SELECCIÓN DE EJERCICIOS

LIMITE:

Demostrar la validez de las siguientes afirmaciones:

1) (a) $|x-3|<2 \Rightarrow |x|<5.$ (b) $|x-3|<\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|x-2|}<2.$

2) Dominio, limite y grafica:

(a) $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},\quad \lim\limits_{x\to 1} f_1(x).$

(b) $f_2(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2},\quad \lim\limits_{x\to 1} f_2(x).$

(c) $f_3(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1},\quad \lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$

(d) $f_4(x)=\dfrac{\ln x^4-\ln x^2-\ln x}{\ln x^3},\quad \lim\limits_{x\to 1} f_4(x).$

3) Utilizando la definición, demostrar los siguientes límites.

(a) $\lim\limits_{x\to 4}(9-x)=5.$ (b) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8}{x}=2.$

4) Limites: (d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+14}-4}{x-2}.$ (f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\operatorname{sen}(x)-\cos(x)}{\tan(x)-1}.$ (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+\operatorname{sen}x}{3\cos x}.$

(j) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln(x^2+4x+4)}{\ln(x+2)}.$

5) Limites:

IV. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}.$

V. $\lim\limits_{x\to 0} 6x^2\cot(x)\csc(2x).$

VII. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc(2x)}{\cos(3x)}.$

VIII. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x+2x}{x+x^2}.$

6) (b) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{x-2}=+\infty.$

7)

(c) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|2-x|}.$

(d) $\lim\limits_{x\to -2^+}(x+4)\dfrac{|x+2|}{x+2}.$

8) Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x^4 - 3x^2 & \text{si } x \geq 2, \\ \lambda x - 4 & \text{si } x < 2, \end{cases}$$

determinar el número real λ tal que exista $\lim_{x \to 2} g(x)$.

9) Limites:

(a) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{10x^6 + x^3 + 5}{x^4 + 10}$.

(b) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$.

(d) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^4 - x + 1}$.

(e) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{x + 1}{x^2 + 3}}$.

10) Asintota oblicua y grafica:

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$.

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$.

CONTINUIDAD:

11)Continuidad:

-c- $f_3(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 6x + 4}$.

-e- $f_5(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

12) -c- $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$.

-d- $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$,

$g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

13) Sea la función g definida por $g(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

-a- Determinar su dominio.

-b- Trazar la gráfica de la función g.

-c- Calcular $\lim_{x \to 1} g(x)$.

-d- ¿Es posible encontrar una función f continua en $x = 1$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq 1$? En caso afirmativo, dar su ley.

14)

12. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(ax^2) - b}{2x^4} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

15)

13. Determinar los valores $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la función resulte continua en $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

16)

15. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ para $x \in \mathbb{R}$.

-a- Demostrar que existe un número $c \in [n, n+1]$ para algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f(c) = 0$.

-b- Aproximar c con un error menor que $0{,}01$.

-c- Probar que existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $f(\beta) = 20$.

17)

17. Demostrar que existe un único número $c \in \mathbb{R}$ solución de la ecuación:

$$\cos x - \sqrt{x} = 0$$

18) 20. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

-c- $f_3 = 2x^3 - 5,\ x \in \mathbb{R}$.

-d- $f_4(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x^2 & \text{si } 1 < x \leq 3, \\ 3\sqrt{3x} & \text{si } x > 3. \end{cases}$

DERIVADA:

19) Limite cociente incremental:

a) $H(t) = \sqrt{5-4t}$, $a = -1$.

b) $\varphi(z) = z + \dfrac{9}{z}$, $a = -3$.

20)

6. Dada la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 2, \\ ax + b, & x < 2. \end{cases}$$

determinar los posibles valores de a y b para los cuales la función g es derivable en el punto 2 y calcular, a continuación, la función derivada de g.

21) Derivada

d) $f_4(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{3x^2}$;

e) $f_5(x) = (x+2)\dfrac{x^2-1}{x+x^2}$;

g) $f_7(x) = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2 - \cos x}$;

h) $f_8(x) = x^5 \cos x$;

i) $f_9(x) = x^{-2} - 2x^2 + \sqrt{x} - \sqrt{3}$;

j) $f_{10}(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + x^{-2} \tan x$.

22)

11. Una pelota es lanzada en forma recta hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de $49\mathrm{m}/\mathrm{seg}$. La altura en el instante t viene dada por la función

$$x(t) = -4{,}9t^2 + 49t.$$

a) Determinar la altura máxima alcanzada por la pelota.

b) Calcular la velocidad de la pelota cuando se encuentra a $19{,}6\mathrm{m}$ del suelo y va hacia arriba.

23)

13. Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ en el punto de abscisa $x = \frac{1}{2}$.

14. Determinar la ecuación de la recta que contiene al punto $(1, 5)$ y es tangente a la curva de ecuación $y = x^3$.

24)

20. Sea f una función tal que $f(1) = 3$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ y $f''(1) = 4$. Se define la función $g(x) = x^2 f(x)$. Calcular $g(1)$, $g'(1)$ y $g''(1)$.

21. Sea f una función tal que $f(1) = 4$, $f'(1) = 2$ y $f''(1) = 4$. Se define la función $g(x) = \sqrt{x} f(x)$. Calcular $g(1)$, $g'(1)$ y $g''(1)$.

25) Derivada

b) $f_2(x) = \cos x \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$,

c) $f_3(x) = \frac{\cos(\operatorname{sen} x)}{x}$,

e) $f_5(x) = \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{\cos^2 x}$,

f) $f_6(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 (3-2x)^2$.

26)

24. Si $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $g(4) = 0$, $g'(4) = -1$ y la función h está definida por $h(x) = [f(g(x))]^2 + x$, hallar $h'(4)$.

27)

27. Sea la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x + 1$, para todo $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Demostrar que f admite inversa.

b) Calcular $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

28)

b) $f_2(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,

c) $f_3(x) = \ln(x+1) + x^2 e^{-3x}$,

e) $f_5(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$,

f) $f_6(x) = \operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos} x$.

29)

31. Sea f la función cuya ley es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} - x & x \leq 3, \\ 6 & x > 3. \end{cases}$$

Determinar si f posee extremos relativos y absolutos.

30)

33. Se define la función f como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & x \leq 1, \\ \dfrac{1}{x} & x > 1. \end{cases}$$

a) Obtener la gráfica de f en el intervalo $[0,2]$.

b) Probar que f satisface las condiciones del teorema del valor medio en el intervalo $[0,2]$ y determinar todos los valores medios dados por el teorema.

31)

35. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ se verifica exactamente para dos valores de x.

32)

38. Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 mm por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de $3\,\mathrm{cm}$?

39. Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \dfrac{1}{x^2+4}$ de tal forma que la abscisa cambia a razón de 3 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?

33)