# ÁLGEBRA LINEAL (R211 - CE9) 2024

## 1.5 Conjunto generador

Motivadxs por las propiedades de $\mathbb{F}^n$, nuestro próximo objetivo es claro: queremos caracterizar un ev $V$ completo con *poquitos vectores*. Para esto, mudaremos las ideas a un ev abstracto.

**Definición 1** *$V$ $F$-ev. $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

*Una **combinación lineal** (cl) de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ es un vector de la forma*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

*donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$.*

**Very Important 1** *Las cl de vectores de un ev SIEMPRE constan de una cantidad* **finita** *de términos. No definimos cl infinitas, pues precisaríamos de una noción de convergencia. El Análisis Funcional se ocupará de estas cuestiones, por ahora baby steps.*

**Definición 2** *Sean $V$ $F$-ev y $\emptyset \subsetneq S \subset V$. El **conjunto generado por** $S$ o **span** de $S$ es el conjunto de todas las cl posibles de elementos de $S$: span($S$):*

$$\operatorname{span}(S) := \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n : v_1, \ldots, v_n \in S, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F, n \in \mathbb{N}\}.$$

*Si $S = \emptyset$ definimos $\operatorname{span}(S) := \{\overline{0}\}$.*

**Notación:** Trataremos de utilizar $\operatorname{span}(S)$, pero pueden aparecer: $\operatorname{cl}(S)$, $\langle S \rangle$, $\operatorname{linspan}(S)$, etc.

**Observaciones 1** *No perder de vista que las cl que forman la cápsula lineal son FINITAS, como dijimos antes.*

**Proposición 1** *Sean $V$ un $F$-ev y $S \subset V$. Entonces $\operatorname{span}(S) \subset V$ sev.*

**Demostración**

Usamos caracterización de subespacios.

$\alpha, \beta \in F$, $u, v \in \operatorname{span}(S)$. Veamos que $\alpha u + \beta v \in \operatorname{span}(S)$. En efecto:

- $u \in \operatorname{span}(S) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tales que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$.

- $v \in \operatorname{span}(S) \Rightarrow \exists \beta_1, \ldots, \beta_m \in F$ tales que $v = \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m$ con $w_i \in S$.

Luego

$$\begin{aligned}\alpha u + \beta v &= \alpha(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + \beta(\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_m)\\ &= \alpha\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha\alpha_n v_n + \beta\beta_1 w_1 + \cdots + \beta\beta_n w_m \in \operatorname{span}(S),\end{aligned}$$

pues es una cl de elementos de $S$.

$\square$

A partir de la proposición anterior, llamaremos al $\operatorname{span}(S)$ el **subespacio generado por S**.

**Observaciones 2** *Sean $V$ un $F$-ev y $S \subset V$. Entonces $S \subset \operatorname{span}(S)$.*

*En efecto, cada $u \in S$ tenemos $u = 1 \cdot u$, que es una cl de elementos de $S$, luego está en $\operatorname{span}(S)$.*

**Ejercicio 1** *Sean $V$ un $F$-ev y $S, T \subset V$. Si $S \subset T$ entonces* $\text{span}(S) \subset \text{span}(T)$.

El sev generado por un conjunto $S$ es el menor subespacio que contiene a $S$, esto significa que si $U \subset V$ sev tal que $U \supset S$ entonces $\text{span}(S) \subset U$. Más aún, es la intersección de todos los sev que lo contienen. En efecto:

**Proposición 2** *Sean $V$ un $F$-ev y $S \subset V$. Entonces* $\text{span}(S) = \bigcap\{U \subset V : U \text{ sev y } S \subset U\}$.

**Demostración**

Llamemos $\mathcal{F} = \{U \subset V : U \text{ sev y } S \subset U\}$ a la familia de sev que contienen a $S$. Queremos ver que $\text{span}(S) = \bigcap_{U \in \mathcal{F}} U$.

$\subset$) Veamos que $\text{span}(S) \subset U$ para todo $U \in \mathcal{F}$.

Sea $U \in \mathcal{F}$. Entonces $S \subset U$. Sea $u \in \text{span}(S) \Rightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ con $v_i \in S$, luego $v_i \in U$, y como $U \subset V$ sev, sigue que $u \in U$.

$\supset$) $\text{span}(S) \in \mathcal{F}$ (por qué???) Luego la intersección de $\text{span}(S)$ con el resto de los sev de la familia $\mathcal{F}$ está contenida en $\text{span}(S)$.

