Práctica Complementaria

Subgrafos

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| \geqslant 2$ tal que todos los subgrafos inducidos de G son conexos. ¿Es posible identificar al grafo G?

2. Determine la máxima cantidad de aristas en un subgrafo bipartito de los grafos P_n, C_n y K_n.

3. Sea G un grafo simple claw-free. Pruebe que si $\Delta(G) \geqslant 5$, entonces G tiene a C_4 como subgrafo.

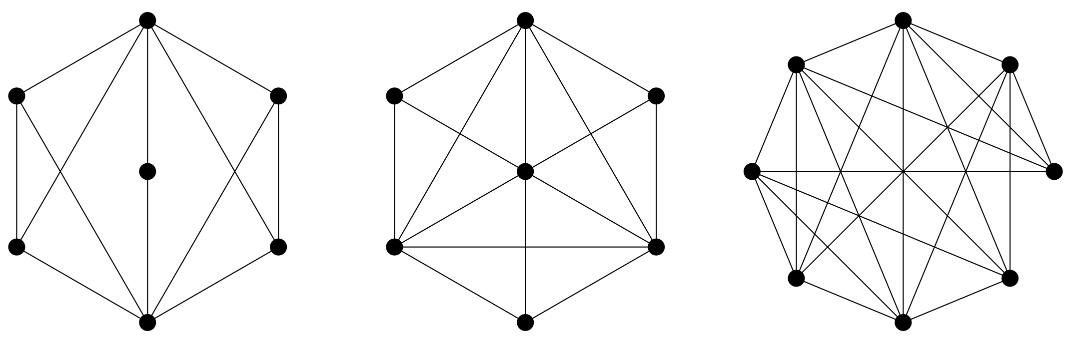
4. Sea $k \in \mathbb{N}$. Sea G el subgrafo de Q_{2k+1} inducido por el conjunto de vértices para los cuales la diferencia entre la cantidad de ceros y unos es uno.
   a) Pruebe que G es regular.
   b) Determine $|V(G)|$ y $|E(G)|$.

5. Pruebe que el n-cubo Q_n es $K_{2,3}$-free.

6. Consideremos que el conjunto vacío es un conjunto estable de todo grafo. Pruebe que para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la cantidad de conjuntos estables del camino P_n coincide con el $(n+1)$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Considere P_0 como el grafo vacío.

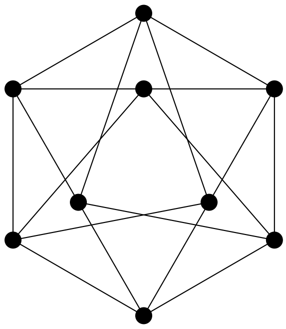
7. Sea $G = (V, E)$ un grafo con $|V| > 2$. Pruebe que G verifica exactamente una de las siguientes condiciones:
   a) Si G no es conexo, $G = G_1 + G_2$ (G_1 y G_2 no vacíos).
   b) Si $\overline{G}$ no es conexo, $G = G_1 \vee G_2$ (G_1 y G_2 no vacíos).
   c) Si G y $\overline{G}$ son conexos, G se dice *modular*.

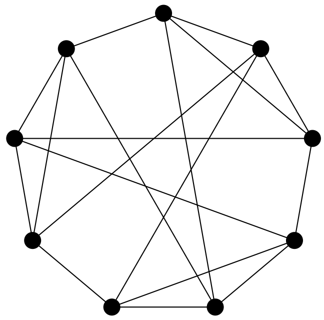
8. a) Dar una descomposición modular de cada uno de los siguientes grafos.



   b) Para cada grafo G del ítem anterior, calcular $\alpha(G)$ y $\omega(G)$ utilizando la descomposición modular.
   c) Un grafo es un *cografo* si es P_4-free. Un grafo es un cografo si y solo si los grafos modulares de su descomposición son triviales. Determine si cada uno de los grafos del ítem (a) son cografos. En caso que no lo sean, encontrar un P_4 inducido.

