Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2023

Práctica 3: Funciones logarítmica y exponencial.

---

1. Analice el dominio natural de la función de ley $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, y muestre ésta es impar.

2. A partir de las gráfica de las funciones logaritmo natural y exponencial, represente las funciones indicadas, expresando en cada caso su dominio y recorrido (puede usar Maxima):

$$a)\ f_1(x) = \ln(-x)\ , \quad b)\ f_2(x) = \ln|x|\ , \quad c)\ f_3(x) = |\ln x|\ , \quad d)\ f_4(x) = 1 + \ln(x-1)$$

$$e)\ f_5(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad f)\ f_6(x) = \mathrm{e}^{|x|}\ , \quad g)\ f_7(x) = \mathrm{e}^{x-1}\ .$$

3. Indique el dominio y esboce las gráficas de las siguientes funciones

$$a)\ f_1(x) = \log_4(x+1)\ , \quad b)\ f_2(x) = \log_{\frac{1}{5}} x\ , \quad c)\ f_3(x) = 2^x\ , \quad d) f_4(x) = 2^{-x}\ .$$

4. Halle las derivadas de las siguientes funciones, suponiendo que las mismas están definidas para los valores en los cuales su expresión tiene sentido:

$$\begin{array}{lll} a) f_1(x) = \mathrm{e}^{3x^2+5}, & b) f_2(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & c) f_3(x) = \mathrm{e}^{(\cos x)^2}, \\ d) f_4(x) = 3^{2^x}, & e) f_5(x) = 2^{-\operatorname{sen}^2 x}, & f) f_6(x) = \log_{\frac{1}{3}} x\ . \end{array}$$

5. Determine en cada caso, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x_0.

$$a)\ f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}\ ,\ \ x_0 = 1\ , \qquad b)\ f(x) = \ln(\ln x)\ ,\ x_0 = \mathrm{e}\ .$$

6. Las funciones, con dominio en $\mathbb{R}$, de leyes

$$\operatorname{senh} x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\ , \qquad \cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ , \qquad \text{y} \qquad \operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}\ ,$$

se denominan respectivamente, seno hiperbólico, coseno hiperbólico y tangente hiperbólica. Existen muchas analogías entre estas funciones y las corresondientes funciones trigonométricas ordinarias.

a) Demuestre las siguientes identidades, y comparela con las originales

$$i)\ \cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1\ , \qquad ii)\ \operatorname{tgh}^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} = 1,$$

$$iii)\ \operatorname{senh}(x+y) = senhx\ \cosh y + \cosh x\ \operatorname{senh} y\ , \ \ iv)\ \cosh(x+y) = \cosh x\ \cosh y + \operatorname{senh} x\ \operatorname{senh} y\ .$$

b) Halle las derivadas de las funciones trigonométricas hiperbólicas, en función de éstas.

7. Halle todas las funciones continuas f que satisfacen las ecuaciones funcionales

$$a)\ \int_0^x f(t)\,dt = e^x \qquad \text{y} \qquad b)\ f^2(x) = \int_0^x f(t)\frac{1}{1+t^2}\,dt\ .$$

8. La masa de una sustancia radioactiva disminuye a un ritmo proporcional a la cantidad que de ella queda. Si $A(t)$ denota a esta cantidad en el tiempo t y todos los átomos tienen la misma probabilidad de desintegrarse, la pérdida total es proporcional al número de átomos remanentes, y será razonable asumir una velocidad de cambio $A'(t) = -\lambda A(t)$ para algún $\lambda > 0$.

   (a) Halle $A(t)$ en términos de la masa inicial $A_0 = A(0)$.

   (b) Demuestre que existe un número τ para el cual $A(t+\tau) = A(t)/2$, independiente del valor de t. En cada instante, este valor constante resulta igual al tiempo que tarda en decaer la masa a la mitad del valor original, y se lo conoce como semivida del elemento.

9. Coloquialmente suele decirse que las funciones exponenciales crecen más rápido que las potencias, y que éstas lo hacen más rápido de los logaritmos. Muestre estas afirmaciones, entendidas como los siguientes límites, para valores a y b positivos,

$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0\ , \quad \text{b)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{\mathrm{e}^{ax}} = 0\ , \quad \text{c)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = \infty \quad \text{y} \quad \text{d)}\ \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x^b} = \infty\ .$$

Ayuda. Para a), observando que si $c > 0$ y $t \geq 1$ vale $t^{-1} \leq t^{-1+c}$, concluya que para $x \geq 1$,

$$0 < \ln x \leq \frac{x^c - 1}{c} < \frac{x^c}{c}\ , \quad \text{en consecuencia} \quad 0 < (\ln x)^b < \frac{x^{bc}}{c^b} \quad \text{y} \quad 0 < \frac{(\ln x)^b}{x^a} < \frac{x^{bc-a}}{c^b}\ .$$

Como esto es independiente del $c > 0$ elija un valor adecuado de éstos para, utilizando el Principio de Intercalación (o Teorema del Sandwich), arribar al objetivo. Concluya la parte b), haciendo un cambio de variables adecuado en el límite de la parte a).