UNR Universidad Nacional de Rosario

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

ANÁLISIS MATEMÁTICO 2

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

Unidad 7. Sucesiones Numéricas

1. Sucesiones Numéricas. Sucesiones Convergentes

Aunque en el lenguaje coloquial, las palabras sucesión y serie se utilizan como sinónimos, en Matemática, éstas tienen un significado técnico diferente, al igual que las palabras términos y elementos. Una sucesión es un conjunto infinito de objetos ordenados, a cada uno de los cuales se los denomina elementos, mientras que la palabra término viene asociada a una suma, finita o no, de elementos.

Al considerar una sucesión de elementos se conoce cuál es el lugar que ocupa cada uno mediante una regla o reglas que permiten ubicarlo. Hay un primer elemento, generalmente designado a_1, un segundo elemento a_2, un elemento k-ésimo general a_k, etc.

Definición 1. *Una sucesión numérica es una función f cuyo dominio es un conjunto infinito $A \subseteqq \mathbb{N}$, y su codominio es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, tratándose de sucesiones reales en el primer caso y complejas en el segundo.*

Observación 1.

a) *Si una sucesión $f : A \subseteqq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) es tal que para cada $k \in A$ es $f(k) = a_k \in \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), puede notarse a la sucesión por $\{f(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_k\}_k$,$\{a_k\}$.*

b) *Una sucesión tiene infinitos elementos, pero todos ellos pueden tener el mismo valor, como en la sucesión $\{1, 1, ..., 1, ...\}$. En este caso el conjunto imagen, o recorrido, es el conjunto $\{1\}$. Una sucesión $\{a_k\} = \{c, c, c, ...\} = \{c\}$, se dice "sucesión constante"si $a_k = c \ \forall k$, o "sucesión cuasi-constante"si existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = c \ \forall k \geq k_0$, por ejemplo, $\{a_k\} = \{2, 3, 1, 4, 4, 4, 4, ...\}$.*

c) *Una sucesión puede tener primer elemento a_0, a_1 o a_N (o hasta a_{-N}), para cualquier N, simplemente traslando el dominio de la misma, que se encuentra siempre en las sombras. Si en la sucesión no se aclara el conjunto de índice, se asumirá por el contexto.*

d) *La notación conjuntista $\{a_k\}$ entre llaves, es incorrecta, ya que lleva implícita una noción de independencia de orden de elementos, pero si se elimina esta idea, se acepta naturalmente.*

e) *Como funciones, dos sucesiones son iguales si tienen el mismo dominio y sus elementos coinciden ordenadamente (imagen y ley). Esto es, $\{a_k\} = \{b_k\}$ si y sólo si $a_k = b_k$ para todo $k \in A$, asumiendo que ambas tienen el mismo conjunto de índices.*

f) También, como funciones a valores reales o complejos, tiene sentido definir las operaciones algebraicas usuales entre sucesiones: suma de sucesiones, multiplicación por escalar, multiplicación y cociente de sucesiones y composiciones de sucesiones con funciones reales o complejas.

Ejemplo 1. *Los siguientes son ejemplos de sucesiones reales.*

a) $\{a_k\} = \{1,2,3,...,k,...\} = \{k\}$*, donde, para cada* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_k = k$*.*

b) $\{b_k\} = \{-2,-4,-6,...,-2k,...\}$*, tal que* $b_k = -2k$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

c) $\{c_k\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{k}, ...\} = \{\frac{1}{k}\}$*, donde, para cada* $k \in \mathbb{N}$*,* $c_k = \frac{1}{k}$*.*

d) $\{d_k\} = \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, ...\}$*, tal que* $d_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

e) La sucesión $\{e_k\}$ *definida por recurrencia por las ecuaciones* $e_0 = 3$ *y* $e_{k+1} = 2 \cdot e_k$ *para k enteros,* $k \geqq 0$*, de primeros elementos* $\{3,6,12,24,...\}$*, de la cual puede indetificarse y demostrar por inducción, la expresión para el elemento genérico,* $e_k = 3 \cdot 2^k$*, para* $k \geqq 0$*.*

f) La sucesión de Fibonacci, $\{f_k\}$*, definida por recurrencia por las ecuaciones* $f_1 = f_2 = 1$*,* $f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$*, para* $k \geqq 1$*, de primeros elementos* $\{1,1,2,3,5,8,13,21,...\}$*. Esta famosa sucesión es un caso en el que aún es posible obtener una expresión cerrada para el cálculo de sus elementos, la cual involucra al número de oro,* $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*, usando series de potencias (polinomios con infinitos términos, a estudiar en cursos superiores),*

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k = \frac{\varphi^k - (1-\varphi)^k}{\sqrt{5}} .$$

Dado que las sucesiones numéricas son funciones con recorrido en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, pueden hacerse para ellas varias definiciones de propiedades de los tipos de funciones conocidas hasta ahora.

Definición 2. *Una sucesión real* $\{a_k\}$ *se dice acotada si existen dos números reales* m, M *tales que* $m \leqq a_k \leqq M$*, y en tal caso, se dice que m y M son cota inferior y superior, respectivamente de la sucesión, elementos que se pueden utilizar para definir ínfimo y supremo de la sucesión, naturalmente.*
Si $\{a_k\}$ *es compleja, se dirá que está acotada si existe* $M > 0$ *para la cual* $|a_k| \leqq M$ *para todo k.* [1]

Ejemplo 2.

a) La sucesión $\{a_k\} = \{k\}$*, está acotada inferiormente por 1, y no está acotada superiormente.*

b) La sucesión $\{b_k\} = \{-2 \cdot k\}$*, no está acotada inferiormente, y está acotada superiormente por* -2*.*

c) La sucesión $\{c_k\} = \{\frac{1}{k}\}$*, está acotada inferiormente por 0 y superiormente por 1.*

Al momento de estudiar comportamientos límites, para las sucesiones numéricas, sólo tienen sentido analizar cuando la variable crezca o decrezca arbitrariamente, o crezca en módulo, ya que en ningún valor de la recta real, o el plano complejo, podrá aplicarse la definición de límite puntual al no haber bolas contenidas en el dominio de estas funciones.

[1] Esta definición también podría haberse dado para las sucesiones reales, pero al revés, no aquélla en términos de cotas inferior y superior, para los complejos.

Definición 3. *Una sucesión $\{a_k\}$, real o compleja, tiene límite finito ℓ cuando k tiende a infinito, si y solamente si, dado $\varepsilon > 0$, existe un natural N, tal que,*

$$k \geqq N \ \Rightarrow \ |a_k - \ell| \ < \ \varepsilon \ ,$$

en cuyo caso, se dice que la sucesión es convergente a ℓ, notación

$$\lim_{k\to\infty} a_k \ = \ \ell \ , \quad o \quad a_k \ \to \ \ell \ .$$

Una sucesión real $\{a_k\}$ se dirá divergente a más infinito (menos infinito), si para cualquier $M > 0$, existe un natural N tal que $a_k > M$ ($a_k < -M$), para todo $k \geqq N$ y una sucesión compleja $\{a_k\}$ se dirá divergente, si en las condiciones anteriores (de M, N y k) es $|a_k| > M$. En cada caso valen las notaciones dadas en definición (3) , reemplazando el número ℓ por los símbolos ∞ o $+\infty$, y $-\infty$. Finalmente, una sucesión será oscilante si no tiene límite, finito ni infinito.

Como para funciones de una variable real, una sucesión tiene límite ℓ si y sólo si para cualquier $\varepsilon > 0$, el intervalo $(\ell-\varepsilon,\ \ell+\varepsilon)$, o la bola correspondiente en el plano complejo, contiene a todos los elementos de la sucesión, con excepción de un número finito de ellos, que son, a lo más, N términos, siendo N el que corresponde a ese ε en la definición.

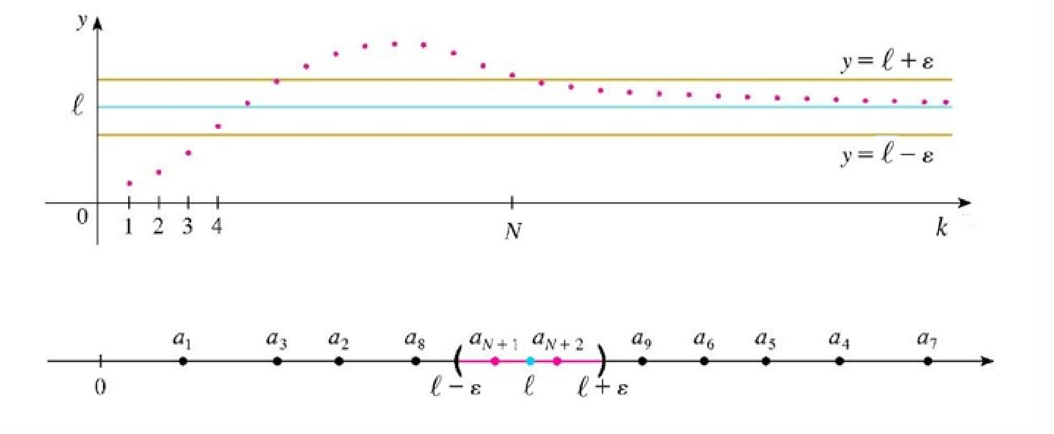

Figura 1: Representación de sucesiones convergentes

En la Figura 1 se muestran dos representaciones de sucesiones convergentes. La primera, como función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, y la segunda, representando el recorrido de la sucesión en la recta numérica.

