v.8.1

Programación 1 - Práctica 6

1 Números Naturales

1.1 Introducción

DrRacket provee muchas funciones que consumen listas y algunas pocas que producen listas. Entre estas últimas se encuentra la función `make-list` que toma un valor `n` y otro `v` para devolver una lista de tamaño `n` que contiene a `v` como único valor.

Aquí podemos ver algunos ejemplos:

```
> (make-list 2 "hello")
(cons "hello" (cons "hello" '()))
> (make-list 3 #true)
(cons #true (cons #true (cons #true '())))
> (make-list 0 17)
'()
```

En resumen, aunque esta función consume sólo datos atómicos, permite construir datos arbitrariamente grandes. ¿Cómo es esto posible?

La respuesta a esa pregunta es que el primer argumento de `make-list` no es cualquier número sino que es un tipo especial de número. En ciencias de la computación los llamamos "números naturales", son aquellos que nos permiten contar.

Los números naturales tienen su propia definición de tipo:

```
; Un Natural es:
; – 0
; – (add1 Natural)
; interpretación: Natural representa los números naturales
```

Como puede ver, esta definición es una definición autoreferenciada similar a la que usamos cuando definimos listas.

Miremos de cerca la definición de números naturales:

La primera cláusula nos dice que `0` es un número natural; en este caso indica que no hay objetos que puedan ser contados. La segunda cláusula dice que si `n` es un número natural, entonces `(add1 n)` también lo es. Ya que `add1` es una función que suma `1` a cualquier número, podríamos reescribir esta segunda cláusula como `(+ n 1)`, pero usamos `add1` para indicar que esta suma es especial.

Lo que tiene de especial el uso de `add1` es que actúa como un constructor. Por esta razón, *DrRacket* provee también la función `sub1`, que es el "selector" correspondiente a `add1`. Dado un número natural `m` distinto de `0`, podemos usar `sub1` para averiguar el número que se usó para la construcción de `m`. En otras palabras `sub1` devuelve el predecesor de un número natural positivo

Los predicados que se usan para identificar el `0` y el resto de los números naturales son `zero?` y `positive?`, respectivamente.

A partir de ahora, podemos construir funciones que tomen como argumentos números naturales. Definamos por nuestra cuenta la función `copiar` que se comporta como `make-list`:

> Notar que la aplicación sucesiva de `add1` sobre `0` nos permite contruir todos los naturales: `(add1 0)=1`, `(add1 (add1 0))=2`, etc. Es por eso que para simplificar la escritura vamos a utilizar los valores 1, 2, 3, 4, ... para representar los números naturales

```
; copiar: Natural String -> Lista(String)
; El propósito de la función copiar es crear una lista de
; n copias de una cadena s

(check-expect (copiar 2 "hola") (list "hola" "hola"))
(check-expect (copiar 0 "hola") '())
(check-expect (copiar 4 "abc") (list "abc" "abc" "abc" "abc"))
```

Una vez que tenemos clara la signatura, el propósito de la función y algunos ejemplos concretos que muestran el comportamiento deseado, debemos definir la función. La función `copiar` deberá analizar si el número natural que se pasa como entrada es el `0` o si es un número positivo.

Así, el cuerpo de la función tendrá una expresión `cond` con dos cláusulas:

```
(define (copiar n s) (cond [(zero? n) '()]
                           [(positive? n) (cons s (copiar (sub1 n) s))]))
```

Si la entrada es `0` eso significa que se debe producir una lista con `0` elementos. Por otro lado, según la declaración de propósito de `copiar`, lo que produce `(copiar (sub1 n) s)` es un lista con `n-1` copias de `s`, por lo tanto, para calcular `(copiar n s)` faltaría únicamente agregar una copia de `s` a dicho resultado. Esto se logra haciendo `(cons s (copiar (sub1 n) s))`.

Resumimos entonces los **constructores**, **selectores** y **predicados** para los números naturales:

Operador	**Tipo de Operador**	**Función**
`0`	Constructor	Constante usada para representar el primer número natural
`add1`	Constructor	Calcula el sucesor de un número natural
`sub1`	Selector	Devuelve el predecesor de un número natural positivo
`zero?`	Predicado	Reconoce al natural 0
`positive?`	Predicado	Reconoce naturales construidos con add1

Ahora que tenemos en claro la definición de números naturales, vamos a practicar!

