Freude am Kopfrechnen vermitteln

Skript für die Durchführung einer Dopellektion zur Thematik Kopfrechnen

Jérôme Landtwing

08.06.2016

1 Einstieg 15'

1.1 Vorstellrunde 10'

Vorwissen aktivieren, Emotionen wecken. **Fragen stellen erlaubt / erwünscht!**

Was ist Kopfrechnen ?

Kopfrechnen heisst nicht $19 \cdot 21 = 399$ wie das kleine Einmaleins zu beherrschen, oder das Resultat wie ein Taschenrechner auszuspucken. Kopfrechnen heisst, wissen, wie man es so vereinfachen kann, dass es im Kopf lösbar ist. Den Baum nicht mit dem Sackmesser fällen wollen, sondern geeignetes Werkzeug dafür zu Hilfe nehmen.

Zielsetzung

- Freude am Kopfrechnen vermitteln, sie mit meiner Freude anstecken.
- zum Kopfrechnen motivieren.
- Werkzeuge beibringen, damit sie Rechnungen vereinfachen können.
- Sich zu helfen wissen.

1.2 Repetition der Grundgesetze / Grundlagen 5'

Summand + Summand = Summe	Vor Beginn an die Tafel schreiben
Minuend - Subtrahend = Differenz	
Faktor · Faktor = Produkt	um Begriffe zu klären
Divisor : Dividend = Quotient	und Missverständnisse vorzubeugen

Erklären, was die Grundgesetze für eine Bedeutung haben. Bewusstsein hervorrufen, dass man sie sich auch zu nutze machen kann / soll!

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

Bei der **Addition und der Multiplikation** dürfen jegliche **Summanden / Faktoren in der Reihenfolge beliebig vertauscht werden!** Ich kann sie so zuammenzählen, wie es mir am ringsten geht. → 2 Rechnungen die völlig verschieden aussehen, jedoch das gleiche Resultat ergeben!
⇒ Es gibt viele verschiedene korrekte Lösungswege, jeder darf den Weg wählen, der ihm am besten gefällt / am ringsten von der Hand läuft.

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Das bedeutet, dass die **Reihenfolge, in der man die Rechenschritte durchführt** keine Rolle spielt! Gültig nur für Addition und Multiplikation. Ich kann selbst bestimmen, in welcher Reihenfolge ich Zahlen zusammenzählen, multiplizieren will.
→ Wer sagt mir dass in der Aufgabe a + b nicht bereits ein solcher Schritt stattgefunden hat und sie so ausgesehen hat?
und auch hier sieht man wieder, dass die gleiche Rechnung in verschiedenen Formen auftreten kann und alle gleichwertig sind!

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Gibt vor, wie man **Summen mit einer Zahl multipliziert** werden müssen. Nutzen: Ich darf grosse / unangenehmen Zahlen in eine Summe aufteilen und die Rechnung nach dem Distributivgesetz weiterrechnen! Gültig für Addition oder Subtraktion in der Klammer, aber nur Multiplikation mit der Klammer.

2 Addition 30'

2.1 Gruppen bilden 10'

Rechnung: (13 + 56 + 53 + 34) an der Tafel darstellen. Jede Zahl wird einzeln auf ein Papier geschrieben und mit Magneten an die Tafel geheftet. Dann die Schüler fragen, wie man eine solche Aufgabe lösen kann. Kommutativgesetz. Möglichkeiten:

- Von links nach rechts, jede Zahl fortlaufen hinzuzählen

- $56 + 34 = 90$
- $53 + 13 + 34 = 100$

Tipp geben, das Kommutativgesetz lässt uns die Reihenfolge frei wählen. Auch erwähnen, dass man Zahlen auseinander nehmen darf. Beispielsweise ($77 + 24 = 100 + 1$).

2. Beispiel: $64 + 18 + 35 + 54$

Bewusstsein wecken, dass es viele verschiedene Lösungswege gibt! Sie auch ihre eigenen Lösungsstrategien entwickeln sollen.