$\square$

**Ejercicio 2** *Probar el siguiente corolario.*

***Corolario 1*** *$S \subset V$ sev sii $S = \text{span}(S)$.*

**Definición 3** *Sean $V$ $F$-ev y $S \subset V$. Si $\text{span}(S) = V$ decimos que $S$ **genera a** $V$, o que $V$ **es generado por** $S$ o que $S$ **es un subconjunto generador de** $V$ o que $S$ **es un sistema generador de** $V$.*

*Si existe un conjunto generador de $V$ que es finito, decimos que $V$ es **finitamente generado**. Si no existe tal $S$ decimos que es $V$ **es infinito dimensional**.*

**Very Important 2** *RECORDAR: los ejemplos que veamos deberán completarse como ejercicio.*

**Ejemplos 1**

1. *Base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\{i, j, k\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.*
2. *$\{1, x, x^2\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{C}_2[x]$ como $\mathbb{C}$-ev.*
3. *$\mathbb{C}[x]$ es infinito dimensional: ningún conjunto finito de elementos puede generarlo - ¿por qué?*
4. *Recuerdos de AyGII: El conjunto solución del sistema $AX = 0$ donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*está generado por $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (-3, 0, -4, 1, 0)\}$.*

## 6. Independencia lineal

Nuevamente, recordando la definición de li que vimos en $\mathbb{F}^n$ queremos replicar estas ideas a un ev abstracto $V$.

**Definición 4** *Sean $V$ $F$-ev y $S \subset V$.*

- *Si $S$ es finito, digamos $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, decimos que $S$ es **linealmente independiente** (li) si la única cl de elementos de $S$ que resulta en el vector nulo es la trivial.*

  *En símbolos: si $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \overline{0}$ p.a. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.*
- *Si $S = \emptyset$ DECRETAMOS que $S$ sea li.*

- *Si $S$ es un conjunto infinito, decimos que es li si todo subconjunto finito de $S$ es li.*
- *Si $S$ no es li decimos que $S$ es **linealmente dependiente** (ld).*

**Ejercicio 3** *Probar la siguiente Proposición:*

***Proposición 3*** *Sean $V$ $F$-ev y $S \subset V$.*

1. *$S$ es ld sii $\exists v_1, \ldots, v_m \in S$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ no todos nulos tq $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m = \overline{0}$.*
2. *$\overline{0} \in S \Rightarrow S$ ld.*
3. *$S$ ld entonces todo $T \supset S$ es ld.*
4. *$S$ li entonces todo $T \subset S$ es li.*
5. *$v \in V$, $\{v\}$ ld sii $v = \overline{0}$.*
6. *$u, v \in V$, $\{u, v\}$ ld sii $\exists \lambda \in F$ tq $u = \lambda v$.*
7. *$S$ ld sii $\exists$ un vector en $S$ que es cl de los demás.*

**Ejemplos 2**
1. *Los vectores $i, j, k$ son li en $\mathbb{R}^3$.*
2. *El conjunto $\{x^2, x^4, x^6, x^8\}$ es li en $\mathbb{R}[x]$.*
3. *El conjunto $\{\sin x, \cos x\}$ es li en $\mathbb{R}^{[-\pi,\pi]}$.*

## 7. Bases y dimensión

Ya estamos en condiciones de dar la definición de *base*. Para hablar de *dimensión* necesitamos más trabajo.

**Definición 5** *Sea $V$ un $F$-ev. Una **base** de $V$ es un conjunto generador li.*

*$V$ se dice que es **finito dimensional** si tiene una base finita.*

**Observaciones 3**
1. *$V$ finito dimensional no nos dice qué es lo que entendemos por dimensión ni cómo la definimos.*
2. *No hay unicidad para las bases de un ev. Cuando veamos que en el caso finito dimensional todas tienen igual cardinal podremos definir dimensión.*

**Ejemplo 1** *BASES CANÓNICAS DE LOS ESPACIOS USUALES*

1. *$\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$.*
2. *$\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots n\}$.*
3. *$\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, es infinito dimensional.*
4. *$\mathbb{F}^{m\times n}$, $B = \{E_{ij} : i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$.*

La clave para poder dar una buena definición de base viene dada en la siguiente proposición, que dice que en un ev, dados un conjunto generador $S$ y un conjunto li $T$ siempre tenemos que $|T| \leq |S|$.

