Freude am Kopfrechnen vermitteln

Eine Unterrichtseinheit planen, mit dem Ziel Oberstufenschülern Freude am Kopfrechen zu vermitteln

eine Maturaarbeit von

Jérôme Landtwing

5. August 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

- Weshalb habe ich dieses Thema gewählt: Freude an Mathematik, Freude weitergeben, evtl. Absicht später im Lehrerberuf tätig zu sein
- Mir fällt es leicht, mit Zahlen zu jonglieren, Mathematik hat mich von klein auf begeistert, möchte mein Wissen, meine Freude weitergeben!
- Meist verlieren junge Menschen die Lust am Kopfrechnen, an der Mathematik weil sie überfordert werden, Aufgaben nur nach Schema XY lösen müssen.

DANKSAGUNGEN:

2 Abstract

Kurzzusammenfassung → am Schluss schreiben. 1 A4 Seite

3 Einleitung

- Gegenstand der Untersuchung
- Problemstellung
- Hypothese
- Theorie und Ziel meiner Arbeit
- Eingrenzung des Untersuchungsfeldes
- Ausgangslage Skizzieren

2 A4 Seiten
Kopfrechnen ist keine schwierige Sache, zumindest nach meiner Auffassung. Oftmals beschäftige ich mich mit der Frage, weshalb das, was mir so leicht fällt, anderen so schwer fällt. Kopfrechnen bedeutet für mich nicht, dass wenn man eine Rechnung wie $31 \cdot 29$ sieht, unmittelbar das Resultat 899 ausspuckt wie ein Taschenrechner. Vielmehr bedeutet Kopfrechnen für mich sich zu helfen wissen, wie man die Rechnung so vereinfachen kann, damit sie im Kopf lösbar ist. Mit anderen Worten, will man Rechnungen im Kopf lösen, so wie dies ein Taschenrechner tut, so wird es schnell komplex und man verliert die Lust am Kopfrechnen. Geht man jedoch anders an Rechnungen heran und probiert diese zuerst zu vereinfachen und anschliessend eine einfachere Rechnung im Kopf zu lösen, so wird man erfolgreich sein und öfters

den Kopf anstelle des Taschenrechners brauchen. In meiner Arbeit möchte ich eine Gruppe von Oberstufenschülern dazu motivieren im Alltag nicht sofort zum im Smartphone integrierten Taschenrechner zu greifen, sondern solche Rechnungen im Kopf zu lösen Um dies zu erreichen, möchte ich den Schülern einige dieser Tricks weitergeben. Dafür habe ich eine Doppellektion zu Verfügung. Jedoch sich der gewünschte Effekt nicht nach dieser Doppellektion einstellen, vielmehr müssen die neu erlernten Methoden angewendet und bestenfalls von den Schülern selbst weiterentwickelt und verfeinert werden. Deshalb lösen die Schüler nach dieser Doppellektion übern einen Monat zu Beginn jeder Mathestunde 5 Minuten Aufgaben. Dadurch wird meine Arbeit in drei Teile aufgeteilt. Die Planung der Doppellektion, was will ich vermitteln, wie will ich es vermitteln, welche Probleme sind dabei aufgetreten. Im zweiten Teil werde ich dokumentieren, wie die Durchführung abgelaufen ist, was hat so geklappt, wie ich es mir wünschte, was nicht. Im letzten Teil bereite ich das ganze nochmals auf und schaue auf mein Projekt zurück. Habe ich mein Ziel erreicht?, was müsste ich für eine weitere Durchführung verbessern? Dieser Teil basiere ich auf der Rückmeldung der Lehrperson (Herr Jud) und dem Verlauf der Aufgaben die die Schüler zu Beginn jeder Lektion lösten mussten.

