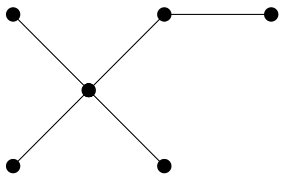
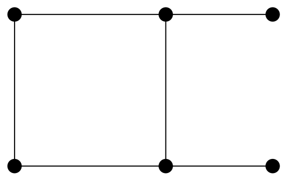
Práctica 6 - Árboles

1. Determinar cuáles de los siguientes grafos son árboles.

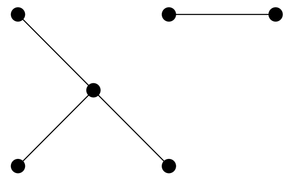
a)



b)



c)



2. Determinar todos los valores de $n \in \mathbb{N}$ (y $m \in \mathbb{N}$ si corresponde) para los cuales los siguientes grafos son árboles.
   a) El grafo completo K_n.
   b) El camino P_n.
   c) El ciclo C_n.
   d) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.
   e) El n-cubo Q_n.

3. Probar que todo árbol es bipartito.

4. Describir todos los árboles T que tienen exactamente dos hojas.

5. Sea G un grafo con $|E(G)| < |V(G)| - 1$. Probar que G no es conexo.

6. En cada caso, dar un grafo G que tenga las propiedades indicadas o explicar por qué no existe tal grafo.
   a) G acíclico, $|E(G)| = 4$ y $|V(G)| = 6$.
   b) G árbol 2-regular.
   c) G árbol, $|V(G)| = 6$ y los vértices de G tienen grados 1, 1, 1, 1, 3 y 3.
   d) G árbol con 10 vértices, de los cuales exactamente 6 son hojas.

7. Sean T_1 y T_2 dos árboles tales que $|E(T_1)| = 17$ y $|V(T_2)| = 2|V(T_1)|$. Determinar $|V(T_1)|$, $|V(T_2)|$ y $|E(T_2)|$.

8. *a*) Probar que todo grafo acíclico es un bosque.
   b) Sea F un bosque con $\kappa(F) = k$ y $|V(F)| = n$. Determinar $|E(F)|$.
   c) Sea F un bosque con $\kappa(F) = 7$ y $|E(F)| = 40$. Determinar $|V(F)|$.
   d) Sea F un bosque con $|V(F)| = 62$ y $|E(F)| = 51$. Determinar $\kappa(F)$.

9. Sea T un árbol.
   a) Probar que toda arista $e \in E(T)$ es una arista de corte.
   b) Probar que todo vértice $v \in V(T)$ con $d(v) \geqslant 2$ es un vértice de corte.
   c) ¿Es cierto el ítem anterior si $d(v) = 1$?

10. Sea G un grafo simple y conexo, que no es isomorfo a un grafo completo. Probar que G es un árbol si y sólo si cuando se agrega una arista entre dos vértices cualesquiera no adyacentes, se crea exactamente un ciclo.

Árboles recubridores

11. *a*) Probar que todo grafo conexo G tiene un árbol recubridor.

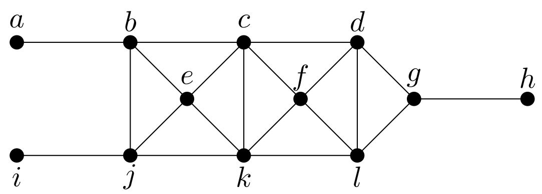
    b) ¿En qué condiciones una arista en un grafo conexo G está contenida en todo árbol recubridor de G?

12. *a*) Sea T un árbol recubridor para un grafo G. Probar que si una arista e está en G pero no en T, entonces al agregar e a T se crea exactamente un ciclo.

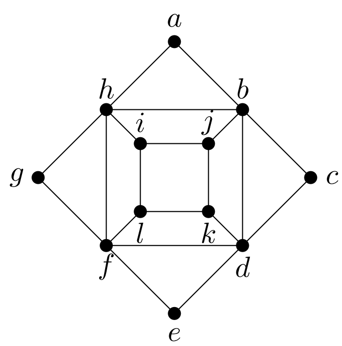
    b) Sean T y T' dos árboles recubridores de un grafo conexo G y $e \in E(T) \backslash E(T')$. Probar que existe $e' \in E(T') \backslash E(T)$ tal que $(T' \cup e) \backslash e'$ es un árbol recubridor de G.

