



Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2022

Unidad 6: Aplicaciones del Cálculo Integral.

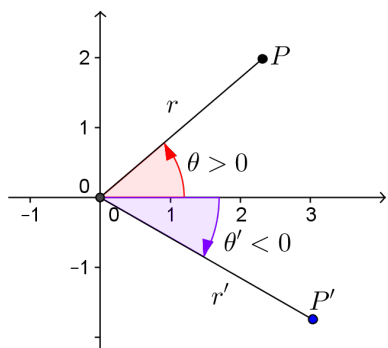
1. Cálculo de áreas en coordenadas polares

En las Unidades 1 y 2 hemos visto cómo aplicar el cálculo integral a regiones acotadas por las gráficas de dos o más funciones. En particular, nos hemos interesado en encontrar el área de regiones del tipo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

donde f y g son funciones integrables en $[a, b]$, o de regiones que se descomponen en regiones menores de este tipo.

Introduciremos ahora regiones que pueden describirse mediante **coordenadas polares**. Éstas representan una forma alternativa de describir la posición de un punto del plano a partir de dos parámetros:



la longitud r del segmento que determinan el punto y el origen de coordenadas, y el ángulo θ que este segmento forma con el eje positivo de las x . Aplicamos la convención de que el ángulo es positivo si se mide en dirección contraria a la de las manecillas del reloj (partiendo del eje positivo de las x) y negativo si es medido en sentido contrario. En general las coordenadas polares de un punto P se denotan como (r, θ) o como $r\theta$.

Este procedimiento tiene una limitación, permite representar de forma única todos los puntos del plano salvo por el origen de coordenadas: en efecto el segmento que determina consigo mismo tiene longitud nula, y no es posible determinar el ángulo que forma un punto con una semirrecta.

Denotemos por O el origen de coordenadas y supongamos que un punto P tiene coordenadas cartesianas (x, y) . Entonces la longitud r del segmento \overline{OP} y el ángulo θ están dados por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

si $x \neq 0$. Si $x = 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ si $y > 0$ o $y < 0$ respectivamente.

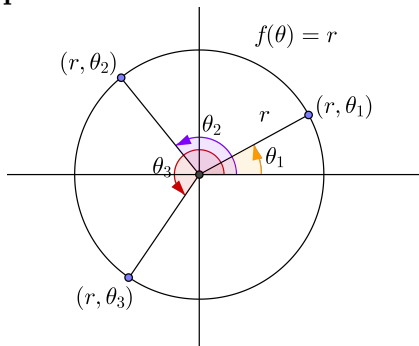
Si en cambio se conocen las coordenadas polares (r, θ) de P , es fácil ver que sus coordenadas cartesianas son

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

Observemos que el parámetro r es por definición un número positivo. Sin embargo en muchos casos será útil permitir que $r < 0$. En este caso entendemos que el punto $P = (r, \theta)$ con $r < 0$ es el simétrico respecto del origen de $P' = (|r|, \theta)$.

La introducción de coordenadas polares permite describir curvas en el plano como funciones $f(\theta)$, entendiendo que los puntos descriptos tienen coordenadas polares $(r = f(\theta), \theta)$.