- In der Arbeit werde ich des öfteren von *mathematischen Tricks* sprechen. Diese *mathematischen Tricks* sind einfache Termumformungen, die kompliziert aussehende Rechnungen so umformen, damit sie im Kopf lösbar sind. Diese Tricks gründen auf den mathematischen Grundgesetzen und sind mathematisch korrekt!
- Keine vedische Mathematik vermittelt, weil ich sie selbst nicht verstehe und ich ein *es funktioniert, aber ich weiss nicht weshalb* Verhalten vermeiden wollte.

4 Material und Methoden

Vorgehen

5 Planung der Lektion

5.1 Beschreibung der Inhalte der Lektion

Bei der Planung der Lektion waren mit vielerlei Dinge sehr wichtig:

- Verständlich für alle Schüler
- verschiedene Werkzeuge für die Schüler, damit sie selbst kreativ werden können

- das Verständnis des mathematischen Grundgedankens
- Alle Schüler sollen Freude am Kopfrechnen und der Mathe erhalten
- Schüler sollen daraus profitieren

Ich möchte den Schülern diverse Tricks beibringen, die ihnen helfen Rechnungen zu vereinfachen. Diese Tricks sind im wesentlichen algebraische Umformungen und mathematisch korrekt! Damit kein Durcheinander entsteht, bespreche und erläutere ich im kommenden Teil nacheinander die vier Grundrechenarten: den Hintergrund, Alltagsbeispiele und die Tricks, welche für die jeweilige Rechenart angewendet werden können bezüglich der jeweiligen Rechenart.

Die meisten Tricks bauen auf den 3 Grundgesetze der Mathematik auf. Die Schüler haben sie im Unterricht bereits kennengelernt, deshalb werde ich sie hier nur kurz anschneiden und nicht gründlich ausführen.

5.2 die Grundgesetze der Mathematik

5.2.1 Assoziativgesetz

$$(a+b)+c=a+(b+c) \tag{1}$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Es spielt also keine Rolle ob ich zuerst a und b zusammenzähle und dann c addiere oder zuerst b und c addiere und dann a dazuzähle. Das Assoziativgesetz ist gültig für die Addition und die Multiplikation, jedoch nicht für die Subtraktion und Division.

5.2.2 Distributivgesetz

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \tag{2}$$

Das Distributivgesetz besagt, dass bei der Multiplikation eines Faktors mit einer Summe (oder auch einer Differenz) die Multiplikation in zwei Teilschritte aufgeteilt werden darf, indem man die beiden Summanden (in der Allgemeinen Formel b und c) einzeln mit dem Faktor a multipliziert und aus diesen zwei Teilprodukten ($a\cdot c$, $b\cdot c$) die Summe bildet. Ausformuliert bedeutet das Distributivgesetz, dass bei einer Multiplikation die Faktoren in Summe aufgeteilt werden und nach obigem Schema weitergerechnet werden kann, das Distributivgesetz gilt für den allgemeinen Fall einer Multiplikation, wobei die Faktoren sowohl in Summen als auch in eine Differenzen aufgeteilt werden dürfen.
Das Distributivgesetz, kann auch angewendet werden, wenn beide Faktoren als Summe bzw. Differenz vorliegen:

5.2.3 Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \tag{3}$$

Hier wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Summanden das Resultat nicht beeinflusst. Bei der Addition und der Subtraktion darf die Reihenfolge, in der man die einzelnen Summanden zusammenzählt bzw. die Faktoren multipliziert frei gewählt werden. Konkret erlaubt uns dieses Gesetz die einzelnen Summanden oder Faktoren so zu gruppieren, dass es uns leichter fällt sie zusammenzuzählen. Mehr dazu auf Seite **??**.

