

# FREUDE AM KOPFRECHNEN VERMITTELN

EINE UNTERRICHTSEINHEIT PLANEN, MIT DEM ZIEL  
OBERSTUFENSCHÜLERN FREUDE AM KOPFRECHEN ZU  
VERMITTELN

eine Maturaarbeit von

Jérôme Landtwing

5. Mai 2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>4</b>	<b>Material und Methoden</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>Inhalt der Lektionen</b>	<b>2</b>
5.1	die Grundgesetze der Mathematik . . . . .	2
5.2	Addition . . . . .	3
5.2.1	Schriftlich . . . . .	4
5.2.2	Kommutativgesetz / Gruppen Bilden . . . . .	4
5.2.3	[Mein Trick] . . . . .	5
5.2.4	Aufrunden <sup>1</sup> . . . . .	5
5.3	Subtraktion . . . . .	6
5.3.1	Subtraktion von einer runden Zahl . . . . .	6
5.4	Kettenrechnungen . . . . .	6
5.5	Multiplikation . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>6</b>

## 1 Vorwort

- Weshalb habe ich dieses Thema gewählt: Freude an Mathematik, Freude weitergeben, evtl. Absicht später im Lehrerberuf tätig zu sein
- Mir fällt es leicht, mit Zahlen zu jonglieren, Mathematik hat mich von klein auf begeistert, möchte mein Wissen, meine Freude weitergeben!
- Meist verlieren junge Menschen die Lust am Kopfrechnen, an der Mathematik weil sie überfordert werden, Aufgaben nur nach Schema XY lösen müssen.

DANKSAGUNGEN:

## 2 Abstract

Kurzzusammenfassung → am Schluss schreiben. 1 A4 Seite

---

<sup>1</sup>nach Mittring

### 3 Einleitung

- Gegenstand der Untersuchung
- Problemstellung
- Hypothese
- Theorie und Ziel meiner Arbeit
- Eingrenzung des Untersuchungsfeldes
- Ausgangslage Skizzieren

2 A4 Seiten

Kopfrechnen ist keine schwierige Sache, zumindest nach meiner Auffassung. Oftmals beschäftige ich mich mit der Frage, weshalb das, was mir so leicht fällt, anderen so schwer fällt. Kopfrechnen bedeutet für mich nicht, dass wenn man eine Rechnung wie  $31 \cdot 29$  sieht, unmittelbar das Resultat 899 ausspuckt wie ein Taschenrechner. Vielmehr bedeutet Kopfrechnen für mich sich zu helfen wissen, wie man die Rechnung so vereinfachen kann, damit sie im Kopf lösbar ist. Mit anderen Worten, will man Rechnungen im Kopf lösen, so wie dies ein Taschenrechner tut, so wird es schnell komplex und man verliert die Lust am Kopfrechnen. Geht man jedoch anders an Rechnungen heran und probiert diese zuerst zu vereinfachen und anschliessend eine einfachere Rechnung im Kopf zu lösen, so wird man erfolgreich sein und öfters den Kopf anstelle des Taschenrechners brauchen. **In meiner Arbeit möchte ich eine Gruppe von Oberstufenschülern dazu motivieren im Alltag nicht sofort zum im Smartphone integrierten Taschenrechner zu greifen, sondern solche Rechnungen im Kopf zu lösen** Um dies zu erreichen, möchte ich den Schülern einige dieser Tricks weitergeben. Dafür habe ich eine Doppellektion zu Verfügung. Jedoch sich der gewünschte Effekt nicht nach dieser Doppellektion einstellen, vielmehr müssen die neu erlernten Methoden angewendet und bestenfalls von den Schülern selbst weiterentwickelt und verfeinert werden. Deshalb lösen die Schüler nach dieser Doppellektion über einen Monat zu Beginn jeder Mathestunde 5 Minuten Aufgaben. Dadurch wird meine Arbeit in drei Teile aufgeteilt. Die Planung der Doppellektion, was will ich vermitteln, wie will ich es vermitteln, welche Probleme sind dabei aufgetreten. Im zweiten Teil werde ich dokumentieren, wie die Durchführung abgelaufen ist, was hat so geklappt, wie ich es mir wünschte, was nicht. Im letzten Teil bereite ich das ganze nochmals auf und schaue auf mein Projekt zurück. Habe ich mein Ziel erreicht?, was müsste ich für eine weitere Durchführung verbessern? Dieser Teil basiere ich auf der Rückmeldung der Lehrperson (Herr Jud) und dem Verlauf der Aufgaben die die Schüler zu Beginn jeder Lektion lösen mussten.

