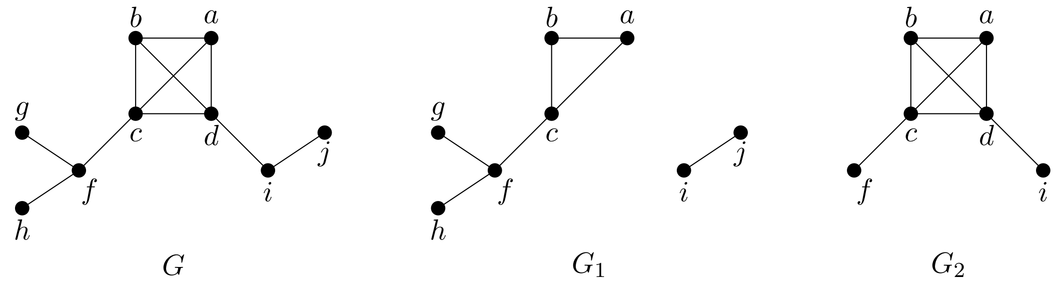
Práctica 3 - Subgrafos

1. Consideremos los siguientes grafos.



   a) ¿Cuántos subgrafos conexos de G tienen 4 vértices e incluyen un ciclo?
   b) Describa el subgrafo G_1 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.
   c) Describa el subgrafo G_2 de G como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de G.
   d) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
   e) Sea e la arista cf. Trace el subgrafo $G\backslash e$.
   f) Sean e_1 y e_2 las aristas ac y ad respectivamente. Trace el subgrafo $(G\backslash e_1)\backslash e_2$.
   g) Encuentre un subgrafo de G que no sea un subgrafo inducido.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| = n \geqslant 2$ y vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se define el *grado promedio* de G, denotado por $d(G)$, como
$$d(G) = \frac{1}{n}\sum_{v\in V} d(v).$$

   a) Pruebe que $\delta(G) \leqslant d(G) \leqslant \Delta(G)$, donde
$$\delta(G) = \min_{v\in V}\{d(v)\}, \qquad \Delta(G) = \max_{v\in V}\{d(v)\}.$$

   Sea G un grafo simple y $v \in V(G)$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   b) Si $d(v) = \Delta(G)$, entonces $d(G-v) \leqslant d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.
   c) Si $d(v) = \delta(G)$, entonces $d(G-v) \leqslant d(G)$. Es decir, borrar el vértice v no puede aumentar el grado promedio.

3. Sea G un grafo simple con n vértices y m aristas. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $|E(\overline{G})| = \binom{n}{2} - m$
   b) $d_{\overline{G}}(v) = n - d_G(v) - 1$
   c) $\delta(\overline{G}) = n - \Delta(G) - 1$ y $\Delta(\overline{G}) = n - \delta(G) - 1$
   d) $\overline{\overline{G}} \equiv G$

e) $\overline{G-v} \equiv \overline{G} - v$

4. Pruebe que todo subgrafo inducido de un grafo de línea es también un grafo de línea.

5. Pruebe que un grafo G es bipartito si y solo si no tiene ningún ciclo impar como subgrafo.

6. a) Pruebe que $\alpha(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\omega(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{si } n = 3, \\ 2, & \text{si } n \geqslant 4. \end{cases}$

   b) Pruebe que $\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ y $\omega(P_n) = 2$.

   c) Pruebe que $\alpha(W_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ y $\omega(W_n) = \begin{cases} 4, & \text{si } n = 3 \\ 3, & \text{si } n \geqslant 4 \end{cases}$

7. Pruebe que para todo grafo G se tiene $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

8. Sea H un subgrafo inducido de un grafo G. Pruebe que $\alpha(H) \leqslant \alpha(G)$ y $\omega(H) \leqslant \omega(G)$. ¿Se puede concluir lo mismo si H es un subgrafo no inducido?

9. Sean G y H dos grafos simples.

   a) Determine $\alpha(G+H)$ y $\alpha(G \vee H)$ en función de $\alpha(G)$ y $\alpha(H)$.

   b) Determine $\omega(G+H)$ y $\omega(G \vee H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.

   c) Pruebe que $W_n \cong K_1 \vee C_n$. Utilice esto para dar una demostración alternativa del ejercicio (6.c)

10. Sea G un grafo simple. Pruebe que si $\overline{G}$ es no conexo, entonces existen dos subgrafos inducidos G_1 y G_2 de G tal que $G = G_1 \vee G_2$.

11. Dados dos grafos G y H, el *producto cartesiano* de G y H, denotado $G \square H$, es el grafo con conjunto de vértices $V(G) \times V(H)$, donde dos vértices (g_1, h_1) y (g_2, h_2) son adyacentes si y solo si se verifica una de las siguientes dos condiciones:

   - $g_1 = g_2$ y $h_1 h_2 \in E(H)$,
   - $h_1 = h_2$ y $g_1 g_2 \in E(G)$.

   a) Trace los grafos $K_2 \square K_2$, $P_2 \square P_3$ y $P_3 \square C_4$.

   b) Determine $|E(G \square H)|$ en función de $|E(G)|$ y $|E(H)|$.

   c) Determine $\omega(G \square H)$ en función de $\omega(G)$ y $\omega(H)$.

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119