5.3 Addition

Bei einer Addition werden zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt. Formal wird eine Addition so dargestellt:

$$Summand_1 + Summand_2 + Summand_3 + \ldots + Summand_n = Summe$$

Plusrechnen, was tut man genau?, was passiert?, evtl Zahlenstrahl

5.3.1 Schriftlich

Da ich mich in meiner Arbeit mit dem Rechnen im Kopf befasse und meine Probanden die Oberstufe besuchen, setze ich die Kenntnis der schriftlichen Addition voraus. Deshalb werde ich hier nur kurz im Tiefflug darüberstreifen, um zu repetieren, exerzieren oder aufzufrischen.
Die schriftliche Addition funktioniert folgendermassen: Man schreibt die Zahlen untereinander und beginnt von der Einerstelle sich vorzuarbeiten bis man bei der Stelle mit der grössten Zehnerpotenz angekommen (im Beispiel die Hunderterstelle) ist. Die Rechenrichtung ist von rechts nach links. Ist das Ergebnis in einer Spalte grösser als 10, so wird dies als Übertrag in die nächste Spalte (nächst grössere Zehnerstelle) eingeschrieben.

		Hunderter	Zehner	Einer
		1	3	4
		1	6	4
	+		5	3
		2	14	11
		2	4	1
Überträge	+	1	1	
		3	5	1

Abbildung 1: Die schriftliche Addition von 134 + 164 + 53

5.3.2 Von rechts nach links

Eine beliebte Methode, bei der man exakt die gleichen Rechenschritte wie bei der schriftlichen Addition durchführt, jedoch ohne sich die Zahlen untereinander aufzuschreiben. Man Rechnet also nach dem gleichen Schema wie in Abbildung 1. Man rechnet Zeile für Zeile, beginnend bei der Einerstelle und arbeitet sich Zeile für Zeile nach links vor bis die Zahlen ausgehen. Dies ist jedoch eine sehr brachiale Standardmethode, klar führt auch sie ans Ziel, doch muss man sich, und das sei der grosse Nachteil dieser Methode extrem viele Zwischenresultate merken. Ich möchte niemanden der sich diese Methode zu eigen gemacht hat davon abhalten so zu rechnen, jedoch werde ich im folgenden einige Tricks zeigen, mit welchen man solche Rechnungen auf eine andere Weise lösen kann.

5.3.3 Kommutativgesetz / Gruppen Bilden

Die Definition des Kommutativgesetzes (zu finden auf Seite 5 Gleichung 3) besagt, dass bei Additionen und Multiplikationen die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren frei gewählt werden kann. Dies ist vor allem bei Kettenrechnungen ein sehr mächtiges Werkzeug! Am besten ordnet man die einzelnen Glieder einer Kettenrechnung so an, dass man mit dem kleinstmöglichen Aufwand ans Ziel kommt.

Das Kommutativgesetz wurde bereits auf Seite 5, Gleichung 3 vorgestellt. Hier erläutere ich nun, wie man sich die vom Kommutativgesetz besagten Regeln zu nutze machen kann. Aus dem Kommutativgesetz folgt, dass die Reihenfolge, in der man die verschiednen Summanden zusammenzählen will frei wählbar ist. Am besten wählt man sie so, dass man möglichst wenig zu rechnen hat, indem man zum Beispiel Gruppen bilden, die Zusammen eine runde Zahl ergeben. Der Trick, Gruppen zu bilden, ist vor allem wenn es um Kettenrechnungen geht ein sehr mächtiges Werkzeug!

$$13 + 56 + 34 + 53 =?$$

Versucht man Gruppen zu bilden, so wird den meisten ins Auge stechen, dass sich die Einerstellen der Zahlen 56 und 34 zusammen auf 10 ergänzen, 56 + 34 also eine runde Zahl (90) ergeben. Wendet man diesen Weg an, so kann man die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(56 + 34) + 13 + 53 = 90 + 13 + 53 = 103 + 53 = 156$$

Jedoch könnte man auch sehen, dass die Einerstellen der Zahlen 13, 34, 53 sich auch auf 10 ergänzen und die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(13 + 34 + 53) + 56 = 100 + 56 = 156$$

Sowohl der erste als auch der zweite Weg sind korrekt, klar könnte man auch im Kopf von Links nach Rechts immer eine Zahl zur nächsten dazu addieren, jedoch entstehen dabei eine Vielzahl an Zwischenschritten / Zwischenresultaten und das wollen wir beim Kopfrechnen vermeiden. Mit diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aufgabe im Kopf zu rechnen. Es gibt dabei weder richtig noch falsch vielmehr sind es Wege. Jeder Schüler soll also seinen eigenen Weg finden, der für ihn am logischsten erscheint.

