Herramientas Matemáticas

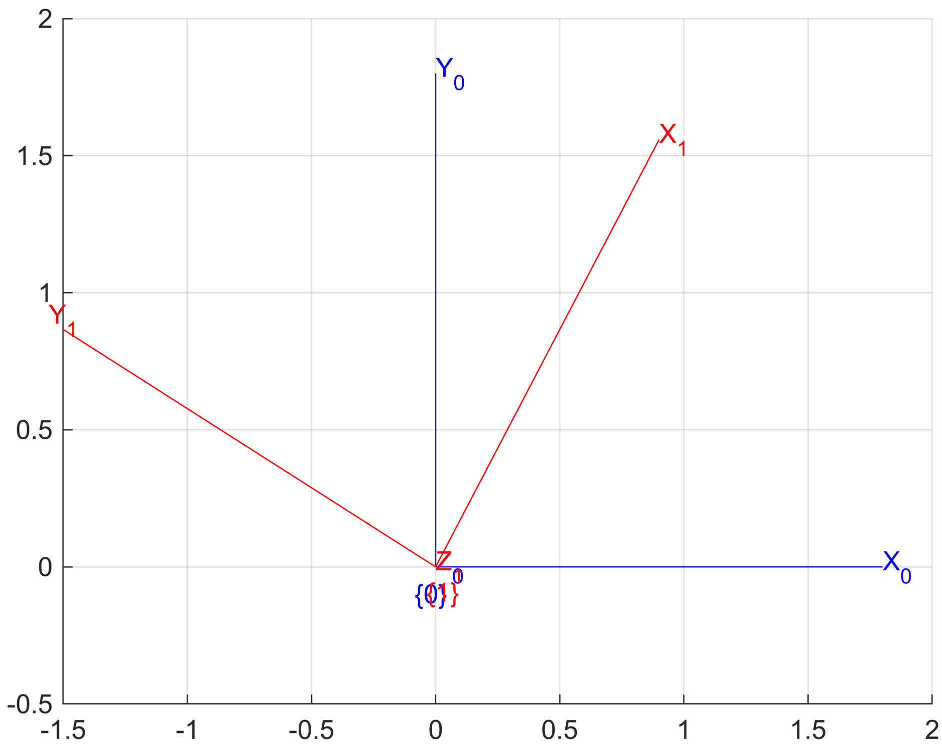
Ejercicio 1

Grafique el sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada una de las siguientes matrices de rotación:

a. $^{\circ}\mathrm{Rot}_M = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.866 \\ 0.866 & 0.5 \end{bmatrix}$

Esta matriz de rotación es lo mismo que $\mathrm{Rot}_Z\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

