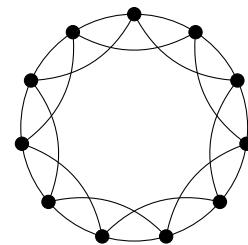
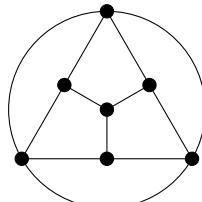
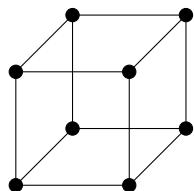
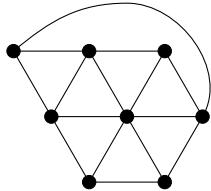


## Práctica 8 - Coloreo de Grafos

1. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

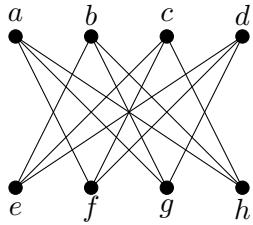


2. Determinar el número cromático de los siguientes grafos:

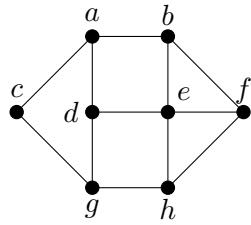
- a) El grafo completo  $K_n$ .
- b) El grafo bipartito completo  $K_{m,n}$ .
- c)  $C_n$ , el ciclo de  $n$  vértices, con  $n \geq 3$ .
- d)  $P_n$ , el camino de  $n$  vértices, con  $n \geq 2$ .

3. Determinar el número cromático del grafo rueda  $W_n$  para  $n \geq 3$ . ¿Qué relación hay entre  $\chi(C_n)$  y  $\chi(W_n)$ ? Explicar.
4. Dado un mapa plano, se desea colorear las regiones del mismo de manera que dos regiones limítrofes (i.e. con un segmento en común, no solo un punto) posean distinto color. Determinar la mínima cantidad de colores necesarios para colorear un mapa de
  - a) los países de América Latina.
  - b) las provincias de Argentina.
  - c) los departamentos de la provincia de Santa Fe.
5. Sea  $G$  un grafo sin lazos con al menos una arista. Probar que  $G$  es bipartito si y solo si  $\chi(G) = 2$ .
6. Dar un ejemplo de un grafo  $G$  tal que  $\chi(G) = 3$  y ningún subgrafo de  $G$  sea isomorfo a  $K_3$ .
7. Sea  $G$  un grafo con componentes conexas  $G_1, \dots, G_k$ . Probar que  $\chi(G) = \max_{i=1, \dots, k} \chi(G_i)$ .
8. Un grafo  $G$  se dice  $k$ -color crítico si su número cromático es  $k$  y el número cromático de todo subgrafo propio inducido de  $G$  es menor a  $k$ . Equivalentemente,  $G$  es  $k$ -color crítico si  $\chi(G) = k$  y  $\chi(G - v) < k$  para todo  $v \in V(G)$ . ¿Cuáles de los grafos del ejercicio 1 son  $k$ -color críticos?
9. Sea  $G$  un grafo  $k$ -color crítico. Probar que:
  - a)  $G$  es conexo.
  - b)  $d(v) \geq k - 1$  para todo  $v \in V(G)$ .
  - c)  $G$  no tiene vértices de corte.

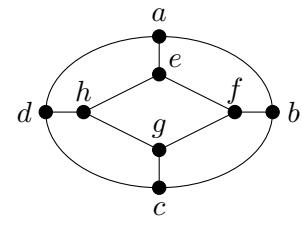
10. Obtener un colooreo para cada uno de los siguientes grafos mediante el algoritmo greedy utilizando el orden dado de los vértices. Determinar si el colooreo obtenido es óptimo.



