Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Departamento de Matemática - Escuela de Ciencias Exactas y Naturales

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Licenciatura y Profesorado en Física, Licenciatura en Ciencias de la Computación,

Licenciatura y Profesorado en Matemática - Año 2022

Unidad 3: Las funciones Logaritmo y Exponencial

Consideremos la función

$$f(x) = 10^x.$$

Hemos omitido a propósito su dominio. Sabemos que para un número natural n, 10^n es el producto de 10 consigo mismo n veces. Si $k \in \mathbb{Z}$ y $k < 0$, entonces 10^k es el producto de $1/10$ consigo mismo $-k$ veces. Incluso si tomamos $x = p/q$ un número racional, $10^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{10^p}$. ¿Pero qué significa por ejemplo 10^π?

Para poder definir formalmente una *función exponencial*, es decir tal que la variable esté en el exponente de una potencia y no en la base, y cuyo dominio sea todo el conjunto de números reales, necesitamos propiedades más complejas que las que nos brinda el álgebra elemental.

Supongamos por el momento que la función $f(x) = 10^x$ está efectivamente definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Cualquier buena definición que demos de f deberá cumplir la propiedad fundamental $10^{x+y} = 10^x 10^y$, o sea

$$f(x+y) = f(x)f(y). \tag{1}$$

Si f fuese derivable y pudiesemos encontrar la función $g(x) = f'(x)$ explicitamente, podríamos recuperar f como función integral de g. Intentemos calcular la derivada de f:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{10^{x+h} - 10^x}{h} = 10^x \lim_{h\to 0} \frac{10^h - 1}{h}$$

Observemos que entonces f será derivable si existe $\lim_{h\to 0} \frac{10^h-1}{h}$, que a su vez no es más que $f'(0)$. Supongamos que f es efectivamente derivable en 0 y pongamos $c = f'(0)$. Tenemos entonces que la función f verifica la ecuación diferencial

$$f'(x) = cf(x) \tag{2}$$

(esta misma propiedad vale en realidad para cualquier función que cumple la propiedad 1, o sea que el 10 elegido como base de la potencia no cumple ningún rol particular).

Derivamos formalmente f con la esperanza de encontrar una expresión que nos permitiera definirla como una función integral, pero parecería que no podemos seguir adelante, puesto que la derivada de f involucra a f

misma. De todas maneras la ecuación 2 es sumantemte importante y, sorprendentemente, nos permitirá definir explicitamente la inversa de f.

En efecto, hagamos una suposición más: que f es invertible. Al menos cuando x es racional, tiene sentido hablar de esta inversa. Sabemos que

$$10^x = y \Leftrightarrow \log_{10}(y) = x.$$

Observemos que como $f(x) > 0$ para cada x racional, para que f sea continua f deberá ser siempre positiva, y por lo tanto f^{-1} deberá tener como dominio algún subconjunto de $\mathbb{R}^+$.

Recordemos que para una función invertible F podemos obtener su derivada como

$$(F^{-1})'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}.$$

En el caso de nuestra función f, tenemos

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{cf(f^{-1}(x))} = \frac{1}{cx}.$$

El único problema que queda es determinar la constante c. La función $1/x$ es continua en todo su dominio e integrable en cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero. Podemos entonces definir para cada $x > 0$,

$$\log_{10}(x) = \int_1^x \frac{1}{ct}dt + \log_{10}(1) = \frac{1}{c}\int_1^x \frac{1}{t}dt.$$

Nos queda el problema de encontrar la constante c. Supondremos primero que $c = 1$, con la esperanza de estar definiendo un logaritmo en alguna base. Tiene sentido entonces dar la siguiente:

