1$, supongamos válido para un cierto n y probaremos para $n + 1$. Escribimos la fórmula de Taylor para $n + 1$ y para n restamos

$$f(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_{n+1}(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k - R_n(x)$$

Obtenemos

$$R_{n+1}(x) = R_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \int_a^x (x - t)^n dt$ y utilizando la expresión integral para $R_n(x)$ se tiene

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!} \int_a^x (x - t)^n dt \\ &= \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)) dt \end{aligned}$$

Integramos por partes esta integral poniendo

$$\begin{aligned} u &= f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a) & dv &= (x-t)^n dt \\ du &= f^{(n+2)}(t) dt & v &= -\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

y como $u = 0$ cuando $t = a$ y $v = 0$ cuando $t = x$, llegamos a

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x u dv = \underbrace{uv|_a^x}_{=0} - \frac{1}{n!} \int_a^x v du \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

Luego la fórmula integral para $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ vale para todo $n \geq 1$. \square

Teorema 8 Si f es derivable hasta el orden n en a , entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(f, a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

dem: $R_n = f - T_n$ y por teorema 3, es el $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n(f, a)(x)}{(x-a)^n} = 0$. \square

3.2. TEOREMA DEL VALOR MEDIO GENERALIZADO. EL RESTO EN LA FORMA DE LAGRANGE.

Lema 1 (Teorema del Valor Medio Ponderado o Generalizado) Si g es continua en $[a, b]$ y p es no negativa e integrable en $[a, b]$ entonces existe $\xi \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b g(x) p(x) dx = g(\xi) \int_a^b p(x) dx$$

Caso particular, $p(x) = 1$, tenemos $\int_a^b g(x) dx = g(\xi)(b-a)$.

dem: Sean m, M los extremos de g en $[a, b]$ (existen por teorema de Weierstrass), entonces $\forall x \in [a, b]$, como p es no negativa, se tiene

$$\begin{aligned} m &\leq g(x) \leq M \\ mp(x) &\leq g(x)p(x) \leq Mp(x) \\ m \int_a^b p(x) dx &\leq \int_a^b g(x)p(x) dx \leq M \int_a^b p(x) dx \end{aligned}$$

entonces

$$\int_a^b g(x)p(x) dx = \mu \int_a^b p(x) dx \quad \text{para algún } \mu \text{ entre } m \text{ y } M$$

ya que g es continua en $[a, b]$, entonces (por teorema de los valores intermedios) existe $\xi \in (a, b)$ tal que $g(\xi) = \mu$. \square

Observación 4 El lema vale también si $p(x) \leq 0$.

Corolario 2 *El Resto en la forma de Lagrange es*

$$R_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{para } \xi \text{ entre } a \text{ y } x \quad (17)$$

dem: El resto en su forma integral es

$$R_n(f, a)(x) = \int_a^x \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_g \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_p dt$$

Si $f^{(n+1)}$ es continua en entorno de a , por lema 1 tenemos que existe $\xi \in (a, x)$ tal que

$$\begin{aligned} R_n(f, a)(x) &= f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt = f^{(n+1)}(\xi) \left. \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right|_a^x \\ &= f^{(n+1)}(\xi) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

□

3.3. ESTIMACIÓN DEL ERROR EN LA FÓRMULA DE TAYLOR.

Como en la expresión del error en forma integral aparece $f^{(n+1)}$ necesitamos conocer más sobre la derivada de orden $n+1$ de f alrededor de a .

Teorema 9 *Sea I un intervalo que contiene a a , si para todo $t \in I$, $f^{(n+1)}$ satisface las desigualdades*

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M \quad (18)$$

entonces para todo $x \in I$ tenemos la estimación

$$m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq R_n(f, a)(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x > a \quad (19)$$

$$m \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} R_n(f, a)(x) \leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{si } x < a \quad (20)$$

dem: 1) Sea $x > a$, entonces la integral que define $R_n(f, a)(x)$ es en el intervalo $[a, x]$.

Luego para $t \in [a, x]$ es $(x-t)^n \geq 0$, multiplicando en (18) por $\frac{(x-t)^n}{n!}$ tenemos

$$m \frac{(x-t)^n}{n!} \leq \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \leq M \frac{(x-t)^n}{n!}$$

Integrando entre a y x se tiene

$$\frac{m}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \leq R_n(f, a)(x) \leq \frac{M}{n!} \int_a^x (x-t)^n dt \quad (21)$$

Sustituyendo $u = x - t$ tenemos

$$\int_a^x (x-t)^n dt = - \int_{x-a}^0 u^n du = \int_0^{x-a} u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \Big|_0^{x-a} = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

entonces, reemplazando en (21) se obtiene (19).