5.3.4 [Mein Trick] der unsichtbare Gehilfe

Die Summe verändert sich nicht, wenn beim einen Summanden eine Zahl addiert wird, wenn man beim anderen Summanden die selbe Zahl wieder abzieht. Diesen Trick ist sehr hilfreich um **Zehnerübergänge zu vermeiden**. Man vermeidet den Zehnerübergang indem man die eine Zahl zu einer Zehnerzahl ergänzt bzw. reduziert. Dadurch führt man nicht einen Zehnerschritt im eigentlichen Sinne aus, sondern macht den Schritt zum vollen Zehner. Ein ganz banales Beispiel hierfür ist die Addition von 99. Was ergibt 23 + 99. In diesem Beispiel lohnt es sich $(23-1)+(99+1)$ zu rechnen, also $22+100=122$ Die Korrektheit dieses Tricks lässt sich ganz einfach wie folgt beweisen.

$$(a+x)+(b-x)=a+b+(x-x)=a+b$$

5.4 Subtraktion

Bei einer Subtraktion werden eine oder mehrere Zahlen von einer Zahl abgezogen. Der Allgemeine Fall wird so dargestellt.

$$Minuend - Subtrahend_1 - Subtrahend_2 - \ldots - Subtrahend_n = Differenz \tag{4}$$

5.4.1 die schriftliche Subtraktion

Wie bereits bei der Addition werde ich auch die schriftliche Subtraktion nur aus dem Gründen der Anschaulichkeit hier besprechen. Wie bei der schriftlichen Addition werden die Zahlen untereinander hingeschrieben so dass Einer-, Zehner- und Hunderterstelle übereinander stehen. Danach wird in jeder Spalte einzeln jeweils alle Subtrahenden vom Minuenden abgezogen. Ist die Summe der Subtrahenden kleiner als der Minuend, so kann die Differenz problemlos ausgerechnet werden und in der jeweiligen Spalte als Ergebnis eingetragen werden. Etwas komplizierter wird es, wenn die Summe der Subtrahenden grösser ist als der Minuend, also eine grosse Zahl von einer kleinen abgezogen werden soll. Da wir uns in der Menge der natürlichen Zahlen bewegen gibt es keine negativen Zahlen und Resultate. Deshalb muss man, damit die Subtraktion dennoch vollführt werden kann von der nächsthöheren Stelle einen oder mehrere Zehner geborgt werden.

(in der Abbildung grün hervorgehoben.) Wer möchte kann es auch wie folgt umstellen und den Überschlag als zusätzlichen Subtrahenden in der jeweiligen Zeile hineinschreiben. Eine alternative Methode findet sich im Kapitel ??. Summe bilden und ergänzen im Kapitel Gruppen bilden erklären!

		Hunderter	Zehner	Einer
Minuend		(6 -1)	2	8
Subtrahend	-	1	8	2
Differenz		4	4	6

Abbildung 2: Die schriftliche Subtraktion: 628 - 182

5.4.2 Kettenrechnungen

Zieht man nacheinander mehrere Zahlen von einer Zahl ab, kann die Summe aller Subtrahenden vom Minuenden abgezogen werden. Dies lässt sich ganz einfach mit dem Trick beweisen, das man alle Subtrahenden in eine Klammer setzt und ein Minus davor. Denn das Minus wechselt alle Vorzeichen in der Klammer.