Observación 2. *Dado $\varepsilon > 0$, si un número N_1 es útil en la condición de convergencia (o para un $M > 0$, en la de divergencia), entonces cualquier $N > N_1$ también lo es, dado que*

$$n \ \geqq \ N \ \Rightarrow \ n \ \geqq \ N_1 \ \Rightarrow \ |a_n - \ell| < \varepsilon \ .$$

Además es últil observar que $a_k \to \ell \Leftrightarrow b_k = a_{k+m} \to \ell$, para cualquier $m \in \mathbb{N}$. En efecto, si $a_k \to \ell$, para ver que $b_k \to \ell$, dado $\varepsilon > 0$, se observa que existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tal que $|a_k - \ell| < \varepsilon$, y entonces, tomando $N = N_1 - m$,

$$k \ \geqq \ N \ \Rightarrow \ k+m \ \geqq \ N_1 \ \Rightarrow \ |a_{m+k} - \ell| \ < \ \varepsilon \ \Rightarrow \ |b_k - \ell| \ < \ \varepsilon \ ,$$

y recíprocamente, si dado que $b_k \to \ell$, se quiere mostrar que $a_k \to \ell$, dado $\varepsilon > 0$, se sabe que existe N_1 tal que $|b_k - \ell| < \varepsilon$ para $k \geqq N_1$, y eligiendo $N = N_1 + m$, queda

$$k \ \geqq \ N \ \Rightarrow \ k-m \ \geqq \ N_1 \ \Rightarrow \ |b_{k-m} - \ell| \ < \ \varepsilon \ \Rightarrow \ |a_k - \ell| \ < \varepsilon \ .$$

Ejemplo 3.

a) La sucesión $\{\frac{1}{k}\}$ *es convergente a 0. Dado* $\varepsilon > 0$*, basta tomar un número natural* $N > \frac{1}{\varepsilon}$ *(Arquímedes), y*

$$k \geqq N+1 \Rightarrow k > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{k} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{1}{k} - 0 \right| < \varepsilon \,.$$

b) Además, por la Observación 2 , la sucesión $\{\frac{1}{k+1}\}$ *es convergente a 0. Lo mismo con la sucesión* $\{\frac{1}{k+m}\}$*, con* $m \in \mathbb{Z}$*. Esto, desde luego, también se pudo mostrar por definición.*

c) La sucesión $\{\frac{1}{k^2}\}$ *es convergente a 0. Basta tomar, para* $\varepsilon > 0$*,* $N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$*, y en general, si* $p \in \mathbb{N}$*, la sucesión* $\{\frac{1}{k^p}\}$ *es convergente a 0, tomando* $N > \frac{1}{\sqrt[p]{\varepsilon}}$*.*

d) Las suceciones $\{k\}$*,* $\{2k\}$*,* $\{k^2\}$*, etc., divergen a* $+\infty$*.*

e) Las sucesiones $\{(-1)^k\}$ *y* $\{(-1)^k k\}$ *son oscilantes. La primera está acotada, y la segunda no.*

El resultado a continuación proporciona una condición necesaria (pero no suficiente) de convergencia.

Proposición 1. *Una sucesión numérica convergente, está acotada.*

<u>Demostración</u>. Por hipótesis existe un valor ℓ tal que $a_k \to \ell$, lo cual implica que dado $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que si $k \geqq N$, es $|a_k - \ell| < \varepsilon$. Si en esta afirmación se escoge $\varepsilon = 1$, entonces, para $k \geqq N$,

$$|a_k| - |\ell| \leqq ||a_k| - |\ell|| \leqq |a_k - \ell| < 1 \quad \Rightarrow \quad |a_k| < 1 + |\ell| \,,$$

y tomando $M = \max\{|a_1|, \, |a_2|, \, ..., \, |a_{N-1}|, \, 1 + |\ell|\}$, queda, para $k \in \mathbb{N}$, la desigualdad $|a_k| \leqq M$, y luego la sucesión está acotada.

Q.E.D.

Es claro que toda función definida en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{R}_0^+$ puede servir para construir una sucesión restringiendo el dominio a valores naturales (discretos), y resulta útil la proposición a continuación para el cálculo de límites.

Proposición 2. *Si* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es una función real, tal que existe* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$*, entonces, la sucesión* $\{f(k)\}$ *es convergente, y vale* $\lim\limits_{k\to\infty} f(k) = \ell$*.*

Ejemplo 4. *La proposición anterior permite concluir los siguientes límites de sucesiones*

$$\lim_{k\to\infty} k \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{k}\right) = 1 \,, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{4k^2 - 2k + 1}{3k^3 + 2} = 0 \,, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{5k^2 - 2k + 1}{4k^2 - k - 1} = \frac{5}{4} \,, \quad y \quad \lim_{k\to\infty} \frac{-k^3 - k + 2}{4k^2 - 2} = -\infty \,.$$

Observación 3. *La recíproca de la afirmación hecha no vale. Dada la función de ley* $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$*, se tiene para todo* $k \in \mathbb{N}$*, que* $f(k) = 0 \to 0$*, pero no existe el límite de la función de variable continua.*

Se propone como ejercicio de práctrica, la demostración de las siguientes propiedades análogas a las correspondientes a límites de variable continua.

Proposición 3. *Las siguientes afirmaciones son válidas, para tres sucesiones numéricas reales,* $\{a_k\}$*,* $\{b_k\}$ *y* $\{c_k\}$ *(para sucesiones complejas, ver la Observación 4).*

a) El límite de una sucesión, si existe, es único.

b) *Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ convergen, entonces $\{a_k \pm b_k\}$ también es convergente y su límite es la suma (resta) de los límites. Y si $c \in \mathbb{R}$ y $a_k \to \ell$ entonces la sucesión $\{c\,a_k\}$ es convergente y su límite es $c\ell$.*

c) *Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ convergen, entonces la sucesión de productos también converge, y el límite es el producto de los límites. Si además el límite de $\{b_k\}$ es distinto de cero, entonces el límte del cociente, cuando este cociente existe, es el cociente de los límites.*

d) *Si la sucesión $\{a_k\}$ converge, entonces la sucesión $\{|a_k|\}$ converge y $\text{lím}\,|a_k| = |\text{lím}\,a_k|$. Además, vale la vuelta para sucesiones convergentes a 0, esto es $\text{lím}\,a_k = 0$ si y sólo si $\text{lím}\,|a_k| = 0$.*

e) *Si $\text{lím}\,a_k = \ell$ y h_1 es un real tal que $h_1 < \ell$, entonces existe un natural N tal que, para todo $k > N$, se tiene $h_1 < a_k$. Del mismo modo, si $h_2 > \ell$, para todo k suficientemente grande será $h_2 > a_k$.*

f) *Si $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ convergen, y para todo $k > N$ se tiene $a_k \leqq b_k$, entonces $\text{lím}\,a_k \leqq \text{lím}\,b_k$. En particular, si para todo k suficientemente grande es $a_k \leqq b$, constante, entonces, $\text{lím}\,a_k \leqq b$ y respectivamente con el signo $\geqq$.*

g) *Si $\{a_k\}$ y $\{c_k\}$ convergen al mismo límite ℓ y $a_k \leqq b_k \leqq c_k$ para todo $k > N$, entonces $\{b_k\}$ converge a ℓ.*

Observación 4. *La tesis de Proposición 3 g), sigue siendo una desigualdad amplia, aún si para todo k suficientemente grande, vale $a_k < b_k$. Se deja como ejercicio, buscar como ejemplo, dos sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, que demuestren que la afirmación "$a_k < b_k$ para todo k, implica $\text{lím}\,a_k < \text{lím}\,b_k$" no es válida en general.*

Además, dadas las propiedades para módulos de complejos, extensiones inmediatas de las de valor absoluto de número real, valen para sucesiones complejas los apartados de la proposición anterior que no requieren de la estructura de orden del conjunto de llegada: enunciados a), b), c) y d) allí presentados.

Observación 5. *Para $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, queda $|z| \in \mathbb{R}^+$, y usando la Proposición 2,*

$$\lim_{k\to\infty} |z|^k \;=\; \lim_{k\to\infty} \exp(\ln|z|\cdot k) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |z| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad |z| = 1 \\ \infty & \text{si} \quad |z| > 1 \end{cases} .$$

Queda entonces (analizando el caso trivial para $z = 0$ por separado), por la Proposición 3 d) que para $|z| < 1$ la sucesión compleja $\{z^k\}$ es convergente, al valor 0. Por otro lado, por definición, la sucesión compleja es divergente para $|z| > 1$, y a priori no se puede concluir (salvo estar contenida en la circunferencia unidad) para $|z| = 1$, por ejemplo, donde por ejemplo, son $\{1^k\}$ convergente a 1 y $\{(-1)^k\}$ oscilante.