1.2 Ejercitación

Ejercicio 1. Diseñe la función `sumanat` que toma dos números naturales y sin usar `+` devuelve un natural que es la suma de ambos. Use el evaluador paso a paso para evaluar `(sumanat 3 2)`.

Ejercicio 2. Diseñe la función `multiplicar`. Esta función debe tomar como entrada dos números naturales y debe multiplicarlos sin usar `*` ni `+`. Use el evaluador paso a paso para evaluar `(multiplicar 3 2)`. Puede utilizar el ejercicio anterior.

Ejercicio 3. Diseñe la función `powernat` que toma dos números naturales y devuelve el resultado de elevar el primero a la potencia del segundo, usando la función `multiplicar` definida en el ejercicio anterior. Use el evaluador paso a paso para evaluar `(powernat 4 2)`.

Ejercicio 4. Diseñe una función `sigma: Natural (Natural -> Number) -> Number`, que dados un número natural `n` y una función `f`, devuelve la sumatoria de `f` para los valores de `0` hasta `n`. Es decir, calcular:

$$\sum_{i=0}^{n} f(i)$$

Por ejemplo,

```
(check-expect (sigma 4 sqr)
              30)
(check-expect (sigma 10 identity)
              55)
```

Ejercicio 5. A partir del ejercicio anterior, es posible calcular sumatorias que encontramos frecuentemente en los cursos de matemática. Por ejemplo, si quisiéramos calcular

$$G(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i^3}$$

sólo debemos concentrarnos en definir una función que calcule el recíproco del cubo de un número natural. Luego combinamos esta función con la función `sigma` definida en el ejercicio anterior y podemos definir `G` fácilmente.

Siguiendo esta idea, programe las funciones `R`, `S` y `T` definidas como sigue:

$$R(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} \quad S(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{i}{i+1} \quad T(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1}$$

Observación: Como no conocemos el propósito de estas funciones, sólo pedimos que para las mismas dé sus signaturas, casos de prueba y definición.

Atención: Para los casos de test, quizás le convenga explorar la función `check-within`, que es útil para realizar testing con valores no exactos.

Ejercicio 6. Diseñe la función `intervalo`, que dado un número natural `n`, devuelve la lista `(list 1 2 ... n)`. Para `0` devuelve `'()`.

Ayuda: Quizás le convenga devolver la lista en orden descendente. Luego la función `reverse` lo resuelve fácilmente.

Ejercicio 7. Diseñe la función `factnat` que toma un número natural y devuelve su factorial. El factorial de un número natural `n` se calcula haciendo `1 x 2 x ... x n`. Use el evaluador paso a paso para evaluar `(factnat 4)`.

Ejercicio 8. Diseñe la función `fibnat` que toma un número natural y devuelve el valor correspondiente a la secuencia de Fibonacci para ese valor:

`fibnat (0) = 1`

`fibnat (1) = 1`

`fibnat (n+2) = fibnat (n) + fibnat (n+1)`

Use el evaluador paso a paso para calcular `(fibnat 5)`.

Ejercicio 9. Diseñe una función `list-fibonacci` que dado un número `n` devuelve una lista con los primeros `n+1` valores de la serie de fibonacci, ordenados de mayor a menor. Es decir, `(list-fibonacci n) = (list (fib n) (fib (- n 1)) ... (fib 0))`

Por ejemplo:

```
(check-expect (list-fibonacci 4)
              (list 5 3 2 1 1))
(check-expect (list-fibonacci 0)
              (list 1))
```

Ejercicio 10. Considere la función `g` definida como sigue:

`g (0) = 1`

`g (1) = 2`

`g (2) = 3`

`g (n) = g (n-1) * g (n-2) * g (n-3) para todo n mayor o igual a 3`

Diseñe una función `list-g` que dado un número `n` devuelve la lista con los valores que resulta de evaluar a `g` en `n`, `n-1`, `n-2`,...,`0`. Es decir `(list-g n) = (list (g n) (g (- 1 n)) ... (g 1) (g 0))`.

Por ejemplo:

```
(check-expect (list-g 4)
              (list 36 6 3 2 1))
(check-expect (list-g 0)
              (list 1))
```

Ejercicio 11. Diseñe una función `componer`, que dados:

- una función `f: Number -> Number`,
- un natural `n`, y
- un número `x`,

devuelva el resultado de aplicar `n` veces la función `f` a `x`.