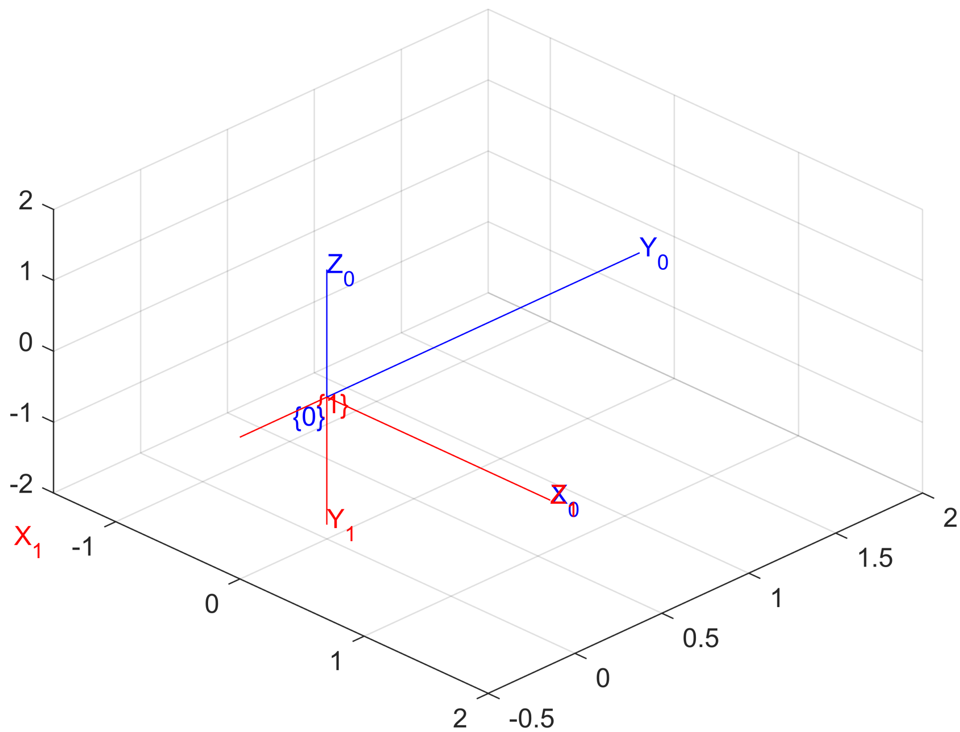
```
clear; close all;
T0 = eye(3);
T1 = [0.5 -0.866 0; 0.866 0.5 0; 0 0 1];

figure
hold on

xlim([0.000 1.000])
ylim([0.000 1.000])
trplot(T0,'color','b','frame','0','length',1.8)
trplot(T1,'color','r','frame','1','length',1.8)

grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
view(0,90)
```



b. $^{\circ}\mathrm{Rot}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

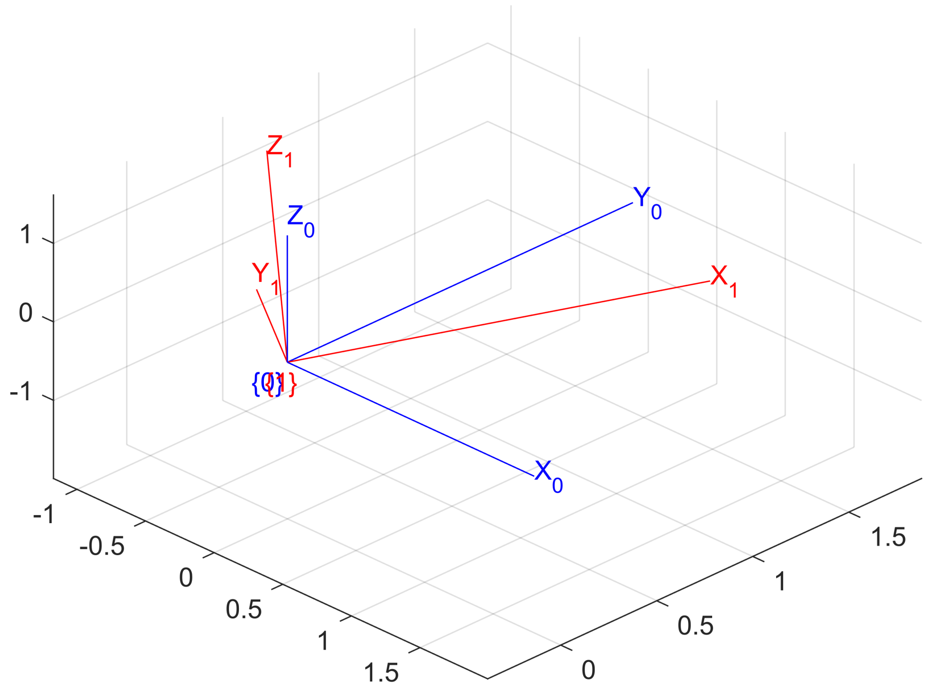
Esta matriz de rotación es lo mismo que $\mathrm{Rot}_{Y_1}(-\pi) \to \mathrm{Rot}_{Z_1}(-\pi)$.

```
T2 = eye(4);
T3 = [0 0 1 0; -1 0 0 0; 0 -1 0 0; 0 0 0 1];

figure
hold on
trplot(T2,'color','b','frame','0','length',1.8)
trplot(T3,'color','r','frame','1','length',1.8)
grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
view(45,45)
```