Por último, se enuncia una proposición que vincula la convergencia de una sucesión de elementos complejos, con las sucesiones reales de las correspondientes partes real e imaginaria de cada uno de ellos.

Proposición 4. *Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ es una sucesión a valores complejos, tal que $f(k) = u(k) + \mathrm{i}v(k)$, entonces,*

$$f(k) \;\to\; \alpha + \mathrm{i}\beta \quad \Leftrightarrow \quad \big(\, u(k) \;\to\; \alpha \quad \text{y} \quad v(k) \;\to\; \beta \,\big) .$$

<u>**Demostración**</u>. En primer lugar, recordando que $|\mathrm{Re}(z)| \leqq |z|$ e $|\mathrm{Im}(z)| \leqq |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$, si se supone que $f(k) \to \alpha + \mathrm{i}\beta$. se tiene, dado $\varepsilon > 0$, la existencia de N de modo que para $k \geqq N$,

$$|u(k) - \alpha| \;\leqq\; |f(k) - (\alpha + \mathrm{i}\beta)| \;<\; \varepsilon \qquad \text{y} \qquad |v(k) - \beta| \;\leqq\; |f(k) - (\alpha + \mathrm{i}\beta)| \;<\; \varepsilon \;,$$

concluyendo la convergencia de las sucesiones de parte real e imaginaria, $u(k) \to \alpha$ y $v(k) \to \beta$.
Por otro lado, si $u(k) \to \alpha$ y $v(k) \to \beta$, entonces, dado ε, existe N tal que, para $k \geqq N$, se tiene $|u(k) - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ y también $|v(k) - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$, y luego para $k \geqq N$,

$$|f(k) - (\alpha + \mathrm{i}\beta)| \;\leqq\; |u(k) - \alpha| \;+\; |v(k) - \beta| \;<\; \varepsilon \;,$$

implicando la convergencia de la sucesión de valores complejos $f(k) \to \alpha + \mathrm{i}\beta$. *Q.E.D.*

2. Sucesiones Monótonas y Subsucesiones

En lo siguiente, como es usual al trabajar con sucesiones numéricas, la monotonía será considerada en sentido amplio, y no estricto, aún cuando esto no sea aclarado.

Definición 4. *Una sucesión numérica de valores reales se dice creciente, si para todo $k \in \mathbb{N}$, vale $a_k \leqq a_{k+1}$. Por su parte una sucesión es decreciente si $a_k \geqq a_{k+1}$. Una sucesión resulta monótona, si es creciente o decreciente.*

La proposición a continuación forma parte de una familia de resultados llamados "de convergencia monótona", de gran importancia en el estudio del Análisis Matemático.

Proposición 5. *Si una sucesión creciente está acotada superiormente, entonces es convergente, hacia el supremo de la sucesión. Por su parte, una sucesión decreciente acotada inferiormente es convergente hacia su ínfimo.*

Demostración. Como la sucesión, notada por $\{a_k\}$, está acotada, el conjunto $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$, recorrido de la sucesión, es un subconjunto no vacío y acotado superiormente de $\mathbb{R}$, y por el Axioma del Supremo, existe ℓ, supremo de este conjunto. Se mostrará que $a_k \to \ell$. Para ello, si $\varepsilon > 0$, como $\ell = \sup\{a_k\}$ es, por un lado, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k \leqq \ell < \ell + \varepsilon ,$$

y por el otro, caracterización del valor ℓ como supremo del recorrido de la sucesión, existe un a_N que verifica $\ell - \varepsilon < a_N \leqq \ell$. Ahora, como la sucesión es creciente, para todo $k \geqq N$ se tiene que $a_N \leqq a_k$ y luego

$$\ell - \varepsilon < a_k \leqq \ell \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_k < \ell + \varepsilon \Rightarrow |a_k - \ell| < \varepsilon .$$

Si $\{a_k\}$ es decreciente y acotada inferiormente, entonces $\{-a_k\}$ es creciente y acotada superiormente, y por lo tanto convergente, lo que implica que sea también en este caso $\{a_k\}$ convergente.

Q.E.D.

Ejemplo 5. *Se mostrará que la sucesión $\{a_k\}$ definida de manera recursiva por $a_{k+1} = 2 - \frac{1}{a_k}$ para $k \geqq 1$, con $a_1 = 2$, es convergente y se encontrará su límite.*

En primer lugar, se afirma que la sucesión es acotada, valiendo para todo k, las cotas $1 \leqq a_k \leqq 2$. Esto puede verificarse por inducción. La propuesta vale para $k = 1$, y si se supone que para un k es $1 \leqq a_k \leqq 2$, entonces $\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{a_k} \leqq 1$, y en consecuencia $1 \leqq 2 - \frac{1}{a_k} \leqq \frac{3}{2}$, que implica $1 \leqq a_{k+1} \leqq 2$.

Por otro lado, la sucesión también es decreciente, a partir de la desigualdad

$$a_{k+1} - a_k = \left(2 - \frac{1}{a_k}\right) - a_k = \frac{2a_k - 1 - a_k^2}{a_k} = -\frac{(a_k - 1)^2}{a_k} < 0 .$$

Una vez mostrada la convergencia, se observa que, como se vio en la Observación 2, $a_k \to \ell$ y $a_{k+1} \to \ell$, y de allí, el límite satisface la ecuación $\ell = 2 - \frac{1}{\ell}$, resuelta para $\ell = 1$. Observar que este último paso para calcular el límite, sólo fue lícito luego de confirmar que la sucesión contaba con límite.

Ejemplo 6. *Se mostrará que la sucesión $\{a_k\}$ es convergente, donde para todo $k \geqq 1$*

$$a_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} .$$

Esta sucesión está acotada superiormente,

$$a_k \leqq \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1} \leqq 1 .$$

y también es creciente, ya que para todo k,

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= \left(\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ ... \ + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} \right) - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ ... \ + \frac{1}{2k} \right) \\ &= \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} \ = \ \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \ > \ 0 \ . \end{aligned}$$

Observación 6. *Se ha visto que las sucesiones convergentes son acotadas.*
Sin embargo, la recíproca no es una proposición cierta en general, como puede observarse tomando como ejemplo a la sucesión $\{a_k\} = \{(-1)^k + \frac{1}{k}\}$. *De todas formas, surge la idea intuitiva que si se "encerraran" muchos elementos en un espacio acotado, algunos de ellos deberían juntarse alrededor de algún punto. Esta idea se trabajará utilizando la noción de subsucesión. Una subsucesión será una sucesión que puede obtenerse de una original, eliminando algunos elementos sin cambiar el orden de los elementos restantes.*

Definición 5. *Dada una sucesión* $\{a_k\}$*, se llama subsucesión de la misma a toda sucesión de la forma*

$$\{a_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} = \{a_{k_1},\ a_{k_2},\ ...,\ a_{k_j},\ ...\}$$

formada por elementos de la sucesión original, y tal que se conserva el orden relativo de los índices, es decir,

$$k_1 \ < \ k_2 \ < \ ... \ < \ k_j \ < \ k_{j+1} \ < \ ...$$

Formalmente, dada una sucesión $\{a_k\}$, la sucesión $\{a_{k_j}\}$ es una subsucesión de ella, si existe una aplicación estrictamente creciente $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de modo que $\pi(j) = k_j$. Se puede probar por indución sobre j, que para todo $j \in \mathbb{N}$ es $j \leqq k_j$.

Ejemplo 7. *La sucesión* $\{2,4,6,...\}$ *es una subsucesión de la sucesión* $\{a_k\} = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$*, pero la sucesión* $\{1,1,1,...\}$ *no lo es, a pesar de que 1 sea un elemento de la sucesión original, ya que allí sólo aparece una vez. Esta última si es una subsucesión de* $\{1,-1,1,-1,1,-1,...\}$.
Tampoco es subsucesión de $\{a_k\}$ *la sucesión* $\{2,1,4,5,6,...\}$ *aunque no se repitan los elementos, porque no se respeta el orden en que aparecieron los elementos en* $\{a_k\}$.

Proposición 6. *Una sucesión es convergente a un valor* ℓ*, si y sólo si, todas sus subsuseciones convergen a* ℓ.

Demostración. Si todas las subsucesiones convergen a ℓ, entonces la sucesión original converge a ℓ, ya que ella es una subsucesión de sí misma. Si se desea utilizar una subsucesión estricta, se puede retirar, por ejemplo, el primer elemento, y la demostración es igual de inmediata.
Recíprocamente, dadas una sucesión $\{a_k\}$ convergente a ℓ y una subsucesión $\{a_{k_j}\}$, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para $k \geqq N$, vale $|a_k - \ell| < \varepsilon$. Ahora, por la definición de subsucesión, se tiene que para todo $j \in \mathbb{N}$ debe ser $j \leqq k_j$. Entonces, si $j \geqq N$ implica que $k_j \geqq N$, y luego $|a_{k_j} - \ell| < \varepsilon$, y la subsucesión $\{a_{k_j}\}$ converge a ℓ.

