Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
ANÁLISIS MATEMÁTICO II
Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,
Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 5: Integrales impropias.

---

1. Para $a > 0$, determine el caracter de la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty x^r\ dx$, para los diferentes valores reales del parámetro r. Además, halle el valor de las que resulten convergentes.

2. Demuestre que las siguientes integrales impropias son convergentes:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx$ *b)* $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\ dx.$

3. Suponga que f es una función continua en $\mathbb{R}$ tal que existe $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = I$. ¿Qué puede decirse de $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ si f es par? ¿Y si f es impar?

4. Pruebe que si existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ y la integral impropia $\displaystyle\int_a^\infty f(x)$ es convergente, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

5. Si f y g son dos funciones reales no negativas definidas en $[a, \infty)$, entonces valen las siguientes afirmaciones.

   a) La integral impropia $\int_a^\infty f(x)\ dx$ converge si y sólo si existe una constante $M > 0$ tal que, $\int_a^b f(x)dx \leq M$ para todo $b \geq a$.

   b) Suponga que se verifica la desigualdad $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$. Entonces,

      I) si la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, entonces también es convergente la integral impropia $\int_a^\infty g(x)dx$,

      II) por otro lado, si la integral impropia $\int_a^\infty g(x)dx$ es divergente, entonces también lo es la integral impropia $\int_a^\infty f(x)dx$.

   c) Más aún, muestre que si existe $c > 0$, tal que $g(x) \leq c\ f(x)$ para todo $x \geq a$, también valen los enunciados del ítem b).

   d) Si $g > 0$ y existe $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$, entonces $\int_a^\infty f(x)\ dx$ y $\int_a^\infty g(x)dx$ comparten carácter.

6. Decida si son convergentes las siguientes integrales impropias:

   a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}dx$ *b)* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ *d)* $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx$

7. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$.

8. Para $a > 0$, determine el caracter de las integrales impropias $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^r}\, dx$ para los diferentes adecuados valores de $r > 0$, y halle el valor de las convergentes.

9.
   a) Halle $\displaystyle\int_a^0 |x|^r\, dx$ para $a < 0$ y $-1 < r < 0$.

   b) Demuestre que $\displaystyle\int_0^\infty x^r\, dx$ nunca tiene sentido. Distinga los casos $r > 0$, $-1 < r < 0$ y $r < -1$.