$$a - b - c - d = a - (b + c + d)$$

		Hunderter	Zehner	Einer
Minuend		(5 - 1)	2	3
Subtrahend_1	-	3	4	1
Subtrahend_2	-	1	3	1
Differenz			5	1

Abbildung 3: Die schriftliche Subtraktion: 523 - 341 - 131

5.4.3 [mein Trick] der unsichtbare Helfer

Die Differenz gibt an, wie gross der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist. Als Beispiel möchte ich zwei fiktive nebeneinanderstehende Hochhäuser ins Leben rufen, das eine ist 10 Meter höher als das andere. Meine Überlegungen zu diesem Beispiel: Ich rufe drei Betrachter ins Leben: der erste Betrachter ist auf der Höhe des zehnten Stockwerkes der Hochhäuser, der zweite auf der Höhe des Erdgeschosses und der dritte Betrachter befindet sich im Erdmittelpunkt. Nun wollen alle drei Betrachter herausfinden wie gross der Höhenunterschied zwischen den beiden Häusern ist. Erhalten sie verschiedene Resultate? Nein erhalten sie nicht. Aus dieser Überlegung habe ich den folgenden Trick abgeleitet: die Differenz verändert sich nicht, wenn sowohl beim Minuenden als auch beim Subtrahenden die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird. Der algebraische Beweis sieht so aus:

$$(a-x)-(b-x)=a-x-b+x=a-b-x+x=a-b$$
$$(a+x)-(b+x)=a+x-b-x=a-b+x-x=a-b$$

Weil das Minus die Vorzeichen in der Klammer wechselt, entstehen im Zusammenhang mit x zwei gegenteilige Vorzeichen, die sich gegenseitig auslöschen.

5.4.4 Subtraktion einer schönen Zahl

Der Begriff schöne Zahlen wurde in der Einleitung definiert. Am Beispiel der Rechnung 1000 - 738 möchte ich erklären, wie man die Subtraktion von einer Runden zahl vereinfachen kann: Wie man sieht ist in allen Spalten ausser

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	0	0	0
-		7	3	8
Überträge	1	1	1	
		2	6	2

Abbildung 4: Die Subtraktion von einer schönen Zahl

der Einerstelle ein übertrag von 1 entstanden, dies ist keine Überraschung, denn zieht man von Null eine Zahl die ungleich 0 ist ab, so muss man sich einen Zehner von der nächst grösseren Stelle borgen. Da das für alle schönen Zahlen der Fall ist, kann man die folgende Regel ableiten: **Subtraktion einer schönen Zahl: Alle von 9 abziehen, die letzte von 10.**

5.5 Multiplikation

5.5.1 Faktoren Aufteilen

Da die Multiplikation assoziativ ist, darf eine Multiplikation in mehrere Schritte aufgeteilt werden. Beispielsweise darf eine Multiplikation mit 4 als eine Multiplikation mit zwei und nochmals mit zwei angesehen werden. Oder eine Multiplikation mit 5 darf als eine Multiplikation mit 10 und eine anschliessende Division mit 2 (äquivalent zu der Multiplikation mit $\frac{1}{2}$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \tag{5}$$

Nähere Erläuterungen möchte ich am Beispiel der Rechnung $4 \cdot 27$ durchführen. man kann die Rechnung wie folgt ansehen:

$$4 \cdot 27$$

Betrachtet man die formale Schreibweise des multiplikativen Assoziativgesetzes (Formel 5 auf Seite 9) so kann man die Rechnung auf die folgenden Arten anschauen:

