Ejercicio

Si M es un matching en G y P es un camino M-aumentante, entonces el conjunto $M' = M \triangle E(P)$ es un matching y además $|M'| = |M| + 1$.

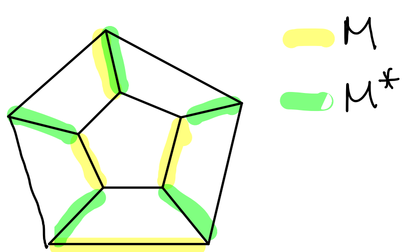
Teorema de Berge

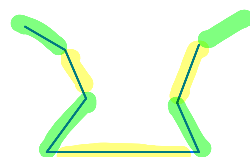
Un matching M en un grafo G es máximo si y sólo si G no posee camino M-aumentante.

D/ $\Rightarrow$) M matching en G y P camino M-aumentante entonces, $M' = M \triangle E(P)$ es un matching de cardinal mayor y entonces M no es máximo.

$\Leftarrow$) Supongamos que M no es máximo y sea M^* matching máximo. Entonces $|M^*| > |M|$

Sea $H = G[M \triangle M^*]$.





$G[M \triangle M^*]$

Cada vértice de H tiene grado 1 o dos (¿Por qué?)

Entonces cada componente conexa de H es un ciclo par con nodos que alternan entre M y M^* o un camino donde alternan las aristas de M y M^*

Como $|M^*| > |M|$, existe un camino en el que comienza con M^* y termina con M^*.
Es decir, un camino M-aumentante en G.

$\blacksquare$

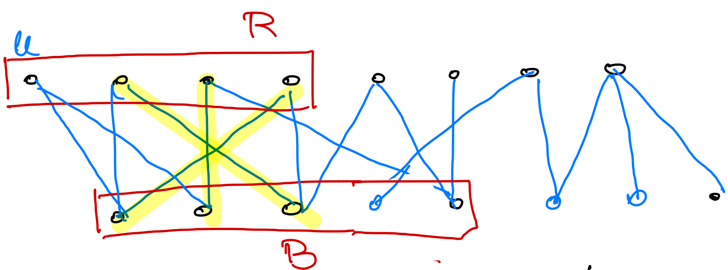
Teorema de Hall

$G[X,Y]$ tiene matching que satura $X \iff$

$|N(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$.

D/ $\Rightarrow$) Sea M matching que satura X. y sea $S \subseteq X$. Como todo nodo de S está en una arista de M, hay al menos tantas aristas como nodos en S y $|S| \leq |N(S)|$.

$\Leftarrow$) Supongamos (por el contrario) que $G[X,Y]$ no tiene un matching que sature X.
Sea M^* matching máximo en G y $u \in X$ que no está saturado por M^*.



Sea Z conjunto de todos los vértices de G a los que puedo alcanzar desde u por caminos M^*-alternantes

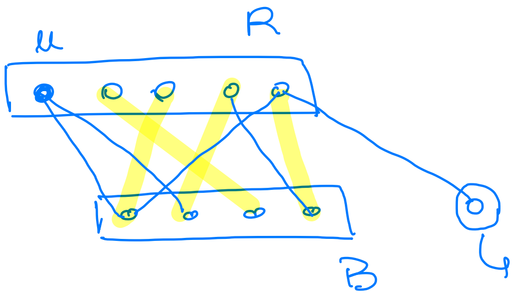
$R = X \cap Z \qquad B = Y \cap Z$.

Estos caminos no pueden ser aumentantes porque M^* es máximo. Por lo tanto, u es el único en Z no saturado por M^*.

Claramente, los vértices de R están matcheados con los de B, excepto por u.

$\therefore |B| = |R| - 1$ y $N(R) \supseteq B$

Es más, $N(R) = B$ pues si R tuviera otro vecino



↳ tendría que estar en B porque habría un camino M^*-alternante hasta él.

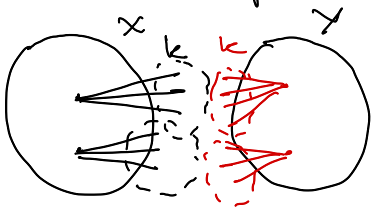
$$\therefore |N(R)| = |B| = |R| - 1 < |R|$$

violando la condición de Hall. $\boxtimes$

Corolario

G bipartito k-regular $\Rightarrow$ existe matching perfecto

D/ Sea X, Y bipartición de $V(G)$.



$|E(G)| = k \cdot |X|$ ya que es k-regular

o bien $k \cdot |Y|$

Entonces,

$k|X| = k|Y| \Rightarrow |X| = |Y|$

Por lo tanto, un matching que satura X (o Y) es un matching perfecto. Veamos que se cumpla la condición de Hall.

Sea $S \subseteq X$ y $E(S)$ aristas con un extremo en S

Como G es k-regular $|E(S)| = k|S|$. Además el otro extremo de las aristas de $E(S)$ están en $N(S)$ y son $k|N(S)|$ en total.

$$\therefore \ |E(S)| = k \cdot |S| \leq k \cdot |N(S)|$$

Es decir, $\forall S$, $|S| \leq |N(S)|$ y existe un matching que satura X. ∎

Teorema König-Egerváry

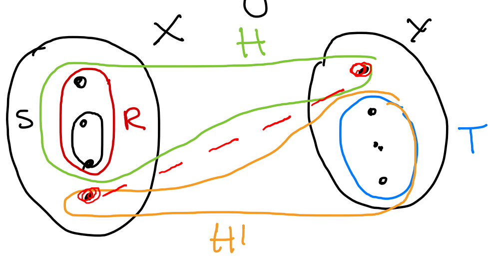
G bipartito $\Rightarrow$ $\beta(G)=\alpha'(G)$.

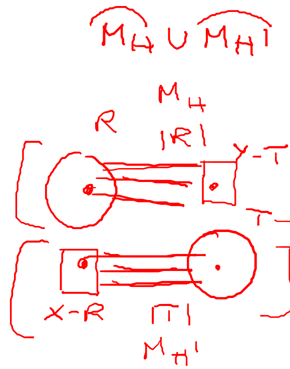
D/ Ya sabemos que $\beta(G) \geq \alpha'(G)$.

Para ver que son iguales vamos a construir un matching de cardinal $\beta(G)$.

Sea F cubrimiento por vértices de mínimo cardinal es decir, $|F|=\beta(G)$.

Sea $R=F\cap X$ y $T=F\cap Y$.





$H=G[R\cup(Y-T)]$ $\quad$ $H'=G[T\cup(X-R)]$,

Como $R\cup T$ es un cubrimiento de aristas por vértices no hay aristas de $(X-R)$ a $(Y-T)$

Sea $S\subseteq R$, si $|N_H(S)|<|S|$

$\underbrace{T \cup N_H(S) \cup (R-S)}$ es un cubrimiento de G

cubre lo mismo que S

Pero este cubrimiento tiene menos elementos que $|F|=\beta(G)$ contradicción. Por lo tanto, $|N_H(S)|\geq|S|$ y se cumple la condición de Hall en H que satura R. Existe M_H matching en H que satura R.

$\therefore |M_H|=|R|$.

Análogamente se puede probar lo mismo para H'

$M_{H'}$ matching en H' que satura T, $|M_{H'}| = |T|$.

Como $V(H)\cap V(H') = \emptyset$, $M = M_H \cup M_{H'}$ es un matching en G con $|M| = \underbrace{|R\cup T|}_{|R|+|T|} = |F|$ como queríamos probar $\blacksquare$