**Proposición 4** *Sea $V$ un $F$-ev. Si $V$ está generado por un conjunto $S$ de cardinal finito $n$, entonces todo conjunto $T$ de vectores li de $V$ es finito y más aún, si su cardinal es $m$, entonces $m \leq n$.*

**Demostración**

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tq $\operatorname{span}(S) = V$ y sea $T \subset V$ li.

Supongamos primero que $T$ es finito, digamos $T = \{u_1, \ldots, u_m\}$. Tenemos que $T$ es li por hipótesis y queremos probar que debe ser $m \leq n$.

Como $\text{span}(S) = V$, todo vector de $T$ se escribe como cl de los elementos de $S$:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11}v_1 + \alpha_{12}v_2 + \cdots + \alpha_{1n}v_n \\
u_2 &= \alpha_{21}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \cdots + \alpha_{2n}v_n \\
&\vdots \\
u_m &= \alpha_{m1}v_1 + \alpha_{m2}v_2 + \cdots + \alpha_{mn}v_n
\end{aligned}
$$

Llamemos $A = (\alpha_{ij})$ a la matriz en $F^{m\times n}$ de coeficientes de las expresiones anteriores.

Consideremos el sistema homogéneo $A^tX = 0$ (observar que tomamos la traspuesta de $A$), luego $X$ es el vector de $m$ incógnitas $x_1, \dots, x_m$ y el sistema consta de $n$ ecuaciones y $m$ incógnitas:

$$
\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\
\alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},
$$

Sea $(\beta_1, \dots, \beta_m)^t$ una solución del sistema (que sabemos que siempre existe, porqué?), y veamos que debe ser la trivial, es decir, que el sistema homogéneo tiene sólo la solución trivial. Para esto, planteamos la cl de vectores de $T$ y la reescribimos como cl de elementos de $S$:

$$
\begin{aligned}
\beta_1u_1 + \cdots + \beta_mu_m &= \beta_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{1n}v_n) + \cdots + \beta_m(\alpha_{m1}v_1 + \cdots + \alpha_{mn}v_n) \\
&= \beta_1\alpha_{11}v_1 + + \cdots + \beta_1\alpha_{1n}v_n + \cdots + \beta_m\alpha_{m1}v_1 + \cdots + \beta_m\alpha_{mn}v_n \\
&= (\beta_1\alpha_{11} + \cdots + \beta_m\alpha_{m1})v_1 + \cdots + (\beta_1\alpha_{1n} \cdots + \beta_m\alpha_{mn})v_n,
\end{aligned}
$$

y puesto que $(\beta_1, \dots, \beta_m)^t$ es una solución de $A^TX = 0$, tenemos que cada coeficiente de la cl resultante debe ser 0. Entonces la cl de elementos de $T$ resultantes es igual al vector nulo, luego cada coeficiente $\beta_i = 0$. Es decir, la solución del sistema es la trivial, y no puede haber otra. Sigue que no hay variables libres, y como tiene $n$ filas y $m$ columnas, debe ser $m \leq n$.

Finalmente, supongamos que $T$ es infinito, y consideremos un subconjunto $U$ de $T$ de $n$ vectores. Tal conjunto es li por definición. Si agregamos un elemento de $T$, digamos $u_{n+1}$, tenemos un subconjunto $U' = U \cup \{u_{n+1}\}$ de $T$ de $n+1$ vectores. Esto contradice lo que probamos anteriormente, luego $T$ no puede ser infinito.

□

**Corolario 2** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional. Entonces todas sus bases tienen igual cantidad de elementos.*

**Demostración** Si $B_1, B_2$ bases de $V$ de cardinales $n_1, n_2$ respectivamente, entonces:

- como $B_1$ genera y $B_2$ li, debe ser $n_2 \leq n_1$,

- como $B_2$ genera y $B_1$ li, debe ser $n_1 \leq n_2$.

Así, $n_1 = n_2$.

