UNR Universidad Nacional de Rosario

FCEIA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERIA Y AGRIMENSURA

**ANÁLISIS MATEMÁTICO 2**

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación, Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2024

---

# Unidad 1. Cálculo Integral.

---

## 1. El problema del área

El nacimiento del campo conocido como Cálculo Integral dentro de la Matemática en general y del Análisis Matemático en particular, se rastrea a más de 2000 años hacia atrás, momento en que se aborda el problema de determinar el área de figuras elementales planas, utilizando el hoy llamado Método Exhaustivo, desarrollado por el matemático griego Arquímedes.

Para comenzar a asignar áreas a figuras, en primer lugar, dada una unidad de medida de longitud original, que se debe acordar, se define el área del cuadrado de lado 1, por el valor 1, y a partir de allí, dado que es inmediato que sobre un rectángulo de lados enteros $m$ y $n$, caben exactamente $m \cdot n$ cuadrados de lado 1, resulta coherente definir el área del rectángulo de lados $b$ (base) y $h$ (altura), como la cantidad $b \times h$, y con esto calcular áreas de polígonos a través de descomposiciones en triángulos.

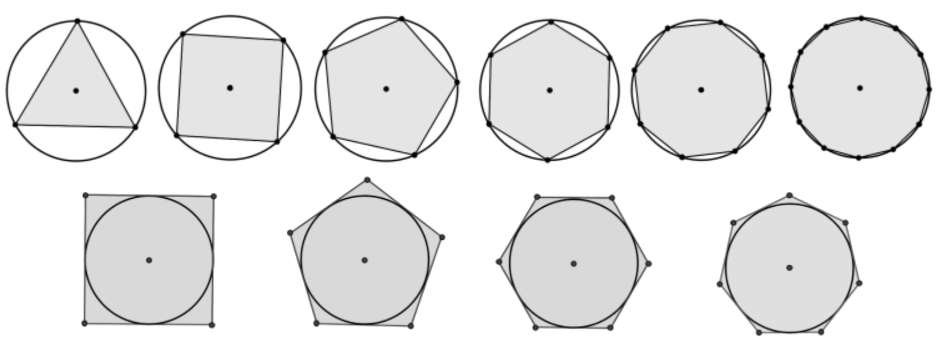

Figura 1: aproximaciones para el área del círculo

Por ejemplo, para el círculo de radio $r$, cuya área quiere ser determinada, se procede inscribiendo y circunscribiendo en él polígonos regulares (de lados y ángulos congruentes) que lo aproximen, respectivamente por defecto (como los de la parte superior de la Figura 1) y por exceso (como en la inferior), intentando analizar si las áreas encontradas se acercan (convergen) hacia algún valor. Puede visualizarse (lo cual no constituye una desmostración) que en el límite, cuando la cantidad de lados crece, las áreas de los polígonos interiores y exteriores tienden a un mismo número, que se define como el área del círculo.

En lo que sigue, considerando las ideas del Método Exhaustivo, con el objetivo de definir el "área bajo la gráfica" de una función acotada y no negativa $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que determina la región

$$R = \{(x,y) : a \leqq x \leqq b \, , \, 0 \leqq y \leqq f(x)\} \, , \tag{1}$$

como por ejemplo la ilustrada en la Figura 2, se procederá inscribiendo y circunscribiendo rectángulos de

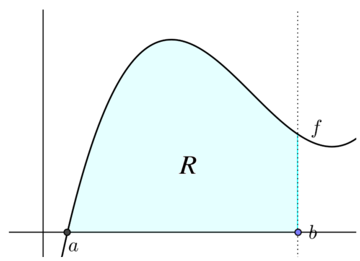


Figura 2: área bajo gráfica de función no negativa

lados paralelos a los ejes coordenados, de área conocida, base por altura, por ejemplo como se muestra en la Figura 3 y luego intentar observar un comportamiento límite, en algún sentido a precisar.

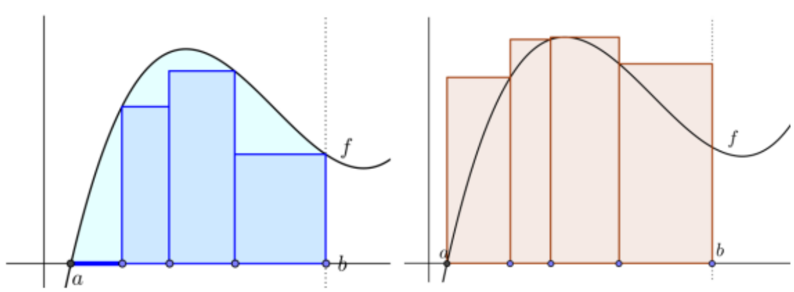


Figura 3: aproximaciones de áreas por rectángulos

## 2. Sumas Inferiores y Superiores

En lo que sigue se trabajará con funciones acotadas, no necesariamente no negativas para más adelante definir a la integral de manera general, teniendo en mente la interpretación para las no negativas.

**Definición 1.** *Se denomina* ***partición*** *de un intervalo* $[a,b]$ *a una colección finita de puntos de la forma* $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\} \subset [a,b]$*, verificando*

$$a \;=\; t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n \;=\; b\;.$$

Como se supuso que la función $f$ está acotada en el intervalo $[a,b]$, seguirá que ella estará acotada en cada intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ definido por $P$, para $k = 1, 2, ..., n$, y en cada uno de éstos estarán bien definidos los valores

$$m_k \;=\; \text{ínf}\{\, f(x) : \; t_{k-1} \leqq x \leqq t_k\} \;=\; \inf_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x) \;=\; \inf_{[t_{k-1},t_k]} f$$

y

$$M_k \;=\; \sup\{\, f(x) : \; t_{k-1} \leqq x \leqq t_k\} \;=\; \sup_{x\in[t_{k-1},t_k]} f(x) \;=\; \sup_{[t_{k-1},t_k]} f\;,$$

que serán utilizados para definir a la suma inferior y a la suma superior de $f$ respecto de la partición $P$. Si la función, en algún intervalito, además de acotada fuera continua, entonces los valores ínfimo y supremo serían los valores mínimo y máximo en esa región, pero, si bien la continuidad será más adelante parte de una condición suficiente y no necesaria, para asegurar la integrabilidad, esta propiedad no forma parte de las definiciones hechas hasta el momento, ni tampoco en las que sigan hasta definir a la integral de una función.

**Definición 2.** *Dada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada y* $P$ *una partición de* $[a,b]$*, se definen la* ***suma inferior*** *y la* ***suma superior*** *de* $f$ *asociada a* $P$*, como las respectivas cantidades, notando* $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$*,*

$$L(f,P) \;=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta t_k \qquad y \qquad U(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta t_k\;.$$

De nuevo, siendo reiterativos, se hace notar que la definición de sumas inferiores y superiores no son sólo para funciones no negativas. Dicho lo anterior, puede observarse en este punto, que por ejemplo, para la función $f$ de la Figura 3 , la suma de las áreas de los rectángulos de la parte izquierda corresponde a la suma inferior de la función $f$ sobre la partición marcada en su dominio, y la suma de las áreas de los rectángulos en la parte derecha, a la suma superior de la función, correspondiente a la misma partición.

**Ejemplo 1.** *Dada la función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de ley* $f(x) = x$*, y* $P$ *una partición cualquiera de* $[0,1]$*, observando que* $f$ *es continua y creciente, quedan, para cada* $k = 1, 2, \ldots, n$*, los valores*

$$m_k \;=\; f(t_{k-1}) \;=\; t_{k-1} \quad y \quad M_k \;=\; f(t_k) \;=\; t_k\;,$$

$$L(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}(t_k - t_{k-1}) \;\; y \;\; U(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k \;=\; \sum_{k=1}^{n} t_k(t_k - t_{k-1})$$

*En la Figura 4 se ilustran la suma inferior y la superior para una partición en cinco subintervalos genéricos, como las correspondientes sumas de áreas sombreadas.*

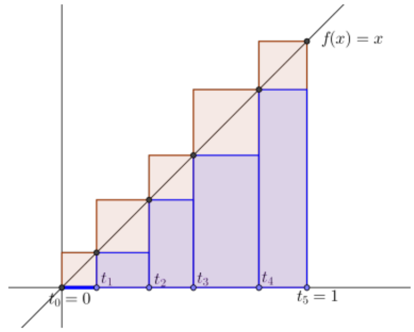


Figura 4: sumas inferiores y superiores para la función del Ejemplo 1

**Ejemplo 2.** *La función* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *de ley*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

*es acotada, no negativa y discontinua en cada punto de su dominio. Para ella, dada la densidad del conjunto de los números racionales e irracionales en cada intervalo real* [1], *independiente de la partición* $P$ *que se escoja, quedarán* $m_k = 0$ *y* $M_k = 1$ *para cada* $k$*, y luego*

$$L(f,P) \; = \; 0 \quad y \quad U(f,P) \; = \; \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \; = \; 1 - 0 \; = \; 1 \; .$$

*En este caso, dada cualquier partición, las sumas inferiores son iguales a* $0$ *y las sumas superiores son siempre iguales a* $1$*, y no habrá posibilidad de definir un valor razonable para el área bajo la gráfica de la función.*

La correcta definición de Integral Definida de una función acotada en el sentido de Riemann utilizando sumas inferiores y superiores necesita contar con los siguientes resultados.