Q.E.D.

Observación 7. *Si se quiere demostrar que una sucesión converge a* ℓ*, por subsucesiones, no alcanza con probar que la sucesión contenga una subsucesión convergente a* ℓ*, sino que se debe probar que toda subsucesión lo hace. Además por lo anterior, una sucesión no converge a* ℓ *si y sólo si contiene una subsucesión que no converge a* ℓ*. Luego, se puede afirmar que una sucesión dada no converge, si se encuentra una subsucesión no convergente, o si se encuentran dos subsucesiones convergentes a distintos límites.*

Ejemplo 8. *La sucesión $\{a_k\}$ definida por $a_k = (-1)^k$ no converge, pues tiene dos subsucesiones convergentes a diferentes límites, la subsucesión $\{a_{2k}\} = \{1, 1, ...\}$ y la subsucesión $\{a_{2k-1}\} = \{-1, -1, ...\}$*

A la Proposición 8 apenas más adelante se la conoce como el Teorema de Bolzano Weierstrass, o el Teorema de Bolzano Weierstrass para Sucesiones Reales. Fue probado por primera vez por B. Bolzano como un lema previo a la demostración de su Teorema de los Valores Intermadios para Funciones Continuas, y tiempo después fue rescatado por su relevancia en el área del Análisis Real y probado por K. Wierstrass para conjuntos más generales que sucesiones. Para la demostración que se elige presentar, se separa el siguiente resultado, a primera vista a veces poco intuitivo.

Proposición 7. *Toda sucesión real tiene una subsucesión monótona.*

Demostración. En esta prueba se dirá que un elemento a_m es un "pico" de una sucesión $\{a_k\}$, si para todo $k > m$ se tiene $a_m \geqq a_k$. En palabras, un elemento es un pico si es mayor o igual que todos los elementos que le siguen. Es claro que la sucesión tiene una cantidad infinita, o una cantidad finita de picos (posiblemente ninguno).

En el primer caso, si la sucesión tiene infinitos picos, tomando a m_1 como el menor natural tal que a_{m_1} es un pico, puede elegirse luego un índice $m_2 > m_1$, tal que de nuevo a_{m_2} es un pico. Como a_{m_1} es un pico, $m_1 < m_2$ y $a_{m_1} \geqq a_{m_2}$. Continuando de manera inductiva (nunca pueden agotarse los picos para elegir), se obtiene una sucesión $a_{m_1} \geqq a_{m_2} \geqq a_{m_3} \geqq ...$ de elementos de $\{a_k\}$, esto es, una subsucesión de $\{a_k\}$ decreciente.

En el otro caso, si sólo hay una cantidad finita de picos, se los puede identificar y ordenarlos como a_{m_1}, a_{m_2}, ..., a_{m_r}. Eligiendo $k_1 = m_r + 1$, como a_{k_1} no es un pico, existe un $k_2 > k_1$ tal que $a_{k_2} \geqq a_{k_1}$. Y ahora, como a_{k_2} no es un pico, existe $k_3 > k_2$ tal que $a_{k_3} \geqq a_{k_2}$. Aquí, continando las elecciones de la manera mostrada, se obtiene una subsucesión $\{a_{k_j}\}$ creciente. Observar que si $\{a_k\}$ no tiene ningún pico, comenzando la inducción con a_1 tenemos el mismo resultado.

Q.E.D.

Proposición 8. *Toda sucesión acotada de números reales tiene una subsucesión monótona convergente.*

Demostración. Se sabe por la Proposición 7 que una sucesión real tiene una subsucesión monótona. Como la sucesión original está acotada, esta subsucesión también lo está, resultando ser entonces una sucesión monótona y acotada, que debe ser convergente, por la Proposición 5 .

Q.E.D.

3. Sucesiones de Cauchy

En general, si bien existen condiciones suficientes de existencia de límite, mostrar la convergencia de una sucesión (al igual que sucede para asegurar la existencia de límite de funciones en un punto) requiere proponer de antemano cuál es el límite supuesto y luego demostrar que efectivamente éste lo es. Esta situación presenta dificultades, pues exige, en cierta forma, conocer por anticipado el número que se desea hallar.

En esta parte se presenta una condición necesaria y suficiente para determinar la convergencia de una sucesión a valores reales o complejos, que esté vinculada solamente a sus elementos, y no referida al valor límite, conocida como Condición o Criterio de Cauchy. A las sucesiones que verifican la Condición de Cauchy se las denominan Sucesiones Convergentes según Cauchy, o de manera más habitual, Sucesiones de Cauchy.

Definición 6. *Una sucesión $\{a_k\}$ de valores reales o complejos se denomina de Cauchy, si y solamente si, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un natural N tal que,*

$$k, m \geqq N \;\Rightarrow\; |a_k - a_m| < \varepsilon \,. \qquad \text{(CC)}$$

No deben confundirse a las sucesiones de Cauchy con aquéllas en las que la distancia entre dos elementos consecutivos tiende a cero, ya que la proximidad debe valer para todos los elementos de índices grandes.

Ejemplo 9.

1. *La sucesión* $\{\frac{1}{k}\}$ *es de Cauchy. Para* $\varepsilon > 0$*, existe* $N \in \mathbb{N}$*, tal que* $N > 2/\varepsilon$*, resulta, para* $k, m > N$*,*

$$\left|\frac{1}{k} - \frac{1}{m}\right| \leqq \frac{1}{k} + \frac{1}{m} < \frac{2}{N} < \varepsilon \ .$$

2. *La sucesión* $\{k\}$ *no es de Cauchy. Para cualesquiera* k, m*, con* $k \neq m$*, se tiene* $|a_k - a_m| = |k - m| \geqq 1$*.*

3. *La sucesión* $\{(-1)^k\}$ *no es de Cauchy. Para* $\varepsilon = 1$ *y todo* $N \in \mathbb{N}$*, se tiene* $|a_k - a_{k+1}| = 2 > 1$*, si* $k \geqq N$*.*

Proposición 9. *En* $\mathbb{R}$*, o* $\mathbb{C}$*, una sucesión es convergente, si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*

Se demostrará este resultado apelando a dos lemas previos, que se separan por su útilidad en sí mismos.

Lema 1. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Demostración. Si $\{a_k\}$ es una sucesión de Cauchy, entonces, para $\varepsilon = 1$, existe N tal que $k, m \geqq N$ implican

$$|a_k| - |a_m| \leqq ||a_k| - |a_m|| \leqq |a_k - a_m| < 1 \Rightarrow |a_k| < 1 + |a_m| \ .$$

Haciendo $m = N$ y $M = \max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_{N-1}|,\ 1 + |a_N|\}$, se tiene $|a_k| \leqq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. *Q.E.D.*

Lema 2. *Si una sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente a un valor* ℓ*, entonces la sucesión completa converge a* ℓ*.*

Demostración. Si $\{a_{k_j}\}$ es una subsucesión de $\{a_k\}$ tal que existe $\lim a_{k_j} = \ell$, dado $\varepsilon > 0$, existe N_1 tal que, para $k_j \geqq N_1$, vale $|a_{k_j} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. También se sabe que $\{a_k\}$ es de Cauchy, y luego existe N_2 tal que, si $k, m > N_2$, resulta $|a_k - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tomando $N > \max\{N_1, N_2\}$, para todo $k \geqq N$,

$$|a_k - \ell| = |a_k - a_{k_j} + a_{k_j} - \ell| \leqq |a_k - a_{k_j}| + |a_{k_j} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow a_k \to \ell \ .$$

Q.E.D.

La prueba que se elige dar de la Condición de Cauchy se basa en la propiedad de Bolzano Weierstrass, que hasta ahora sólo fue demostrada para sucesiones reales. La demostración del caso complejo será textualmente similar cuando se demuestre la propiedad mencionada en espacios de mayor dimensión en la Sección 5.

Demostración de la Proposición 9. Si $\{a_k\}$ es de Cauchy, entonces por el Lema 1 está acotada, y luego por la propiedad de Bolzano Weierstrass, Proposición 8, tiene una subsucesión convergente. Entonces, $\{a_k\}$ es de Cauchy, y tiene una subsucesión convergente, y luego, por el Lema 2, es convergente.

Q.E.D.

En algunos conjuntos, como $\mathbb{Q}$, no toda sucesión de Cauchy es convergente. Por ejemplo, $\{a_k\} = \{(1 + 1/k)^k\}$ es de Cauchy pero tiene límite, e, no es racional. Éste es un límite recurrente en el Análisis en particular y en la Matemática en general y puede probarse usando la Proposición 2, o de manera alternativa, desconociendo todo lo hecho en la Unidad 2, mostrarse su existencia usando la Proposición 5, y definirse a éste como el número e, como será hecho en la parte anexa.

4. Complemento de Demostraciones Pendientes

Se trabajará a continuación sobre resultados referidos a funciones continuas en conjuntos cerrados y acotados de la recta real[2], postergados a lo largo de este curso de Análisis y del anterior, partiendo de un resultado sencillo con dos partes no relacionadas, que se juntan en el siguiente lema dado que serán de uso frecuente en los argumentos.