2) Si $x < a$, la integración se efectúa en $[x, a]$. Para cada $t \in [x, a]$ es $t \geq x$, luego

$$(-1)^n (x - t)^n = (t - x)^n \geq 0,$$

multiplicamos las desigualdades (18) por el factor no negativo $(-1)^n \frac{(x-t)^n}{n!}$, integramos entre x y a y procediendo como antes obtenemos (20). \square

Ejemplo 10 La fórmula de Taylor de la exponencial. Cálculo aproximado del número e .

Sean $f(x) = e^x$ y $a = 0$, en virtud de (8) y (17) tenemos la fórmula

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^\xi \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = T_n(e^x, 0)(x) + R_n(e^x, 0)(x)$$

para ξ entre 0 y x . Tomando $x = 1$ podemos calcular e por $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!} + e^\xi \frac{1}{(n+1)!}$, con $0 < \xi < 1$, y como el error E es

$$E = R_n(e^x, 0)(1) = e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) = e^\xi \frac{1}{(n+1)!}$$

Considerando $m = e^0$ y $M = e^1$, resulta acotado por

$$\frac{1}{(n+1)!} < E < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \quad (22)$$

Luego si queremos calcular e con 4 cifras decimales exactas, elegimos n tal que

$$\frac{1}{(n+1)!} < E < \frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2} 10^{-5}$$

resulta

$$3 \cdot 2 \cdot 10^5 < (n+1)!$$

hagamos una tabla

n	$(n+1)!$	n	$(n+1)!$
1	2	6	5040
2	6	7	40320
3	24	8	362 880
4	120	9	3628 800 $> 6 \times 10^5$
5	720	10	...

Luego para $n = 9$ tenemos asegurado que $E < \frac{1}{2} 10^{-5}$, es decir, 4 cifras decimales exactas, entonces calculamos e a partir del $T_9(e^x, 0)(1)$ como

$$e \simeq \sum_{k=0}^9 \frac{1}{k!} = \frac{98\,641}{36\,288} = 2.718\,281\,526$$

Podemos redondear a cinco decimales y considerar $e = 2.718\,28$.

Irracionalidad de e . Usaremos la estimación anterior del error para probar que e es irracional, ponemos

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(e^x, 0)(1) \quad (23)$$

donde

$$0 < \frac{1}{(n+1)!} < R_n(e^x, 0)(1) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Usando (23) y multiplicando por $n!$ tenemos

$$0 < \frac{1}{(n+1)} < n! e - \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} < \frac{e}{n+1} < \frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{4} \quad (24)$$

para $n \geq 3$. Si e fuera racional existirían p, q enteros coprimos tales que $e = \frac{p}{q}$. Para todo n la suma $\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} \in \mathbb{Z}$, además para n suficientemente grande $n! e = n! \frac{p}{q} \in \mathbb{Z}$, por la desigualdad (24), la resta (que es un entero) resulta menor o igual que $3/4$ con lo que llegamos a una contradicción. Por lo tanto e es irracional.

Ejemplo 11 Estimación de $\sin 1$ con error menor que 10^{-4} .

Consideramos la fórmula de Taylor de $\sin x$ alrededor de $a = 0$

$$\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(\sin x, 0)(x)$$

El resto de Lagrange viene dado por

$$|E| = |R_{2n+1}(\sin x, 0)(x)| = \left| \frac{f^{(2n+2)}(\xi) x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right| \leq \left| \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right|$$

pues $|f^{(2n+2)}(\xi)| = |(-1)^n \sin \xi| \leq 1$, luego en $x = 1$

$$|E| \leq \frac{1}{(2n+2)!} < 10^{-4} \Leftrightarrow 10000 < (2n+2)!$$

Hacemos, una tabla

$$\begin{array}{|c|c|} \hline n & (2n+2)! \\ \hline 1 & 24 \\ \hline 2 & 720 \\ \hline 3 & 40320 \\ \hline \end{array}$$

Entonces para $n = 3$ aproximamos $\sin 1 \simeq T_7(\sin x, 0)(1)$ con error $E < 10^{-4}$.

$$\sin 1 \simeq \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k (1)^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6}1^3 + \frac{1}{120}1^5 - \frac{1}{5040}1^7 = \frac{4241}{5040} = 0,8414$$

3.4. APLICACIONES.

Las aproximaciones por polinomios nos permiten calcular valores numéricos aproximados de integrales que no se pueden calcular directamente mediante funciones elementales, por ejemplo:

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \int_0^x \sin t^2 dt \quad \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

en la primera se sobreentiende que $\frac{\sin t}{t}$ se reemplaza por 1 cuando $t = 0$ y en la 3ª, k es una constante $0 < k < 1$.

