UNIDAD 3: Técnicas de integración

1 Técnicas de cálculo de integrales indefinidas.

Llamamos *integral indefinida* de una función f al conjunto de todas las primitivas de f, notamos $\int f(x)dx$. Probamos que dos primitivas cualesquiera de f difieren en una constante, así si F es una primitiva de f

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

1.1 Tabla de integrales inmediatas.

$\int \alpha dx = \alpha x + c, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq 1$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$
$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos x + c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \operatorname{cotan} x + c$
$\int \cosh x dx = \sinh x + c$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}dx = \tanh x + c$
$\int \sinh x dx = \cosh x + c$	

1.2 Integración por descomposición.

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

Ejemplos:

1) $\int \left(\frac{e^x}{2} + 3\sin x\right) dx = \frac{1}{2}e^x - 3\cos x + c$

2) $\int \frac{x^3+4x-2}{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 + 4\ln\lvert x\rvert + \frac{2}{x} + c$

3) $\int \frac{3+x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{1+x^2+2}{1+x^2}dx = x + 2\arctan x + c$

4) $\int \tan^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \tan x - x + c$

1.3 Integración por sustitución.

Teorema 1.1 (método de sustitución o cambio de variable)**.** *Sea f continua en I. Sea g una función derivable con derivada continua en J tal que $g(J) \subset I$. Entonces*

$$\int f\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right) dx \underset{t=g(x)}{=} \int f\left(t\right) dt$$

Dem: Sea F una primitiva de f, entonces: $\int f\left(t\right) dt \underset{t=g(x)}{=} F(g(x)) + C = \left(F \circ g\right)\left(x\right) + C$.

Por otra parte, $\left[\left(F \circ g\right)\left(x\right)\right]' = F'\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right)$ de modo que $F \circ g$ es una primitiva de $f\left(g\left(x\right)\right) g'\left(x\right)$.

Ejemplo 1.2.

1. $\int \sin^5(x)\cos(x)\, dx$, donde si pensamos $g(x) = \sin(x)$ y $f(u) = u^5$, entonces tomando $t = g(x)$ resulta $dt = g'(x)dx$.

$$\int \sin^5(x)\cos(x)\, dx = \int t^5\, dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}\sin^6(x) + C, \text{ con } C \in \mathbb{R}.$$

Observación:

$$\int_a^b \sin^5(x)\cos(x)\, dx = \int_{\sin a}^{\sin b} t^5\, dt = \frac{1}{6}t^6\Big|_{\sin a}^{\sin b} = \frac{1}{6}\sin^6 b - \frac{1}{6}\sin^6 a.$$

2. Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2}\, dx$, consideremos $u = 1 + x^2$, de donde $du = 2x\, dx$. El factor 2 que aparece no es problema. Con estas sustituciones obtenemos:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2}\ln(u) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

1.4 Integración por partes.

Teorema (integración por partes): Sean f y g derivables con derivada continua en I. Entonces

$$\int f\left(x\right) g'\left(x\right) dx = f(x)g(x) - \int f'\left(x\right) g(x) dx$$

Ejemplo 1.3. En los siguientes casos, veremos ejemplos de aplicación del teorema. En caso de que ambas funciones pudieran actuar como la g' en el teorema, no hay una regla para decidir cuál usar. La práctica ayuda a ver de qué modo se simplifica de alguna manera la expresión para proceder al cálculo de la integral que queremos.

1. $\int xe^x\, dx = xe^x - \int 1\, e^x\, dx = xe^x - e^x$,

   donde en la primera integral e^x fue considerada como la g' del teorema y en la integral a la derecha, tuvimos que derivar la función $f(x) = x$ cuya derivada es 1.

2. Este ejemplo muestra un artificio que suele resultar útil en algunos casos:

   $\int \ln(x)\, dx = 1\ \ln(x) - \int x\, \frac{1}{x}\, dx = \ln(x) - x$.

2 Primitivas de las funciones racionales

2.1 Funciones racionales elementales

a) Calculamos $\int \dfrac{dx}{(x-a)^n}$ para $n \geq 1$.