□

**Definición 6** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional. La* ***dimensión de $V$ sobre $F$*** *es la cantidad de elementos de sus bases. Denotamos $\dim_F V$. Definimos además la dimensión del espacio trivial como $\dim_F\{\overline{0}\} = 0$.*

**Notación:** A veces sobreentendemos el cuerpo y simplemente escribimos $\dim V$ o $\dim(V)$.

**Ejercicio 4** *Probar el siguiente Corolario de la Proposición anterior:*

***Corolario 3*** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Entonces:*

- *Si $S \subset V$ y $|S| > n$ entonces $S$ es ld.*
- *Si $S \subset V$ y $|S| < n$ entonces $S$ no genera $V$.*

La gracia de las bases es que nos provee unicidad de escritura, y más aún, esta propiedad de unicidad de escritura *caracteriza* a las bases. Ya hemos hablado de unicidad de escritura asociado a otro concepto, veremos en algún momento cómo se relacionan estas nociones.

**Proposición 5** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$.*

*$B$ es base de $V$ sii pc $v \in V$ $\exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n$.*

**Demostración:**

$\Rightarrow$) Como $\operatorname{span}(B) = V$, existen tales escalares. Como $B$ li, son únicos. En efecto, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ tq

$$\begin{aligned} v =& \alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n \text{ y} \\ v =& \beta_1 v_1 + \ldots \beta_n v_n, \text{ entonces restando ambas expresiones obtenemos} \\ \overline{0} =& (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots (\alpha_n - \beta_n) v_n, \end{aligned}$$

y puesto que $B$ es li, cada coeficiente debe ser 0, luego $\alpha_i = \beta_i$.

$\Leftarrow$) Puesto que, por hipótesis todo vector de $V$ es cl de elementos de $B$, $B$ genera $V$. La unicidad de escritura se da en particular para $\overline{0}$, luego tenemos que $B$ debe ser li.

□

**Very Important 3** *La siguiente proposición nos dice que en un ev finito dimensional:*

- *todo conjunto generador se puede reducir a una base, y*
- *todo conjunto li se puede extender a una base.*

**Proposición 6** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_s\} \subset V$.*

1. *Si $S$ genera $V$ entonces existe $B \subset S$ tal que $B$ es base de $V$.*
2. *Si $S$ es li entonces existe $T = \{v_{s+1}, \ldots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de $V$.*

**Demostración**

1. Si $S$ es li, no puede tener más elementos que la dimensión de $V$, es decir, $s \leq n$. Como además $S$ genera a $V$, es una base. Así, $s = n$ y eligiendo $B = S$ tenemos una base de $V$.

   Si $S$ no es li, como además $S$ genera a $V$, debe ser $s > n$, luego existe $v \in S$ tq $v \in \operatorname{span}(S \backslash \{v\})$ y más aún, $\operatorname{span}(S \backslash \{v\}) = \operatorname{span}(S) = V$ (porqué? ver los ejercicios del práctico).

   Ahora bien, si $S \backslash \{v\}$ es li, $B = S \backslash \{v\}$ es base. Si no es li, procedemos inductivamente.

   El proceso se detiene pues no puede existir un conjunto generador con menos de $n$ elementos.

2. Si $S$ genera $V$, tiene al menos tantos elementos como $V$, es decir, $s \geq n$. Como además $S$ es li, es una base. Así, $s = n$ y eligiendo $B = S$ tenemos una base de $V$.

   Si $S$ no genera $V$, como además $S$ es li, debe ser $s < n$. Sea $B$ una base cualquiera de $V$, luego existe $v \in B$ tq $v \notin \operatorname{span}(S)$. Entonces $S \cup \{v\}$ es li.

   Ahora bien, si $B = S \cup \{v\}$ genera $V$, $B$ es base. Si no genera, procedemos inductivamente.

   El proceso se detiene al completar un conjunto li de $n$ elementos.

□

Como corolario obtenemos algo que a priori parece trivial: todo ev finito dimensional tiene base. Para ev's infinito dimensionales esto también es cierto y es difícil de probar. Y para estructuras más abstractas (como por ejemplo los llamados *módulos* sobre un anillo), es muchísimo más difícil de probar, incluso la noción de base es difícil de definir. La importancia entonces radica en entender que el hecho de que el ev sea finito dimensional nos permite caracterizar completamente un espacio a partir de su base, y esto no siempre es fácil de probar.

**Corolario 4** *Sea $V$ un $F$-ev con $\dim_F V = n$. Entonces tiene base.*

El próximo corolario también es importante. Tener una *descomposición* de un ev en «partecitas» no es trivial, y sirve para estudiar por separado cada partecita para entender como funciona el todo. A lo largo de la carrera verán infinidad de descomposiciones de todos los objetos que se les ocurran. Es importante poder descomponer pero también poder volver a «unir». Aquí observamos cómo se relacionan los conceptos que involucran unicidad de escritura.