2.2 Von links nach rechts 10'

Die Aufgabe ($367 + 285$) am Presenter schreiben mit der Frage, wie man eine solche Aufgabe lösen kann? Auftrag die Aufgabe mit Streichhölzern darstellen. Danach den Auftrag geben, die Streichhölzer des Nachbars durcheinanderzubringen " Erdbeben " → fragen, ob es möglich ist, das Resultat der Aufgabe dennoch festzustellen → Man schaut wie viele Einer, Zehner und Hunderter man hat.
Aufgabe

$$342 + 455 = H : 7Z : 9E : 7$$

mit Ihnen lösen, fragen was ich wie machen soll. Aufgabe:

$$583 + 269 = H : 7Z : 14E : 12 = 852$$

2.3 Hinüberschieben 10'

Die Rechnung ($573 + 199$) auf den Presenter schreiben. Den Schülern die Aufgabe geben, sie mit den Streichhölzern auszulegen. Wie im Beispiel vorhin gesehen, spielt es keine Rolle, wie die Streichhölzer auf die beiden Summanden verteilt sind! Deshalb ist es erlaubt, die Streichhölzer so anzuordnen, dass sich die Aufgabe einfacher lösen lässt.
→ Im Beispiel vorher haben wir gesehen, dass nur die Summe der einzelnen Einheiten nicht verändert werden darf! Also spielt es keine Rolle, wie sie aufgeteilt sind. → ich darf selbst wählen, wie ich die Summe aufteile. am besten möglichst geschickt. Hier 1 Einer von 573 nach 199 bewegen. Die neue Rechnung sieht also so aus:

$$(573 - 1) + (199 + 1) = 572 + 200 = 772$$

$$(476 + 24) + (283 - 24) = 500 + 259 = 759$$

$$(476 - 17) + (283 + 17) = 459 + 300 = 759$$

Wenn notwendig ein weiteres Beispiel, um zu verdeutlichen :

$$225 + 186 = (225 - 14) + (186 + 14) = 219 + 200 = 419$$

Eselsbrücke: Plus besteht aus 2 Strichen → 2 Verschiedene Operationen. ⇒ unter Notizen aufschreiben

3 Subtraktion 25'

3.1 Ergänzen auf 1000 10'

schöne Zahlen sind ganze Hunderter oder Tausender Zahlen. Schriftlich am Presenter die Rechnung:

$$1000 - 638 = 362$$

vorlösen, dabei alle Überträge mit einer Farbe hervorheben. Danach darauf aufmerksam machen, dass jeweils die zwei Zahlen ohne Überschlag sich immer auf 9 ergänzen ausser bei der Zehnerstelle auf 10.

- alle Zahlen auf 9 Ergänzen und die Zehnerstelle auf Zehn

Spezialfälle sind wenn eine schöne Zahl von einer schönen Zahl subtrahiert wird. Bsp. 1000 - 400 = 600.

3.2 der unsichtbare Helfer 10'

Erzählen von zwei benachbarten Hochhäusern, nun gibt es 3 Personen (Steve Jobs, Albert Einstein und Chuck Norris) die ausrechnen wollen, um wie viel das eine Haus höher ist als das andere. Steve Jobs baut eine Plattform auf mittlerer Höhe des kleineren Hauses. Albert Einstein vom Erdboden aus und Chuck Norris vom Erdinneren aus. Alle Messen die Höhe des grösseren Hauses und ziehen die Höhe des kleineren Hauses ab. **Nun die Frage stellen, ob sie auf das gleiche Ergebnis kommen.** Alle drei sind auf das gleiche Ergebnis gekommen. Sie haben sich lediglich weiter oder näher vom "Zielpunkt" entfernt. Dies dürfen wir auch tun! **Wird dürfen zum Minuenden und den Subtrahenden die gleiche Zahl hinzu oder abzählen, ohne dass sich das Ergebnis verändert.** Am einfachsten geht es eine schöne Zahl zu subtrahieren. Jedoch können wir nun auch auf schöne Zahlen ergänzen. Also macht es doch Sinn, dass wir den Minuenden und den Subtrahenden so verändern dass einer von beiden eine Schöne Zahl wird. Rechnung: 991 - 475 = stellen und fragen wie man diesen Trick nun anwenden kann.