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \dfrac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C = \dfrac{1}{-n+1}\ \dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C & \text{si } n > 1, \\ \\ \ln|x-a| + C & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

b) Calculamos $\int \dfrac{y}{(y^2+1)^n}\, dy$ para $n \geq 1$.

Usamos la sustitución $u = y^2 + 1$ con $du = 2y\, dy$. Entonces,

$$\int \frac{y}{(y^2+1)^n}\, dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^n}\, du = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-n)}\ \dfrac{1}{u^{n-1}} + C = \dfrac{1}{2(1-n)}\ \dfrac{1}{(y^2+1)^{n-1}} + C, & \text{si } n > 1, \\ \\ \dfrac{1}{2}\ln|u| + C = \dfrac{1}{2}\ln(y^2+1) + C & \text{si } n = 1, \end{cases}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

c) Calculamos $I_n = \int \dfrac{1}{(y^2+1)^n}\, dy$ para $n \geq 1$.

Para $n > 1$ tenemos

$$I_n = \int \frac{1+y^2-y^2}{(y^2+1)^n}\, dy = \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\, dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\, dy = I_{n-1} - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\, dy. \tag{1}$$

Para el cálculo de la segunda integral aplicamos integración por partes. Llamamos $u = y$ y $dv = \dfrac{y}{(y^2+1)^n}\, dy$, resultando $v = \dfrac{1}{2(-n+1)}\ \dfrac{1}{(y^2+1)^{n-1}}$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{y^2}{(y^2+1)^n}\, dy &= \frac{1}{2(-n+1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} - \frac{1}{2(-n+1)} \int \frac{1}{(y^2+1)^{n-1}}\, dy \\ &= \frac{-1}{2(n-1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\ I_{n-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Reemplazando por (2) en (1) nos queda

$$I_n = I_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\ I_{n-1} + \frac{1}{2(n-1)}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}} = \frac{2n-3}{2n-2}\ I_{n-1} + \frac{1}{2n-2}\ \frac{y}{(y^2+1)^{n-1}}.$$

Para el caso $n = 1$ tenemos

$$I_1 = \int \frac{1}{y^2+1}\, dy = \arctan y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

d) Consideremos el caso general

$$\int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx \text{ para } n \geq 1,\ a>0 \text{ y } \Delta = b^2-4ac<0.$$

Notemos que, bajo estas hipótesis, $ax^2+bx+c>0$.

Recordemos que $ax^2+bx+c = a\Big(\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\Big) = \frac{-\Delta}{4a}\Big(\Big(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\Big)^2+1\Big)$.

Haciendo el cambio de variable $y=\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}$, o sea, $x=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,y-\frac{b}{2a}$, tenemos que

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{-\Delta}{4a}\big(y^2+1\big), \\ px+q &= p\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,y - p\,\frac{b}{2a}+q = ry+s, \\ dx &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}\,dy. \end{aligned}$$

Aplicando esta sustitución en la integral nos queda

$$\begin{aligned} \int \frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}\,dx &= \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{(-\Delta)^{\frac{2n-1}{2}}}\int \frac{ry+s}{(y^2+1)^n}\,dy = \\ &= \frac{2^{2n-1}a^{n-1}}{(-\Delta)^{\frac{2n-1}{2}}}\Big(r\int \frac{y}{(y^2+1)^n}\,dy + s\int \frac{1}{(y^2+1)^n}dy\Big). \end{aligned}$$

Para completar los cálculos utilizamos los casos b) y c). Finalmente, debemos escribir todos los términos de la expresión obtenida en función de la variable x.

2.2 Funciones racionales

Nos proponemos encontrar las primitivas de la función racional $f(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ donde P_m y Q_n son polinomios de grados m y n, respectivamente.

a) $\mathbf{m \geq n}$.