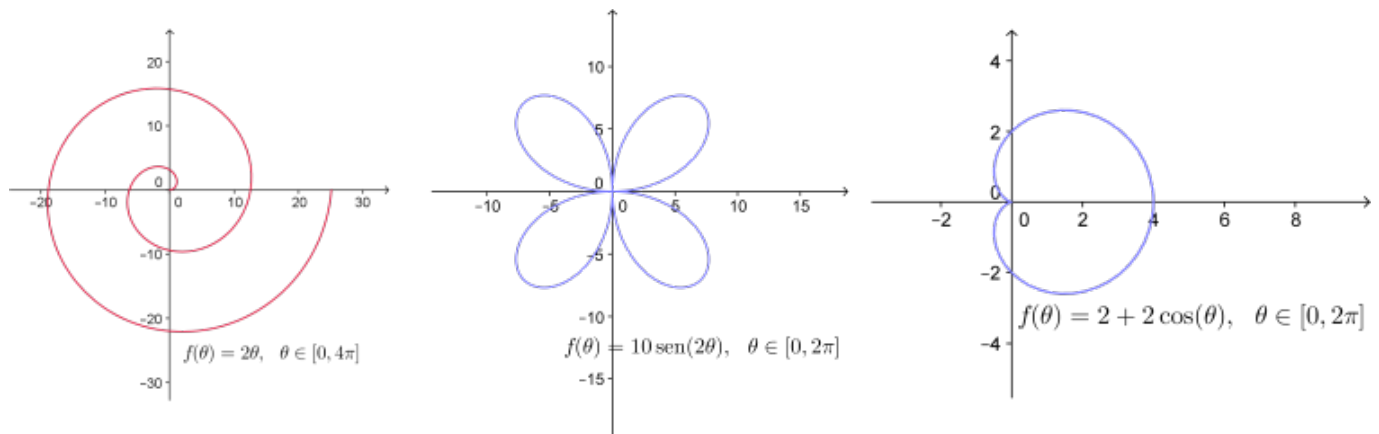
Ejemplo 72. Consideremos la circunferencia de radio r centrada en el origen.



Como un punto P está en la circunferencia si la longitud del segmento \overline{OP} es r (constante) resulta claro que cada punto P de la circunferencia tiene coordenadas polares de la forma (r, θ) , donde θ varía entre 0 y 2π y r es constante.

Por lo tanto la circunferencia puede ser descrita en coordenadas polares mediante la función constante $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\theta) = r$.

A continuación mostramos algunos otros ejemplos. Dejamos como **ejercicio** verificar que efectivamente las gráficas que se muestran corresponden a las funciones indicadas.



Como puede observarse, muchas de estas curvas se “cierran” encerrando regiones dentro de sus gráficas. Análíticamente, estas regiones pueden definirse como

$$R = \{P = (r, \theta) : \theta \in [a, b], 0 \leq r \leq f(\theta)\} \quad (1)$$

donde $[a, b]$ es el dominio de la función f .

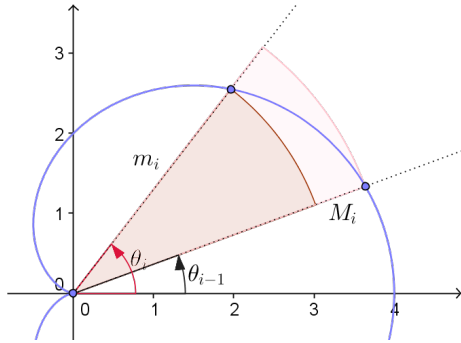
Intentaremos dar una definición del área de R , aproximándola por áreas cada vez más pequeñas de sectores circulares, de una manera similar a como hemos hecho para el área bajo la gráfica de una función.

Recordemos primero que el **área de un sector circular de radio r** que comprende un ángulo θ es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

Consideremos ahora la gráfica de una curva dada en coordenadas polares por $(f(\theta), \theta)$ con $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua (y por lo tanto integrable). Sea $P = \{\theta_0 = a, \theta_1, \dots, \theta_n = b\}$ una partición de $[a, b]$. Entonces el área A_i de la región de la curva acotada entre θ_{i-1} y θ_i puede acotarse inferior y superiormente por las áreas del sector circular de radio $m_i = \inf\{f(\theta) : \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i\}$ y el área del sector circular de radio $M_i = \sup\{f(\theta) : \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i\}$ respectivamente.