**Lema 1.** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función acotada y* $P$ *es una partición dada de* $[a,b]$*, entonces*

$$L(f,P) \; \leqq \; U(f,P) \; ,$$

*esto es, para una partición fija, el valor de la suma inferior es menor o igual al de la suma superior.*

**Demostración**. Como para cada $k$ se tiene $m_k \leqq M_k$ y $\Delta t_k \geqq 0$, quedan $m_k \Delta t_k \leqq M_k \Delta t_k$, y el resultado sigue sumando miembro a miembro todas las desigualdades.

*Q.E.D.*

[1] Se dice que tanto el conjunto de los números racionales como el de los irracionales es denso, porque en todo intervalo abierto que contiene a un número real, por más pequeño que sea, existen infinitos números racionales e irracionales

**Lema 2.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $P$ y $P'$ son particiones de $[a,b]$, tales que $P \subseteqq P'$, entonces*

$$L(f,P) \leqq L(f,P') \quad y \quad U(f,P') \leqq U(f,P) \, .$$

<u>**Demostración**</u>. Se mostrará la desigualdad correspondiente a la suma inferior, para el caso particular de particiones de la forma $P$ y $P' = P \cup \{t^*\}$, donde $t^* \notin P$, quedando como ejercicio realizar el paso para llegar a demostrar el resultado completo. Es claro que en ese caso $t^* \in [t_{k-1}, t_k]$, para algún $k$, recordando que $m_k = \inf\limits_{[t_{k-1},t_k]} f$ y nombrando

$$m_k^{(1)} = \inf_{[t_{k-1},t^*]} f \quad \text{y} \quad m_k^{(2)} = \inf_{[t^*,t_k]} f \, ,$$

se tienen las desigualdades $m_k \leqq m_k^{(1)}$ y $m_k \leqq m_k^{(2)}$, que implican

$$m_k(t_k - t_{k-1}) = m_k(t_k - t^*) + m_k(t^* - t_{k-1}) \leqq m_k^{(1)}(t_k - t^*) + m_k^{(2)}(t^* - t_{k-1})$$

y luego

$$L(f,P) = m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_k(t_k - t_{k-1}) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1})$$

$$\leqq m_1(t_1 - t_0) + \cdots + m_k^{(1)}(t_k - t^*) + m_k^{(2)}(t^* - t_{k-1}) + \cdots + m_n(t_n - t_{n-1}) = L(f,P') \, .$$

*Q.E.D.*

**Lema 3.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada y $P$ y $Q$ son dos particiones cualesquiera de $[a,b]$, entonces*

$$L(f,P) \leqq U(f,Q) \, ,$$

*esto es, dada una función acotada, cualquier suma inferior es menor que cualquier suma superior.*

<u>**Demostración**</u>. Observando que dadas las particiones $P$ y $Q$ de $[a,b]$, se tiene que $T = P \cup Q$ es una partición de $[a,b]$, que contiene tanto a $P$ como a $Q$, y por aplicación de los Lemas 1 y 2 , quedan

$$L(f,P) \leqq L(f,T) \leqq U(f,T) \leqq U(f,Q) \, .$$

*Q.E.D.*

## 3. Funciones Integrables según Riemann

En esta parte se dirá que una función $f$ es integrable en $[a,b]$, si existe un único número que es mayor o igual que cualquier suma inferior, y menor o igual que cualquier suma superior. Si éste es el caso, a tal número se lo llamará integral de $f$ sobre $[a,b]$, y será interpretado como un área para funciones no negativas.

Dada una función $f$ definida y acotada sobre $[a,b]$, notando con $\mathscr{A}$ al conjunto de números reales formado por todas las sumas inferiores, considerando el conjunto de particiones del intervalo, se observa que $\mathscr{A}$ es no vacío y está acotado superiormente, por cualquier suma superior de $f$ en $[a,b]$, por el Lema 3, y luego por el Axioma 10 (Axioma del Supremo o de Completitud de los números reales, se asume que existe el supremo del conjunto $\mathscr{A}$. De la misma manera, cambiando lo que se deba, se puede afirmar que existe el ínfimo del conjunto de sumas superiores de la función, sobre el conjunto de las particiones que se pueden definir sobre $[a,b]$, y tiene sentido la definición siguiente.

**Definición 3.** *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada, se llaman* ***integral inferior*** *e* ***integral superior*** *de la función $f$ sobre $[a,b]$ a las cantidades respectivas,*

$$\underline{\int_a^b} f \;=\; \sup\,\{L(f,P) : P\in\mathscr{P}[a,b]\} \quad e \quad \overline{\int_a^b} f \;=\; \text{ínf}\,\{U(f,P) : P\in\mathscr{P}[a,b]\}\;,$$

*donde ínfimo y supremo se toman sobre el conjunto $\mathscr{P}[a,b]$, de todas las particiones del intervalo $[a,b]$.*

Para funciones no negativas, la integral inferior puede interpretarse como la mejor aproximación por defecto del área bajo la curva que define, usando rectángulos de lados paralelos a los ejes, y la integral superior como la mejor aproximación por exceso, utilizando figuras similares.

**Proposición 1.** *La integral inferior de una función acotada, es menor o igual que su integral superior. Esto es, si $f$ es una función acotada en $[a,b]$, entonces*

$$\underline{\int_a^b} f \;\leqq\; \overline{\int_a^b} f\;.$$

<u>**Demostración**</u>. Como para todas las particiones $P$ y $Q$ de $[a,b]$ vale, por el Lema 3, que $L(f,P)\leqq U(f,Q)$, se tiene, tomando ínfimo sobre $Q$, la desigualdad

$$L(f,P)\;\leqq\;\text{ínf}_{Q}\,U(f,Q)\;=\;\overline{\int_a^b} f\;,$$

y a continuación, considerando el supremo sobre $P$, queda

$$\underline{\int_a^b} f \;=\; \sup_{P}\,L(f,P)\;\leqq\;\overline{\int_a^b} f\;.$$

*Q.E.D.*

Se dirá que la función resulta integrable según Riemann, cuando la relación anterior es de igualdad, esto es, cuando ambos valores coinciden, lo cual se explicita en la siguiente definición. En ella se aclara que ésta es en el sentido de Riemann, remarcando que fue este matemático quien formalizó el significado de este símbolo, pero más importante, para diferenciarla de otras nociones de integral, a estudiar en cursos superiores de Análisis.