Al realizar el cociente entre ambos polinomios nos queda $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = C(x)+\frac{R(x)}{Q_n(x)}$ donde $\mathrm{gr}(R)<n$. Luego,

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\,dx = \int C(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q_n(x)}\,dx.$$

b) $\mathbf{m < n}$.

i) **El denominador es un producto de factores lineales distintos**:

$$Q_n(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Aplicando descomposición en fracciones simples tenemos

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x - x_n}.$$

Luego, nos queda

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}\, dx = A_1 \ln|x - x_1| + A_2 \ln|x - x_2| + \ldots + A_n \ln|x - x_n| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como ejemplo resolvemos $\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}$.
Observamos que $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$ y la función racional podemos escribirla así:

$$\frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x - 1} + \frac{A_3}{x + 2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = 2$, $A_3 = \frac{1}{2}$. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 + 5x - 1}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx + 2\int \frac{1}{x-1}\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\ln|x| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

ii) **El denominador es un producto de factores lineales no todos distintos**.

Por ejemplo, calculemos $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2}\, dx$.
En este caso debemos encontrar $A_1,\ A_2,\ A_3$ tales que

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A_1 = \frac{3}{2}$, $A_2 = -\frac{1}{2}$, $A_3 = -1$. Finalmente tenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)(x+1)^2}\, dx &= \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\, dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\, dx \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

En general, si un factor lineal de la forma $(x + a)$ aparece p veces en el denominador, para este factor debemos tomar una suma de p términos, es decir,

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{A_k}{(x+a)^p}. \tag{3}$$

iii) **El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles ninguno de los cuales se repite**.

Por ejemplo, calculemos $\int \dfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx$.

El denominador puede descomponerse como $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, donde x^2+x+1 es irreducible. Luego tenemos la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B\ x+C}{x^2+x+1}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A=1,\ B=2,\ C=3$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx.$$

La primera integral del segundo miembro es $\ln|x-1|$. Para calcular la segunda integral escribimos

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx+\int \frac{2}{x^2+x+1}\,dx\\ &= \ln|x^2+x+1|+2\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx.\end{aligned}$$

Resolvamos, ahora, la última integral.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\quad C\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, nos queda

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx=\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,$$

y, finalmente ,

$$\int \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx=\ln|x-1|+\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

iv) **El denominador contiene factores cuadráticos irreducibles algunos de los cuales están repetidos**.

Este caso es análogo a ii). Suponemos que es posible una descomposición de $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ en fracciones simples, de forma tal que por cada factor simple de $Q_n(x)$ tenemos una suma del tipo (3) y por cada factor cuadrático irreducible tenemos una suma del tipo

$$\sum_{k=1}^{s}\frac{B_k\ x+C_k}{(x^2+bx+c)^k}. \qquad (4)$$

Resolvamos la siguiente integral

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx.$$

La descomposición en fracciones simples es de la forma

$$\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B\ x + C}{x^2+2} + \frac{D\ x + E}{(x^2+2)^2}.$$

Haciendo los cálculos correspondientes hallamos que $A = \frac{1}{3},\ B = \frac{2}{3},\ C = -\frac{1}{3},\ D = -1,\ E = 0.$

Por lo tanto, nos queda

$$\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\ dx + \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2+2}\ dx - \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\ dx,$$

Aplicando los casos anteriores llegamos, para $C \in \mathbb{R}$, a:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+2)^2}\ dx &= \\ &= \frac{1}{3}\ \ln|x-1| + \frac{1}{3}\ \ln(x^2+2) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\ \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\ (x^2+2)^{-1} + C.\end{aligned}$$

3 Otras técnicas de sustitución

a) Si el integrando contiene $\sqrt[n]{g(x)}$, una sustitución posible es $u = \sqrt[n]{g(x)}$.

Por ejemplo, planteamos calcular $I = \int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\ dx$.

Aplicamos la sustitución $u = \sqrt{x+4}$. En este caso tenemos

$$x = u^2 - 4, \qquad dx = 2\ u\ du.$$

Luego, $I = \int \frac{u}{u^2-4}\ 2\ u\ du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\ du = 2\int 1\ du + 2\int \frac{4}{u^2-4}\ du = 2\ u + 8\int \frac{1}{u^2-4}\ du.$