- Man interpretiert die Rechnung so, dass der Faktor 4 als $(a \cdot b)$ angesehen wird also sähe die Rechnung so aus:

  $$(4) \cdot 27 =?$$

  Wie in Formel 5 zu sehen ist, können in der Klammer mehrere Faktoren stehen. Damit sich das Ergebnis der Rechnung nicht verändert muss jedoch das Produkt in der Klammer 4 ergeben. Es bieten sich die folgenden Rechnungen an: $1 \cdot 4$ oder $2 \cdot 2$ (natürlich gäbe es noch viel mehr Multiplikationen mit dem Ergebnis 4. Diese Rechnungen würden jedoch negative Zahlen und oder Brüche beinhalten und sowohl negative Zahlen als auch Brüche sind schwieriger zu handhaben als positive, ganze Zahlen.) Da mit der Umformung $1 \cdot 4$ lediglich Anschauungskosmetik ist, da die Multiplikation mit 1 vernachlässigt werden kann, fahren wir mit der zweiten Möglichkeit $(4 = 2 \cdot 2)$ Also schreiben wir die Rechnung so:

  $$(2 \cdot 2) \cdot 27 =??$$

  Da die Multiplikation kommutativ ist, dürfen die Faktoren in eine beliebige Reihenfolge gebracht werden. Da die Multiplikation mit 2 einfacher ist als die Multiplikation mit 27 nehmen wir die 27 an den Anfang und multiplizieren diese zweimal mit der Zwei.

  $$(27 \cdot 2) \cdot 2 = (54) \cdot 2 = 108$$

- Es ist jedoch auch erlaubt, die 27 in Faktoren zu zerlegen. Hier gibt es wiederum zwei Möglichkeiten: $1 \cdot 27$ und $3 \cdot 9$. Wie im vorherigen Beispiel wird mit der Umformung von 27 zu $27 \cdot 1$ keine Vereinfachung herbeigeführt. Deshalb fahren wir weiter mit der Umformung von 27 zu $3 \cdot 9$ fort und erhalten die folgende Rechnung:

  $$4 \cdot (27) = 4 \cdot (3 \cdot 9) = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 12 \cdot 9$$

  So wurde aus der Rechnung $4 \cdot 27$ eine völlig andere Rechnung $9 \cdot 12$. Wie man das einfach ausrechnen kann, wird im nächsten Kapitel erklärt.

Häääää?

Das Resultat (Produkt) einer Multiplikation verändert sich nicht, wenn ein Faktor mit einer Zahl multipliziert wird und ein anderer Faktor durch die selbe Zahl geteilt wird. Dankbar für diesen Fall sind alle Zahlen die Vielfache von zwei sind. Beispielsweise die Multiplikation mit 8:

$$125 \cdot 8 = 250 \cdot 4 = 500 \cdot 2 = 1000$$

Die Multiplikation mit 8 wurde substituiert mit drei Multiplikationen mit Zwei.

5.5.2 Summen Bilden

Um diesen Trick anzuwenden macht man sich das Distributivgesetz zu nutze indem man sich aus einem Faktor eine Summe bildet. Es entstehen zwei Teilrechnungen, deshalb macht es vor allem dann Sinn, diesen Trick anzuwenden, wenn man das eine Teilresultat bereits kennt. Vor allem bei der Multiplikation mit Zahlen die nahe an einem Zehner liegen ist dies ein Mittel um sehr schnell an das Resultat zu gelangen. Im vorangehenden Kapitel tauchte die Rechnung $9 \cdot 12$ auf. es gibt wiederum zwei Fälle wie man diese Rechnung lösen kann mit Hilfe des Distributivgesetzes:

- Man macht aus der neun eine Summe: $9 = (10 + (-1)) = (10 - 1)$ und multipliziert diese mit 12:

  $$(10 - 1) \cdot 12 = 10 \cdot 12 - 1 \cdot 12 = 120 - 12 = 108$$

  Die Multiplikation mit 10 ist keine schwierige Sache, lediglich eine null muss am Ende der Zahl angehängt werden und die Multiplikation mit 1 erübrigt sich auch. Also erhält man die Zwischenresultate ohne grosse Rechnereien. Die Subtraktion am Schluss dürfte den meisten leichter von der Hand gehen als die Ursprüngliche Rechnung im Kopf durchzuführen.