**Definición 4.** *Una función acotada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se dice es* ***integrable*** *(en el sentido de Riemann) en $[a,b]$, si*

$$\underline{\int_a^b} f \;=\; \overline{\int_a^b} f\;.$$

*Si esto pasa, al valor en común se lo llama **integral definida** de la función en el intervalo, y se lo nota por*

$$\int_a^b f \qquad o \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \, .$$

**Observación 1.** *Si $f$ es integrable en $[a,b]$, entonces la integral es el único número mayor que todas las sumas inferiores y menor que todas las sumas superiores. De lo contrario, si hubiera dos con esta propiedad, dado que el menor es una cota superior del conjunto de sumas inferiores, y que el mayor es una cota inferior del conjunto de sumas superiores, sería la integral inferior estrictamente menor que la integral superior, y luego la función no sería integrable.*

**Observación 2.** *El símbolo $\int$ para notar a las integrales fue introducido por Leibniz, quien lo interpretó como una S alargada, rescatando la idea suma de áreas de infinitos rectángulos de altura $f(x)$ y base $\mathrm{d}x$. También, dado que como se observó, la integral de $f$ sobre $[a,b]$ es única, resulta independiente del nombre que se le dé a la variable de la función (llamada variable de integración) si se utiliza la notación que la incluye.*

**Definición 5.** *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable y no negativa sobre su dominio, y $R$ es la región definida en (1) por $R=\{(x,y): a\leqq x\leqq b,\ 0\leqq y\leqq f(x)\}$, entonces la integral de $f$ sobre $[a,b]$ se define como el **área** de $R$.*

**Ejemplo 3.** *Dada la función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de ley $f(x)=c$ (función constante), para cualquier partición $P=\{t_0=a,t_1,\ldots,t_n=b\}$ de su dominio, es claro que para todo índice, es $m_k=M_k=c$, con lo que*

$$L(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k \;=\; c\, \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) \;=\; c\,(b-a) \quad y \quad U(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k \;=\; c\,(b-a)\;,$$

*y en consecuencia*

$$\sup\{L(f,P): P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;=\; \text{ínf}\{U(f,P): P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;=\; c\,(b-a)\;,$$

*resultando $f$ integrable, con*

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x \;=\; c\,(b-a)\;,$$

*resultado esperable para el caso $c>0$, tratándose del área del rectángulo de base $b-a$ y altura $c$.*

**Ejemplo 4.** *Para la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ del Ejemplo 2 , de ley*

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}\;,$$

*dada cualquier $P$, valen $L(f,P)=0$ y $U(f,P)=1$, queda*

$$\sup\{\,L(f,P): P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;=\; 0 \;\neq\; 1 \;=\; \text{ínf}\{\,U(f,P): P\in\mathscr{P}[a,b]\}\;,$$

*resultando $f$ no integrable en $[0,1]$.*

A continuación se expone una condición suficiente y necesaria de integrabilidad, tanto de interés teórico, ya que permitirá demostrar otros criterios y propiedades, como práctico, para en esta primera instancia calcular valores de integrales de funciones sencillas.

**Proposición 2.** *Una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada es integrable si y sólo si, dado $\varepsilon>0$, existe una partición $P$ (dependiente del valor $\varepsilon$) de $[a,b]$ para la cual*

$$U(f,P)-L(f,P)\ <\ \varepsilon\ .$$

**Demostración** .

$\Rightarrow$) Si $f$ es integrable en $[a,b]$, se cumplen las condiciones

$$\underline{\int_a^b} f\ =\ \overline{\int_a^b} f\ =\ \int_a^b f\ ,$$

donde el lado izquierdo es el supremo de las sumas inferiores y el derecho el ínfimo de las sumas superiores, al considerar diferentes particiones, de modo que, dado $\varepsilon>0$, existirán dos particiones $P_1$ y $P_2$ tales que

$$\int_a^b f-L(f,P_1)\ <\ \frac{\varepsilon}{2}\quad \text{y}\quad U(f,P_2)-\int_a^b f\ <\ \frac{\varepsilon}{2}\ .$$

A partir de estas particiones, eligiendo una partición $P$ de $[a,b]$ que contenga a $P_1$ y a $P_2$, por ejemplo $P=P_1\cup P_2$, por el Lema 2 valen además las desigualdades

$$L(f,P_1)\ \leqq\ L(f,P)\quad \text{y}\quad U(f,P)\ \leqq\ U(f,P_2)\ ,$$

y combinando las cuatro desigualdades anteriores, queda

$$U(f,P)-L(f,P)\ \leqq\ U(f,P_2)-L(f,P_1)\ <\ \left(\frac{\varepsilon}{2}+\int_a^b f\right)+\left(\frac{\varepsilon}{2}-\int_a^b f\right)\ =\ \varepsilon\ .$$

$\Leftarrow$) Si para cualquier $\varepsilon>0$ existe $P$ de manera que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$, entonces

$$0\leqq \overline{\int_a^b} f-\underline{\int_a^b} f\leqq\ U(f,P)-L(f,P)\ <\varepsilon\ ,$$

y de la arbitraridad de $\varepsilon$ sigue la igualdad de las integrales inferior y superior, y luego la integrabilidad de $f$.

*Q.E.D.*

El resultado anterior en la práctica se utiliza considerando particiones regulares, aquéllas que determinan subintervalos de igual longitud. Así, dado el intervalo $[a,b]$, una partición regular en $n$ intervalos, será de la forma $P_n=\{t_0,t_1,...,t_n\}$, donde para todo $k$ es $\Delta t_k=\frac{b-a}{n}$ y

$$t_0\ =a\ ,\quad t_1\ =\ t_0+\frac{b-a}{n}\ =\ a+\frac{b-a}{n}\ ,\quad t_2\ =\ t_1+\frac{b-a}{n}\ =\ a+2\,\frac{b-a}{n}\ ,$$

$$t_k\ =\ t_{k-1}\ +\ \frac{b-a}{n}\ =\ a+k\,\frac{b-a}{n}\ ,$$

hasta llegar a $t_n=t_{n-1}+\dfrac{b-a}{n}=a+n\,\dfrac{b-a}{n}=b$.

**Observación 3.** *En el Ejercicio 2 se mostrará que es suficiente mostrar la igualdad*

$$\sup\{L(f,P_n) : P_n \in \mathscr{P}[a,b]\ ,\ \textsf{regular}\} \ = \ \text{ínf}\{U(f,P_n) : P_n \in \mathscr{P}[a,b]\ ,\ \textsf{regular}\}\ ,$$

*donde, como queda explícito, el ínfimo y el supremo se consideran sobre el subconjunto de particiones regulares del intervalo $[a,b]$, para garantizar la integrabilidad de $f$ en $[a,b]$, siendo el valor de la integral el único número comprendido entre todas las sumas inferiores y todas las sumas superiores, de particiones regulares.*

**Ejemplo 5.** *Se verá que la función $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, para $b>0$, de ley $f(x)=x$, es integrable en su dominio, y se hallará el valor de su integral, que en este punto se espera sea $\frac{1}{2}b^2$, área del triángulo rectángulo isosceles de catetos igual a $b$. En este caso, observando la monotonía de la función $f$, para $P=\{t_0=0,t_1,t_2,\dots,t_n=b\}$,*

$$U(f,P)-L(f,P) \ = \ \sum_{k=1}^{n} t_k\ (t_k-t_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} t_{k-1}\ (t_k-t_{k-1}) \ = \ \sum_{k=1}^{n} (t_k-t_{k-1})^2\ .$$

*Llegado a este punto, dado $\varepsilon>0$ arbitrario, eligiendo una partición regular $P_n$, con $n>\frac{b^2}{\varepsilon}$ (elección que se hace ahora, pero a la luz de la desigualdad (2)) quedarán $t_k-t_{k-1}=\frac{b}{n}$ para todo $k$ y*

$$U(f,P_n)-L(f,P_n) \ = \ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n}\ <\ \varepsilon\ , \tag{2}$$

*y luego la integrabilidad de $f$, por la Proposición 2 . Para calcular el valor de la integral será útil la identidad*

$$1+2+\cdots+n \ = \ \frac{n\ (n+1)}{2}\ ,$$

*de la cual resulta, para $P_n$ regular, recordando que $t_k=k\frac{b}{n}$,*

$$L(f,P_n) \ = \ \sum_{k=1}^{n}(k-1)\ \frac{b}{n}\ \frac{b}{n} \ = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=0}^{n-1} k \ = \left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{(n-1)\ n}{2} \ = \ \frac{n-1}{n}\ \frac{b^2}{2}$$

*y*

$$U(f,P_n) \ = \ \sum_{k=1}^{n} k\ \frac{b}{n}\ \frac{b}{n} \ = \ \left(\frac{b}{n}\right)^2 \sum_{k=1}^{n} k \ = \ \left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{n\ (n+1)}{2} \ = \ \frac{n+1}{n}\ \frac{b^2}{2}\ ,$$

$$\Rightarrow \quad \text{Ł}(f,P_n) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \frac{b^2}{2}\ <\ \frac{b^2}{2}\ <\ \frac{n+1}{n}\ \frac{b^2}{2} \ = \ U(f,P_n)\ ,$$