- (991 + 9) - (475 + 9) = 1000 - 484 = 516
- 368 - 289 = (368 + 11) - (289 + 11) = 379 - 300 = 79

weiteres Beispiel:

$$685 - 387 = (685 + 13) - (387 + 13) = 698 - 400 = 298$$

Eselsbrücke: Minus besteht aus einem Strich → Eine Operation.

3.3 Kettenrechnungen Subtraktion 5'

rhetorische Frage stellen, ob die Schüler lieber Plus oder Minus rechnen. → Lieber addieren als subtrahieren. Frage ob man eine solche Rechnung in eine Addition umwandeln könne? Vorzeigen, dass ein Minus vor der Klammer alle Vorzeichen wechselt. Eine Klammer vor dem ersten Subtrahenden öffnen nach dem letzten schliessen. Fragen ob das Resultat das selbe sei oder was ich machen muss, damit das Resultat nicht ändert. → rechnung wie bei Kettenrechnugen-addition auf Zettel schreiben und an die Tafel heften. Auch erlaubt, zuerst eine Zahl vom Minuenden abziehen und den Rest als Gruppe anschauen!

$$497 - 22 - 26 - 38 = 497 - (22 + 38 + 26) = 497 - 86 = 411$$

$$385 - 73 - 36 - 54 = 385 - (36 + 54) - 73 = 385 - 163 = 222$$

4 Multiplikation 25'

4.1 Summen bilden 5'

Distributivgesetz anwenden: $(a \pm b) \cdot c = ac \pm bc$ Also darf ich aus einem Faktor eine Summe oder Differenz bilden! Das macht vor allem Sinn wenn man ein Teilresultat des Ergebnisses des Endresultates bereits kennt (Quadratzahlen oder 10er Zahlen, kleines Einmaleins).

$$15 \cdot 7 = (10 + 5) \cdot 7 = 70 + 35 = 105$$

$$12 \cdot 13 = 12 \cdot (12 + 1) = 144 + 12 = 156$$

4.2 Doppelte Summe 10'

→ Aufgabe:

$$(a + b)(a + c) = a^2 + a(b + c) + bc$$

als Aufgabe den Schülern stellen. Von den Schülern ausrechnen lassen. Zeigen dass wenn:

- a kleiner 25
- b und c kleiner c
- dann a^2 auswendig
- Mittelteil einfach
- Schlussteil kleines 1x1

Quadratzahl, Distributivgesetz, Kleines 1x1 Es ist auch möglich mit grösseren Zahlen zu machen. Also Rechnungen wie:

$$24 \cdot 17 = (20+4)(20-2) = 20^2 + 20 - 12 = 408$$

unter Anwendung des Distributivgesetzes im Mittelteil kommt man auf das folgende: $400 + 20 - 42$ Wichtig, dass die erste Zahl in der Klammer identisch ist und zuerst die Addition im Mittelteil durchführen erst danach die Multiplikation.

4.3 Binomische Formeln 5'

Spezialfall der gebildeten Summe, wenn beide Zahlen den gleichen Abstand zu einer Zahl haben, kann man die dritte binomische Formel anwenden. $\rightarrow 21 \cdot 19$

4.4 Faktoren aufteilen 5'

Assoziativgesetz ausnutzen:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = ab \cdot c$$

Heisst dass man Faktoren aufteilen darf, wie man will. Rechnung $4 \cdot 27$ kann also angesehen werden als: $2 \cdot 2 \cdot 27$ nun noch die Reihenfolge geschickt wählen also $27 \cdot 2 \cdot 2 = 108 \Rightarrow$ Zahlen suchen, die einfach sind: bsp. 10, 15 ...

$$6 \cdot 21 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126$$

$$32 \cdot 27 = 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 = 72 \cdot 12 = 720 + 144 = 864$$