Lema 3.

1. *Si $A \subseteqq \mathbb{R}^n$ es conjunto cerrado y $\{a_k\} \subseteqq A$ es una sucesión convergente al valor ℓ, resulta que $\ell \in A$.*
2. *Dadas una función $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y una sucesión $\{a_k\} \subseteqq A$ convergente al valor ℓ, entonces, si f es continua en ℓ, es convergente la sucesión $\{f(a_k)\}$, siendo $f(a_k) \to f(\ell)$.*

Demostración. Si se supone que la tesis de la primera parte no es cierta, será $\ell \notin A$, y siendo A^c un conjunto abierto (ya que A es un conjunto cerrado), existirá una bola $B(\ell, r)$ enteramente contenida en A^c, lo cual no puede suceder, ya que siendo $a_k \to \ell$, debe existir al menos un $a_{k^*} \in A$, para el cual $|a_{k^*} - \ell| < \frac{r}{2}$.

Respecto de la segunda parte, dado $\varepsilon > 0$, como f es continua en ℓ, existe $\delta > 0$ tal que $|x - \ell| < \delta$ implica $|f(x) - f(\ell)| < \varepsilon$, y por otro lado, dado ese número δ, como $a_k \to \ell$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que $k > N$ implica $|a_k - \ell| < \delta$, y en consecuencia $|f(a_k) - f(\ell)| < \varepsilon$, asegurando la convergencia propuesta.

Q.E.D.

En la Unidad 1 se definió el concepto de continuidad uniforme de una función real, y se enunció el Teorema de Heine Borel necesario utilizado en la demostración de la integrabilidad de las funciones continuas en intervalos cerrados y acotados, recordados y demostrados a continuación.

Definición 7. *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua en A, si dado $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$, de modo que, para cualesquiera $x, y \in A$,*

$$|x - y| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \, .$$

Proposición 10. *Si A es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en A, esto es, continua en cada $a \in A$, entonces es uniformemente continua en A.*

Demostración. Si se supone que la función f no es uniformemente continua en A, entonces, negando la proposición de la Definición 7 , se afirma que

$$\text{existe } \varepsilon > 0, \text{ tal que, para todo } \delta > 0, \text{ existen } x, y \in A, \text{ con } |x - y| < \delta \text{ y } |f(x) - f(y)| \geqq \varepsilon \, .$$

Entonces, para ese $\varepsilon > 0$, y para cada valor $\delta = \frac{1}{k}$, es posible hallar dos números x_k e y_k en A, tales que sean $|x_k - y_k| < \frac{1}{k}$ y además $|f(x_k) - f(y_k)| \geqq \varepsilon$.

Como A es acotado la sucesión $\{x_k\}$ está acotada, y por lo tanto tiene una subsucesión $\{x_{k_j}\}$ que converge a un punto ξ, y como A es cerrado, por el Lema 3 *a*), $\xi \in A$. Además también la sucesión $\{y_{k_j}\}$ resulta convergente al valor ξ, a partir del cálculo $y_{k_j} = x_{k_j} + (y_{k_j} - x_{k_j}) \to \xi + 0 = \xi$.

Ahora bien, como $\{x_{k_j}\}$ e $\{y_{k_j}\}$ convergen a ξ, y f es continua en ξ, por el Lema 3 *b*), deben ser las sucesiones $\{f(x_{k_j})\}$ y $\{f(y_{k_j})\}$ convergentes a $f(\xi)$, con lo cual, para $j \to \infty$, debe valer

$$|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \leqq |f(x_{k_j}) - f(\xi)| + |f(\xi) - f(y_{k_j})| \to 0 + 0 = 0 \, ,$$

[2] Los enunciados y demostraciones en espacios de dimensión superior se encuentran en la Sección 5

lo que contradice que $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \geqq \varepsilon$, y asegura que f debe ser uniformemente continua en A. *Q.E.D.*

Si bien al resultado que enuncia que toda función continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado alcanza máximo y mínimo se lo conoce como Teorema de Weierstrass, en la bilbliografía también se lo puede encontrar separado en dos partes. Para llegar a éste, se comienza recordando las defininiciones necesarias.

Definición 8. *Dada una función $f : A \to \mathbb{R}$, se dice que el valor M es el valor máximo de f en el conjunto A, si existe un número $x_0 \in A$, para el cual, $M = f(x_0) \geqq f(x)$, para todo $x \in A$, y en ese caso, que en x_0 se alcanza el máximo. Por otro lado, m es el mínimo de la función f en el conjunto A, si existe $x_0 \in A$, donde vale $f(x) \geqq f(x_0) = m$ para todo $x \in A$, y en esta situación, que en x_0 se alcanza el mínimo.*
A estas cantidades se las suele notar, respectivamente, por

$$\max_{x\in A} f(x) \quad y \quad \min_{x\in A} f(x) \,.$$

Observación 8. *En las aplicaciones, muchas veces resulta útil vincular a los valores extremos de un campo f, con el de su opuesto $-f$, a través de las igualdades*

$$\max_{x\in A} f(x) = -\min_{x\in A} (-f)(x) \quad y \quad \min_{x\in A} f(x) = -\max_{x\in A} (-f)(x) \,.$$

En efecto, por ejemplo para mostrar la primera, se observa que

$$f(x_0) = \max_{x\in A} f(x) \;\Rightarrow\; f(x) \leqq f(x_0) \;\; para\ todo\ x \in A \;\Rightarrow\; (-f)(x_0) = -f(x_0) \leqq -f(x) = (-f)(x)$$

$$\Rightarrow\; -f(x_0) = \min_{x\in A}(-f)(x) \;\Rightarrow\; f(x_0) = -\min_{x\in A}(-f)(x) \,.$$

y se deja como ejercicio modificar lo anterior para mostrar la segunda igualdad, o hacerlo aplicando la hecha, a la función $-(-f) = f$.

Proposición 11. *Si f es una función continua definida en un conjunto A, cerrado y acotado, entonces*

a) f está acotada en A (Primer Teorema de Weierstrass), y

b) f alcanza sus valores mínimo y máximo en A (Segundo Teorema de Weierstrass).

<u>Demostración</u>. Para la parte *a*), si f no fuera acotada, existiría una sucesión $\{a_k\}$ contenida en A para la cual, por ejemplo, sería $f(a_k) \geqq k$, y dado que $\{a_k\}$ es una sucesión acotada al ser A un conjunto acotado, por la Propiedad de Bolzano Weierstrass, ésta contendría una subsucesión $\{a_{k_j}\}$ convergente a un valor ξ, resultando, por el Lema 3 *a*) (recordar que A es además un conjunto cerrado), $\xi \in A$. Finalmente, usando el Lema 3 *b*) en (1), dada la continuidad de la función f en ξ, se llega a una contradicción, al ser $f(\xi)$ un número real, finito,

$$f(\xi) = f\left(\lim_{j\to\infty} a_{k_j}\right) \overset{(1)}{=} \lim_{j\to\infty} f(a_{k_j}) = +\infty \,,$$

de lo cual se concluye que necesariamente, f es una función acotada en A.

Respecto de la parte *b*), sabiendo que f es una función acotada, y por lo tanto acotada superiormente, notando con M al supremo del conjunto $\mathrm{Rec}(f)$, se asegura la existencia de una sucesión $\{a_k\}$, contenida en A, que se puede tomar de elementos diferentes entre sí, tal que $\{f(a_k)\}$ resulta convergente al valor M.

Ahora bien, la sucesión $\{a_k\}$ puede no ser convergente a ningún valor, pero al estar contenida en un conjunto acotado, por los mismos argumentos del resultado anterior, admite la existencia de una subsucesión $\{a_{k_j}\}$

convergente a un valor $\xi \in A$, por el Lema 3 *a*) al ser éste último un conjunto cerrado. Finalmente, dada la continuidad de f, usando de nuevo el Lema 3 *b*) en (2), y la construcción de la sucesión $\{a_{k_j}\}$ en (3) se tiene

$$f(\xi) \;=\; f\left(\lim_{j\to\infty} a_{k_j}\right) \;\overset{(2)}{=}\; \lim_{j\to\infty} f(a_{k_j}) \;\overset{(3)}{=}\; M\;,$$

alcanzando f su valor máximo (al menos) en el punto ξ. La prueba para el mínimo puede concluirse de la Observación 8 , considerando a la función $-f$.

Q.E.D.

El Teorema de Bolzando sobre existencia de raices de funciones continuas, mostrada a través de la definición de supremo de conjuntos, puede mostrarse también generando sucesiones a través de un método dicotómico, útil para realizar aproximaciones de esos valores.