*siendo $\frac{b^2}{2}$ un número mayor a todas las sumas inferiores sobre particiones regulares y menor a todas las sumas superiores sobre el mismo conjunto de particiones, concluyéndose así el valor adelantado,*

$$\int_0^b x\ \mathrm{d}x \ = \ \frac{b^2}{2}\ .$$

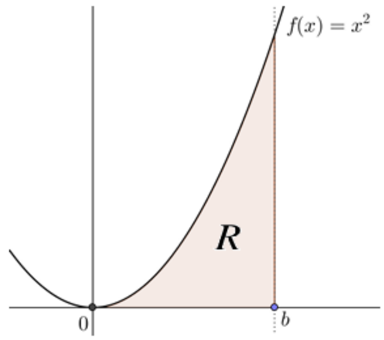


Figura 5: Área interpretada para la función del Ejemplo 6

**Ejemplo 6.** *Al mostrar que la función $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, con $b > 0$, de ley $f(x) = x^2$ es integrable y calcular la integral, podrá interpretarse a este valor como el área sombreada en la Figura 5, hasta ahora desconocida. Nuevamente, como la función $f$ es no decreciente, para $P = \{t_0, ..., t_n\}$ una partición regular de $[0,b]$, resultan para cada $k = 1,2,...,n$, las cantidades*

$$\inf_{[t_{k-1},t_k]} f \;=\; t_{k-1}^2 \;=\; (k-1)^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 , \qquad \sup_{[t_{k-1},t_k]} f \;=\; t_k^2 \;=\; k^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \quad \text{y} \quad \Delta t_k \;=\; \frac{b}{n} ,$$

*de donde*

$$U(f,P) - L(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n} \;=\; \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 - (k-1)^2$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 - 0^2 + 2^2 - 1^2 + \cdots + n^2 - (n-1)^2) \;=\; \left(\frac{b}{n}\right)^3 n^2 \;=\; \frac{b^3}{n} .$$

*A partir de lo anterior, sigue la integrabilidad de la función en el intervalo $[0,b]$, consecuencia de la Proposición 2, considerando una partición regular $P_n$, con $n > \frac{b^3}{\varepsilon}$, en vista de*

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \;=\; \frac{b^3}{n} \;<\; \varepsilon .$$

*Para hallar el valor de la integral, se tendrá en cuenta la identidad*

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 \;=\; \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) ,$$

*de la cual, para $P_n$ regular, con $t_k = k\frac{b}{n}$, se obtienen*

$$L(f,P_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

$$= \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{1}{6}\, (n-1)n(2n-1) \leqq \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{1}{6}\, n \cdot n \cdot 2n \;=\; \frac{b^3}{3} , \quad y$$

$$U(f,P_n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right) = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{b}{n}\right)^3 \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) \;\geqq\; \frac{b^3}{3}$$

*siendo el número $\frac{b^3}{3}$ comprendido entre todas las sumas inferiores y todas las superiores de la función, vista integrable, concluyendo el valor*

$$\int_0^b x^2 \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^3}{3}\;.$$

En el Ejercicio 3 se propone demostrar la integrabilidad de la función[2] de ley $f(x) = x^3$ en intervalos de la misma forma de los anteriores, y el valor

$$\int_0^b x^3 \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^4}{4}\;.$$

Puede observarse que todas las funciones analizadas que resultaron integrables, son además continuas en los dominios en los que se analizaron. Esto es un resultado general, y se presenta como una condición suficiente (pero no necesaria como se va a ver en el Ejemplo 7) de integrabilidad.

En la demostración se utilizará el resultado de que establece que toda función continua en un intervalo $[a,b]$, cerrado y acotado, es allí uniformemente continua[3], esto es para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para $x, y \in [a,b]$,

$$|x-y| \;<\; \delta \quad \text{implica} \quad |f(x)-f(y)| \;<\; \varepsilon\;.$$

**Proposición 3.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f$ es integrable en $[a,b]$.*

<u>**Demostración**</u>. Como la función $f$ es continua en $[a,b]$, dada una partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ del dominio, en cada subintervalo, los valores ínfimo y supremo son alcanzados, esto es, para cada $k$, existen $x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \in [t_{k-1}, t_k]$ tales que $f(x_1^{(k)}) = m_k$ y $f(x_2^{(k)}) = M_k$. Por otro lado, la continuidad de $f$ en $[a,b]$ implica la continuidad uniforme de la función allí por la Proposición 11 (que se verá en Apéndice). Esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x-y| \;<\; \delta \qquad \text{implica} \qquad |\, f(x)-f(y)\,| \;<\; \frac{\varepsilon}{b-a}\;.$$

A partir de lo anterior, si se elige una partición $P$ con todos los $\Delta t_k < \delta$, quedan

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)} \in [t_{k-1}, t_k] \quad\Rightarrow\quad |x_2^{(k)} - x_1^{(k)}| \;<\; \delta \quad\Rightarrow\quad M_k - m_k \;=\; f(x_2^{(k)}) - f(x_1^{(k)}) \;<\; \frac{\varepsilon}{b-a}\;,$$

cumpliéndose para la partición construida la condición de integrabilidad dada en la Proposición 2 ,

$$U(f,P) - L(f,P) \;=\; \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta t_k \;<\; \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\Delta t_k$$

$$=\; \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k \;=\; \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \;=\; \varepsilon\;.$$

[2]En la próxima Unidad, el Teorema Fundamental del Cálculo permitirá el cálculo de integrales de una familia amplia de funciones, que incluye las vistas hasta ahora, de una manera más amigable que el uso de la definición.

[3]Para no desviar en este punto el análisis de integrabilidad de funciones, se posterga hasta el Apéndice la discusión del concepto de Continuidad Uniforme.

*Q.E.D.*

**Ejemplo 7.** *Dada la función* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *de ley*

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=\frac{1}{2}\\ 0 & \text{si } x\neq\frac{1}{2}\end{cases} \quad ,$$

*para determinar su integrablidad, se comienza considerando una partición* $P_n$ *regular, con* $n\in\mathbb{N}$ *a determinar, pero en principio impar para poder garantizar que* $\frac{1}{2}\notin P_n$ *y que para algún* $j$*, resulte* $t_{j-1}<\frac{1}{2}<t_j$*.*

*En ese caso, para* $k\neq j$*, es claro que* $m_k=M_k=0$ *siendo* $f$ *idénticamente nula en* $[t_{j-1},t_j]$*, mientras que para* $k=j$*, quedan* $m_j=0$ *y* $M_j=1$ *de donde resultan, si* $n>\frac{1}{\varepsilon}$*,*

$$U(f,P)-L(f,P) \;=\; M_j(t_j-t_{j-1})-0 \;=\; \frac{1}{n} \;<\; \varepsilon\;,$$

*implicando por la Proposición 2 la integrabilidad de la función* $f$ *en el intervalo* $[0,1]$*, mientras que*

$$L(f,P)\;=0\;\leqq\;U(f,P)\;\text{ para toda } P \quad\Rightarrow\quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0\;.$$

Otra condición suficiente de integrablidad, pero no necesaria, es la monotonía (en sentido amplio, no necesariamente estricto) de la función sobre su dominio, como se mostrará en el Ejercicio 10.

**Proposición 4.** *Si* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *es una función monótona (no decreciente o no creciente), entonces* $f$ *es integrable en* $[a,b]$*.*

# 4. Propiedades de la Integral

En esta parte el objetivo será demostrar algunas propiedades de la integral, la propiedad de aditividad, Proposición 5 , propiedades algebraicas, y propiedades de orden, Proposición 7 en adelante.

**Proposición 5.** *Para tres números* $a<c<b$*, se tiene que* $f$ *es integrable en* $[a,b]$ *si y sólo si* $f$ *es integrable en* $[a,c]$ *y* $[c,b]$*, y en tal caso*

$$\int_a^b f \;=\int_a^c f+\int_c^b f\;.$$

<u>**Demostración**</u>.