Por otra parte, el área de la región R será la suma de las áreas A_i . Por lo tanto tendremos



$$\begin{aligned} \text{Área}(\text{sector circ. interior}) &\leq A_i \leq \text{Área}(\text{sector circ. exterior}) \\ \frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) &\leq A_i \leq \frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}m_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) &\leq \text{Área}(R) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}M_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ \therefore L\left(\frac{1}{2}f^2, P\right) &\leq \text{Área}(R) \leq U\left(\frac{1}{2}f^2, P\right) \end{aligned}$$

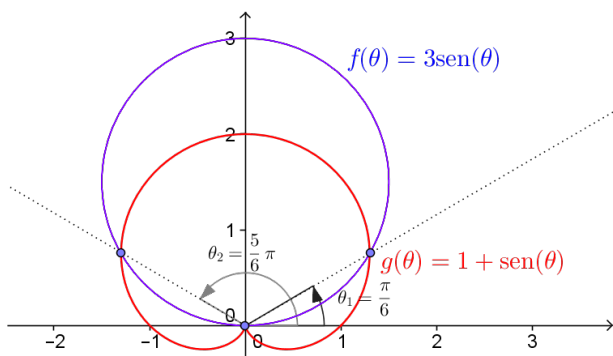
Es decir, el área que pretendemos definir está acotada inferior y superiormente por cualquier suma inferior y superior respectivamente de la función $\frac{1}{2}f^2$.

En base a este análisis, tiene sentido dar la siguiente

Definición 73. Sea R la región definida por una curva cerrada dada en coordenadas polares, dada por (1) para una función integrable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Entonces el área de R se define como

$$\text{Área}(R) = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta.$$

- Ejemplos 74.**
1. Es inmediato verificar que la definición anterior coincide con la fórmula conocida para el área de un círculo de radio r , definido por la función constante $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\theta) = r$.
 2. Consideremos ahora la región interior a la curva en coordenadas polares $(f(\theta) = 3\sin(\theta), \theta)$ y exterior a la curva $(g(\theta) = 1 + \sin(\theta), \theta)$. El primer paso es graficar ambas curvas y visualizar la región. Posteriormente deberemos determinar entre qué extremos varían los ángulos que delimitan la región dada.



Es decir, buscamos los valores de θ para los cuales

$$f(\theta) = g(\theta).$$

que representan los puntos de intersección de las curvas:

$$3 \operatorname{sen}(\theta) = 1 + \operatorname{sen}(\theta) \Leftrightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \theta_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Es fácil ver además que para $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $f(\theta) > g(\theta)$ y por lo tanto el área de la región buscada será

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta) - g^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 9 \operatorname{sen}^2 \theta - 1 - 2 \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} 4 \operatorname{sen}^2(\theta) - \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{2} d\theta = (2\theta - \operatorname{sen}(2\theta)) \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} + \cos(\theta) \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} - \frac{\theta}{2} \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6} = \pi \end{aligned}$$

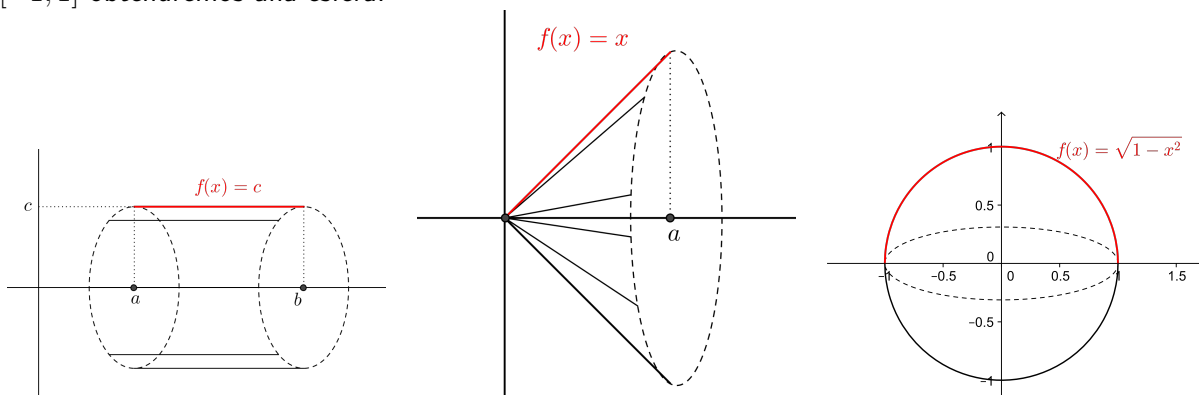
Ejercicio: Verifique esta última integral.