$a, e, b, f, c, g, d, h$



$e, a, b, g, h, d, c, f$



$a, g, b, h, c, e, d, f$

11. a) Probar que dado un grafo cualquiera  $G$ , existe un orden de los vértices de  $G$  tal que el *algoritmo greedy* devuelva un colooreo óptimo.  
 b) Para cada grafo del ejercicio 10, dar un orden de los vértices para el cual el *algoritmo greedy* devuelva un colooreo óptimo.
12. Sea  $G$  un grafo con  $|V(G)| = n$  y  $|E(G)| = m$ . Probar que  
 a)  $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$   
 b)  $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$   
 c)  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$   
 d)  $\chi(G) \leq 1 + \max\{\delta(G') : G' \text{ subgrafo inducido de } G\}$
13. Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que para todo par de números  $a, b \in \mathbb{N}$  tales que  $2\sqrt{n} \leq a + b \leq n + 1$  y  $n \leq a \cdot b \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ , existe un grafo  $G$  de  $n$  vértices para el cual  $\chi(G) = a$  y  $\chi(\overline{G}) = b$ .
14. Para todo grafo  $G$ , tenemos que  $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ .  
 a) Dar ejemplos de grafos en los cuales esta cota se alcanza, es decir grafos  $G$  para los cuales  $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$ .  
 b) Dar ejemplos de grafos en los cuales esta cota no se alcanza, es decir grafos  $G$  para los cuales  $\chi(G) < 1 + \Delta(G)$ , o equivalentemente  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .
15. Un *colooreo por aristas* en un grafo  $G$  es una asignación  $f : E(G) \rightarrow \mathcal{C}$  (donde  $\mathcal{C}$  es un conjunto de colores) tal que si  $e_1$  y  $e_2$  son dos aristas con un extremo en común, entonces  $f(e_1) \neq f(e_2)$ .  
 a) Determinar un colooreo por aristas mínimo de los grafos  $K_4$ ,  $K_{3,3}$  y Petersen.  
 b) Describir los grafos que admiten un colooreo por aristas con exactamente dos colores.
16. Probar que las aristas de  $G$  pueden ser coloreadas con  $k$  colores si y sólo si los vértices del grafo  $L(G)$  pueden ser coloreados con  $k$  colores.

Nota: al mínimo valor de  $k \in \mathbb{N}$  para el cual existe un colooreo por aristas con  $k$  colores se lo conoce como *número de colooreo por aristas* de  $G$ , y se denota  $\chi'(G)$ . Como consecuencia de este ejercicio, resulta que  $\chi(L(G)) = \chi'(G)$ .

17. Sea  $G$  un grafo con vértices  $v_1, \dots, v_n$ , y  $\omega(G) = 2$ . Consideremos el grafo  $G_M$  que tiene conjunto de vértices

$$V(G_M) = \{w\} \cup \{v_1, \dots, v_n\} \cup \{u_1, \dots, u_n\}$$

y conjunto de aristas

$$E(G_M) = E(G) \cup \{u_i v_j : v_i v_j \in E(G), i, j \in [n]\} \cup \{wu_i : i \in [n]\}.$$

Probar que

- a)  $\omega(G_M) = \omega(G)$ .
- b)  $\chi(G_M) = \chi(G) + 1$ .
- c) Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , existe un grafo  $H$  para el cual  $\chi(H) - \omega(H) \geq k$ .

18. Probar que si  $\overline{G}$  es bipartito entonces  $G$  es perfecto.

19. El propietario de una tienda de mascotas recibe un envío de peces tropicales. Entre las distintas especies hay algunos pares en que una es depredadora de la otra. En consecuencia, estos pares de especies deben mantenerse en peceras distintas.

Construir un modelo de este problema como un problema de coloreo de grafos y describir cómo determinar el menor número de peceras necesarias para preservar todos los peces del envío.

20. Como presidenta de los comités estudiantiles, Antonela debe programar los horarios para la reunión de 15 comités. Cada comité se reúne durante una hora a la semana. Las reuniones de dos comités con un miembro en común deben programarse a horas distintas.

Modelar como un problema de coloreo de grafos y describir cómo determinar el menor número de horas que Antonela tiene que considerar para programar las reuniones de los 15 comités.

21. Se quiere organizar en Rosario un torneo de tenis donde  $n$  participantes jueguen todos contra todos. Cada tenista puede disputar a lo sumo un partido por día. Los encuentros se disputarán en canchas techadas, por lo que no se suspenderá ningún encuentro por mal tiempo.

¿Cuántos días como mínimo son necesarios para desarrollar el torneo? Modelar el problema como un problema en grafos y resolverlo para  $n = 5$ .