13. Dar un árbol recubridor para cada uno de los siguientes grafos.

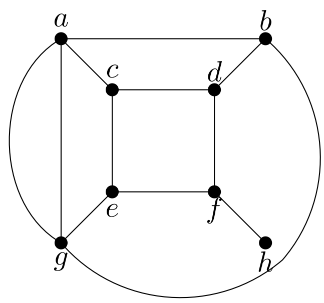
    a)



    b)



14. Considerar el siguiente grafo G.



    a) Usar el algoritmo de búsqueda en anchura (BFS) para dar un árbol recubridor de G con el orden de vértices dado en cada caso.

    I. $hgfedcba$ II. $hfdbgeca$ III. $chbgadfe$

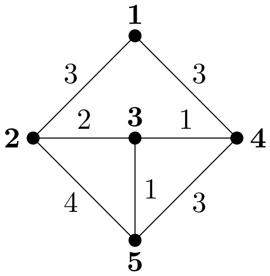
    b) Usar el algoritmo de búsqueda en profundidad (DFS) para dar un árbol recubridor de G con el orden de vértices dado en cada caso.

    I. $hgfedcba$ II. $hfdbgeca$ III. $dhcbefag$

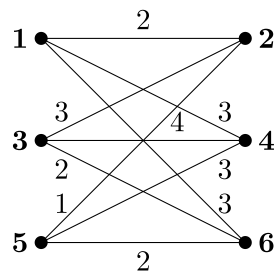
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

15. Dar un árbol recubridor de peso mínimo para cada uno de los siguientes grafos, mediante el algoritmo de Kruskal.

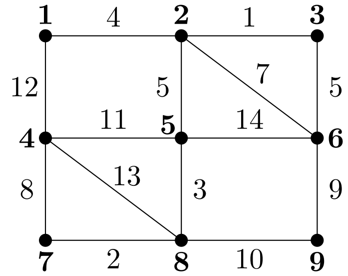
I.



II.



III.



16. *Algoritmo de Prim.*

Entrada. Un grafo conexo ponderado.

Idea. Mantener un subgrafo conexo H e ir agregando nuevos vértices incidentes en aristas de peso mínimo.

Inicio. Elegir $v \in V(G)$. $V(H) = \{v\}$, $E(H) = \varnothing$.

Iteración. Mientras $V(H) \neq V(G)$, elegir la arista e de menor peso entre el conjunto de aristas que tienen un extremo en $V(H)$ y otro en $V(G) \backslash V(H)$. Si la arista elegida es $e = uw$ con $u \in V(H)$ y $w \in V(G) \backslash V(H)$, actualizamos $V(H) \leftarrow V(H) \cup \{w\}$, $E(H) \leftarrow E(H) \cup \{e\}$.

a) Probar que si G es un grafo conexo ponderado, el algoritmo de Prim produce un árbol recubridor de G de peso mínimo.

b) Dar un árbol recubridor de peso mínimo para cada uno de los grafos del ejercicio 15, utilizando el algoritmo de Prim.

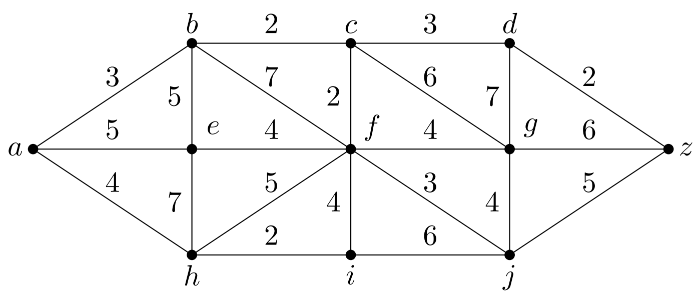
17. Determinar si cada una de las siguiente afirmaciones es verdadera o falsa, justificando adecuadamente.

a) Si todos los pesos en un grafo conexo ponderado G son diferentes, entonces G admite un único árbol recubridor de peso mínimo.

b) Si todos los pesos en un grafo conexo ponderado G son diferentes, entonces los árboles recubridores de G distintos tienen pesos distintos.