Proposición 12. *Si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, y vale $f(a)\cdot f(b)<0$ ($f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo), entonces, existe un punto $\xi\in(a,b)$, donde $f(\xi)=0$.*

Demostración. Si, por ejemplo, fuera $f(a)<0$ y $f(b)>0$, puede considerarse el punto medio entre a y b, $c_1=\frac{a+b}{2}$. Si $f(c_1)=0$, entonces el valor $\xi=c_1$ verifica la tesis. Si no, necesariamente debe ser $f(a)f(c_1)<0$ o $f(b)f(c_1)<0$. Entonces, se elige uno de los dos intervalos $[a,c_1]$ o $[c_1,b]$, donde la función tiene distinto signo en los extremos y se puede renombrar $[a_1,b_1]$ a ese intervalo. Notando que no importa cómo se hizo esta elección, $f(a_1)<0$ y $f(b_1)>0$. Además $a\le a_1<b_1\le b$ y $b_1-a_1=\frac{b-a}{2}$.

Una vez obtenido el intervalo $[a_1,b_1]$, se busca nuevamente el punto medio de sus extremos, $c_2=\frac{a_1+b_1}{2}$, y, nuevamente, si $f(c_2)=0$, con $\xi=c_2$ vale el resultado, y si no, es posible considerar uno de los subintervalos $[a_1,c_2]$ o $[c_2,b_1]$ donde en los extremos la función tiene distinto signo. Llamando a ese intervalo $[a_2,b_2]$, donde $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$. Donde $a\le a_1\le a_2<b_2\le b_1\le b$ y $b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2}$. Puede continuarse este proceso, de modo que, si para algún k es $f(c_{k+1})=0$, se concluye la existencia de una raíz de f.

Si ello no pasa, se obtienen dos sucesiones infinitas, $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$, en el conjunto $[a,b]$, tales que,

$$f(a_k)<0\;, \qquad f(b_k)>0\;, \qquad \{a_k\}\ \text{ es creciente} \qquad \text{y} \qquad b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}$$

Como la sucesión $\{a_k\}$ es creciente, y está acotada, por el número b, por la Proposición 5 , existe un número ξ tal que $a_k\to\xi$, que pertenece al intervalo $[a,b]$ por el Lema 3 *a*) y también, $b_k-a_k=\frac{b-a}{2^k}\to 0$ con lo que $b_k=a_k+(b_k-a_k)\to\xi$. Por último, como la función es continua en el punto ξ, por el Lema 3 *b*), en (1) y (3) y la Proposición 3 *g*) , en (2) y (4),

$$f(\xi) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} a_k\right) \;\overset{(1)}{=}\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(a_k)}_{<\,0} \;\overset{(2)}{\leqq}\; 0 \qquad \text{y} \qquad f(\xi) \;=\; f\left(\lim_{k\to\infty} b_k\right) \;\overset{(3)}{=}\; \lim_{k\to\infty} \underbrace{f(b_k)}_{>\,0} \;\overset{(4)}{\geqq}\; 0\;,$$

de lo que se concluye que ξ es una raíz de f. *Q.E.D.*

5. Sucesiones y Resultados en Dimensiones Superiores

Como se mencionó, en esta parte se trabajará con sucesiones en dimensiones superiores, definiendo de manera similar a lo hecho en la primera parte de la Unidad 6, la norma euclídea usual en los conjuntos $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, para vectores (n-uplas) cualesquiera $\mathbf{x}=(x^{(1)},x^{(2)},\dots,x^{(n)})$ e $\mathbf{y}=(y^{(1)},y^{(2)},\dots,y^{(n)})$, por la identidad

$$||\mathbf{x}-\mathbf{y}|| \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\,|x^{(i)}-y^{(i)}|^2}\;.$$

La distancia que induce esta norma en el conjunto permite definir a las sucesiones convergentes en él, como las de la forma $\{\mathbf{a}_k\}$, cuyos elementos son vectores $\mathbf{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, ..., a_k^{(n)})$, y para las cuales existe $\boldsymbol{\ell} = (\ell^{(1)}, \ell^{(2)}, ..., \ell^{(n)})$, de manera que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$k \geqq N \quad \Rightarrow \quad ||\mathbf{a}_k - \boldsymbol{\ell}|| \; < \; \varepsilon \; .$$

Observar, que si tal vector $\boldsymbol{\ell}$ existe, entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$k \geqq N \quad \Rightarrow \quad |a_k^{(i)} - \ell^{(i)}| \; \leqq \; ||\mathbf{a}_k - \boldsymbol{\ell}|| \; < \; \varepsilon \; , \; \text{ para cualquier } \; i = 1, 2, ..., n \; ,$$

y la convergencia de la sucesión de vectores al límite $\boldsymbol{\ell}$, implica la convergencia de cada sucesión de componentes, a la correspondiente componente $\ell^{(i)}$ del límite. Recíprocamente, si para cada $i = 1, 2, ..., n$, la sucesión formada por las componentes i-ésimas, $\{a_k^{(i)}\}$ resulta convergente a un valor $\ell^{(i)}$, entonces, dada la cantidad positiva $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, existirá $N_i \in \mathbb{N}$, tal que $|a_k^{(i)} - \ell^{(i)}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, para $k \geqq N_i$, y eligiendo $N > \text{máx}\{N_1, N_2, ..., N_n\}$ valdrá

$$k \geqq N \quad \Rightarrow \quad ||\mathbf{a}_k - \boldsymbol{\ell}|| \; = \; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_k^{(i)} - \ell^{(i)}|^2} \; < \; \sqrt{n \cdot \frac{\varepsilon^2}{n}} \; = \; \varepsilon \; ,$$

y la sucesión $\{\mathbf{a}_k\}$ resultará convergente al vector $\boldsymbol{\ell}$ formado con los límites de las sucesiones componentes.
De modo similar, una sucesión $\{\mathbf{a}_k\}$ es de Cauchy, si sólo si, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$k, m \geqq N \quad \Rightarrow \quad ||\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m|| \; < \; \varepsilon \qquad\qquad \text{(CC)}$$

Queda como ejercicio la demostración del Criterio de Cauchy para Convergencia de Sucesiones de Vectores, junto con la de las Proposiciones 15 y 16 más adelante.

Proposición 13. *Una sucesión de vectores $\{\mathbf{a}_\mathrm{k}\}$ resulta convergente a un vector $\boldsymbol{\ell}$, si y sólo si, cada una de sus sucesiones de componentes resulta convergente a la correspondiente componente de $\boldsymbol{\ell}$. Más aún, una sucesión de vectores es de Cauchy, si y sólo si cada sucesión de componentes lo es. En consecuencia, será una sucesión de vectores (en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$) convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Proposición 14. *Toda sucesión acotada de vectores en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$, admite una subsucesión convergente.*

<u>Demostración</u>. Si $\{\mathbf{a}_k\}$ es una sucesión acotada, entonces existe una constante $M > 0$, tal que, $||\mathbf{a}_k|| < M$ para todo k, y luego, para las n sucesiones componentes, $|a_k^{(i)}| \leqq ||\mathbf{a}_k|| < M$.
Se mostrará el resultado, utilizando un "argumento diagonal". Para ello, se comienza observando que por lo anterior, la sucesión $\{a_k^{(1)}|$ está acotada, y por la Proposición 8 , ella admite una subsucesión convergente, $\{a_{k_j}^{(1)}\}$. Luego, la sucesión de vectores $\{\mathbf{a}_{k_j}\}$ es una subsucesión de la original, para la cual converge la sucesión de primeras componentes. Prestando atención ahora a la sucesión de segunda componentes de esta última, esto es, a la sucesión $\{a_{k_j}^{(2)}\}$, se observa que ésta también es una sucesión acotada por el valor M, y de nuevo, la misma admite, por la Proposición 8 , una subsucesión convergente, $\{a_{k_{j_m}}^{(2)}\}$, de manera que la sucesión vectorial $\{\mathbf{a}_{k_{j_m}}\}$ es una subsucesión de $\{\mathbf{a}_k\}$, que resulta convergente en la primera componente por ser subsucesión de la anterior que lo hacía, y en la segunda por la última elección realizada. Repitiendo este procedimiento n veces en total, se obtiene una subsucesión, de la original, que converge en cada una de las n componentes, y luego, por la Proposición 13 , convergente como sucesión vectorial.

Q.E.D.

Proposición 15. *Si A es un subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$ o de $\mathbb{C}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua en el conjunto A, entonces valen las afirmaciones,* *a)* *f es uniformemente continua en A (Teorema de Heine Borel), y*

b) *f está acotada en A, y allí alcanza sus valores mínimo y máximo (Teoremas de Weiertrass).*

Finalmente, para arribar al resultado referido a raíces de campos $f : A \subseteqq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuos, debe requerirse al conjunto A, ser conexo, propiedad que se verifica si para dos puntos cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, existe una curva (función vectorial $\mathbf{r} : [a,b] \to A$ continua) que los una, esto es, tal que $\mathbf{r}(a) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{r}(b) = \mathbf{y}$.

