1. Probar que la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es nilpotente. Dar la base y su forma de Jordan.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

   (e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (f) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

   (g) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (h) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   (i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

   (j) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (k) $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$,

   (l) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9\times 9}$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotente tal que $\mathrm{rg}(A) = 6$, $\mathrm{rg}(A^2) = 4$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

   (b) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16\times 16}$ tal que $m_A(x) = x^5$, $\mathrm{rg}(A) = 9$, $\mathrm{rg}(A^2) = 5$, $\mathrm{rg}(A^3) = 3$, $\mathrm{rg}(A^4) = 1$ y $\mathrm{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

4. Sean $A_i$ $(1 \leq i \leq 6)$ matrices en $\mathbb{C}^{8\times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i}(x) = x^3$ $(1 \leq i \leq 6)$. ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

5. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$,

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

(f) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$,

(g) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

(h) $A = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$,

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$,

(j) $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 \\ -7 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(k) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

(l) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(m) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$,

(n) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Sea $W \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $W = \text{span}\{e^x, xe^x, x^2e^x, e^{2x}\}$. Sea $\delta : W \to W$ la transformación lineal definida por $\delta f(x) = f'(x)$. Hallar la forma y una base de Jordan para $\delta$.

7. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ las matrices dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si $A$ y $B$ son semejantes.

8. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

   (a) $\chi_A(x) = (x-2)^4(x-3)^2$, y $m_A(x) = (x-2)^2(x-3)^2$,
   (b) $\chi_A(x) = (x-7)^5$, y $m_A(x) = (x-7)^2$,
   (c) $\chi_A(x) = (x-2)^7$, y $m_A(x) = (x-2)^3$,
   (d) $\chi_A(x) = (x-3)^4(x-5)^4$, y $m_A(x) = (x-3)^2(x-5)^2$.

9. Dadas las matrices $A, B \in \mathbf{F}^{n\times n}$, probar que ambas son nilpotentes y que $A$ es semejante a $B$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

10. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Probar que $A$ y $A^t$ son semejantes.