c. $^{\circ}\mathrm{Rot}_M = \begin{bmatrix} 0.50 & -0.75 & -0.433 \\ 0.866 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & -0.5 & 0.866 \end{bmatrix}$

```
T4 = eye(4);
T5 = [0.5 -0.75 -0.433 0; 0.866 0.433 0.25 0; 0 -0.5 0.866 0; 0 0 0 1];

figure
hold on
trplot(T4,'color','b','frame','0','length',1.8)
trplot(T5,'color','r','frame','1','length',1.8)
grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
view(45,45)
```



Se recomienda usar el toolbox de “rtb” de Peter Corke para Matlab.

Ejercicio 2 (obligatorio)

Exprese cada uno de los siguientes vectores en el sistema de referencia $\{O\}$ sabiendo que sus coordenadas son respecto al sistema $\{M\}$, el cual sufrió la rotación indicada. Realice un gráfico donde se aprecie el vector y sus coordenadas en ambos sistemas.

a. ${}^{M}a = [1 \quad 0.5]$; $\{M\}$ rotó de -17° en Z_O

${}^{O}a =$

```
clear; close all;
T0 = eye(3);
T1 = rotz(-0.297);
am=[1; 0.5; 0];
a0=T1*am;
figure;
hold on;
trplot(T0,'color','b','frame','0','length',1.8)
```

```
trplot(T1,'color','r','frame','1','length',1.8)
plot_arrow([0, 0, 0], [a0(1),a0(2),a0(3)])
grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
axis equal;
view(0,90)
```

b. ${}^{M}b = [0 \quad 0 \quad 1]$ $\{M\}$ rotó de 35° en Y_O

${}^{O}b$

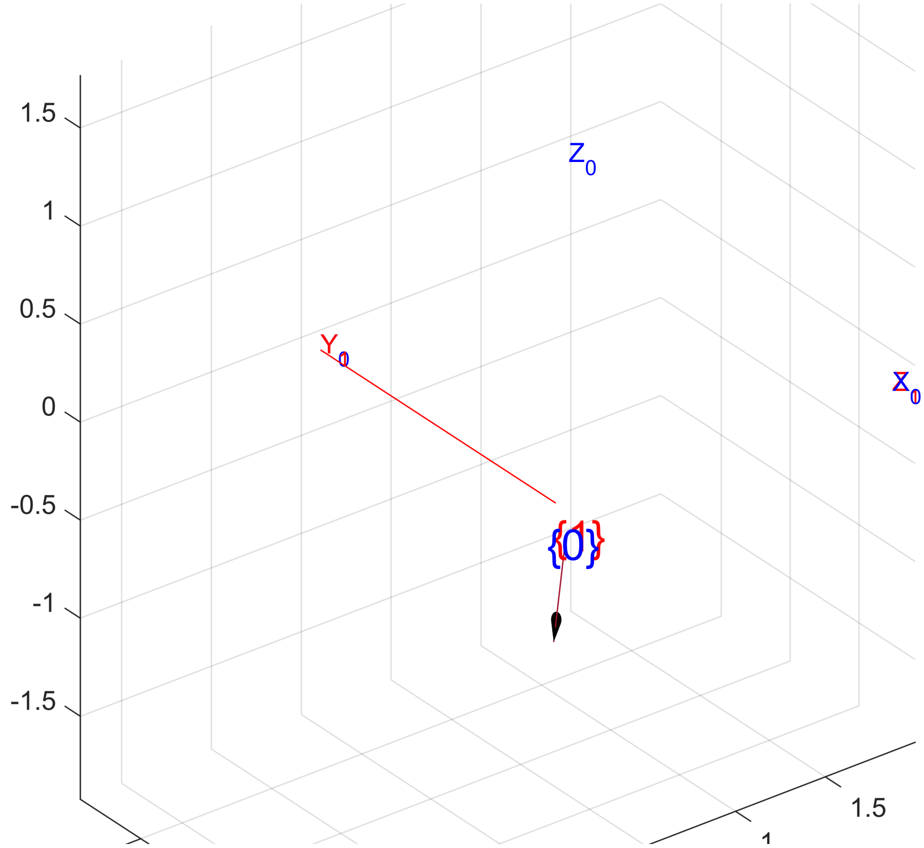
```
clear; close all;
T2  =eye(3);
T3 = roty(0.61087);
bm=[0; 0; 1;];
b0=T3*bm
```

```
b0 = 3×1
    0.5736
         0
    0.8191
```

```
figure
hold on
trplot(T2,'color','b','frame','0','length',1.8)
trplot(T3,'color','r','frame','1','length',1.8)
plot_arrow([0, 0, 0], [b0(1),b0(2),b0(3)])
grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
axis equal;
view(0,0)
```