2. Cálculo de volúmenes

Consideraremos ahora la integral como herramienta para calcular el volumen de algunos cuerpos particulares.

Consideremos una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, es decir, una función no negativa. Si agregamos una tercera dimensión y hacemos rotar la gráfica de f alrededor del eje x , obtendremos un cuerpo C denominado *cuerpo de revolución*.

Si rotamos por ejemplo la gráfica de la función constante $f(x) = c$, $x \in [a, b]$ obtendremos un cilindro. Si rotamos la gráfica de $f(x) = x$, $x \in [0, a]$ obtendremos un cono, y si rotamos la gráfica de $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$ obtendremos una esfera.



En todos los cuerpos de revolución, si consideramos una sección transversal (intersecando el cuerpo con un plano perpendicular al eje x) por un punto $x_0 \in [a, b]$ cualquiera, obtendremos un punto en caso que $f(x_0) = 0$, o una circunferencia de radio $f(x_0)$ si $f(x_0) > 0$.

Daremos por válida la fórmula para calcular el volumen de un cilindro cuya base es un círculo de radio r y altura h , es decir,

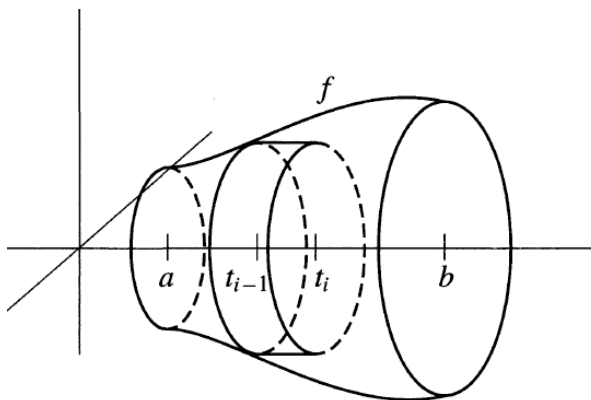
$$V = \pi r^2 h.$$

Consideremos una partición $P = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ de $[a, b]$, y llamemos V_i al volumen de la porción del cuerpo de revolución delimitado entre t_{i-1} y t_i .

Entonces si

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

tendremos que V_i está acotado inferiormente por el volumen del cilindro cuya base es un círculo de radio m_i y su altura es $t_i - t_{i-1}$, y superiormente por el volumen del cilindro cuya base es un círculo de radio M_i y con la misma altura. Por lo tanto, resultará $\pi m_i^2(t_i - t_{i-1}) \leq V_i \leq \pi M_i^2(t_i - t_{i-1})$.



El volumen V del cuerpo de revolución completo deberá expresarse como la suma de los volúmenes V_i de cada pedacito, tendremos

$$\sum_{i=1}^n \pi m_i^2(t_i - t_{i-1}) \leq \text{Vol}(C) \leq \pi \sum_{i=1}^n M_i^2(t_i - t_{i-1})$$

$$\therefore L(\pi f^2, P) \leq \text{Vol}(C) \leq U(\pi f^2, P).$$

Es decir, el volumen que buscamos definir deberá estar entre la suma inferior y la suma superior de la función πf^2 para cualquier partición P de $[a, b]$.

Definimos entonces:

Definición 75. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función integrable y sea C el cuerpo que se obtiene de rotar la región bajo la gráfica de f alrededor del eje x . Se define el volumen de C como

$$\text{Vol}(C) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ejemplos 76. Veremos ahora que la fórmula anterior coincide con las fórmulas conocidas para los tres ejemplos que hemos mencionado al principio: el cilindro, el cono y la esfera.

1. El cilindro: en esta caso, C se obtiene de rotar la gráfica de la función $f(x) = c$ para $x \in [a, b]$. Por la definición 62 tenemos

$$\text{Vol}(C) = \pi \int_a^b c^2 dx = \pi c^2(b - a)$$

Observemos que efectivamente la base del cilindro es un círculo de radio c y la altura es $(b - a)$, con lo cual obtenemos la fórmula $\pi \cdot \text{radio}^2 \cdot \text{altura}$.