- Man verwandelt die 12 in die Summe $12 = (10 + 2)$ und rechnet auf die gleiche Weise wie eben mit Hilfe des Distributivgesetzes weiter:

  $$9 \cdot (10 + 2) = 90 + 18 = 108$$

  Hier tauchen wiederum zwei Multiplikationen auf, deren Produkte zusammengezählt werden müssen. Die Multiplikation $9 \cdot 10$ ist ein Kinderspiel, und die Rechnung $2 \cdot 9$ gehört zum kleinen Einmaleins und erledigt sich auch ohne grosse Schwierigkeiten.

5.5.3 Doppelte Summe

Die Methode „doppelte Summe“ ist im Grunde genommen nichts anderes als die Weiterführung der Methode „Summen bilden“. Statt eine Zahl in eine Summe umzuwandeln, bildet man in diesem Fall aus beiden Zahlen eine Summe bildet. Allgemein sieht eine Multiplikation so aus:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Diese etwas unschöne Formel, kann man vereinfachen, unter Einführung der Nebenbedingung, dass in beiden Summen der gleiche Summand vorkommen soll. Wir gehen davon aus, dass die Summen so gewählt wurden, dass die

Variabel a und c den gleichen Wert haben und deshalb beide mit der Variabel a dargestellt werden können:

$$(a + b) \cdot (a + d) = a^2 + ab + ad + bd$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes (kap. 5.2.2) kann der Term wie folgt vereinfacht werden:

$$a^2 + ab + ad + bd = a^2 + a \cdot (b + d) + bd$$

Somit wurde die Multiplikation von zwei Faktoren umgewandelt in die Addition von einer Quadratzahl und zwei Produkten. Damit diese Endformel auch wirklich für jedermann im Kopf lösbar ist, sollten die Zahlen geschickt gewählt werden. a als ganzen Zehner wählen, dann wird die Rechnung im Kopf lösbar Dass man dank diesem Kniff eine schwierige Multiplikation, im Kopf lösen kann, möchte ich mit folgendem Beispiel untermauern.

$$23 \cdot 16 =?$$

als erstes wandeln wir beide Faktoren in eine Summe um und achten darauf, dass in beiden Summen der gleiche Summand vorkommt. Besonders geschickt ist es, diesen Summanden als eine ganze Zehnerzahl zu wählen. Hat man zwei Zahlen in der Nähe des gleichen Zehners, in unserem Beispiel 20, so macht es sinn Summen mit diesem Zehner zu bilden. Streng genommen ist die Umwandlung von 16 zu $(20 - 4)$ keine Addition sondern eine Subtraktion, auch das ist erlaubt. Einschub, dass Subtraktion 20 - 4 auch als Addition (20 + (-4)) angesehen werden kann?

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) =?$$

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) = 20^2 + 3 \cdot 20 - 4 \cdot 20 - 3 \cdot 4$$

ohne Finger

Die Methode, wie sie eben vorgestellt wurde, dient eigentlich nur dem Zweck der Anschauung und ist deshalb auch der Bruder der folgenden Methode. Schnelldenker dürften das System, das hinter den Fingertricks steckt bereits durchschaut haben. Allen anderen werde ich nun auf die Sprünge helfen. Das System funktioniert wie folgt: Die zwei Zahlen die miteinander multipliziert werden sollen werden so in zwei Summen umgewandelt dass die gleiche Zahl als Ursprungszahl vorliegt. Bei Betrachtung der allgemeinen Formel der Multiplikation lassen sich einige Vorteile herauslesen. Algebraisch ausgerechnet, sieht eine Multiplikation von zwei Summen so aus. (Vorausgesetzt keine zwei Summanden sind gleich)

$$x \cdot y = (a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Da wir aber die Bedingung eingeführt haben dass die gleiche Zahl als Summand in beiden Klammern auftauchen soll lässt sich die etwas umständliche Formel so schreiben. Wir gehen davon aus, dass wir die Rechnung so umgeformt haben dass a und c gleich gross sind.