## 4 Material und Methoden

Vorgehen

## 5 Inhalt der Lektionen

Ich möchte den Schülern diverse Tricks beibringen, die ihnen helfen Rechnungen zu vereinfachen. Diese Tricks sind im wesentlichen algebraische Umformungen und mathematisch korrekt! Damit kein Durcheinander entsteht, bespreche und erläutere ich im kommenden Teil nacheinander die vier Grundrechenarten: den Hintergrund, Alltagsbeispiele und die Tricks, welche für die jeweilige Rechenart angewendet werden können bezüglich der jeweiligen Rechenart.

Die meisten Tricks bauen auf den 3 Grundgesetze der Mathematik auf. Die Schüler haben sie im Unterricht bereits kennengelernt, deshalb werde ich sie hier nur kurz anschnitten und nicht gründlich ausführen.

### 5.1 die Grundgesetze der Mathematik

#### Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (1)$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Es spielt also keine Rolle ob ich zuerst a und b zusammenzähle und dann c addiere oder zuerst b und c addiere und dann a dazuzähle. Das Assoziativgesetz ist gültig für die Addition und die Multiplikation, jedoch nicht für die Subtraktion und Division. **Muss ich den allgemeinen Fall o besprechen?**

#### Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (2)$$

Das Distributivgesetz besagt, dass bei der Multiplikation eines Faktors mit einer Summe (oder auch einer Differenz) die Multiplikation in zwei Teilschritte aufgeteilt werden darf, indem man die beiden Summanden (in der Allgemeinen Formel a und b) einzeln mit dem Faktor (in der allgemeinen Formel c) multipliziert und aus diesen zwei Teilprodukten ( $a \cdot c$ ,  $b \cdot c$ ) die Summe bildet.

~~Ausformuliert bedeutet das Distributivgesetz, dass bei einer Multiplikation die Faktoren in Summe aufgeteilt werden und nach obigem Schema weitergerechnet werden kann, das Distributivgesetz gilt für den allgemeinen Fall einer Multiplikation, wobei der Faktor in sowohl in eine Summe als auch in eine Differenz aufgeteilt~~

~~werden darf.~~

## Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \quad (3)$$

Hier wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Summanden das Resultat nicht beeinflusst. Bei der Addition und der Subtraktion darf die Reihenfolge, in der man die einzelnen Summanden zusammenzählt bzw. die Faktoren multipliziert frei gewählt werden. Konkret erlaubt uns dieses Gesetz die einzelnen Summanden oder Faktoren so zu gruppieren, dass es uns leichter fällt sie zusammenzuzählen. Mehr dazu auf Seite ??.

## 5.2 Addition

Bei einer Addition werden zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt. Formal wird eine Addition so dargestellt:

$$Summand_1 + Summand_2 + Summand_3 + \dots + Summand_n = Summe$$

Plusrechnen, was tut man genau?, was passiert?, evtl Zahlenstrahl

### 5.2.1 Schriftlich

Da ich mich in meiner Arbeit mit dem Rechnen im Kopf befasse und meine Probanden die Oberstufe besuchen, setze ich die Kenntnis der schriftlichen Addition voraus. Deshalb werde ich hier nur kurz im Tiefflug darüberstreifen, um zu repetieren, exerzieren oder aufzufrischen.

Die schriftliche Addition funktioniert folgendermassen: Man schreibt die Zahlen untereinander und beginnt von der Einerstelle sich vorzuarbeiten bis man bei der Stelle mit der grössten Zehnerpotenz angekommen (im Beispiel die Hunderterstelle) ist. Die Rechenrichtung ist von rechts nach links. Ist das Ergebnis in einer Spalte grösser als 10, so wird dies als Übertrag in die nächste Spalte (nächst grössere Zehnerstelle) eingeschrieben.

	Hunderter	Zehner	Einer
	1	3	4
	1	6	4
+		5	3
	2	14	11
	2	4	1
Überträge +	1	1	
	3	5	1

Abbildung 1: Die schriftliche Addition von  $134 + 164 + 53$

### 5.2.2 Kommutativgesetz / Gruppen Bilden

Das Kommutativgesetz wurde bereits auf Seite 3, Gleichung 3 vorgestellt. Hier erläutere ich nun, wie man sich die vom Kommutativgesetz besagten Regeln zu nutze machen kann. Aus dem Kommutativgesetz folgt, dass die Reihenfolge, in der man die verschiedenen Summanden zusammenzählen will frei wählbar ist. Am besten wählt man sie so, dass man möglichst wenig zu rechnen hat, indem man zum Beispiel Gruppen bilden, die Zusammen eine runde Zahl ergeben. Der Trick, Gruppen zu bilden, ist vor allem wenn es um Kettenrechnungen geht ein sehr mächtiges Werkzeug!