9. *a*) Pruebe que cada uno de los siguientes grafos es isomorfo a $K_3 \square K_3$.





b) Pruebe que $K_3 \square K_3$ es autocomplementario.

10. Pruebe que para $n \geqslant 2$, el n-cubo Q_n es isomorfo al grafo $Q_{n-1} \square K_2$.

Caminos, ciclos y recorridos

1. Sea G el grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G) = \{1, \ldots, 15\}$ donde dos vértices i y j son adyacentes si y solo si su máximo divisor común es mayor a 1.

   a) ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

   b) Determinar la longitud máxima de un camino simple en G.

2. *a*) Dar un ejemplo de un grafo con seis vértices que tenga exactamente 2 vértices de corte.

   b) Dar un ejemplo de un grafo con seis vértices que no tenga vértices de corte.

   c) Demostrar que un vértice v en un grafo conexo G es un vértice de corte si y solo si existen vértices u y w en G tales que todo camino de u a w pasa por v.

3. Dar todos los vértices y aristas de corte, si existen, de los grafos P_n, C_n y K_n.

4. Determinar para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ (o de $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ si corresponde) los siguientes grafos admiten un circuito euleriano.

   a) El grafo completo K_n.

   b) El grafo completo bipartito $K_{m,n}$.

   c) El cubo-n Q_n.

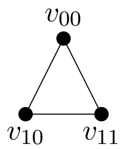
   d) El grafo T_n cuyo conjunto de vértices está dado por

   $$V(T_n) = \bigcup_{i=0}^{n} \{v_{ij} : 0 \leqslant j \leqslant i\}$$

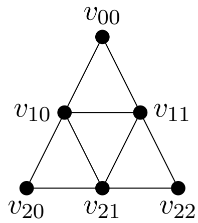
   y dos vértices v_{ij}, $v_{k\ell}$ son adyacentes si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

   - $k = i$ y $\ell = j + 1$;
   - $k = i + 1$ y $\ell = j$;
   - $k = i + 1$ y $\ell = j + 1$;

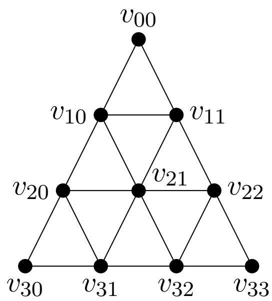
ESCUELA DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Av. Pellegrini 250. Rosario
+54 0341 - 480 2649 internos 216 - 119



T_1



T_2



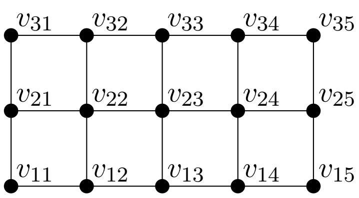
T_3

e) El grafo *grilla* $G_{m,n}$ cuyo conjunto de vértices está dado por

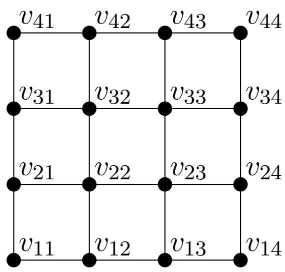
$$V(G_{m,n}) = \{v_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$

y dos vértices v_{ij}, $v_{k\ell}$ son adyacentes si y solo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- $k = i$ y $\ell = j + 1$;
- $k = i + 1$ y $\ell = j$;



$G_{3,5}$



$G_{4,4}$

5. Probar que el algoritmo de Fleury devuelve un circuito euleriano en G.

   Algoritmo de Fleury:
   Sea G un grafo conexo par.

   1. Considerar cualquier vértice $u \in V(G)$, $W \leftarrow u$ (en W asignar u), $x \leftarrow u$, $F \leftarrow G$.
   2. Mientras $gr_F(x) \geqslant 1$: seleccionar una arista $e = xv$ (i.e. incidente en x), donde e no es de corte de F, salvo que no exista (en cuyo caso seleccionar cualquiera incidente en x).
      $W \leftarrow uev$, $x \leftarrow v$, $F \leftarrow F \backslash e$.
   3. W es un circuito euleriano (*probar*).