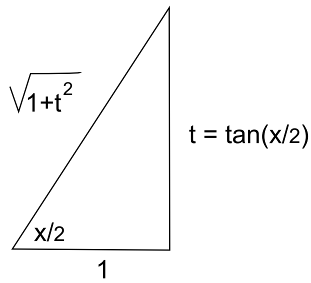
La última integral podemos resolverla usando descomposición en fracciones simples. Finalmente, nos queda

$$\begin{aligned}I &= 2\ u + 2\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C \\ &= 2\ \sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C,\end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

b) Si el integrando contiene $\sqrt[n]{g(x)}$ y $\sqrt[m]{g(x)}$, una sustitución posible es $u = \sqrt[p]{g(x)}$ donde $p = m.c.m.(n, m)$.

c) Toda función racional de $\sin x$ y $\cos x$ pasa a ser una función racional ordinaria si hacemos la sustitución $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.



$$x = 2\ \arctan(t), \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt,$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\sin(x) = 2\ \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Como ejemplo, calculemos $I = \int \dfrac{1}{3\ \sin x - 4\ \cos x}\ dx$.
Aplicamos la sustitución anterior y nos queda

$$I = \int \frac{1+t^2}{6t-4(1-t^2)}\ \frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{2}{6t-4+4t^2}\ dt = \int \frac{1}{2t^2+3t-2}\ dt$$

Observemos que $2t^2+3t-2 = 2(t+2)(t-\frac{1}{2}) = (t+2)(2t-1)$. Si planteamos

$$\frac{1}{2t^2+3t-2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{2t-1}$$

tenemos que $A = -\dfrac{1}{5}$ y $B = \dfrac{2}{5}$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{5}\ \int \frac{dt}{t+2} + \frac{2}{5}\int \frac{dt}{2t-1} \\ &= -\frac{1}{5}\ \ln|t+2| + \frac{1}{5}\ln|2t-1| + C \\ &= -\frac{1}{5}\ \ln\left|\tan(\frac{x}{2})+2\right| + \frac{1}{5}\ln\left|2\tan(\frac{x}{2})-1\right| + C, \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$.

d) Sustituciones trigonométricas

En la siguiente tabla, presentamos las sustituciones trigonométricas que se pueden aplicar a las expresiones radicales dadas. Debemos tener en cuenta que las restricciones para el parámetro t en cada caso, permiten definir la relación inversa, es decir, escribir t en función de x.

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin t, \quad -\frac{\pi}{2}\leq t\leq \frac{\pi}{2}$	$1-\sin^2 t=\cos^2 t$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan t, \quad -\frac{\pi}{2}< t< \frac{\pi}{2}$	$1+\tan^2 t=\sec^2 t$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec t, \quad 0\leq t<\frac{\pi}{2}$ o $\pi\leq t<\frac{3\pi}{2}$	$\sec^2 t-1=\tan^2 t$

A modo de ejemplo, planteamos calcular $I=\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

Primero aplicamos la sustitución $u=2x$ o equivalentemente, $x=\frac{1}{2}u$ y $dx=\frac{1}{2}\,du$. En este caso nos queda $I=\frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$.

Ahora hacemos $u=\sqrt{5}\sin t$ siendo $du=\sqrt{5}\cos t\,dt$. Tenemos, entonces,

$$I=\frac{1}{8}\int \frac{(\sqrt{5}\sin t)^2}{\sqrt{5-5\sin^2 t}}\sqrt{5}\cos t\,dt=\frac{5}{8}\int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{5}\cos t}\sqrt{5}\cos t\,dt=\frac{5}{8}\int \sin^2 t\,dt.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
I&=\frac{5}{8}\int \sin^2 t\,dt\\
&=\frac{5}{8}\Big(-\frac{1}{2}\cos t\;\sin t+\frac{1}{2}\,t\Big)+C\\
&=-\frac{1}{16}\,\sqrt{5-5\sin^2 t}\,\sqrt{5}\sin t+\frac{5}{16}\,t+C\\
&=-\frac{1}{16}\,\sqrt{5-u^2}\,u+\frac{5}{16}\,\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{5}}\right)+C\\
&=-\frac{1}{16}\,\sqrt{5-4x^2}\,2x+\frac{5}{16}\,\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)+C\\
&=-\frac{1}{8}\,x\sqrt{5-4x^2}+\frac{5}{16}\,\arcsin\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)+C
\end{aligned}$$

donde $C\in\mathbb{R}$.