$$13 + 56 + 34 + 53 = ?$$

Versucht man Gruppen zu bilden, so wird den meisten ins Auge stechen, dass sich die Einerstellen der Zahlen 56 und 34 zusammen auf 10 ergänzen,  $56 + 34$  also eine runde Zahl (90) ergeben. Wendet man diesen Weg an, so kann man die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(56 + 34) + 13 + 53 = 90 + 13 + 53 = 103 + 53 = 156$$

Jedoch könnte man auch sehen, dass die Einerstellen der Zahlen 13, 34, 53 sich auch auf 10 ergänzen und die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(13 + 34 + 53) + 56 = 100 + 56 = 156$$

Sowohl der erste als auch der zweite Weg sind korrekt, klar könnte man auch im Kopf von Links nach Rechts immer eine Zahl zur nächsten dazu addieren, jedoch entstehen dabei eine Vielzahl an Zwischenschritten / Zwischenresultaten und das wollen wir beim Kopfrechnen vermeiden. Mit diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aufgabe im Kopf zu rechnen. Es gibt dabei weder richtig noch falsch vielmehr sind es Wege. Jeder Schüler soll also seinen eigenen Weg finden, der für ihn am logischsten erscheint.

### 5.2.3 [Mein Trick]

Die Summe verändert sich nicht, wenn beim einen Summanden eine Zahl addiert wird, wenn man beim anderen Summanden die selbe Zahl wieder abzieht. Diesen Trick ist sehr hilfreich um **Zehnerübergänge zu vermeiden**. Ein ganz banales Beispiel ist die Addition von 99. Was ergibt  $23 + 99$ . In diesem Beispiel lohnt es sich  $(23 - 1) + (99 + 1)$  zu rechnen, also  $22 + 100 = 122$

### 5.2.4 Aufrunden<sup>2</sup>

Diese Methode ist eine Methode die vor allem im Alltag ihre Anwendung findet. Man braucht sie hauptsächlich um eine Überschlagsrechnung anzu-

---

<sup>2</sup>nach Mittring

stellen. Die Methode funktioniert folgendermassen. Wir stellen uns einen Rundgang durch den Einkaufsmarkt vor. Ich lege nacheinander einen Bund Tomaten für 3.95CHF, ein Yoghurt für 0.95CHF, eine Tafel Schokolade für 1.35CHF und eine Flasche Champagner für 9.95 in meinen Einkaufswagen. Ich möchte überprüfen ob, das was die Kassiererin berechnet stimmt, deshalb überschlage ich die Kosten für meinen Einkauf im Kopf: Ich könnte die genauen Preise addieren, jedoch würden die vielen Kommastellen mein Gedächtnis stark beanspruchen, deshalb wenden wir einen kleinen Trick an und runden die Preise auf den nächstgelegenen schönen Betrag (je nach dem wie genau die Überschlagsrechnung sein soll). Damit ich die Zahlen leichter im Kopf addieren kann, zähle ich bei allen 5 Rappen hinzu, also zähle ich:  $4+1+1.40+10 = 16.40$  zusammen. Da ich jedoch das genaue Resultat wissen möchte, überlege ich wie viel mal ich 5 Rappen dazugezählt habe. Es sind 4 Mal, damit ich den genauen Betrag erhalte, ziehe ich diesen Betrag also 4 Mal 5 Rappen (= 20 Rappen) vom Endergebnis ab:  $16.40 - 0.20 = 16.20$  Und siehe da, an der Kasse muss ich exakt 16.20 Franken bezahlen.

Die Zahlen, die man zusammenzählen will, auf schöne Beträge runden für eine Überschlagsrechnung. Will man am Schluss das genaue Ergebnis, so muss man den Betrag den man dazugezählt hat wieder abzählen.

### 5.3 Subtraktion

Bei einer Subtraktion werden eine oder mehrere Zahlen von einer Zahl abgezogen. Der Allgemeine Fall wird so dargestellt.

$$\text{Minuend} - \text{Subtrahend}_1 - \text{Subtrahend}_2 - \dots - \text{Subtrahend}_n = \text{Differenz} \quad (4)$$

#### 5.3.1 Subtraktion von einer runden Zahl

### 5.4 Kettenrechnungen

Zieht man nacheinander mehrere Zahlen von einer Zahl ab, kann die Summe aller Subtrahenden vom Minuenden abgezogen werden. Dies lässt sich ganz einfach mit dem Trick beweisen, das man alle Subtrahenden in eine Klammer setzt und ein Minus davor.

### 5.5 Multiplikation

### 5.6 Division

- Lektionen weshalb?
- Weshalb ein grosses Arsenal an Werkzeugen -; Damit die Schüler eigene Lösungswege suchen können und diese weiterentwickeln können.
- Aufbau der Lektion

- Aufbau der Übungsblättern / Tests

## **6 Ergebnisse**

## **7 Diskussion der Ergebnisse**

## **8 Schlusswort**