c. ${}^{M}c = [1 \quad 0.5 \quad 0.3]$ $\{M\}$ rotó de 90° en Y_O

```
clear; close all;
T4 = eye(3);
T5 = roty(3.1416/2);
cm=[1; 0.5;0.3];
c0=T5*cm;
figure
hold on
trplot(T4,'color','b','frame','0','length',1.8)
trplot(T5,'color','r','frame','1','length',1.8)
plot_arrow([0, 0, 0], [c0(1),c0(2),c0(3)])
grid on
axis([-1.5 2 -.5 2 -2 2])
axis equal;
view(3)
```

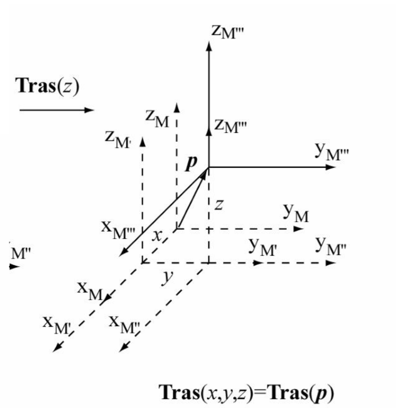


Ejercicio 3

Escriba en forma general las matrices de transformación homogénea que representan los siguientes casos:

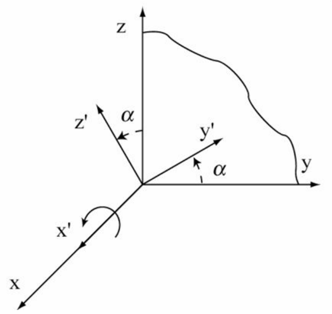
a. Traslación pura en el espacio

$$\mathbf{Tras}(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & x\\ 0 & 1 & 0 & y\\ 0 & 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



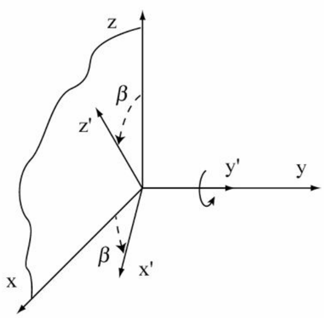
b. Rotación en el eje *X*

$$\mathbf{Rot}(x,\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha\\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$



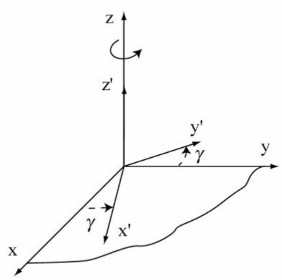
c. Rotación en el eje *Y*

$$\mathbf{Rot}(y,\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \mathrm{sen}\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{sen}\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$



d. Rotación en el eje *Z*

$$\mathbf{Rot}(z,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\mathrm{sen}\gamma & 0\\ \mathrm{sen}\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



Ejercicio 4 (obligatorio)

En la siguiente figura se observa el vector a respecto del sistema $\{M\}$. El punto M respecto de $\{O\}$ es ${}^{O}p_M$=(7,4).

a. Halle, por el método que elija, el ángulo de rotación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.

b. Exprese la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.

c. Use la transformación hallada para representar el vector *a* respecto del sistema $\{O\}$. Verifique gráficamente el resultado.