Definición 46. *Si $x > 0$, se define*

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

y se denomina logaritmo natural

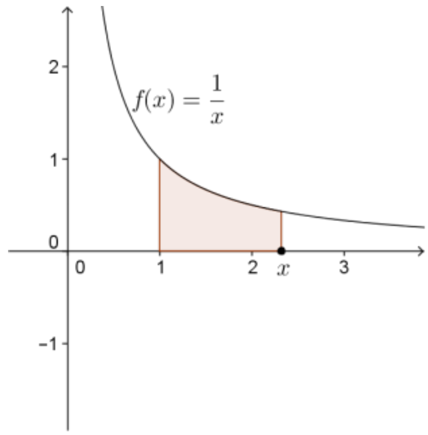
Cabe aclarar que muchos textos utilizan directamente la notación $\log$ para el logaritmo natural, e incluyen explícitamente la base en cualquier otro caso, inclusive para el logaritmo en base 10. Aquí hemos preferido incluir la base incluso en este caso, pero usaremos la notación $\ln$ para distinguir el logaritmo natural.

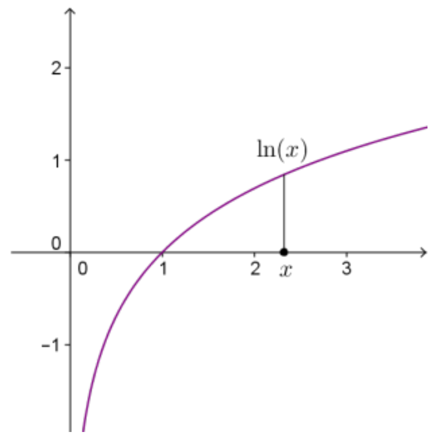
Un primer análisis de la función que acabamos de definir muestra que:

- $\ln$ es una función continua y derivable (pues es la función integral de una función continua) y $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- $\ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}dt = 0$.
- La función $\frac{1}{t}$ es positiva para cada $t > 0$. Luego si $a < b$, $\int_a^b \frac{1}{t}dt > 0$ y por lo tanto:
  - si $x > 1$, $\ln(x) > 0$,

- si $0 < x < 1$, $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$.

Esbozamos a continuación la gráfica de $\ln$:





Veremos a continuación que $\ln$ efectivamente verifica las propiedades de un logaritmo.

Teorema 47. *Si* x, $y > 0$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Demostración: Fijemos $y > 0$ y tomemos x como variable para definir la función $f(x) = \ln(xy)$. Entonces

$$f'(x) = \ln'(xy) \cdot y = \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x}.$$

Luego f y $\ln$ tienen la misma derivada y por lo tanto debe existir una constante c tal que

$$f(x) = \ln(x) + c.$$

Evaluando en $x = 1$, tenemos $f(1) = \ln(1) + c = c$. Concluimos que

$$\ln(xy) = f(x) = \ln(x) + f(1) = \ln(x) + \ln(y)$$

como queríamos probar. □

A partir del teorema anterior, inductivamente se prueba el siguiente:

Corolario 48. *Si n es un número natural y $x > 0$, entonces*

$$\ln(x^n) = n \ln(x).$$

Corolario 49. *Si $x, y > 0$ entonces*

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$

Demostración: Basta observar que como $y > 0$, $x = \frac{x}{y} \cdot y$ y aplicar el Teorema 47. □

El Corolario 48 nos permite analizar el codominio de la función $\ln$. Tomemos un número mayor que 1, por ejemplo 2. No sabemos cuánto vale exactamente $\ln(2)$ (aunque podemos aproximarlo tanto como queramos usando sumas inferiores y superiores, dado que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$), pero sí sabemos que $\ln(2) > 0$.

Fijemos un número real $M > 0$ cualquiera. Por el principio de Arquímedes, existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \ln(2) > M,$$

o sea que $\ln(2^n) > M$ y por lo tanto $\ln$ no es acotada superiormente. De la misma manera, $-n \ln(2) < -M$ y por lo tanto $\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) < -M$, con lo cual $\ln$ tampoco está acotada inferiormente. Como $\ln$ es una función continua, deberá tomar todos los valores en $\mathbb{R}$.

Concluimos que $\mathrm{Dom}(\ln) = \mathbb{R}^+$ y $\mathrm{Im}(\ln) = \mathbb{R}$.