Proposición 16. *Si $A \subseteqq \mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo y f es un campo escalar continuo en A, tal que existen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$, para los cuales es $f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{y}) < 0$, entonces existe $\boldsymbol{\xi} \in A$, para el cual $f(\boldsymbol{\xi}) = 0$.*

6. Ejercicios

1. En cada caso, determinar si la sucesión de elemento genérico dado, resulta convergente (y hallar el límite) o divergente. Cuando sea necesario, aceptar y utilizar la fórmula de Euler, $\exp(\mathrm{i}\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\ \operatorname{sen}\theta$.

a) $a_k = 1 - 0{,}2^k$	*b)* $a_k = \frac{k^3}{k^3+1}$	*c)* $a_k = \frac{3+5k^2}{k+k^2}$	*d)* $a_k = \frac{k^3}{k+1}$
e) $a_k = \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k}$	*f)* $a_k = \frac{k^2}{k+1} - \frac{k^2+1}{k}$	*g)* $a_k = \cos\frac{k\pi}{2}$	*h)* $a_k = 1 + (-1)^k$
i) $a_k = \frac{3^{k+3}}{5^k}$	*j)* $a_k = \left(1 - \frac{1}{3k}\right)^{2k}$	*k)* $a_k = \frac{\ln k}{\ln 5k}$	*l)* $a_k = \frac{\ln(k+3)}{\ln k}$
m) $a_k = \tan\left(\frac{2k\pi}{1+8k}\right)$	*n)* $a_k = \sqrt{\frac{k+1}{9k-3}}$	*o)* $a_k = \frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+1}$	*p)* $a_k = \frac{\exp k + \exp(-k)}{\exp(2k)-1}$
q) $a_k = \sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}$	*r)* $a_k = k\left(1 - \sqrt[3]{1-\frac{a}{k}}\right)$	*s)* $a_k = \frac{k}{2^k}$	*t)* $a_k = 2^{1/k}$
u) $a_k = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{2}\right)^k$	*v)* $a_k = \exp(-\pi k\mathrm{i}/2)$	*w)* $a_k = \frac{1}{k}\exp(-\pi k\mathrm{i}/2)$	*x)* $a_k = k\exp(\pi k\mathrm{i}/2)$.

2. Se dice que dos sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son infinitos equivalentes si $\lim a_k = \lim b_k = \infty$ y $\lim \frac{a_k}{b_k} = \ell < \infty$. Demostrar que son infinitos equivalentes las sucesiones de elementos generales siguientes.

   a) $a_k = \log(k+m)$ y $b_k = \log(kp)$, $p \in \mathbb{R}^+$ y *b)* $a_k = (k+1)^\alpha - k^\alpha$ y $b_k = \alpha k^{\alpha-1}$, $\alpha > 1$.

3. *a)* Dada la sucesión $\{a_k\}$ definida por $a_1 = 1$ y $a_{k+1} = 3 - \frac{1}{a_k}$ para $k \geqq 1$, mostrar que ésta es creciente, y para todo k, verifica $a_k < 4$. Concluir que la sucesión es convergente y calcular su límite.

   b) Dada la sucesión $\{b_k\}$ definida por $b_1 = 1$ y $b_{k+1} = \frac{1}{3-b_k}$ para $k \geqq 1$, mostrar que ésta es decreciente, y para todo k, verifica $0 < b_k \leqq 2$. Concluir que la sucesión es convergente y calcular su límite.

4. Mostrar que si $0 < a < 2$, entonces $0 < \sqrt{2a} < 2$, con ello, que la sucesión $\left\{\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2}}\ ,\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}\ ,\ \ldots\right\}$ es convergente y calcular su límite.

5. *a)* Mostrar que si $\{a_k\}$ es una sucesión tal que las subsucesiones $\{a_{2k}\}$ y $\{a_{2k+1}\}$ resultan convergentes a un mismo valor ℓ, entonces necesariamente la sucesión completa es convergente a ℓ.

   b) Generalizar el apartado anterior, mostrando que, si $\{a_k\}$ es una sucesión, tal que para un natural m, las subsucesiones $\{a_{mk}\}$, $\{a_{mk+1}\}$, $\{a_{mk+2}\}$, ... , $\{a_{mk+m-1}\}$ son todas convergentes a un valor ℓ, entonces necesariamente la sucesión completa converge a ℓ.

   c) Mostrar que si una sucesión $\{a_k\}$ tiene a las subsucesiones $\{a_{2k}\}$, $\{a_{2k+1}\}$ y $\{a_{3k}\}$ convergentes, es convergente.

   Sugerencia: considerar la sucesión $\{a_{6k}\}$, que es subsucesión de $\{a_{2k}\}$ y de $\{a_{3k}\}$, y la sucesión $\{a_{6k+3}\}$, que lo es de las sucesiones $\{a_{2k+1}\}$ y $\{a_{3k}\}$.

6. *a*) Demostrar la Proposición 3 y lo que resta de la Observación 4.

   b) Demostrar las Proposiciones 13 y 15 y 16, y dar un contraejemplo que muestre que la condición de conexión en la última es una condición necesaria en ese resultado.

7. Si $A \subsetneqq \mathbb{R}^n$ es un conjunto no vacío, se dice que un elemento $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ (no necesariamente perteneciente a A) es un punto de acumulación del conjunto A, si cada bola $B(\boldsymbol{\xi}, r)$ contiene un punto de A, diferente de $\boldsymbol{\xi}$.

   Demostrar el Principio del Punto de Acumulación, que establece que todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$, tiene al menos un punto de acumulación.

8. Asociada a una sucesión numérica $\{a_k\}$, real o compleja, puede formarse una nueva sucesión, $\{S_n\}$, de sumas parciales, cuyos elementos se obtienen sumando los primeros elementos de la sucesión original,

$$S_1 = a_1 \ , \quad S_2 = a_1 + a_2 \ , \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ , \quad \cdots \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ .$$

   A esta nueva sucesión se la llama serie infinita asociada a la sucesión $\{a_k\}$, y se la indica por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots \ , \quad \text{o bien,} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

   Si la sucesión $\{S_n\}$ es convergente, y el límite de ésta es S, se dice que la serie recién definida converge a la suma S, notándose esto por $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = S$. Del mismo modo, se dice que la serie es divergente u oscilante, si lo es la sucesión de sumas parciales que la define. [3]

   a) Mostrar que las series asociadas a las sucesiones $\{a_k\} = \{1\}$ y $\{b_k\} = \{-k\}$ divergen, respectivamente a $+\infty$ y $-\infty$, y que la asociada a $\{c_k\} = \{(-1)^k\}$ es oscilante.

   b) Mostrar que si $\{S_n\}$ es una serie convergente, asociada la sucesión $\{a_k\}$, necesariamente ésta última es convergente, y vale $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Parafraseando, si una serie numérica es convergente, entonces necesariamente su "término general" a_k, tiende a 0.

   c) Utilizando el Lema 1 de la Unidad 5, mostrar que la serie geométrica $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ de razón x, converge para $|x| < 1$, siendo su suma igual a $\frac{1}{1-x}$, y no es convergente para $|x| > 1$.

   d) Obtener las sumas *i*) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$, *ii*) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{1}{5^k}$, *iii*) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{0{,}5^k}$, y comprobar que *iv*) $0{,}\widehat{9} \ = \ 9 \cdot 0{,}\widehat{1} = \frac{9}{10} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 1$.

   e) Mostrar que la Serie Armónica, asociada a la sucesión $\{a_k\} = \{\frac{1}{k}\}_{k=1}^{\infty}$ no es convergente, y luego, siendo la sucesión de sumas parciales creciente, que diverge a $+\infty$, esto es, que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$. En conclusión, dada una sucesión $\{a_k\}$ la condición $a_k \to 0$ del apartado *b*) es necesaria para la convergencia de la serie asociada, pero no suficiente.
   Sugerencia: mostrar que si $n \in \mathbb{N}$, resulta la diferencia de sumas $S_{2n} - S_n > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, y con ello arribar a la conclusión del apartado usando el Criterio de Cauchy, Proposición 9.

[3] La suma de una serie convergente no se obtiene por una adición ordinaria, sino como límite de una sucesión de sumas parciales. También dede notarse que para las series convergentes el símbolo $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ se utiliza para indicar tanto la serie como su suma a pesar de ser cosas conceptualmente distintas. La suma es un número y por lo tanto no puede ser convergente ni divergente.

9. En la Unidad 5 se demostró que si f es una función $(n+1)$ veces derivable en un intervalo que contenga a un punto a, allí vale la Fórmula de Taylor con Resto

$$f(x) \;=\; T_n(f,a)(x)+R_n(f,a)(x)\;, \quad \text{donde} \quad R_n(f,a)(x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\;\mathrm{d}t\;.$$

a) Mostrar que la forma integral del resto puede ser reescrita a través de la sustitución $t = x+(a-x)u$,

$$R_n(f,a)(x) \;=\; \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x+(a-x)u)\;\mathrm{d}u\;.$$

b) Probar que para todo $x\in\mathbb{R}$, la sucesión $\{\frac{x^k}{k!}\}$ es convergente, y vale $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{x^k}{k!}=0$.

