Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Álgebra Lineal (R211 - CE9)
2024

3.2 Espacios con producto interno

El producto por escalar en $\mathbb{R}^n$ nos brindó distintas nociones geométricas: ángulos y ortogonalidad, longitudes y distancias. Las nociones geométricas nos dan herramientas para poder hacer análisis matemático.

En esta sección daremos más estructura a los espacios vectoriales: consideraremos una nueva operación, el producto interno. Se trata de comprender qué características del producto por escalar necesitamos replicar en este contexto de modo tal que podamos definir de forma análoga ángulos, ortogonalidad, longitudes y distancias. En asignaturas posteriores seguramente se verán las consecuencias geométricas y analíticas de tener espacio vectorial con producto interno.

IMPORTANTE: A lo largo de esta sección consideraremos el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. En cada caso y en cada momento habrá que tener mucho cuidado pues realmente es importante si los escalares con los que trabajamos son reales o complejos.

Aclaración: no necesariamente trabajaremos con espacios vectoriales de dimensión finita.

Definición 1 *Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y sea V un $\mathbb{F}$-ev. Un* ***producto interno*** *(pi) sobre V es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ que verifica:*

1. *Si $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces:*
   a) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$,
   b) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$.
2. *Si $u, v \in V$ entonces $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$.*
3. $\langle u, u\rangle > 0$ *si* $u \neq \overline{0}$.

Si en V tenemos un pi, decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un ***espacio con producto interno***.

Observaciones 1
1. *Si consideramos $u = v$ en (ii) tenemos $\langle u, u\rangle = \overline{\langle u, u\rangle}$. Esto nos dice que, no importa si el cuerpo es real o complejo, el escalar $\overline{\langle u, u\rangle}$ siempre es real. Tiene sentido entonces la condición (iii).*
2. *(i) dice que el producto interno es lineal en la primera variable. Juntando (i) y (ii), para la segunda variable resulta que:*
   a) $\langle u, v + w\rangle = \overline{\langle v + w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle} = \overline{\langle v, u\rangle} + \overline{\langle w, u\rangle} = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$,
   b) $\langle u, \alpha v\rangle = \overline{\langle \alpha v, u\rangle} = \overline{\alpha\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\,\overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle$.

   Es decir, en un espacio complejo el producto interno no es lineal en la segunda variable. Si el espacio es real, resulta lineal en la segunda variable.
3. *Si el espacio es real, (ii) dice que el producto interno es simétrico.*
4. *A veces abreviamos producto interno como pi.*
5. *Aunque resulte trivial o elemental, aclaramos la siguiente propiedad de los productos internos: $\langle u, u\rangle = 0$ sii $u \neq \overline{0}$. Esta propiedad se suele describir como el producto interno es no genenerado.*

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 1 *1. El producto escalar en $\mathbb{R}^n$ (que recordamos en la sección anterior) es un pi. EJERCICIO. Es el producto interno canónico de $\mathbb{R}^n$.*

2. En $\mathbb{C}^n$ el producto interno canónico se define similar: $u = (u_1, \dots, u_n), v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle u, v\rangle = u_1\overline{v_1} + \cdots + u_n\overline{v_n} = \sum_{i=1}^{n} u_i\overline{v_i}.$$

EJERCICIO: Verificar que es un pi.

3. En $\mathbb{F}^{n\times n}$ tenemos un producto interno canónico, y lo podemos definir de dos formas (que en definitiva producen la misma fórmula, pero tienen distintas aplicaciones). En primer lugar, como $\mathbb{F}^{n\times n} \simeq \mathbb{F}^{n^2}$, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, definimos

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}.$$

Por otro lado, si definimos la matriz $B^* = \overline{B^t}$, es decir, la conjugada transpuesta de B, cuyas entradads son $[B^*]_{ij} = \overline{b_{ji}}$, tenemos que

$$\langle A, B\rangle = tr(AB^*),$$

donde tr denota la traza de la matriz. Que estas fórmulas son iguales es sencillo: $tr(AB^*) = \sum_{i=1}^{n}[AB^*]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}[B^*]_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$. Que es un pi no hace falta entonces probarlo (o sí?).

4. En el espacio $V = C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R},\ continua\}$ de las funciones continuas definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

EJERCICIO: Verificar que es un pi.

5. En el espacio $V = C([a, b]) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C},\ continua\}$ de las funciones continuas (recordemos que una función compleja es continua si son continuas su parte real e imaginaria como funciones reales) definimos

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

EJERCICIO: Verificar que es un pi.