Además, si $y > x$, se tiene que $y/x > 1$ y por el Corolario 49 tenemos

$$0 < \ln(y/x) = \ln(y) - \ln(x) \;\Rightarrow\; \ln(y) > \ln(x)$$

es decir que $\ln$ es una función estrictamente creciente y por lo tanto admite inversa.

Definición 50. *Se denomina función exponencial a la función* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *dada por* $\exp = \ln^{-1}$.

Si todo lo que hicimos ha ido bien, es de esperar que la función $\exp$ verifique la ecuación (2) para $c = 1$ y la propiedad 1. En efecto, tenemos:

Teorema 51. *Para cualquier número real x, se verifica*

$$\exp'(x) = \exp(x).$$

Demostración: Como la exponencial es por definición la inversa del logaritmo, tendremos:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= (\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{\ln'(\ln^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \ln^{-1}(x) = \exp(x). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 52. *Para $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene*

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Demostración: Fijemos $x, y \in \mathbb{R}$ y pongamos $\overline{x} = \exp(x)$, $\overline{y} = \exp(y)$, es decir

$$x = \ln(\overline{x}), \quad y = \ln(\overline{y}).$$

Entonces, a partir del Teorema 47, tenemos

$$x + y = \ln(\overline{x}) + \ln(\overline{y}) = \ln(\overline{x}\,\overline{y}).$$

Concluimos entonces que $\exp(x + y) = \overline{x}\,\overline{y} = \exp(x) \cdot \exp(y)$ como queríamos ver. $\square$

Definición 53. *El número real* $\exp(1)$ *se denota por* e. *Es decir,* e *es tal que*

$$\ln(e) = \int_1^e \frac{1}{t}dt = 1.$$

Observemos que como $\ln(e) = 1 > 0$, deberá ser $e > 1$. Utilizando la patición $P = \{1, 2\}$ del intervalo $[1, 2]$, tenemos que $\sup\{\frac{1}{t} : 1 \leq t \leq 2\} = 1$ y por lo tanto $1 = 1(2-1)$ es una suma superior para $f(t) = 1/t$ en $[1, 2]$. Luego

$$\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}dt < 1$$

y como $\ln$ es una función creciente y $\ln(e) = 1 > \ln(2)$, concluimos que $e > 2$.

Tomando ahora la partición $P = \{1, 2, 4\}$ del intervalo $[1, 4]$, resulta

$$\inf\left\{\frac{1}{t} : 1 \leq t \leq 2\right\} = \frac{1}{2}, \quad \inf\left\{\frac{1}{t} : 2 \leq t \leq 4\right\} = \frac{1}{4}$$

y por lo tanto $1 = \frac{1}{2}(2-1) + \frac{1}{4}(4-2)$ es una suma inferior de $f(t)$ en $[1, 4]$, conluimos que

$$\ln(4) = \int_1^4 \frac{1}{t}dt > 1$$

y nuevamente como $\ln$ es creciente, deberá ser $e < 4$.

Hasta el momento sabemos que $2 < e < 4$. Esta no es una buena aproximación de e. Veremos una acotación más fina más adelante.

Trataremos ahora de definir la potencia a^x para cualquier valor real x.

Teorema 54. *Para cada número racional* r*,*

$$\exp(rx) = \exp(x)^r.$$

Demostración: A partir del Teorema 52 es fácil ver inductivamente que

$$\exp(nx) = \exp(x)^n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y cualquier número real x.

Pongamos ahora $y = \frac{x}{n}$. Entonces

$$\exp(x) = \exp(ny) = \exp(y)^n = \exp\left(\frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow \exp(x)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$$

Luego si $r = \frac{n}{m}$ con $m, n \in \mathbb{N}$, resulta

$$exp(rx) = \exp\left(n\frac{x}{m}\right) = \exp\left(\frac{x}{m}\right)^n = \exp(x)^{\frac{n}{m}}.$$