Ejercicio 5

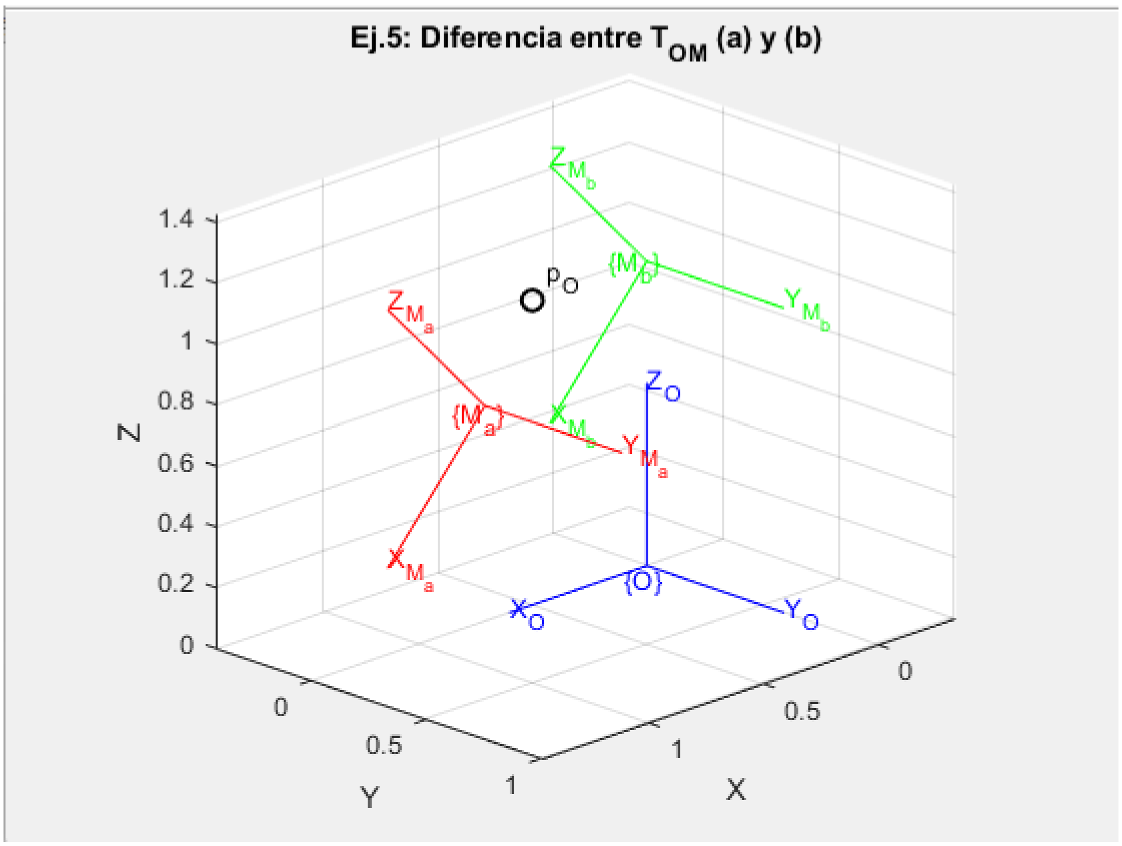
Escriba la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada caso. Realice un gráfico donde se aprecie la diferencia.

a. El sistema $\{M\}$ giró 45° respecto del eje Y_M, luego se trasladó un vector ${}^{M}\rho$ = (0 0 1)

$$T = \begin{bmatrix} \cos(45) & 0 & \mathrm{sen}(45) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(45) & 0 & \cos(45) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b. El sistema $\{M\}$ se trasladó un vector ${}^{M}\rho$ = (0,0,1), luego giró 45° respecto del eje Y_M.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(45) & 0 & \mathrm{sen}(45) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}(45) & 0 & \cos(45) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Ejercicio 6