2. El cono: en esta caso, C se obtiene de rotar la gráfica de la función $f(x) = x$ para $x \in [0, a]$. Por la definición 62 tenemos

$$\text{Vol}(C) = \pi \int_0^a x^2 dx = \pi \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^a = \frac{1}{3} \pi a^3$$

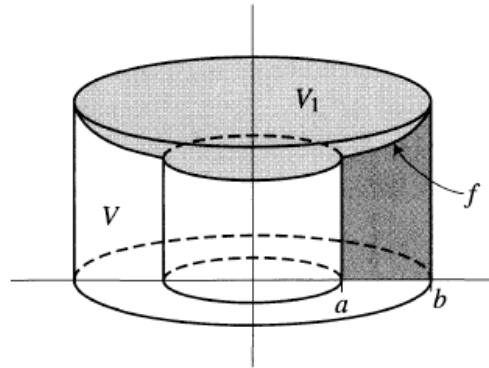
Observemos que efectivamente la base del cono es un círculo de radio a y la altura es a , con lo cual obtenemos la fórmula $\frac{1}{3} \pi \cdot \text{radio}^2 \cdot \text{altura}$.

3. La esfera: en este caso, C se obtiene de rotar la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ para $x \in [-1, 1]$. Por la definición 62 tenemos

$$\text{Vol}(C) = \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi$$

Observemos que en este caso el radio de la esfera es 1, con lo cual se verifica la fórmula $\frac{4}{3} \pi \cdot \text{radio}^3$.

Otra forma de generar cuerpos de revolución es hacer girar la región bajo la gráfica de una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, con $0 \leq a < b$ alrededor del eje y :



Siguiendo el mismo razonamiento que antes, consideremos una partición $P = \{t_0 = a, \dots, t_n = b\}$ de $[a, b]$, y llamemos V_i al volumen de la porción del cuerpo entre t_{i-1} y t_i . Consideremos los cuerpos c_i y C_i descriptos a continuación:

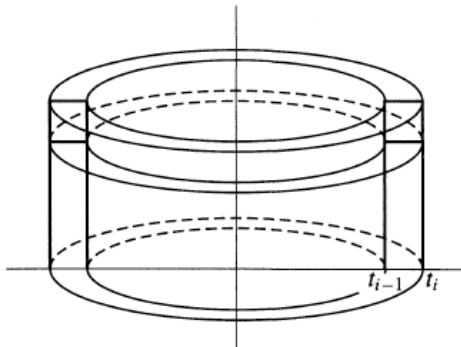
c_i se obtiene de quitar al cilindro de radio t_i y altura

$$m_i = \inf\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

el cilindro de radio t_i y altura m_i . Por otra parte, C_i se obtiene de quitar al cilindro de radio t_i y altura

$$M_i = \sup\{f(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

el cilindro de radio t_i y altura M_i .



Tendremos entonces

$$\text{Vol}(c_i) \leq V_i \leq \text{Vol}(C_i) \Rightarrow \pi(t_i^2 - t_{i-1}^2)m_i \leq V_i \leq \pi(t_i^2 - t_{i-1}^2)M_i. \quad (2)$$

Observemos ahora que $t_i^2 - t_{i-1}^2 = (t_i - t_{i-1})(t_i + t_{i-1})$ con lo cual tendremos

$$t_i^2 - t_{i-1}^2 \geq 2t_{i-1}(t_i - t_{i-1}), \quad \text{y} \quad t_i^2 - t_{i-1}^2 \leq 2t_i(t_i - t_{i-1})$$

Por otra parte, es fácil ver que siendo $f(x) \geq 0$ para todo x y $0 \leq a < b$ entonces

$$\tilde{m}_i = m_i t_{i-1} = \inf\{xf(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad \tilde{M}_i = M_i t_i = \sup\{xf(x) : t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$$