Otro ejemplo, muy importante, es la integral

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

que se presenta en la teoría de probabilidades y en muchos problemas de Física. Sabemos que f así definida no es una función elemental, es decir no puede obtenerse a partir de polinomios, exponenciales, logaritmos, trigonométricas o sus inversas mediante un número finito de pasos en los que intervengan operaciones como suma, resta, multiplicación, división o composición.

Ejemplo 12 Obtener una buena estimación de $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt$.

Usaremos la fórmula de Taylor de e^x alrededor de $a = 0$ con $n = 4$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

Si $x \in [-c, 0]$ con $c > 0$, tenemos $e^{-c} \leq e^x \leq 1$, luego para usar el teorema anterior podemos considerar $m = e^{-c}$ y $M = 1$ para escribir

$$0 < e^{-c} \frac{(-x)^5}{5!} \leq (-1)^5 R_4(x) \leq \frac{(-x)^5}{5!} \quad \text{si } x < 0$$

luego $\frac{x^5}{5!} \leq R_4(x) < 0$. Reemplazamos x por $-t^2$ y

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} + R_4(-t^2)$$

en donde

$$\frac{-t^{10}}{5!} \leq R_4(-t^2) < 0$$

Si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$, tenemos

$$-0,000009 < \frac{-(\frac{1}{2})^{10}}{5!} \leq -\frac{t^{10}}{5!} \leq 0$$

Así que si integramos entre 0 y $\frac{1}{2}$, obtenemos

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{3,2^3} + \frac{1}{2!,2^5,5} - \frac{1}{3!,2^7,7} + \frac{1}{4!,2^9,9} + \int_0^{\frac{1}{2}} R_4(-t^2) dt$$

donde

$$-0,0000045 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} R_4(-t^2) dt \leq 0$$

Luego, un redondeo hasta 4 cifras decimales nos da

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \frac{1}{3} + \frac{1}{2!2^5} \frac{1}{5} - \frac{1}{3!2^7} \frac{1}{7} + \frac{1}{4!2^9} \frac{1}{9} = \frac{1785491}{3870720} = 0,4613$$

3.5. OTRAS FORMAS PARA EL RESTO.

Consideramos hipótesis más débiles sobre f , supongamos $f^{(n+1)}$ existe en (h, k) con $a \in (h, k)$ y que $f^{(n)}$ es continua en $[h, k]$. Sea $x \neq a$ en $[h, k]$, supongamos $x > a$, para x fijo definimos F en $[a, x]$ por

$$F(t) = f(t) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$$

Entonces, $F(x) = f(x)$ y $F(a) = T_n f(x, a)$, luego $F(x) - F(a) = R_n(x)$. La función F es continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x) , luego $F'(t)$ será

$$\begin{aligned} F'(t) &= f'(t) + f''(t)(x-t)^1 + f'(t)(-1) + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}(x-t)(-1) \\ &\quad + \frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 + \frac{f'''(t)}{3!}3(x-t)^2(-1) + \dots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(n-1)(x-t)^{n-2}(-1) + \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n-1}(-1) \end{aligned}$$

se cancelan todos salvo

$$F'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n$$

Sea ahora G cualquier función continua en $[a, x]$ y derivable en (a, x) , por teorema de valor medio de Cauchy tenemos para un cierto $c \in (a, b)$

$$G'(c)(F(x) - F(a)) = F'(c)(G(x) - G(a))$$

Si G' no es cero en (a, x) , se tiene

$$R_n(x) = F(x) - F(a) = \frac{F'(c)}{G'(c)} (G(x) - G(a))$$

Entonces podemos expresar el error de varias maneras según distintas elecciones de la función G . Por ejemplo, si $G(t) = (x-t)^{n+1}$ tenemos la fórmula para el resto de Lagrange

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad \text{donde } a < c < x$$

Si $G(t) = x-t$, tenemos la llamada fórmula de Cauchy del resto

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-c)^n (x-a) \quad \text{donde } a < c < x$$

Si $G(t) = (x-t)^p$, para $p \geq 1$ tenemos la fórmula

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!p} (x-c)^{n+1-p} (x-a)^p \quad \text{donde } a < c < x$$