Dejamos como **ejercicio** el caso en que $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Observemos que $e = exp(1)$ es un número real positivo y por lo tanto tiene sentido evaluar e^r para $r = \frac{n}{m}$ racional de acuerdo a la noción usual de potenciación, es decir, $e^r = \sqrt[m]{e^n}$. El teorema 54 nos dice que hacer e^r de esta manera coincide con evaluar la función $\exp$ en r, pues en efecto $\exp(r) = \exp(r \cdot 1) = \exp(1)^r = e^r$. Como la función exponencial está definida para todos los números reales, y coincide con la potencia usual en los racionales, podemos extender el concepto de potencia a cualquier exponente mediante la siguiente definición:

Definición 55. *Para cualquier número real x, se define*

$$e^x = \exp(x)$$

La definición 55 permite generalizar la potencia a un exponente real cualquiera, aunque sólo para el caso en que la base sea e. Es decir, todavía no sabemos qué significa, y ni siquiera si tiene sentido, hacer 10^π, o más generalmente a^x para a y x arbitrarios.

Comencemos observando que no tendrá sentido definir a^x cuando $a < 0$, pues ya carece de sentido (en el contexto de los números reales) pensar en $a^{\frac{1}{2}}$. Tendremos además un problema si $a = 0$, pues 0^0 no puede definirse. Supondremos por lo tanto que $a > 0$.

Observemos que en ese caso está bien definido $\ln(a)$. Dejamos como ejercicio probar, combinando los Corolarios 48 y 49 que para cada número racional r resulta

$$\ln(a^r) = r \ln(a).$$

Luego si $a > 0$, para cada $r \in \mathbb{Q}$ tendremos

$$a^r = \exp(\ln(a^r)) = exp(r \ln(a)) = e^{r \ln(a)}$$

Esta última expresión tiene sentido incluso cuando r no es racional y nos permite definir una nueva noción de potencia para una base $a > 0$ cualquiera, que nuevamente coincide con la noción usual cuando el exponente es racional:

Definición 56. *Si $a > 0$, para cualquier número real x definimos*

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

Hagamos algunas observaciones:

- Si $a = e$, la Definición 56 coincide efectivamente con la Definición 55, dado que $\ln(e) = 1$.
- Tanto la función $\exp(x)$ como $h(x) = x \ln(a)$ son continuas y derivables. Por lo tanto la función $f(x) = a^x = \exp \circ h(x)$ resulta continua y derivable.

- Para $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ cualquiera, se tiene

$$\ln(a^x) = \ln\left(e^{x\ln(a)}\right) = x\ln(a) \tag{3}$$

  lo que generaliza la propiedad del Corolario 48.

Veremos que la definición que hemos dado verifica las propiedades esperables de la potencia:

Teorema 57. *Si $a > 0$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica:*

1. $(a^x)^y = a^{xy}$.

2. $a^1 = a$ *y* $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

Demostración:

1. $(a^x)^y = e^{y\ln(a^x)}$. Por la ecuación (3), $\ln(a^x) = x\ln(a)$ y por lo tanto

$$(a^x)^y = e^{xy\ln(a)} = a^{xy}.$$

2. $a^1 = e^{1\cdot\ln(a)} = a$. Por otra parte,

$$a^{x+y} = e^{(x+y)\ln(a)} = \exp(x\ln(a) + y\ln(a)) = \exp(x\ln(a)) \cdot \exp(y\ln(a)) = a^x a^y. \quad \square$$

Estas propiedades nos permiten analizar el comportamiento de las funciones $f(x) = a^x$ para las distintas opciones para $a > 0$. Recordemos primero que la inversa de una función monótona es monótona del mismo tipo que la función original (creciente o decreciente). Por lo tanto la función $\exp(x)$ es estrictamente creciente.