Reemplazando en (2) y teniendo en cuenta que el volumen V del cuerpo de revolución deberá ser la suma de los volúmenes V_i tenemos

$$2\pi \sum_{i=1}^n \tilde{m}_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n V_i \leq 2\pi \sum_{i=1}^n \tilde{M}_i(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow L(2\pi xf(x), P) \leq V \leq U(2\pi xf(x), P).$$

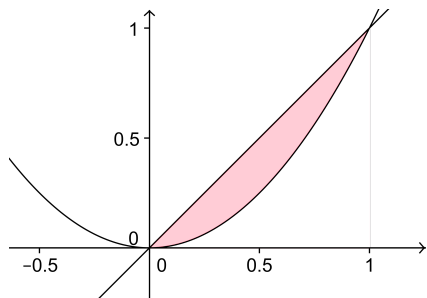
Tiene sentido entonces realizar la siguiente:

Definición 77. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, con $0 \leq a < b$, una función integrable y sea C el cuerpo de revolución que se obtiene de hacer girar la región bajo gráfica de una función f alrededor del **eje** y . Entonces el volumen de C se define como

$$\text{Vol}(C) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

Este método de calcular el volumen de un cuerpo de revolución se conoce como *método de los cascarones cilíndricos*.

Ejemplo 78. Sea C el cuerpo de revolución generado rotando la región comprendida entre las gráficas de las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = x^2$ alrededor del eje y .



Las gráficas de estas funciones se intersectan en los puntos correspondientes a $x = 0$ y $x = 1$. Debemos por lo tanto calcular dos volúmenes y restarlos: al volumen del cuerpo generado de girar la región bajo la gráfica de f entre 0 y 1 debemos restar el volumen del cuerpo generado al girar la región bajo la gráfica de g entre 0 y 1.

Tendremos entonces que el volumen buscado es

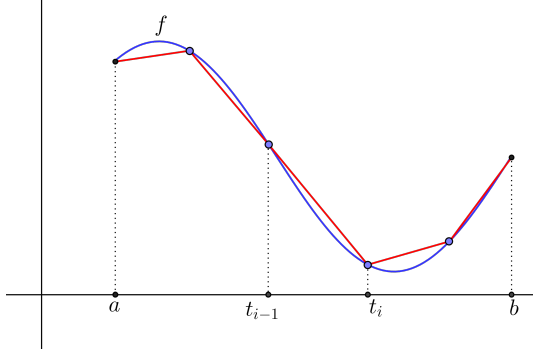
$$V = 2\pi \int_0^1 x^2 dx - 2\pi \int_0^1 x^3 dx = \frac{\pi}{6}.$$

3. Longitud de arco

En esta sección utilizaremos el cálculo integral para determinar la longitud de una curva c , dada por la gráfica de una función f . Recordemos que si c es un segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces

$$l(c) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable y con derivada continua. Sea $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ y pongamos P_i el punto sobre la gráfica de f de coordenadas $(t_i, f(t_i))$.



Entonces los segmentos $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ forma una poligonal (asociada a la partición P) cuya longitud nos dará una aproximación de la longitud de c . Observemos que la longitud de la poligonal viene dada por

$$l(P) = \sum_{i=1}^n l(\overline{P_{i-1}P_i}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(f(t_i) - f(t_{i-1}))^2 + (t_i - t_{i-1})^2}.$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio a f , tenemos que existirá un punto $t_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(t_i^*)(t_i - t_{i-1})$$

y por lo tanto

$$l(P) = \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(t_i^*)^2 + 1} (t_i - t_{i-1}).$$

Pongamos $g(x) = \sqrt{f'(x)^2 + 1}$ y

$$m_i = \inf\{g(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}, \quad M_i = \sup\{g(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}.$$

Entonces es claro que para cada $i = 1, \dots, n$, $m_i \leq \sqrt{f'(t_i^*)^2 + 1} \leq M_i$. Concluimos que

$$\sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \leq l(P) \leq \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1}) \Rightarrow L(g, P) \leq l(P) \leq U(g, P).$$

Como la partición P es arbitraria, tiene sentido la siguiente:

