Autovalores, autovectores, diagonalización

Álgebra Lineal 2024 (LM, PM, LCC)

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

23 de octubre de 2024

Definición 1
Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Un subespacio $U \underset{s.e}{\subseteq} V$ es invariante bajo T si $u \in U \Rightarrow Tu \in U$. En otras palabras, U es invariante bajo T si $T/U \in \mathcal{L}(U)$.

Ejemplo 1
$\{0\}$, V, $img(T)$, $nul(T)$ son espacios invariantes bajo T para cualquier operador $T \in \mathcal{L}(U)$.

Autovalor, autovector

Definición 2

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Un autovalor o valor propio de T es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe un vector no nulo $v \in V$ que verifica $Tv = \lambda v$.
Si λ es un autovalor de T, entonces

1. *cualquier vector $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v$ se llama autovector o vector propio de T asociado al autovalor λ.*
2. *la colección de todos los v tales que $Tv = \lambda v$ se llama se llama autoespacio o espacio propio asociado a λ.*

$$\{v \in V : Tv = \lambda v\} = \{v \in V : (T - \lambda I)v = 0\} = nul(T - \lambda I) \underset{s.e.}{\subseteq} V.$$

λ es autovalor de T si el subespacio $nul(T - \lambda I)$ es distinto del subespacio nulo.

$nul(T - \lambda I) \neq \{0\}$ luego $(T - \lambda I)$ es no inyectiva.

Si $\dim(V)$ es finita, $(T - \lambda I)$ inversible si la matriz asociada a la transformación en cualquier base ordenada es inversible. Si $\mathcal{B}$ es cualquier base ordenada de V y $A = [T]_{\mathcal{B}}$, entonces $(T - \lambda I)$ es inversible si y sólo si la matriz $(A - \lambda I)$ es inversible.

Definición 3

Sea A una matriz $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un autovalor o valor propio de A en $\mathbb{K}$ es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que la matriz $(A - \lambda I)$ es singular (no inversible).

Nota 1

Puede definirse el autovalor de una matriz A como un $\lambda \in \mathbb{K}$ para el cual existe un vector $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. Un tal vector no nulo se llama autovector o vector propio de A asociado a λ

Nota 2

Por definición un autovector debe ser distinto de cero, pero un valor propio si puede ser cero.

Definición 4

El conjunto de todas las soluciones del sistema $(A - \lambda I)x = 0$ *es el espacio nula de la matriz* $(A - \lambda I)$. *Este conjunto es un subespacio de* $\mathbb{K}^n$ *y se llama el autoespacio o espacio propio de* A *correspondiente a* λ. *El autoespacio consiste en todos los autovectores correspondientes al autovalor* λ *y el vector nulo.*

Teorema 1

Los autovalores de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.

Demos: $\cdots$ ■

Teorema 2

Si $v_1, \cdots, v_r$ *son autovectores que corresponden a distintos autovalores* $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ *de una matriz* $n \times n$ A, *entonces* $\{v_1, \cdots, v_r\}$ *son* $l.i.$

Demos: $\cdots$ ■

Ecuaión característica

Definición 5

La ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$ *se llama ecuación característica de* A *Al polinomio* $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *se lo llama polinomio característico de* A

Observación 1

Un escalar λ *es un autovalor de una matriz* $n \times n$ A *si y sólo si* λ *satisface la ecuación característica de* A.

Hallar los valores propios de A *equivale a encontrar las raíces del polinomio característico de* A.

A la multiplicidad de un autovalor como raíz del polinomio se le llama multiplicidad algebraica del autovalor.

Definición 6

Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Se dice que B es semejante a A sobre $\mathbb{K}$ si existe una matriz $n \times n$, P inversible sobre $\mathbb{K}$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Teorema 3

Si las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico, y por lo tanto tienen los mismos autovalores (con las mismas multiplicidades.

Demos: $\cdots$ ■

Definición 7

Sea V $e.v.s/\mathbb{K}$, $\dim(v) = n$. El polinomio característico de $T \in \mathcal{L}(V)$ es el polinomio característico de cualquier matriz $n \times n$ que represente a T en alguna base ordenada de V.

Definición 8

Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *es diagonalizable si* A *es semejante a una matriz diagonal, esto es, si* $A = PDP^{-1}$ *para alguna matriz inversible* P *y alguna matriz diagonal* D.

Teorema 4

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *es diagonalizable si y sólo si* A *tiene* n *vectores propios* $l.i.$ *De hecho,* $A = PDP^{-1}$ *con* D *matriz diagonal, si y sólo si las columnas de* P *son* n *vectores propios de* A $l.i.$ *En este caso las entradas diagonales de* D *son los autovalores de* A *que corresponden respectivamente a los autovectores de* P.

Demos: $\cdots$ ∎

Teorema 5

Condición suficiente de diagonalización.
Una matriz $n \times n$ con n valores propios distintos es diagonalizable.

Demos: $\cdots$ ■

Lema 1

Supongamos que $Av = \lambda v$. Sea p un polinomio cualquiera, entonces se verifica que $p(A)v = p(\lambda)v$.

Demos: $\cdots$ ■

Lema 2

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$, y sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ distintos autovalores de T. Para cada $i = 1, \cdots, p$ sea S_i un conjunto finito, linealmente independientes contenido en el autoespacio E_i asociado al autovalor λ_i. Luego $S = S_1 \cup \cdots \cup S_p$ es un conjunto linealmente independiente de V.

Demos: $\cdots$ ■

TEOREMA 6

Sea A una matriz $n \times n$ cuyos autovalores distintos son $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$.
a) Para $1 \leq k \leq p$, la dimensión del autoespacio para λ_k es menor o igual que la multiplicidad del autovalor λ_k.
b) La matriz A es diagonalizable si y sólo si la suma de las dimensiones de los distintos autoespacios es igual a n y, esto sucede si y sólo si la dimensión del autoespacio de cada λ_k es igual a la multiplicidad de autovalor λ_k.
c) Si A es diagonalizable y $\mathcal{B}_k$ es una base para el autoespacio correspondiente a λ_k para cada k, entonces la colección total de vectores de los conjuntos $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ forma una base de autovectores para $\mathbb{K}^n$.

Demos: $\cdots$ ■

Proposición 1

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ *y* $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$ *una base de* V. *Resulta equivalente:*

$a)$ *la matriz* $[T]_B$ *es triangular superior.*

$b)$ $Tv_k \in < v_1, \cdots, v_k >$ *para cada* $k = 1, \cdots, n$.

$c)$ $< v_1, \cdots, v_k >$ *es invariante bajo* T *es decir* $T(< v_1, \cdots, v_k >) \subset < v_1, \cdots, v_k >$.

Demos: $\cdots$ ■

Teorema 7

Sea V *un espacio vectorial de dimensión finita sobre* $\mathbb{C}$ *y* $T \in \mathcal{L}(V)$. *Luego existe una base* $\mathcal{B}$ *para* V *tal que* $[T]_{\mathcal{B}}$ *es triangular superior.*

Demos: Este resultado será demostrado en la próxima unidad. ■

Proposición 2

Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal y $[T]_{\mathcal{B}}$ una matriz triangular superior para alguna base $\mathcal{B}$ de V. Luego:

$a)$ T es inversible si y sólo si todas las entradas de la diagonal de $[T]_{\mathcal{B}}$ son no nulas.

$b)$ Los autovalores de T son los elementos diagonales de $[T]_{\mathcal{B}}$.

Demos: $\cdots$ ∎