Por ejemplo:

```
(check-expect (componer sqr 2 5)
              625)
(check-expect (componer add1 5 13)
```

```
               18)
```

Presente al menos dos ejemplos más en su diseño.

Ejercicio 12. Diseñe una función `multiplos` que tome dos naturales `n` y `m`, y devuelva una lista con los primeros `n` múltiplos positivos de `m`, en orden inverso: `m * n`, `m * (n-1)`, ... , `m * 2`, `m`.

Por ejemplo:

```
(check-expect (multiplos 4 7)
              (list 28 21 14 7))
(check-expect (multiplos 0 11)
              '())
```

Ejercicio 13. Estamos interesados en definir una función `g` que dado un número natural `n` y una función `f: Natural -> Boolean`, devuelve `#true` si y sólo si alguno de los valores `(f 0) ,(f 1) ,... (f n)` es `#true`.

Por ejemplo:

```
(check-expect (g 3 negative?)
               #false)

(check-expect (g 7 even?)
               #true)
```

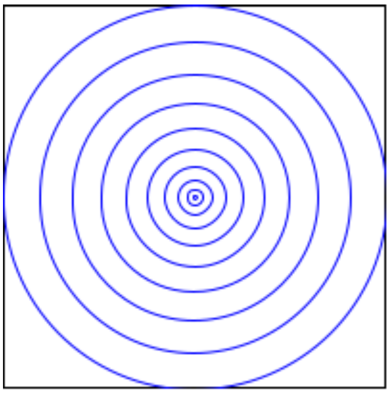
En lógica, suele usarse el símbolo $\vee$ para representar el operador `or`. Podemos expresar `g` de la siguiente manera:

$$\bigvee_{i=0}^{n} f(n)$$

Diseñe la función `g`.

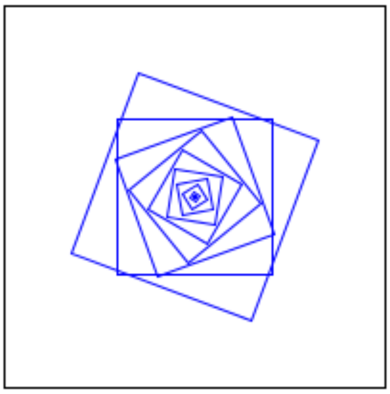
Ejercicio 14. Diseñe una función `circulos` que tome un número natural `m` y devuelva una imagen cuadrada de lado `2*m`^{2} con `m` círculos azules centrados y radios: `m`^{2}, `(m-1)`^{2}, ... , `2`^{2}, `1` respectivamente.

Por ejemplo:

`(circulos 10) =` 

Ejercicio 15. Diseñe una función `cuadrados` que tome un número natural `m`, un ángulo `ang` y devuelva una imagen cuadrada de lado `200` con `m` cuadrados azules centrados. Los cuadrados azules tendrán lados de tamaño: `m`^{2}, `(m-1)`^{2}, ... , `2`^{2},`1` respectivamente. El ángulo `ang` indica la rotación del cuadrado de mayor dimensión. El ángulo que corresponde al cuadrado de lado `(m-1)`^{2} debe ser de `20` grados mayor que el que le corresponde al cuadrado de lado `m`^{2}, para cualquier valor de `m` mayor o igual a `1`.

Por ejemplo:

`(cuadrados 10 70) =` 

Ejercicio 16. Una persona solicita un préstamo a una entidad bancaria y se compromete a devolver el importe `total` del préstamo más intereses en `n` cuotas mensuales crecientes, con una tasa de interés del `i`% anual. La cuota `j`-ésima, con `j` que va de `1` hasta `n`, se calcula sumando dos valores:

- la parte correspondiente a la devolución del préstamo: `total/n`;
- la parte correspondiente a los intereses de la cuota: `(total/n) * (i/(100*12)) * j`.

Diseñe una función `cuotas` que dado un importe `total` de un préstamo, un valor `n` correspondiente al número de cuotas, una tasa `i` de interés, devuelva una lista con las cuotas a pagar ordenadas de forma creciente.

Por ejemplo:

```
(check-expect (cuotas 10000 0 18)
              '())
(check-expect (cuotas 10000 1 12)
              (list 10100))
(check-expect (cuotas 30000 3 12)
              (list 10100 10200 10300))
(check-expect (cuotas 100000 4 18)
              (list 25375 25750 26125 26500))
```