Dividiremos el análisis de $f(x) = a^x$ en tres casos:

1. Si $a = 1$, entonces $1^x = e^{x\ln 1} = e^0 = 1$. Luego f es la función constante igual a 1.

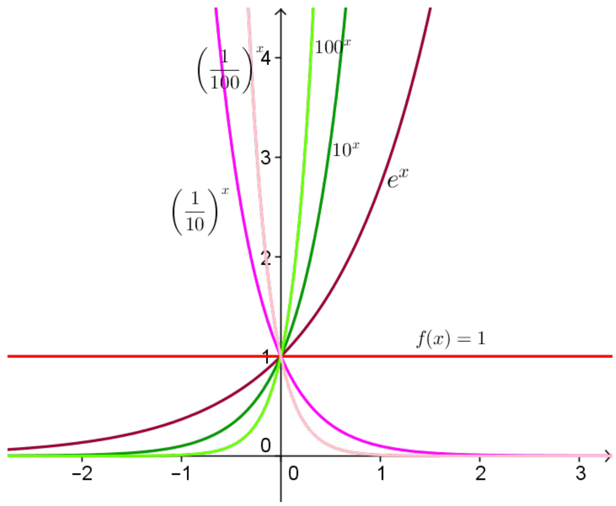
2. Si $0 < a < 1$, entonces $\ln(a) < 0$, luego si $x < y$, $y\ln(a) < x\ln(a)$ y como $\exp$ es una función creciente, resulta

$$a^y = e^{y\ln(a)} < e^{x\ln(a)} = a^x$$

   con lo cual en este caso f es una función decreciente.

3. Si $1 < a$, $\ln(a) > 0$ y un análisis análogo al del item anterior muestra que f es una función creciente.

Mostramos a continuación las graficas de la función $f(x) = a^x$ para distintos valores de a. Observemos que para cualquier $a > 0$, $a^0 = 1$, y por lo tanto todas las gráficas pasan por el punto $(0, 1)$.



Como las funciones del tipo $f(x) = a^x$ para $a > 0$ y $a \neq 1$ son monótonas, son biyectivas y por lo tanto admiten inversa. Las inversas definen las distintas funciones logarítmicas:

Definición 58. *Dado un número real positivo a se denomina función logaritmo en base a a la función inversa de la función a^x. Se denota $\log_a(x)$ y verifica:*

$$\log_a(x) = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \log_a(x) = y \quad &\Leftrightarrow \quad a^y = x \;\Leftrightarrow\; x = e^{y \ln a} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(x) = \ln\left(e^{y\ln(a)}\right) \;\Leftrightarrow \ln(x) = y\ln(a) \\ &\Leftrightarrow \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

Queda claro de este análisis que el dominio y la imagen de las distintas funciones logarítmicas coinciden con el dominio y la imagen de $\ln$. Por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(\log_a) = \mathbb{R}^+, \;\; \mathrm{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$$

y siendo las funciones exponenciales inversas de las funciones logarítmicas, es claro que

$$\mathrm{Dom}(a^x) = \mathbb{R}, \;\; \mathrm{Im}(a^x) = \mathbb{R}^+$$

(este último puede obtenerese también directamente de la definición de las funciones exponenciales).

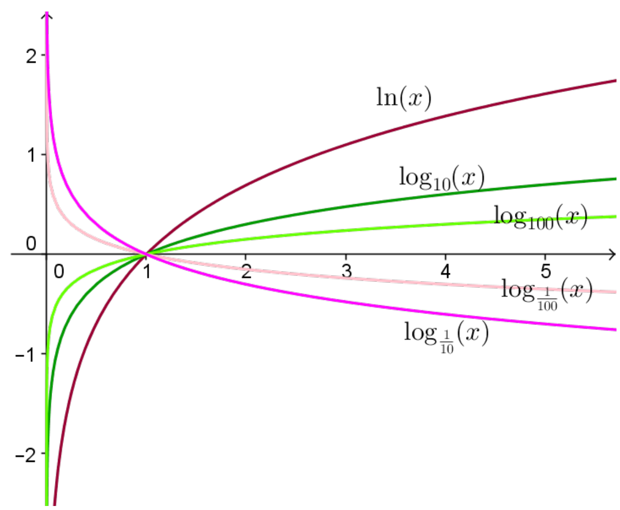
De las propiedades de a^x (pero también del hecho que $\log_a$ es un múltiplo de $\ln$) obtenemos que:

- Si $a = 1$, $\log_a$ no está definida.