$\Rightarrow$) Si $f$ es integrable en $[a,b]$, dado $\varepsilon>0$, por la Proposición 2 , existirá una partición $P$ de $[a,b]$ tal que $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$. Sin perder generalidad, se puede suponer que $c\in P$ (si no fuese así, se trabaja con $Q=P\cup\{c\}$ que también verifica $U(f,Q)-L(f,Q)<\varepsilon$). Nombrando a continuación $P'=\{t_0=a,\ldots,t_j=c\}$ (que es una partición de $[a,c]$) y $P''=\{t_j=c,\ldots,t_n=b\}$ (partición de $[c,b]$), quedan

$$L(f,P)\;=\;L(f,P')+L(f,P'') \quad \text{y} \quad U(f,P)\;=\;U(f,P')+U(f,P'')\;,$$

y restando miembro a miembro las igualdades,

$$\underbrace{U(f,P')-L(f,P')}_{\geqq 0} \;+\; \underbrace{U(f,P'')-L(f,P'')}_{\geqq 0} \;=\; U(f,P)-L(f,P) \;<\; \varepsilon \;,$$

implicando que $U(f,P')-L(f,P')<\varepsilon$ y $U(f,P'')-L(f,P'')<\varepsilon$, y la integrabilidad de $f$ en $[a,c]$ y en $[c,b]$, de nuevo por la Proposición 2. Respecto de los valores de las integrales, de

$$L(f,P') \;\leqq \int_a^c f \;\leqq\; U(f,P') \quad \text{y} \quad L(f,P'') \;\leqq \int_c^b f \;\leqq\; U(f,P'') \;,$$

se obtienen, las desigualdades izquierdas sumando miembro a miembro las dos desigualdades anteriores, y las desigualdades derechas, por la definición de integral,

$$L(f,P) \;\leqq \int_a^c f + \int_c^b f \;\leqq\; U(f,P) \quad \text{y} \quad L(f,P) \;\leqq \int_a^b f \;\leqq\; U(f,P)$$

que implican, dado $\varepsilon>0$ arbitrario, que

$$\left|\int_a^b f - \left(\int_a^c f + \int_c^b f\right)\right| \;\leqq\; U(f,P)-L(f,P) \;<\; \varepsilon \;\Rightarrow\; \int_a^b f \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f \;.$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, fijado $\varepsilon>0$, considerando particiones $P'$ y $P''$ de $[a,c]$ y $[c,b]$ respectivamente tales que

$$U(f,P')-L(f,P') \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad U(f,P'')-L(f,P'') < \frac{\varepsilon}{2} \;,$$

si se elige $P=P'\cup P''$, que es una partición de $[a,b]$, como antes resulta

$$L(f,P) \;=\; L(f,P')+L(f,P'') \quad \text{y} \quad U(f,P) \;=\; U(f,P')+U(f,P'') \;,$$

de modo que, restando miembro a miembro ambas igualdades,

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) \;&=\; \big(U(f,P')+U(f,P'')\big) - \big(L(f,P')+L(f,P'')\big) \\ &=\; \big(U(f,P')-L(f,P')\big) + \big(U(f,P'')-L(f,P'')\big) \;<\; \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \;, \end{aligned}$$

resultando la integrabilidad de $f$ en $[a,b]$ por la Proposición 2 , siendo además

$$L(f,P) \;=\; L(f,P')+L(f,P'') \;\leqq\; \int_a^c f + \int_c^b f \;\leqq\; U(f,P')+U(f,P'') \;=\; U(f,P) \;,$$

$$\Rightarrow \qquad \int_a^b f \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f \;.$$

*Q.E.D.*

**Ejemplo 8.** *Dada la función de ley $f(x)=x$, por la Proposición 3, se sabe que la misma es integrable sobre cualquier intervalo $[a,b]$. Ahora, por la Proposición 5 y lo mostrado en el Ejemplo 5, para $0<a<b$,*

$$\int_0^b f \;=\; \int_0^a f+\int_a^b f \quad\Rightarrow\quad \int_a^b f \;=\; \int_0^b f-\int_0^a f \;=\; \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\;,$$

*y para $g(x)=x^2$ y $h(x)=x^3$, por el Ejemplo 6 y el Ejercicio 2,*

$$\int_a^b g \;=\; \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} \qquad e \qquad \int_a^b h \;=\; \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}\;.$$

*En la notación con diferenciales, las fórmulas anteriores quedan*

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}\;, \qquad \int_a^b x^2\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3} \qquad e \qquad \int_a^b x^3\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^4}{4}-\frac{a^4}{4}\;.$$

Hasta este punto el símbolo $\int_a^b f$ fue definido sólo para el caso $a<b$. La siguiente definición se constituye como una convención respecto de la notación a utilizar, para los demás casos.

**Definición 6.** *Donde tenga sentido, se definen los símbolos*

$$\int_a^a f \;=\; 0 \qquad \text{y} \qquad \text{para } b<a\;,\; \int_a^b f \;=-\int_b^a f$$

**Observación 4.** *Con estas notaciones, el resultado de la Proposición 5 es válido para a, b y c cualesquiera, incluso si no se verifica que c esté entre a y b, siempre que la función sea integrable en todos los intervalos involucrados, dejándose para demostrar esto en el Ejercicio 9, y en consecuencia, las fórmulas presentadas para las integrales en el Ejemplo 8 también serán válidas para valores a y b cualesquiera.*

**Proposición 6.** *Si $f$ y $g$ son dos funciones integrables en $[a,b]$, y $c\in\mathbb{R}$, entonces las funciones $cf$ y $f+g$ son integrables en $[a,b]$ y valen las igualdades*

$$\int_a^b (cf) \;=\; c\int_a^b f \qquad e \qquad \int_a^b (f+g) \;=\; \int_a^b f+\int_a^b g\;.$$

<u>**Demostración**</u>. Para la primera parte, si $c\geqq 0$ (queda como ejercicio mostrar esta parte para el caso $c<0$) y $P$ es una partición cualquiera de $[a,b]$, es fácil ver que

$$L(cf,P) \;=\; c\,L(f,P) \quad \text{y} \quad U(cf,P) \;=\; c\,U(f,P)\;,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sup\{L(cf,P):P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;&=\; c\,\sup\{L(f,P):P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;=\; c\int_a^b f\\ &=\; c\,\text{ínf}\{U(f,P):P\in\mathscr{P}[a,b]\} \;=\; \text{ínf}\{U(cf,P):P\in\mathscr{P}[a,b]\}\;,\end{aligned}$$

resultando $cf$ integrable, con

$$\int_a^b (cf) \;=\; c\int_a^b f\;.$$

Respecto de la suma, como $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$, entonces ambas están allí acotadas, con lo cual también estará acotada la función $f+g$, y dada $P$ una partición de $[a,b]$, existirán los valores ínfimo y supremo de las funciones $f$, $g$ y $f+g$ en cada intervalo, valiendo las desigualdades del Ejercicio 6,

$$\inf_{[t_{k-1},t_k]} f + \inf_{[t_{k-1},t_k]} g \ \leqq\ \inf_{[t_{k-1},t_k]} (f+g) \ \leqq\ \sup_{[t_{k-1},t_k]} (f+g) \ \leqq\ \sup_{[t_{k-1},t_k]} f + \sup_{[t_{k-1},t_k]} g \ ,$$

de lo cual, multiplicando cada miembro por $\Delta t_k \geqq 0$ y sumando miembro a miembro,

$$L(f,P)+L(g,P) \ \leqq\ L(f+g,P) \ \leqq\ U(f+g,P) \ \leqq\ U(f,P)+U(g,P) \ .$$

Por lo anterior, dado $\varepsilon > 0$ y la integrablidad de $f$ y $g$, existirán particiones $P_f$ y $P_g$ de $[a,b]$ tales que

$$U(f,P_f)-L(f,P_f) \ <\ \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad U(g,P_g)-L(g,P_g) \ <\ \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

y para $P = P_f \cup P_g$, por el Lema 3 , también

$$U(f,P)-L(f,P) \ <\ U(f,P_f)-L(f,P_f) \ <\ \frac{\varepsilon}{2} \quad y \quad U(g,P)-L(g,P) \ <\ U(g,P_g)-L(g,P_g) \ <\ \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad U(f+g,P)-L(f+g,P) \ &\leqq (U(f,P)+U(g,P))-(L(f,P)+L(g,P)) \\ &= \ (U(f,P)-L(f,P))+(U(g,P)-L(g,P)) \ <\ \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \ =\ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

resultando $f+g$ integrable en $[a,b]$, por la Proposición 2. Respecto al valor de la integral, siendo

$$L(f,P)+L(g,P) \ \leqq\ L(f+g,P) \ \leqq\ \int_a^b (f+g) \ \leqq\ U(f+g,P) \ \leqq U(f,P)+U(g,P)$$

$$\text{y} \qquad L(f,P)+L(g,P) \ \leqq\ \int_a^b f + \int_a^b g \ \leqq U(f,P)+U(g,P) \ ,$$

$$\Rightarrow \qquad \left| \int_a^b (f+g) - \left( \int_a^b f + \int_a^b f \right) \right| \ <\ (U(f,P)+U(g,P))-(L(f,P)+L(g,P)) = \varepsilon \ ,$$

concluyendo por la arbitrariedad de $\varepsilon$ que

$$\int_a^b (f+g) \ =\ \int_a^b f + \int_a^b g \ .$$

*Q.E.D.*

**Observación 5.** *Los dos apartados de la proposición anterior permiten afirmar que si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$, entonces la función $f-g$ es integrable en $[a,b]$, resultando la integral de la diferencia igual a la diferencia de las integrales.*