Definición 79. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua y sea c la curva dada por la gráfica de f . Se define la longitud de c como

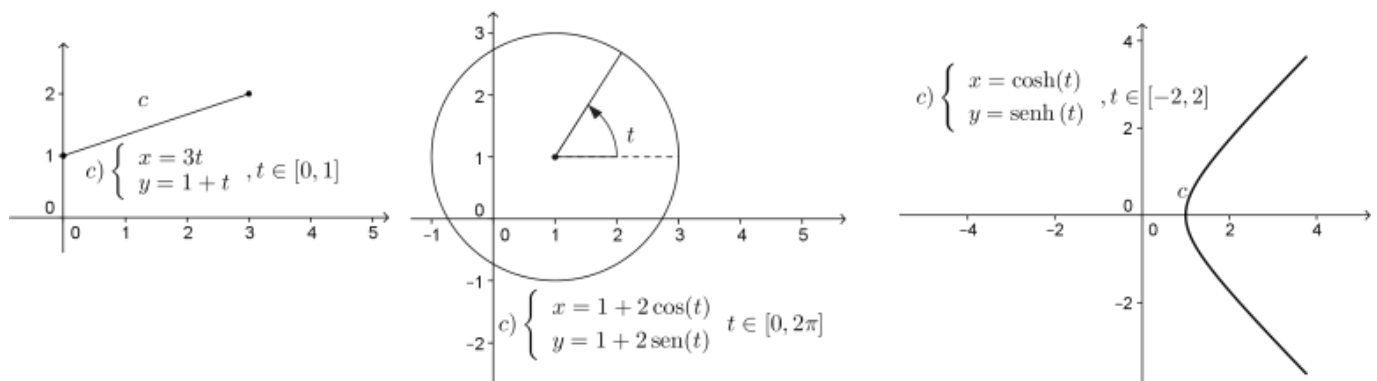
$$l(c) = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx$$

Supongamos ahora que c es una curva que está descrita por un parámetro t . Es decir, un punto de P tiene coordenadas x e y que pueden expresarse en función de t . En ese caso, decimos que la curva está dada por sus *ecuaciones paramétricas*

$$c) \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad (3)$$

donde las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivada continua en $[a, b]$ (en los extremos entendemos que existen derivadas laterales).

En la siguiente figura mostramos algunas curvas y las ecuaciones paramétricas que las definen. Dejamos como ejercicio verificar que las gráficas son correctas: para ello, deben tomarse distintos valores para t y representar gráficamente los puntos $P(x(t), y(t))$ que cada parámetro define.



Supongamos que c es una curva arbitraria cuyas ecuaciones paramétricas son las dadas en (3). Consideremos una partición $P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b\}$ de $[a, b]$ y pongamos $P_i(x(t_i), y(t_i))$ el punto de c cuyas coordenadas están definidas por el parámetro t_i . Nuevamente los segmentos $\overline{P_0P_1}, \overline{P_1P_2}, \dots, \overline{P_{n-1}P_n}$ forman una poligonal cuyos extremos son puntos de c , y cuya longitud nos dará una aproximación de la longitud de c . En este caso, la longitud de la poligonal viene dada por

$$l = \sum_{i=1}^n l(\overline{P_{i-1}P_i}) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}.$$

No estamos en condiciones de probarlo aún, pero esta suma puede ser acotada inferior y superiormente por las sumas inferior y superior respectivamente, asociadas a la partición P , de la función $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$. Por lo tanto definimos:

Definición 80. Sea c la curva dada por las ecuaciones paramétricas (3). Definimos la longitud de c como

$$l(c) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Observemos que si c es la gráfica de una función f , sus ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$. Por lo tanto $x'(t) = 1$, $y'(t) = f'(t)$ y las definiciones 79 y 80 coinciden.

Ejemplo 81. Consideremos la circunferencia de radio r centrada en el origen. Sus ecuaciones paramétricas son

$$c) \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Entonces tenemos $x'(t) = -r \sin(t)$, $y'(t) = r \cos(t)$ y por lo tanto

$$l(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$