- Si $0 < a < 1$, entonces $\log_a$ es decreciente.

- Si $1 < a$, entonces $\log_a$ es creciente.

Incluimos a continuación las gráficas de las distintas funciones logarítmicas.



Como ya hemos mencionado, las funciones exponenciales y logarítmicas que hemos definido en esta unidad son continuas y derivables en todo su dominio. Obtendremos a continuación expresiones para sus derivadas.

Ya hemos visto que

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}, \quad \exp'(x) = \exp(x) = e^x.$$

Tomemos $a > 0$ y definamos $h(x) = x\ln(a)$. La función h es derivable y $h'(x) = \ln(a)$. Por otra parte, $f(x) = a^x = \exp(h(x))$. Aplicando la regla de la cadena, resulta

$$f'(x) = \exp'(h(x)) \cdot h'(x) = \exp(h(x)) \cdot \ln(a) = \ln(a)e^{x\ln(a)} = \ln(a)a^x = \ln(a)f(x).$$

Como $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$,

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln'(x) = \frac{1}{\ln(a)x}$$

Podemos finalmente considerar la función $g(x) = x^a$, donde ahora la variable aparece en la base pero el exponente a es arbitrario. Por definición, $g(x) = e^{a\ln(x)}$ con lo cual g es continua y derivable y se tiene

$$g'(x) = e^{a\ln(x)}a \cdot \ln'(x) = \frac{a}{x}e^{a\ln(x)} = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}.$$

Como hemos adelantado en el comienzo, la ecuación 2 es muy importante y caracteriza completamente a las funciones exponenciales en el siguiente sentido:

Teorema 59. *Si f es una función derivable tal que $f'(x) = f(x)$ para todo x, entonces existe un número real c tal que $f(x) = ce^x$.*

Demostración: Definamos $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$. Entonces aplicando la regla de derivación de un cociente, tenemos

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = 0$$

y por lo tanto existe una constante c tal que $g(x) = c$ $\square$

Terminamos esta unidad probando que la función exponencial crece más rápido que cualquier potencia. Esto se traduce en el siguiente límite:

Teorema 60. *Para cualquier número natural n,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty.$$

Demostración: Probemos primero que

$$e^x > x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Si $x \leq 0$ la afirmación es trivial dado que $e^x > 0$ para todo x.

Supongamos entonces que $x > 0$ y veamos que $\ln(x) < x$. Si $0 < x \leq 1$ la afirmación nuevamente es trivial, pues $\ln(x) \leq 0$. Supongamos entonces que $x > 1$. Tomando la partición trivial $P = \{1, x\}$ del intervalo $[1, x]$, resulta claro que $U(\frac{1}{t}, P) = x - 1$ y por lo tanto

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} < x - 1 < x.$$

Como la función exponencial es creciente, resulta $e^{\ln(x)} < e^x$, o sea que $x < e^x$.

Probaremos ahora que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty. \tag{5}$$

Para ello observemos que

$$\frac{e^x}{x} = \frac{e^{x/2}e^{x/2}}{2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{x/2}}{\frac{x}{2}}\right)e^{x/2}.$$

Aplicando la desigualdad (4) a $\frac{x}{2}$, obtenemos que la expresión entre paréntesis es mayor que 1 (observemos que estamos haciendo tender x a infinito y por lo tanto podemos suponer que $x > 0$). Luego

$$\frac{e^x}{x} > \frac{1}{2}e^{x/2}.$$

Como la función $\exp$ es creciente y no acotada, el límite cuando x tiende a infinito del lado derecho de la desigualdad es infinito, de donde obtenemos que vale la ecuación 5.

Para el caso general, observemos que

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{(e^{x/n})^n}{\left(\frac{x}{n}\right)^n n^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{x/n}}{\frac{x}{n}}\right)^n.$$

La expresión dentro del paréntesis tiende a infinito cuando x tiene a infinito en virtud de (5), y por lo tanto el límite de toda la expresión es infinito. $\square$