**Observación 6.** *Adaptando lo hecho en el Ejemplo 7 puede mostrarse que la función de ley*

$$h(x) = \begin{cases} c & \text{si} \;\; x = x_0 \\ 0 & \text{si} \;\; x \neq x_0 \end{cases} ,$$

*para $x_0 \in [a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$, con integral nula, y luego, si $f$ es una función integrable en $[a,b]$ y $g$ es una función definida allí tal que $g(x) = f(x)$, salvo en un único punto $x_0$, será $g$ integrable en $[a,b]$ con*

$$\int_a^b g \; = \int_a^b f \; .$$

*En efecto, en ese caso, la función $h = g - f$ es nula salvo en el punto $x_0$ y por lo tanto integrable, con integral nula, y como además es $g = h + f$, será $g$ integrable por ser suma de funciones integrables, y*

$$\int_a^b g \; = \; \int_a^b h + \int_a^b f \; = \; 0 + \int_a^b f \; = \; \int_a^b f \; .$$

*Queda como ejercicio, convencerse y demostrar que, si $f$ es integrable en $[a,b]$ y $g$ es una función definida en $[a,b]$, que coincide con $f$ salvo en un número finito de puntos, también será $g$ integrable en $[a,b]$, coincidiendo el valor de las integrales de $f$ y $g$ sobre $[a,b]$.*

*Finalmente, si una función es continua en un intervalo cerrado, salvo en una cantidad finita de puntos, en donde tiene discontinuidades evitables, o de salto finito (usando también la Proposición 5 para partir el dominio como sea necesario), entonces es integrable en ese intervalo.*

*En el Ejercicio 11 se verá una función integrable, con una cantidad infinita de discontinuidades.*

**Proposición 7.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable y para todo $x$ en $[a,b]$ vale que $m \leqq f(x) \leqq M$, entonces*

$$m(b-a) \; \leqq \; \int_a^b f \; \leqq \; M(b-a) \; .$$

<u>**Demostración**</u>. Bajo las cotas de la hipótesis, son claras las desigualdades $m(b-a) \leqq L(f,P)$ y $U(f,P) \leqq M(b-a)$ para cualquier partición $P$ de $[a,b]$, de donde $m(b-a)$ es una cota inferior del conjunto de sumas inferiores y $M(b-a)$ es una cota superior del conjunto de sumas superiores, y

$$m(b-a) \; \leqq \; \sup\{L(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\} \; = \int_a^b f \; = \; \inf\{U(f,P) : P \in \mathscr{P}[a,b]\} \; \leqq \; M(b-a) \; .$$

*Q.E.D.*

En particular, si $f$ es una función integrable y no negativa, en la proposición anterior puede tomarse $m = 0$, concluyendo que el valor de la integral es también no negativo.

**Corolario 1.** *Si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leqq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f \; \leqq \int_a^b g \; .$$

**Demostración**. Como la función $g-f$ es no negativa e integrable, por lo anterior y la Proposición 5 ,

$$0 \leqq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f \leqq \int_a^b g .$$

*Q.E.D.*

**Proposición 8.** *Si Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y vale*

$$\left|\int_a^b f\right| \leqq \int_a^b |f| .$$

**Demostración**. En el Ejercicio 6 se probará la integrabilidad de la función $|f|$, asumida la integrabilidad de $f$, y dadas las desigualdades $-|f| \leqq f \leqq |f|$, por el Corolario 1, queda

$$-\int_a^b |f| \leqq \int_a^b f \leqq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leqq \int_a^b |f| .$$

*Q.E.D.*

## 5. Cálculo de Áreas

Hasta este punto, el valor de la integral entre dos puntos define el área de la región

$$R = \{(x,y) : a \leqq x \leqq b,\ 0 \leqq y \leqq f(x)\} ,$$

limitada por la gráfica de la función, el eje horizontal y las verticales que pasan por $(a,0)$ y $(b,0)$, siempre que la función sea no negativa. En los casos más generales referidos a funciones no necesariamente no negativas, debe prestarse atención a la interpretación geométrica que se le da a la integral.

**Ejemplo 9.** *Para una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, con $a<0<b$, de ley $f(x)=x^3$, como por ejemplo la representada en la Figura 6, el valor $\int_a^b f$ no representa el área de la región sombreada, que en cambio puede calcularse usando las integrales (observar que los sumandos en la expresión son no negativos),*

$$\mathsf{Área}(R) = -\int_a^0 x^3\ \mathrm{d}x + \int_0^b x^3\ \mathrm{d}x = \frac{a^4}{4} + \frac{b^4}{4} .$$

En general, si $f$ es una función no positiva en el intervalo $[a,b]$, entonces el área de la región $R$ acotada inferiormente por la gráfica de $f$ y superiormente por el eje $x$ (y las verticales $x=a$ y $x=b$) es igual a

$$\mathsf{Área}(R) = -\int_a^b f ,$$

y para una función que alterne el signo, se procederá partiendo el dominio en intervalos adecuados interpretando siempre el área de interés, y utilizando la propiedad aditiva de las integrales.

Por otro lado, si bien la Definición 5 permite asignar áreas a regiones de la forma (**??**), entre la gráfica de una función y el eje $x$, ésta es fácilmente adaptable a regiones más generales, por ejemplo, a regiones comprendidas entre las gráficas de dos funciones, en principio no negativas.

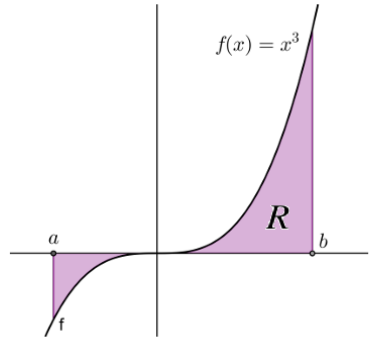


Figura 6: Área buscada en el Ejemplo 9

**Ejemplo 10.** *El área de la región representada en la Figura 7 , comprendida entre las graficas de las funciones no negativas definidas en el intervalo* $[1,2]$ *por las leyes* $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$ *y* $g(x) = 4x^2 - 12x + 10$ *(continuas y luego integrables), descripta algebraicamente como*

$$R \;=\; \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1\ \leqq x \leqq\ 2\ ,\ -2x^2 + 6x - 4 \leqq y \leqq\ 4x^2 - 12x + 10\ \}$$

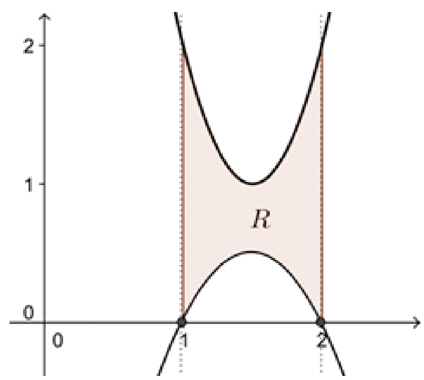


Figura 7: Área buscada en el Ejemplo 10

*puede calcularse mediante la resta del área de la región por debajo de g y la del área por debajo de* $f$*,*

$$\text{Área}(R) \;=\; \int_1^2 g \;-\int_1^2 f \;=\; \int_1^2 (g-f) = \int_1^2 (6x^2 - 18x + 14)\ \mathrm{d}x$$

*y combinando las partes de la Proposición 6 y lo alcanzado en los Ejemplos 3 y 8 , queda*

$$\int_1^2 (6x^2 - 18x + 14)\ \mathrm{d}x \;=\; 6\int_1^2 x^2\ \mathrm{d}x - 18\int_1^2 x\ \mathrm{d}x + \int_1^2 14\ \mathrm{d}x$$

$$=\; 6\left(\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right) - 18\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) + 14(2-1) \;=\; 14 - 27 + 14 \;=\; 1\ .$$