6. En el espacio de polinomios $\mathbb{F}[x]$ podemos definir un pi de manera similar:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)\overline{q(x)}dx.$$

No hace falta verficarlo (porqué?).

7. Claramente en un mismo espacio vectorial, aún sobre el mismo cuerpo, no hay un sólo producto interno. Por ejemplo, hemos definido para el espacio de polinomios, un pi que depende del intervalo de integración. En el ejemplo tomamos el intervalo $[0, 1]$ pero podríamos haberlo hecho en un intervalo $[a, b]$.

8. Existen muchos productos internos no canónicos. EJERCICIO: verificar que el siguiente es un pi en $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x, y), (x', y')\rangle = xx' - xy' - yx' + 2yy'.$$

Finalmente aclaremos que en la literatura aparecen los siguientes nombres: sea $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi.

- Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ es un espacio euclídeo.
- Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, decimos que $(V, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ es un espacio unitario.

3.3 Geometría en EV: norma, distancia y ángulos

A lo largo de esta sección consideraremos un ev V sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ de los números reales o complejos.

La idea es generalizar algunos conceptos que conocemos de $\mathbb{R}^n$, que hemos definido a partir del producto escalar $\times$ y más aún, ver que en algunos de ellos (por ejemplo la norma y la distancia) se pueden definir sin la necesidad de un producto interno. Claro que un ev con producto interno es una estructura mucho más rica, que brinda más posibilidades de cálculo. En materias sucesivas seguramente aparecerán espacios normados, espacios métricos y espacios topológicos. Por ahora simplemente los presentaremos.

Norma de un vector

Definición 2 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. La función $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$ definida por $||v|| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$ se llama **norma asociada al pi**.*

Observaciones 2 *Importante: observar que aún en el caso que el cuerpo $\mathbb{F}$ que estemos considerando sea el cuerpo de los números complejos, la función norma siempre toma como codominio los números reales. Más aún, veremos que es no negativa.*

Proposición 1 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. Ents:*

1. *$||v|| \geq 0$ para todo $v \in V$ (no negativa), y $||v|| = 0$ sii $v = \overline{0}$ (no degenerada).*
2. *Para $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tenemos que $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$ (homogeneidad).*
3. *Para $u, v \in V$ tenemos que $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$ (desigualdad triangular).*
4. *Para $u, v \in V$ tenemos que $|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz).*

Demostración:

1. EJERCICIO.
2. Consideremos la norma al cuadrado, por simplicidad de cálculos. Luego tomaremos raíz cuadrada para obtener la igualdad deseada:

$$||\alpha v||^2 = \langle \alpha v, \alpha v \rangle = \alpha \langle v, \alpha v \rangle = \alpha \overline{\alpha} \langle v, v \rangle = |\alpha|^2 ||v||^2,$$

de donde $||\alpha v|| = |\alpha| v$.

4. Probaremos Cauchy-Schwartz antes que la triangular. Si u o v son el vector nulo, la desigualdad sigue trivialmente. Supongamos $u, v \neq \overline{0}$. Consideremos el vector $w = u - \frac{\langle u,v \rangle}{||v||^2} v$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 \leq & \langle w, w \rangle = \langle u - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v, u - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v \rangle = \langle u, u - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v \rangle - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \langle v, u - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} v \rangle \\ = & \langle u, u \rangle - \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{||v||^2} \langle u, v \rangle + - \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \langle v, u \rangle + \frac{\langle u, v \rangle}{||v||^2} \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{||v||^2} \langle v, v \rangle \\ = & ||u||^2 - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{||v||^2}, \end{aligned}$$

de donde sigue $||u||^2 \cdot ||v||^2 \geq |\langle u, v \rangle|^2$, luego $|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||$.

3. Para probar la desigualdad triangular primero establecemos una igualdad muy importante:

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v \rangle) + ||v||^2. \tag{1}$$

Esta igualdad sigue de calcular $||u+v||$:

$$\begin{aligned}||u+v||^2 =&\langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ =&||u||^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} + ||v||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u,v\rangle) + ||v||^2.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\mathfrak{Re}(\langle u,v\rangle) \leq |\langle u,v\rangle|$, resulta de (1) y de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que

$$\begin{aligned}||u+v||^2 \leq& ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u,v\rangle) + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2 \\ \leq& ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2,\end{aligned}$$

de donde $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$.

