Tarea Examen 2

Física computacional

Resuelva los siguientes ejercicios, explicando claramente su razonamiento.

1. Considere una partícula constreñida a moverse en un círculo de radio R. De esta manera la energía del sistema es $E = \frac{p^2}{2mR^2}$ que corresponde a un movimiento con velocidad angular constante $\dot{\theta} = \omega = p/mR^2$. Ahora pensemos en que el sistema es perturbado por una fuerza impulsiva cada tiempo τ con la misma intensidad ϵ en la misma dirección y sentido. Esto quiere decir que dependiendo de la posición de la partícula sobre el círculo, la fuerza actuará sobre la componente tangencial.

   El efecto de esta perturbación es que hace un cambio instantáneo en el valor del momento angular. En el momento en el que la fuerza anterior actúa sobre la masa, ésta se encuentra en la posición $\theta(t)$ y en ese instante el cambio en la cantidad de movimiento es $\Delta p = \epsilon \cos\theta$. Esto quiere decir que p permanecerá constante hasta que transcurra un periodo τ y en ese momento sufrirá un cambio instantáneo Δp, posteriormente permanecerá constante hasta que se cumpla un periodo más. Por otro lado, θ tiene la forma $\theta = \theta_0 + \omega t$, módulo 2π.

   Para analizar el comportamiento del sistema se utiliza una técnica parecida al mapeo de Poicaré. Como la perturbación es periódica podemos tomar un punto en el espacio fase y mapearlo a aquel en el que estará un instante τ después. Supongamos que las coordenadas iniciales antes de la perturbación son θ_0, p_0 y escoja algún valor de τ.

   (a) Muestre que en el mapeo, los valores subsecuentes son:

   $$\theta_{i+1} = \theta_i + \frac{p_{i+1}}{mR^2}\tau \pmod{2\pi}$$

   $$p_{i+1} = p_i + \epsilon \cos\theta_i$$

   donde se ha tomado en cuenta que en el instante en el que la fuerza actúa, θ tiene el valor θ_i. De aquí en adelante considere $m = 1$ y $R = 1$.

   (b) Con $\epsilon = 0$, utilice 200 condiciones iniciales arbitrarias tales que $p_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ y $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ y encuentre las curvas en el plano (θ, p) que resultan de hacer muchas iteraciones del mapeo. Explique el resultado del mapeo. Nota: Haga la gráfica con puntos y tome por lo menos 2,000 iteraciones para cada condición inicial.

   (c) ¿El sistema tiene puntos fijos para $\epsilon \neq 0$?. De ser afirmativa la respuesta, encuéntrelos y explique el significado de dichos puntos. Los puntos fijos son aquellos que cumplen que $\theta_{i+1} = \theta_i$ y $p_{i+1} = p_i$.

   (d) Realice simulaciones con $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.7$ y 1.1. Explique detalladamente sus resultados.

2. Considere un sistema en el que la Hamiltoniana es:

   $$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3}y^3$$

   En este caso se puede ver que la energía, $E = H$, es una contante de movimiento.

   (a) Muestre que el sistema tiene órbitas acotadas. ¿Para que valor de la energía se dan dichas órbitas?. De aquí en adelante, concentrémonos en condiciones iniciales con $E < 1/6$.

   (b) Realice un programa en el que se escojan condiciones iniciales con $x = 0$ y con valores de (y, p_y) compatibles con la condición de energía de la oración anterior. Escoja un valor para la energía y ello determinará el valor de p_x para esa condición inicial. Ahora obtenga la trayectoria para la condición inicial que se escoja y resuelva las ecuaciones de movimiento dadas por:

   $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} \quad , \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} \quad , \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{y} \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad .$$

(c) Ahora programe una función que obtenga todos los puntos de la trayectoria solución cuando $x = 0$. Escoja 15 trayectorias tales que $x = 0$, $y \in [0, 0.1]$ y $p_x \in [-0.15, 0.15]$. El valor de p_y tendrá que ser compatible con el valor de energía en el siguiente inciso.

(d) Realice simulaciones con las condiciones iniciales anteriores para los siguientes valores de energía $E = 0.01, 0.03, 0.1, 0.12, 0.15, 0.166$. Haga la gráfica del espacio fase (y, p_y) para cada condición inicial. De esta manera podemos obtener el comportamiento del sistema cuando barremos valores de energía que se van acercando a $1/6$. Explique los resultados obtenidos.

Punto extra: Realice un video tipo *time-lapse* que muestre la evolución de los mapeos para cada uno de los problemas del examen. Puede agregar mapeos intermedios para mejorar la visualización del video.