En este punto, puede observarse que la expresión del área como la integral de la diferencia de las dos funciones no negativas que definen a la región, tiene igual sentido si las funciones asumen valores no necesariamente no negativos. En efecto, si $f$ y $g$ son funciones integrables (por lo tanto acotadas) en el intervalo $[a,b]$, y allí es $f \leqq g$, como en la Figura 8, eligiendo un número $c$ tal que $f+c$ y $g+c$ sean no negativas sobre $[a,b]$, es claro que la región limitada inferiormente por $f$ y superiormente por $g$ tiene igual área que la región limitada inferiormente por $f+c$ y superiormente por $g+c$, de manera que

$$\text{Área}(R) \;=\; \int_a^b ((g+c)-(f+c)) \;=\; \int_a^b (g-f)\,.$$

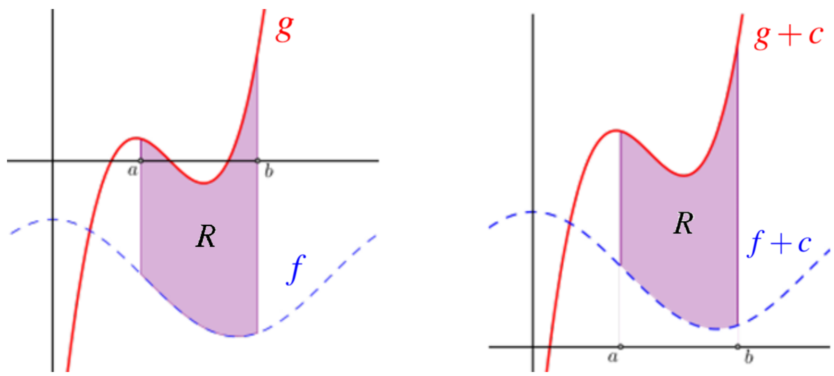


Figura 8: Área entre curvas genéricas

**Ejemplo 11.** *Para buscar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones de leyes* $g(x) = x+1$ *y* $f(x) = x^2-2x-3$*, sombreada en la Figura 9 se comienza observando los puntos de intersección* $(-1,0)$ *y* $(4,5)$*, y dada la integrabilidad de las funciones* $f$ *y* $g$ *en el intervalo* $[-1,4]$*, se calcula*

$$\text{Área}(R) \;=\; \int_{-1}^{4} (g-f)(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{-1}^{4} (-x^2+3x+4)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\left(\frac{4^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) + 3\left(\frac{4^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) + 4\,(4-(-1)) \;=\; \frac{125}{6}\,.$$

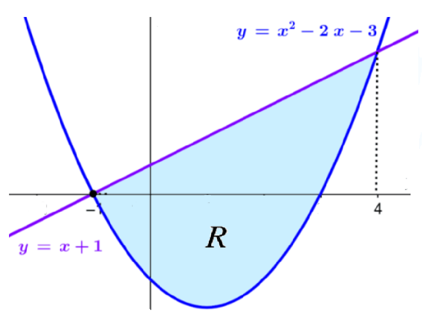


Figura 9: Área buscada en el Ejemplo 11

Queda concluir el estudio del cálculo de área entre gráficas, con el caso de funciones que alternen el signo de la diferencia. Si bien esto puede ser también hecho a continuación, va a hacerse en la unidad dedicada específicamente a Aplicaciones del Cálculo Integral más adelante, donde será posible ejemplificar sobre una familia amplia de funciones integrables.

## 6. El Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

En esta parte se analiza el concepto de valor medio de una función integrable, definido a continuación.

**Definición 7.** *Si $f$ es una función integrable en $[a,b]$, se define el **valor medio** de $f$ sobre $[a,b]$, como el número*

$$\mu \ = \ \frac{1}{b-a} \ \int_a^b f \ .$$

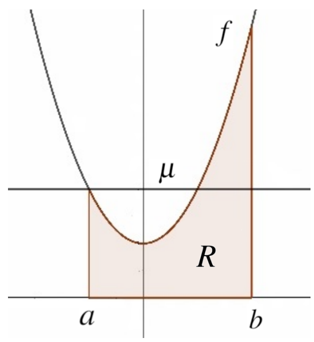


Figura 10: Valor medio de funciones no negativas

De manera geométrica, como se ilustra en la Figura 10, si $f$ es una función no negativa, el valor $\mu$ es tal que, sobre $[a,b]$, el área de la región $R$ comprendida entre la gráfica de $f$ y el eje $x$, coincide con el área del rectángulo de base $b-a$ y altura $\mu$, de la expresión, notando que

$$\mu \ = \ \frac{1}{b-a} \ \int_a^b f \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b f \ = \ \mu \ (b-a) \ .$$

Dada una partición $P_n$ regular de $[a,b]$ en $n$ intervalos de longitud $h = \frac{b-a}{n}$, eligiendo $c_k \in [t_{k-1}, t_k]$, el valor

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k \ = \ \sum_{k=1}^{n} f(c_k)h$$

es la suma inferior de $f$ asociada a $P$ si $f(c_k)$ es el mínimo (si no existe el mínimo, sería un valor arbitrariamente cerca del ínfimo) de $f$ en $[t_{k-1}, t_k]$, la suma superior si $f(c_k)$ es el máximo (arbitrariamente cercano al supremo) o una suma intermedia si $f(c_k)$ es un valor cualquiera, y cuanto mayor sea la cantidad de puntos de la partición, menor será $h$ y la suma planteada será una mejor aproximación del valor $\int_a^b f$, y como $nh = b-a$,

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)}{n} \ = \ \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\ h}{n\ h} \ \approx \ \frac{1}{b-a}\int_a^b f \ ,$$

interpretando al valor medio de $f$ como la media aritmética de los valores elegidos de $f$, mejorando la aproximación conforme se tomen cada vez más valores.

**Proposición 9.** *Si $f$ es una función continua en $[a,b]$, entonces existe $\xi \in [a,b]$ en donde $f$ alcanza su valor medio, esto es*

$$f(\xi) \;=\; \mu \;=\; \frac{1}{b-a}\;\int_a^b f\,.$$

**Demostración**. Notar en primer lugar que una función continua en un intervalo cerrado alcanza sus valores mínimo y máximo absolutos, y, para $m$ y $M$ dichos valores, quedan el lado izquierdo de la implicancia por la Proposición 7, y el derecho por ser $b-a>0$,

$$m(b-a) \;\leqq\; \int_a^b f \;\leqq\; M(b-a) \quad\Rightarrow\quad m \;\leqq\; \frac{1}{b-a}\int_a^b f \;\leqq\; M\,.$$

De lo anterior sigue que el número $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b$ es un valor comprendido entre el mínimo y el máximo de la función $f$ continua en $[a,b]$ y el Teorema de los Valores Intermedios para Funciones Continuas, garantiza la existencia de $\xi \in [a,b]$ (en realidad se puede precisar diciendo que éste está comprendido entre los valores en donde $f$ alcanza el mínimo y el máximo), de manera que

$$f(\xi) \;=\; \mu \;=\frac{1}{b-a}\int_a^b f\,.$$

*Q.E.D.*

En el Ejercicio 14 se propone demostrar el siguiente resultado, conocido como Teorema del Valor Medio Generalizado (o Ponderado) del Cálculo Integral.

**Proposición 10.** *Si $f$ y $g$ son dos funciones definidas en $[a,b]$, tales que $f$ es continua y $g$ es integrable y no cambia de signo, entonces, existe $\xi \in [a,b]$, tal que*

$$f(\xi) \;=\; \frac{1}{\int_a^b g}\;\int_a^b fg \quad \text{o, equivalentemente} \quad \int_a^b fg \;=\; f(\xi)\int_a^b g\,.$$

## 7. Ejercicios

1. Utilizar particiones regulares en 3, 4 y 5 subintervalos del intervalo $[1,2]$ para acotar inferior y superiormente el área de la región $R(f)=\{(x,y): 1\leqq x\leqq 2\;,\;0\leqq y\leqq x^3-x^2\}$.

2. Mostrar que si para una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada, vale

$$\sup\{L(f,P)\;:\;P\in\mathscr{P}[a,b]\;,\;\text{regular}\} \;=\; \text{ínf}\{U(f,P)\;:\;P\in\mathscr{P}[a,b]\;,\;\text{regular}\}\;,$$

   resulta $f$ integrable en $[a,b]$, y el valor de la integral es el único número real mayor que todas las sumas inferiores y menor a todas las superiores, al considerar el conjunto de las particiones regulares.