Algoritmo de Dijkstra

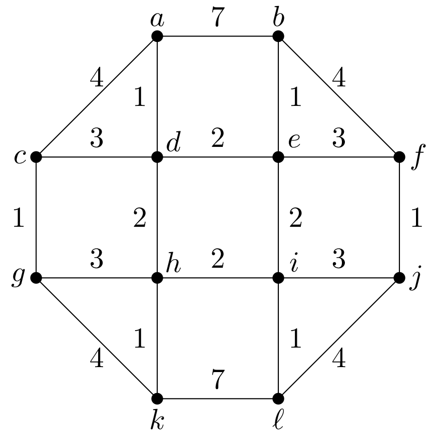
18. Aplicar el algoritmo de Dijkstra al grafo ponderado de la figura y determinar la distancia entre los pares de vértices indicados.



a) a y f. *b*) a y g. *c*) a y z. *d*) b y j. *e*) h y b. *f*) h y d.

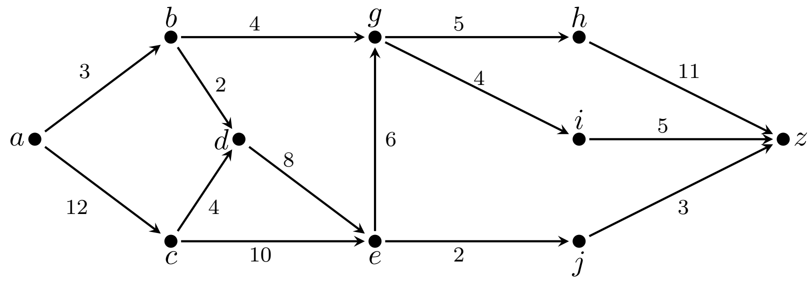
19. Suponer que el algoritmo de Dijkstra tiene como entrada un grafo ponderado G que no es conexo, y un vértice inicial $v \in V(G)$. Si w es un vértice de G que no está en la misma componente conexa que v ¿qué valor tiene $t(v)$ al finalizar la ejecución del algoritmo?

20. *a*) Aplicar el algoritmo de Dijkstra al grafo ponderado de la figura y determinar la distancia del vértice a a cada uno de los otros vértices.



b) Dar un camino de longitud mínima desde el vértice a a los vértices f, g y ℓ.

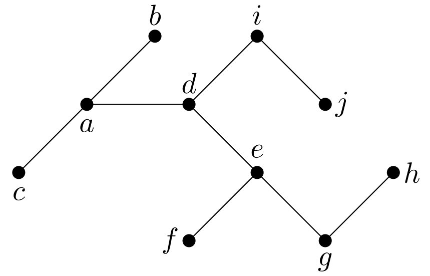
21. Considerar el siguiente digrafo ponderado G. Determinar la longitud de una ruta más corta desde el vértice a a cada uno de los otros vértices de G.



ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119

Árboles binarios

22. Considerar el siguiente árbol, con el vértice a como raíz.



   a) Determinar el nivel de cada vértice.
   b) Determinar la altura del árbol.
   c) ¿Se trata de un árbol binario?
   d) Repetir los ítems anteriores pero considerando al vértice g como raíz.

23. En cada caso, dar un grafo que tenga las propiedades indicadas o explicar por qué no existe.
   a) Árbol binario completo, 4 vértices internos, 5 hojas.
   b) Árbol binario completo, altura 3, 9 hojas.
   c) Árbol binario completo, altura 4, 9 hojas.

24. Un árbol enraizado es *m-ario* (con $m \in \mathbb{N}$) si todo vértice tiene a lo sumo m hijos. Si en particular todo vértice tiene 0 o m hijos, se dice *m-ario completo*. Sea T un árbol m-ario completo con i vértices internos.
   a) Determinar la cantidad de hojas de T.
   b) Determinar la cantidad de vértices de T.

25. a) Un árbol 3-ario (o *ternario*) completo $T = (V, E)$ tiene 34 vértices internos. ¿Cuántas aristas tiene T? ¿Cuántas hojas?
   b) ¿Cuántos vértices internos tiene un árbol 5-ario completo con 817 hojas?

26. Un árbol binario T está *balanceado* si para cada vértice $v \in V(T)$ las alturas de los subárboles izquierdo y derecho de v difieren en a lo sumo 1 (la altura de un árbol vacío se define como -1).

   Establecer si cada uno de los siguientes árboles está o no balanceado.