$\square$

Ejemplo 1 *La desigualdad de Cauchy-Schwartz en análisis: Consideremos $V = C([a,b])$, es decir, el espacio de las fnuciones continuas en el intervalo $[a,b]$ a valores reales. Si $f, g \in C([a,b])$ el pi canónico está definido por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$

y la norma de f es entonces

$$||f|| = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Luego,

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Se puede definir una norma en un espacio vectorial sin necesidad de recurrir a un pi a partir de las tres primeras propiedades. En efecto:

Definición 3 *Sea V un $\mathbb{F}$-ev. Una norma en V es una función $N : V \to \mathbb{R}$ que verifica*

1. *$N(v) \geq 0$ para todo $v \in V$ (no negativa), y $N(v) = 0$ sii $v = \overline{0}$ (no degenerada).*
2. *Para $\alpha \in \mathbb{F}$, $v \in V$ tenemos que $N(\alpha v) = |\alpha| N(v)$ (homogeneidad).*
3. *Para $u, v \in V$ tenemos que $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (desigualdad triangular).*

En tal caso decimos que (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado.

No toda norma está asociada a un espacio vectorial. Si $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{F}$-ev con pi, la función $N(v) = \langle u, v\rangle^{\frac{1}{2}}$ es una norma según esta definición (la proposición anterior justifica esta afirmación). Pero hay normas en ev que no provienen o no están asociadas a un pi. El siguiente ejemplo ilustra esta afirmación:

Ejemplo 2 *Consideremos $V = \mathbb{R}^n$. Definimos la función $||\cdot||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

esta función es una norma en $\mathbb{R}^n$ llamada norma infinito o norma del máximo. Para ver que no proviene de un pi aplicaremos la siguiente proposición.

Proposición 2 *(Identidades de polarización). Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. Tenemos que:*

1. *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ entonces para todo $u, v \in V$,*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2.$$

2. Si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ entonces para todo $u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2 + \frac{1}{4}i||u+iv||^2 - \frac{1}{4}i||u-iv||^2.$$

Demostración:

1. De la fórmula (1), puesto que $\mathbb{F}=\mathbb{R}$,

$$||u+v||^2 \leq ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, v\rangle) + ||v||^2 = ||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2,$$

y análogamente,

$$||u-v||^2 \leq ||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2,$$

de donde

$$\frac{1}{4}||u+v||^2 - \frac{1}{4}||u-v||^2 = \frac{1}{4}\left(||u||^2 + 2\langle u, v\rangle + ||v||^2)\right) - \frac{1}{4}\left(||u||^2 - 2\langle u, v\rangle + ||v||^2\right) = \langle u, v\rangle.$$

2. De la fórmula (1), puesto que $\mathbb{F}=\mathbb{C}$,

$$||u+iv||^2 \leq ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\langle u, iv\rangle) + ||iv||^2 = ||u||^2 + 2\mathfrak{Re}(\bar{i}\langle u, v\rangle) + |i|^2||v||^2$$

$\square$

Corolario 1 *Si (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado, la norma N proviene de un pi si la función $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definida a partir de las identidades de polarización define un pi en V.*

Demostración: Esta prueba no es tan sencilla.

Desafío 1 *Probar las partes que salgan. ¿Dónde encuentra la dificultad?*

$\square$

Corolario 2 *(Ley del paralelogramo) Si (V, N) es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial normado, y $u, v \in \mathbb{R}$ entonces*

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2(||u||^2 + ||v||^2).$$

Demostración: EJERCICIO.

$\square$

Distancia

Pasemos a definir distancia entre vectores. La definición de distancia tiene consecuencias en análisis. Podemos definir bolas, luego conjuntos abiertos. Y tendrá sentido la noción de continuidad. Estas cuestiones caen en el espectro del análisis matemático, y no las estudiaremos en el curso. Sólo nos limitaremos a dar las bases algebraicas para que tenga sentido hacer análisis, geometría, etc. en espacios vectoriales abstractos.

Definición 4 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. La función $d: V\times V \to \mathbb{R}$ definida por $d(u, v) = ||u-v||$ se llama **distancia**. El valor $d(u, v)$ se llama distancia entre los vectores u y v.*

Observemos que en la definición hemos definido distancia a partir de la norma asociada al pi. Esto es más general todavía, lo veremos luego de la siguiente proposición donde exploramos las propiedades de la distancia.