Sugerencia: mostrar primero que para $x\in\mathbb{R}$, y $N,k\in\mathbb{N}$ tales que $k>N>|x|$, resulta

$$\frac{|x|^k}{k!} \;\leqq\; \frac{|x|^N}{N!}\left(\frac{|x|}{N+1}\right)^{k-N}\;.$$

c) Demostrar que si f es infinitamente derivable en un intervalo $I=(a-r,a+r)$, y existe una constante $M>0$ para la cual, para cada $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\in I$ resulta, alguna de las alternativas, $|f^{(n)}(x)|\leqq M$ o $|f^{(n)}(x)|\leqq M^n$, entonces resulta, para todo $x\in I$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f,a)(x) \;=\; 0\;, \quad \text{con lo cual allí, queda} \quad \lim_{n\to\infty} T_n(f,a)(x) \;=\; f(x)\;.$$

d) Usando los apartados anteriores, arribar a los desarrollos, válidos para cualquier $x\in\mathbb{R}$,

$$\exp x \;=\; \lim_{n\to\infty} T_n(\exp x,0)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\;, \qquad \operatorname{sen} x \;=\; \lim_{n\to\infty} T_{2n+1}(\operatorname{sen} x,0)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\text{y} \quad \cos x \;=\; \lim_{n\to\infty} T_{2n}(\cos x,0)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\;.$$

Anexo. La Desigualdad de Bernoulli y el Número *e*

En este anexo, se mostrará el resultado conocido como la Desigualdad de Bernoulli, que permite mostrar, por ejemplo, el límite de la sucesión $\{a_k\}=\{x^k\}$ para distintos valores de x, sin recurrir a la función exponencial, función que además puede ser obtenida de manera alternativa a lo hecho en la Unidad 3.

Proposición 17. *Para un número real h, verficando $h>-1$ y $h\neq 0$, vale la Desigualdad de Bernoulli,*

$$(1+h)^k \;\geqq\; 1+k\cdot h\;,$$

con la igualdad sólo para $k=1$. Para $h=0$, no hace falta decir nada.

Demostración. Si $k=1$, la desigualdad propuesta se cumple por igualdad. Utilizando el Principio de Inducción, se mostrará la desiguladad, para $k\geqq 2$. En efecto, en primer lugar, para $k=2$, vale

$$(1+h)^2 \;=\; 1+2\cdot h+h^2 \;>\; 1+2\cdot h\;,$$

y si se supone que para un índice k es $(1+h)^k>1+k\cdot h$, como $1+h>0$, multiplicando miembro a miembro,

$$(1+h)^{k+1} \;>\; (1+h)(1+k\cdot h) \;=\; 1+k\cdot h+h+k\cdot h^2 \;>\; 1+k\cdot h+h \;=\; 1+(k+1)\cdot h$$

de lo cual $(1+h)^{k+1}\;>1+(k+1)\cdot h$, que completa el argumento de inducción. *Q.E.D.*

Proposición 18. *Si $p \geqq 0$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} p^k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p<1 \\ 1 & \text{si} \quad p=1 \\ \infty & \text{si} \quad p>1 \end{cases} .$$

<u>**Demostración**</u>. Si $p=1$, es inmediato, y si $p>1$, resulta $p=1+h$, con $h>0$, y por la Proposición 17,

$$p^k \;=\; (1+h)^k \;>\; 1+k\cdot h\,.$$

Notando que $\lim\limits_{k\to\infty} 1+k\cdot h=\infty$, y que, dado $M>0$, por aplicación de la Propiedad Arquimedeana, existe N tal que $N\cdot h>M-1$, resulta, siendo $h>0$,

$$k \;>\; N \;\Rightarrow\; 1+k\cdot h \;>\; 1+N\cdot h \;>\; 1+M-1 \;=\; M \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty} p^k \;=\; \infty\,.$$

Finalmente, $p=0$ la tesis es obvia, y si $0<p<1$, entonces $\frac{1}{p}>1$, y a partir de allí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \;=\; \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^k \;=\; \infty \quad\Rightarrow\quad \lim_{k\to\infty} p^k = 0\,.$$

Q.E.D.

En la Unidad 3, se definió el número e como aquél cuyo logaritmo vale 1, y luego, definida la función exponencial, fue posible demostrar el límite $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$. En esta parte, se recorrerá un camino inverso: se mostrará que la sucesión $\{a_k\}=\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ es convergente, probando que se trata de una sucesión creciente y acotada superiormente, que el logaritmo natural del valor límite es igual a 1, y a éste se lo definirá como e, base del logaritmo en cuestión.

En primer lugar, se observa que el Desarrollo de Newton para la Potencia de un Binomio permite expresar a los elementos de la sucesión de manera alternativa,

$$\begin{aligned} a_k \;&=\; \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \;=\; 1+k\frac{1}{k}+\frac{k(k-1)}{2!}\frac{1}{k^2}+\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\frac{1}{k^3}+\cdots+\frac{k(k-1)(k-2)\cdots 1}{k!}\;\frac{1}{k^k} \\ &=\; 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\,. \end{aligned}$$

Esta forma de escribirlos asegura que para cada índice k, el elemento a_{k+1} es igual al elemento a_k, sumado a una cantidad no negativa, de donde se concluye que $\{a_k\}$ es una sucesión creciente, y además, de las acotaciones, válidas para cada k, junto al Lema 1 de la Unidad 5 en (1),

$$a_k \;\leqq\; 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!} \;\leqq\; 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right) \;\stackrel{(1)}{=}\; 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\;,$$

se arriba a una cota superior de la sucesión, proveniente de la desigualdad $1+2\left(1-\frac{1}{2^k}\right)<1+2=3$, concluyendo la convergencia de la sucesión $\{a_k\}$, por la Proposición 7. Se conviene entonces, al límite llamarlo e, del cual como consecuencia de lo anterior, se sabe que resulta ser menor a 3. Además, este número tiene logaritmo natural igual a 1, consecuencia de las implicancias

$$1 \;\leqq\; t \;\leqq\; 1+\frac{1}{k} \;\Rightarrow\; \frac{k}{k+1} \;\leqq\; \frac{1}{t} \;\leqq\; 1 \;\Rightarrow\; \int_1^{1+\frac{1}{k}} \frac{k}{k+1}\,\mathrm{d}t \;\leqq\; \int_1^{1+\frac{1}{k}} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \;\leqq\; \int_1^{1+\frac{1}{k}} \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{k+1} \leqq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqq \frac{1}{k} \ \Rightarrow \ \frac{k}{k+1} \leqq k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] \leqq 1 \, ,$$

por las cuales, aplicando el Principio de Intercalación, Proposición 3 *g*), junto a la parte *b*) del Lema 3 en (2) dada la continuidad de la función logaritmo natural, se llega al límite

$$1 = \lim_{k\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] \overset{(2)}{=} \ln\left[\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] = \ln e \, .$$

Y más aún, la Desigualdad de Bernoulli permite demostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{a_k\} = \left\{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\right\}$ resulta creciente y acotada superiormente, desde un índice en adelante, que se permite que dependa de x, y luego convergente. Comenzando por la monotonía, puede observarse para $x \in \mathbb{R}$, si $k^* \in \mathbb{N}$ es tal que $k^* > |x|$, entonces $a_k > 0$ para $k > k^*$, y para esos índices también resulta $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, lo cual permite utilizar la Desigualdad de Bernoulli en (3), siendo $\left|\frac{x}{(k+1)(k+x)}\right| < 1$ y $\frac{k+x}{k} > 0$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\left(1+\frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k} = \frac{\left(1+\frac{x}{k+1}\right)^{k+1}}{\left(1+\frac{x}{k}\right)^{k+1}}\left(1+\frac{x}{k}\right) = \left(\frac{k+x+1}{k+1}\,\frac{k}{k+x}\right)^{k+1}\frac{k+x}{k}$$

$$= \left(1+\frac{-x}{(k+1)(k+x)}\right)^{k+1}\frac{k+x}{k} \overset{(3)}{\geqq} \left(1+\frac{-x}{k+x}\right)\frac{k+x}{k} = 1 \, .$$

En consecuencia, desde el índice propuesto, siendo $a_k > 0$, queda $a_{k+1} \geqq a_k$, y luego $\{a_k\}$ creciente. Respecto de la acotación de la sucesión, de nuevo, eligiendo $k^* > |x|$, valen, para $k > k^*$, vale la desigualdad $\left|\frac{x}{k}\right| < 1$, y luego para esos índices,

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\left(1-\frac{x}{k}\right)^k = \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^k \leqq 1 \ \Rightarrow \ \left(1+\frac{x}{k}\right)^k \leqq \left(1-\frac{x}{k}\right)^{-k} \leqq \left(1-\frac{x}{k^*}\right)^{-k^*} \, ,$$

resultando la sucesión acotada desde el índice k^* en adelante, y luego la sucesión completa acotada. Así, la sucesión $\{a_k\} = \left\{\left(1+\frac{x}{k}\right)^k\right\}$ es convergente por la Proposición 5, siendo el límite dependiente del valor de x, llamado exponencial de x y notado por $\exp x$. Finalmente, puede repetirse sin problema lo hecho al mostrar que $\ln e = 1$, trabajando e integrando en los intervalos $\left[1, 1+\frac{x}{k}\right]$, para concluir que $\ln(\exp x) = x$, para cualquier x.