3. Mostrar que la función $f:[0,b]\to\mathbb{R}$, con $b>0$, de ley $f(x)=x^3$ es integrable, y utilizando la fórmula válida para $n\in\mathbb{N}$, $1+2^3+\cdots+n^3 \;=\; \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$, concluir el valor

$$\int_0^b x^3 \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^4}{4}\;.$$

4. 
   *a*) Si $f$ es una función integrable en $[0,b]$, con $b>0$, probar que la función $g$ definida en $[-b,0]$ de ley $g(x)=f(-x)$ es integrable, siendo $\int_{-b}^{0} g=\int_0^b f$, y en consecuencia, la función en el intervalo $[-b,0]$ de ley $h(x)=-f(-x)=-g(x)$ es también integrable, y vale $\int_{-b}^{0} h=-\int_0^b f$.

   *b*) Concluir que si $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable impar, entonces $\int_{-b}^{b} f=0$, y si es integrable y par, vale $\int_{-b}^{b} f=2\int_0^b f$

5. Utilizar la primera parte del ejercicio anterior, generalizar lo encontrado en el Ejemplo 8 mostrando que para $b<0$, las funciones de leyes $f_n(x)=x^n$, para $n=1,2,3$ son integrables en $[b,0]$, valiendo

$$\int_b^0 x^n \,\mathrm{d}x \;=-\frac{b^{n+1}}{n+1}$$

   y concluir que para cualesquiera $a<b\in\mathbb{R}$, cada $f_n$ es integrable en $[a,b]$, con

$$\int_a^b f_n \;=\; \int_a^b x^n \,\mathrm{d}x \;=\; \frac{b^{n+1}}{n+1}-\frac{a^{n+1}}{n+1}\;.$$

6. Si $f$ y $g$ son dos funciones acotadas en $[a,b]$, mostrar que

   *a*) para $c\in\mathbb{R}$, la función $cf$ es acotada, y para $c>0$ valen

$$\inf_{x\in[a,b]}(cf)(x) \;=\; c\inf_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{y} \qquad \sup_{x\in[a,b]}(cf)(x) \;=\; c\sup_{x\in[a,b]} f(x)\;,$$

   y analizar cómo quedan las igualdades anteriores en el caso $c<0$.

   *b*) $f+g$ es una función acotada en $[a,b]$, y valen

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x)+\inf_{x\in[a,b]} g(x) \;\leqq\; \inf_{x\in[a,b]}(f+g)(x) \quad \text{y} \quad \sup_{x\in[a,b]}(f+g)(x) \;\leqq\; \sup_{x\in[a,b]} f(x)+\sup_{x\in[a,b]} g(x)\;.$$

   *c*) $|f|$ es acotada en $[a,b]$, y vale

$$\sup_{x\in[a,b]}|f|(x)-\inf_{x\in[a,b]}|f|(x) \;\leqq\; \sup_{x\in[a,b]} f(x)-\inf_{x\in[a,b]} f(x)\;,$$

   y utilizar esto para probar que si la función $f$ es integrable en $[a,b]$, también lo es la función $|f|$.

7. Probar que si $f$ es una función integrable en el intervalo cerrado que definen dos números reales $a$ y $b$ (donde no necesariamente es $a<b$), y allí es $|f|\leqq M$, entonces

$$\left|\int_a^b f\right| \;\leqq\; M\,|b-a|\;.$$

8. Si $f$ es una función continua en $[a,b]$, tal que, $\int_a^b f = 0$, probar que

    *a*) $f$ tiene al menos un cero en $[a,b]$, y

    *b*) si $f$ es no negativa (o no positiva) en $[a,b]$, entonces $f(x) = 0$ en todo $x \in [a,b]$.

    Analizar la validez de los enunciados, si se asume la integrabilidad de $f$ pero no su continuidad.

9. *a*) Probar que si $f$ es una función integrable en cualquier intervalo cerrado de $\mathbb{R}$, para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{R}$ (sin ningún orden en particular), vale

$$\int_a^b f \;=\; \int_a^c f + \int_c^b f \,.$$

    *b*) Mostrar que si $f$ es integrable en un intervalo $[a,b]$, es también integrable en todo $[c,d] \subseteqq [a,b]$.

10. Demostrar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función no decreciente, y $P_n$ es una partición regular en $n$ subintervalos del intervalo $[a,b]$, entonces

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) \;=\; \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a))\,,$$

    y usar esto para concluir que $f$ es integrable en $[a,b]$.

11. Mostrar que la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de ley

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \left[x^{-1}\right]^{-1} & \text{si } \; x \neq 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0 \end{cases} \,,$$

    tiene una cantidad infinita de discontinuidades y probar que es integrable en su dominio.

12. En cada caso, determinar el área de las regiones encerradas por las respectivas curvas.

    *a*) $y = |x| + |x-1|\,,\; y = 0\,,\; x = -1\,,\; x = 2.$

    *b*) $y = x^2\,,\; y = -x^2 + 4x.$

    *c*) $x - y^2 = 0\,,\; x + 2y^2 = 3.$

    *d*) $x = y^2 - y\,,\; x = 2y^2 - 2y - 6.$

13. Hallar el o los valores de la Proposición 9 para la función $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de ley

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{si} \quad -1 \leqq x < 0 \\ x^3 & \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \end{cases} \,.$$

14. Demostrar el Teorema del Valor Medio Generalizado del Cálculo Integral, Proposición 10.

## Apéndice. Continuidad Uniforme

Por definición, una función $f : A \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0$ interior a su dominio, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende de $\varepsilon$, y en principio también del punto $x_0$ en donde se está analizando la propiedad, tal que

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \,, \tag{3}$$

y se concluye diciendo que es continua en el intervalo, si es continua en cada punto del mismo.

Por ejemplo, para la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de ley $f(x) = 2x$, en cualquier $x_0 \in (0,1)$, dado $\varepsilon > 0$, es claro que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ verifica la propiedad, y que este valor $\delta$ sirve, independiente del punto $x_0$. Del mismo modo, ese $\delta$ sirve para la continuidad lateral en los extremos del intervalo, y se tiene la continuidad de la función.

Por otro lado, si analizará la función $g : (0,1] \to \mathbb{R}$, de ley $g(x) = \frac{1}{x}$ que es sabida continua en cada punto de su dominio. Para ella, siendo continua en el punto $x_0 = \frac{1}{2}$, dado $\varepsilon = 1$, puede verse que, por ejemplo, $\delta = \frac{1}{6}$ sirve garantizar (3) . Ahora bien, pasando a pensar en el punto $x = \frac{1}{7}$, dado el mismo $\varepsilon = 1$, no puede utilizarse el mismo $\delta = \frac{1}{6}$ para asegurar la condición. En ese caso, el intervalo definido contendría puntos donde la función se vuelve arbitrariamente grande, violando la desigualdad derecha de (3) . Es necesario entonces, achicar $\delta$ para lograr asegurar la cota, y el argumento anterior puede repetirse para observar que, en el caso de la función $g$, dado $\varepsilon = 1$, el valor de $\delta$ que debe elegirse para asegurar la continuidad en un punto $x_0$, depende no sólo de $\varepsilon$ sino también de $x_0$, debiéndose elegir valores cada vez más chicos, si $x_0$ es cada vez más cercano a 0.

En el caso de la función $f$, en donde dado $\varepsilon$, el valor $\delta$ depende sólo de $\varepsilon$ y no de $x_0$, se dice que la continuidad es uniforme, y en el segundo, que no lo es.

**Definición 8.** *Una función $f : A \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua en un conjunto A, si dado $\varepsilon > 0$, existe un valor $\delta > 0$, de modo que, para cualesquiera $x, y \in A$,*

$$|x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \,.$$

De la definición de continuidad uniforme, es inmediato observar que si una función es uniformemente continua en un conjunto, es continua en cada uno de sus puntos. La propiedad de continuidad estudiada al principio de los cursos de Análisis es una característica local de las funciones. Una función es continua o no, en un punto particular, y ello es determinado estudiando el valor de la función en entornos del punto en cuestión. En cambio, la continuidad uniforme es una propiedad global, ya que compara dos puntos cualesquiera en el dominio. C. Heine fue quien definió la continuidad y también demostró que si una función es continua en un conjunto cerrado y acotado, entonces allí es uniformemente continua. Se enuncia el resultado a continuación, posponiendo la prueba para el final del curso, cuando se trabaje con Sucesiones Numéricas.

**Proposición 11.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es uniformemente continua.*