Proposición 3 *Sea $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi. Ents:*

1. *$d(u, v) \geq 0$ para todo $u, v \in V$ (no negativa),*
2. *$d(u, v) = 0$ sii $u = v$ (no degenerada),*
3. *$d(u, v) = d(v, u)$ (simetría),*
4. *Para $u, v, w \in V$ tenemos que $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (desigualdad triangular).*

Desafío 2 *Hacer la prueba de esta Proposición.*

Observemos que en las propiedades que verifica la distancia no hemos tenido en cuenta la estructura algebraica que tenemos en V (ni la suma de vectores ni el producto por escalar). Esto nos da la pauta de que una distancia se puede definir independientemente de la estructura algebraica. En efecto:

Definición 5 *Sea X un conjunto cualquiera. Una distancia o métrica en X es una función $\mu : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifica*

1. *$\mu(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ (no negativa),*
2. *$\mu(x, y) = 0$ sii $x = y$ (no degenerada),*
3. *$\mu(x, y) = \mu(y, x)$ (simetría),*
4. *Para $x, y, z \in X$ tenemos que $\mu(x, y) \leq \mu(x, z) + \mu(z, y)$ (desigualdad triangular).*

En tal caso decimos que (X, μ) es un espacio métrico.

De la definición anterior sigue inmediatamente que hay distancias que no provienen de normas. Un ejemplo es considerar un conjunto X cualquiera, y definimos la llamada *distancia discreta*: $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Aún en el caso de ev normados.

Ángulos

Veamos ahora cómo damos la noción de ángulo.

ATENCIÓN: *Trabajaremos en espacios euclídeos.*

Observemos que, de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, si $u, v \neq \overline{0}$, tenemos que

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{||u|| \cdot ||v||} \leq 1.$$

Observemos que existe un único real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$ (la unicidad sigue de que la función $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es inyectiva, al ser estrictamente monótona).

Definición 6 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $u, v \in V$ con $u, v \neq \overline{0}$. Definimos el ángulo entre u y v, y denotamos $(\hat{u,v})$ al único real $\alpha \in [0, \pi]$ tal que $\cos(\alpha) = \frac{\langle u,v\rangle}{||u|| \cdot ||v||}$.*

Observemos que si $\langle u, v\rangle = 0$ entonces $(\hat{u,v}) = \frac{\pi}{2}$. Este caso cobrará importancia en la siguiente sección, cuando estudiemos ortogonalidad.

Proposición 4 *(Teorema del coseno). Sea $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espacio euclídeo. Sean $u, v \in V$ con $u, v \neq \overline{0}$. Entonces*

$$||u + v||^2 = ||u||^2 + 2||u|| \cdot ||v|| \cos(\hat{u,v}) + ||v||^2.$$

Matriz asociada a un pi

Trabajaremos en esta sección con $\mathbb{F}$-ev con pi de dimensión finita. Veamos que el pi define una matriz y queda determinado por ella: podremos recuperar el valor del pi entre cualquier par de vectores utilizando adecuadamente la matriz.

Definición 7 *Sea $(V, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un $\mathbb{F}$-ev con pi de dimensión $dim_{\mathbb{F}} V = n$. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Definimos la matriz del pi respecto de la base B a la matriz g cuyas entradas vienen dadas por $g = (\langle v_i, v_j\rangle) \in \mathbb{F}^{n\times n}$.*

La notación g para una matriz, con una letra g minúscula, viene de la geometría. Hemos venido usando diferentes notaciones para las matrices, y si bien no hay un consenso, adoptaremos esta notación.

Observaciones 3 *Las matrices asociadas a un pi son hermitianas o hermíticas: $g = g^* = \overline{g^t}$. Peeeero no necesariamente una matriz hermítica es una matriz asociada a un pi. En efecto, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es* *hermítica pero no representa ningún producto interno, pues de representarlo tendríamos que* $\langle v_1, v_1\rangle = 0$ *y esto no puede ser (por qué?).*

Claramente, en $\mathbb{R}^n$ con el pi usual, la matriz del producto escalar asociada a la base canónica es la matriz identidad.

Veamos porqué es tan útil la matriz asociada a un pi respecto de una base:

Proposición 5 *Sea* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *un* $\mathbb{F}$*-ev con pi de dimensión* $dim_{\mathbb{F}}V = n$*. Sea* $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ *una base de* V*. Sea* g *la matriz del pi respecto de* B*. Entonces pc* $u, v \in V$*,*

$$\langle u, v\rangle = [u]_B g\overline{[v]^t_B}.$$

Demostración: En efecto, sean $u, v \in V$ con $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ y $v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i$. Luego $[u]_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ y $[v]_B = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Calculemos. Por un lado:

$$\langle u, v\rangle = \langle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j}\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\overline{\beta_j}\langle v_i, v_j\rangle.$$

Por otro lado,

$$[u]_B g\overline{[v]^t_B} = [u]_B (g\overline{[v]^t_B}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i [g\overline{[v]^t_B}]_{i1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \langle v_i, v_j\rangle\overline{\beta_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\overline{\beta_j}\langle v_i, v_j\rangle.$$

Queda probada la igualdad deseada.

$\square$