**Corolario 5** *Sea $V$ un $F$-ev finito dimensional con $\dim_F V = n$. $U \subset V$ sev. Entonces $\dim_F U \leq n$ y existe $W \subset V$ sev tq $V = U \oplus W$.*

**Demostración:** Si $\dim_F U > n$ y $S$ es una base de $U$, entonces $S$ es li y su cardinal es mayor a $n$. Esto no puede ser (porqué?). Luego $\dim_F U \leq n$.

Sea entonces $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y por la proposición sabemos que existe $T = \{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ tq $B = S \cup T$ es base de $V$. Sea entonces $W = \text{span}(T)$. Veamos que $W$ es el complemento buscado, vd, que $V = U \oplus W$. Para esto usamos la caracterización de suma directa (ver práctico). Bastará con probar que $V = U + W$ y que $U \cap W = \{\overline{0}\}$.

Veamos que $V = U + W$. Para esto necesitamos probar que todo $v \in V$ puede escribirse como suma de un elemento de $U$ y uno de $W$. En efecto, dado $v \in V$ al ser $B$ base, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde observamos que $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in U$ y $w = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n \in W$ y $v = u + w$.

Finalmente, sea $v \in U \cap W$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ tq $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m$ y $v = \alpha_{m+1} v_{m+1} + \cdots + \alpha_n v_n$, de donde sigue que

$$\overline{0} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m - \alpha_{m+1} v_{m+1} - \cdots - \alpha_n v_n.$$

Luego cada $\alpha_i = 0$ (por qué?), luego $v = \overline{0}$.

□

Recordar que a veces, cuando el cuerpo se sobreentiende, podemos prescindir del subíndice $_F$ en el símbolo para la dimensión: $\dim_F V = dimV$.

Estamos en condiciones de probar algo más general para sumas (no necesariamente directas), y la prueba es muy linda!

**Teorema 1** *Sea $V$ un $F$-ev y $U_1, U_2 \subset V$ sev finito dimensionales. Entonces*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

**Demostración** Sea $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U_1 \cap U_2$.

- Completamos $S$ a una base de $U_1$: $T_1 = \{u_1, \ldots, u_r\}$.

- Completamos $S$ a una base de $U_2$: $T_2 = \{w_1, \ldots, w_s\}$.

Así,

- $\dim U_1 = m + r$.

- $\dim U_2 = m + s$.

Veamos que $B = S \cup T_1 \cup T_2$ es base de $U_1 + U_2$.

Tenemos en primer lugar que $U_1 \subset \text{span}(B)$ y $U_2 \subset \text{span}(B)$, luego $U_1 + U_2 = \text{span}(B)$ (por qué?). Veamos que es li. Para esto, planteamos:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = \overline{0},$$

donde $a = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m \in \text{span}(S)$, $b = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r \in \text{span}(T_1) \subset U_1$ y $c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s \in \text{span}(T_2) \subset U_2$. Luego, $c = -a - b \in U_1 \cap U_2$ (por qué?). Entonces, existen $d_1, \ldots, d_m \in S$ tq $c = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m$. Así,

$$c = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = d_1 v_1 + \cdots + d_m v_m,$$

de donde $\overline{0} = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s - d_1 v_1 - \cdots - d_m v_m$, esto es, una cl de elementos de $S \cup T_2$ que es base de $U_2$ y por lo tanto li. Como está igualada al vector nulo, resulta que $c_i = d_i = 0$. Sigue entonces que $a_i = b_i = 0$ (por qué?). Así, $B$ es base del espacio suma $U_1 + U_2$.

Finalmente,

$$\dim(U_1 + U_2) = m + r + s = m + r + m + s - m = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2).$$

□

**Ejemplo 2** *DIMENSIONES DE LOS ESPACIOS USUALES:*

1. $\mathbb{F}^n$, $B = \{e_i\}$, $\dim \mathbb{F}^n = n$.
2. $\mathbb{F}_n[x]$, $B = \{x^i : i = 0, \ldots n\}$, $\dim \mathbb{F}_n[x] = n + 1$.
3. $\mathbb{F}[x]$, $B = \{x^i : i \in \mathbb{N}_0\}$, *es infinito dimensional.*
4. $\mathbb{F}^{m \times n}$, $B = \{E_{ij}\}$, $\dim \mathbb{F}^{m \times n} = mn$.