Exprese el vector ${}^{0}p$=(0.5   0   1) respecto del sistema $\{M\}$ de cada caso del ejercicio anterior.

$${}^{M}\rho = T^{-1} \cdot {}^{O}\rho$$

Para el ejercicio a)

$$p = [-0.353553 \quad 0 \quad 0.060660]$$

Para el ejercicio b)

$$p = [0.353553 \quad 0 \quad 0.353553]$$

Ejercicio 7

Analizar la siguiente transformación compuesta e indicar V o F. Considere que $\{T\}$ representa la posición y orientación de un sistema de referencia $\{M\}$ respecto de otro sistema de referencia $\{O\}$.

$$T = T\ \mathrm{Rot}_X(a) * \mathrm{Ttras}(0, 2, 0) * T\ \mathrm{Rot}_Y(\beta)$$

a. El sistema $\{M\}$ sufrió una rotación α respecto de X_O, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_O, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje.

a) **Falso.** Describe el orden al revés: en T la rotación β sobre Y_O ocurre primero y la α sobre X_O último.

b. El sistema $\{M\}$ sufrió una rotación α respecto de X_M, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_M, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje.

b) **Falso.** Las operaciones de T están respecto a $\{O\}$, no a $\{M\}$. (Para ejes móviles se postmultiplica.)

c. Un vector p expresado en $\{O\}$ puede expresarse en $\{M\}$ realizando el producto: ${}^{M}\rho = T \cdot \rho$

Falso. Para pasar un vector (p) de $\{O\}$ a $\{M\}$ se usa ${}^{M}\rho = T^{-1}\rho$, no la respuesta de la consigna.

d. Un vector p expresado en $\{M\}$ puede expresarse en $\{O\}$ realizando el producto: ${}^{O}\rho = T \cdot \rho$

Verdadero.

```
syms a b real
Rx = [1 0 0 0; 0 cos(a) -sin(a) 0; 0 sin(a) cos(a) 0; 0 0 0 1];
Ty = [eye(3) [0;2;0]; 0 0 0 1];
Ry = [cos(b) 0 sin(b) 0; 0 1 0 0; -sin(b) 0 cos(b) 0; 0 0 0 1];

T = Rx * Ty * Ry;    % ^O T_M
```

```
% chequeo de mapeos
syms px py pz real
pM = [px; py; pz; 1];
pO = T*pM;           % coord. de p en {O}
pM_back = T\pO; % debe volver a pM
simplify(pM_back - pM)  % -> vector nulo
```

Ejercicio 8

En función de las siguientes matrices escritas en forma simbólica halle la expresión correcta para cada caso:

${}^{O}T_{M}$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.

${}^{M}T_{A}$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{A\}$ respecto de $\{M\}$.

${}^{A}T_{B}$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{B\}$ respecto de $\{A\}$.

${}^{O}T_{F}$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{F\}$ respecto de $\{O\}$.

${}^{F}T_{D}$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{D\}$ respecto de $\{F\}$.

1. $\{B\}$ respecto de $\{O\}$:

$${}^{B}a = ({}^{A}T_{B})^{-1}\ ({}^{M}T_{A})^{-1}\ ({}^{O}T_{M})^{-1}\ {}^{O}a$$

2. $\{F\}$ respecto de $\{B\}$:

$${}^{F}a = ({}^{O}T_{F})^{-1}\ {}^{O}T_{M}\ {}^{M}T_{A}\ {}^{A}T_{B}\ {}^{B}a$$

3. $\{B\}$ respecto de $\{D\}$:

$${}^{B}a = ({}^{A}T_{B})^{-1}\ ({}^{M}T_{A})^{-1}\ ({}^{O}T_{M})^{-1}\ {}^{O}T_{F}\ {}^{F}T_{D}\ {}^{D}a$$