PRÁCTICA 3 COMPLEMENTARIA - Límite y Continuidad - Parte 2

Continuidad

1. Analizar la continuidad de cada una de las siguientes funciones en el punto x_0 indicado en cada caso.

   (a) $f_1(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<2 \\ 1+x & x>2 \end{cases}$, $(x_0 = 2)$.

   (b) $f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ -5 & x = 3 \end{cases}$, $(x_0 = 3)$.

   (c) $f_3(x) = \begin{cases} x^2-2 & x \leq 3 \\ 2x+1 & x>3 \end{cases}$, $(x_0 = 3)$.

2. Determinar los puntos de continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones:

   (a) $f_1(x) = \mathrm{mant}(x) = x - [x]$.

   (b) $f_2(x) = \begin{cases} 1-x & x \leq 2 \\ x^2-2x & x>2 \end{cases}$.

   (c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-1} & x<1, x \neq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & x>1 \end{cases}$.

   (d) $f_4(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4} & |x| \neq 2 \\ 3 & |x| = 2 \end{cases}$.

3. Dada $g(x) = \left|\dfrac{x}{3}\right|$, indicar los conjuntos $g\left([1,3]\right)$ y $g^{-1}\left([-2,4]\right)$.

4. Sea f una función continua en a y $f(a) = 0$. Demostrar que si $\alpha \neq 0$, entonces $f + \alpha$ es distinto de 0 en algún intervalo abierto que contiene a a.

5. En los siguientes ejemplos se consideran dos funciones f y g. Hallar, en cada caso, la ley de la composición $h = f \circ g$ y analizar sus puntos de continuidad.

   (a) $f(x) = x^2 - x$, $g(x) = x + 1$.

   (b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

   (c) $f(x) = \begin{cases} x \,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$.

6. Una raíz real de una ecuación se dice aislada si se tiene un intervalo $[a,b]$ tal que contiene a dicha raíz y ninguna otra. Con ayuda del Teorema de Bolzano, mostrar que las cuatro raíces reales de cada una de las siguientes ecuaciones son aisladas.

   (a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8 = 0$.

   (b) $2x^4 - 14x^2 = -14x + 1$.

7. Un monje tibetano sale del monasterio a las $7:00$ a.m. y toma su camino cotidiano a la cima de la montaña, donde llega a las $7:00$ p.m. A la mañana siguiente baja de la cima a las $7:00$ a.m. y, siguiendo el mismo camino, arriba al monasterio a las $7:00$ p.m. Utilizando el teorema de los valores intermedios, demostrar que hay un punto del camino por el cual el monje pasa exactamente a la misma hora de los dos días.

8. Demostrar que existe un número positivo c tal que $c^2 = 2$. (Con esto se demuestra la existencia del número $\sqrt{2}$).

9. En cada uno de los siguientes casos demostrar que la función f_i es estrictamente monótona en su dominio. Obtener su inversa (ley y dominio) y estudiar la continuidad de la misma.

   (a) $f_1(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$.

   (b) $f_2 = 2x^3 - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Sea $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = x^3 + x^2 + x$. Mostrar que p es suryectiva utilizando argumentos de comtimuidad.

11. Sea f continua en $(0, 1)$ tal que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$. Demostrar que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

12. Mostrar algún valor $m \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación $\operatorname{sen}(x) = mx + 1$ tiene una única solución. ¿Cuáles son todos los posibles valores de m?

ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119