$$ac + ad + bc + bd \stackrel{a=c}{==} aa + ad + ba + bd = a^2 + a \cdot (b + d) + bd$$

Aus vier Zwischenresultaten wurden drei und von diesen dreien ist eines (a^2) eine Quadratzahl, sollte also den Schülern bekannt sein. Also bleiben noch zwei Rechenschritte übrig: $a \cdot (b + d)$ Hier ist es wichtig, dass zuerst die Klammer ausgerechnet und erst anschliessend die Multiplikation durchgeführt wird, um den Aufwand möglichst gering zu halten. Zum Schluss muss einzig noch die Rechnung $b \cdot d$ wirklich ausgerechnet werden. Im normalen Fall sollte dies jedoch mit dem kleinen Einmaleins möglich sein.

5.5.4 Dritte Binomische Formel

Die dritte binomische Formel sieht wie folgt aus:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Diese Formel kann man sich zu nutze Machen, sobald man zwei Zahlen haben, die nahe beieinander liegen, bevorzugt mit einem Zehner in der Mitte. Beispiel: $22 \cdot 18 = (20 + 2) \cdot (20 - 2) = 400 - 4 = 496$

5.6 Division

- Lektionen weshalb?
- Weshalb ein grosses Arsenal an Werkzeugen -¿ Damit die Schüler eigene Lösungswege suchen können und diese weiterentwickeln können.
- Aufbau der Lektion
- Aufbau der Übungsblättern / Tests

6 Vermittlung der einzelnen Inhalten

- ohne entsprechende Mittel kann man nicht kreativ werden, speziell nicht in Mathematik! Deshalb vermittelte ich den Schülern verschiedne Werkzeuge, damit sie kreativ werden können. Nicht das Erarbeiten der verschiednen Tricks steht im Vordergrund, sondern das beherrschen davon.

Mir war von Anfang an bewusst, dass ich eine grosse Fülle von Stoff in einer Doppellektion vermitteln wollte. Das zuvor erarbeitete Repertoire an

Tricks ist bereits eine gekürzte Fassung der gekürzten Fassung der nach einer Auswahl übrig gebliebenen Tricks. Ich war mir bewusst, dass es zeitlich sehr knapp werden könnte. Dennoch trennte ich mich von keinem weiteren Trick. Mein Ziel war, die Schüler nich zu nötigen nach einem vorgegebenen Schema zu rechnen, sondern dass sie selbst einen Weg suchen können und das ist nur möglich, wenn sie ein breites Arsenal an zu Verfügung stehenden Möglichkeiten haben. Ich möchte den Schülern Werkzeuge beibringen, je nach Situation ist ein schweizer Taschenmesser ein sehr wertvolles Utensil, man kann damit notfalls auch einen Baum fällen, jedoch lässt sich ein Baum leichter mit einer Säge fällen. Mein Ziel war den Schülern einige Grundlegende Werkzeuge für die drei wichtigsten Grundrechenarten mitzugeben. Also ihren Werkzeugkasten mit Hammer, Schraubenzieher und einigen Zangen auszurüsten, damit sie alle im Alltag auftretenden Probleme lösen können.

In diesem Kapitel möchte ich nun genau beschreiben, wie ich die Lektion aufgebaut habe. Was ich aus welchem Grund so gemacht habe. Laut [1] soll eine Lektion in die folgenden Teile aufgeteilt werden: Einstieg, Interesse wecken, Theorie erarbeiten, Umsetzung, Abschluss. Ich habe mich dazu entschieden, dass ich die Schritte Theorie erarbeiten und die Umsetzung in einem Schritt zusammen nehme und für jeden Trick einzeln durchführen werde. Dies tat ich aus dem einfachen Grund, damit zum einen keine Verwirrung entsteht, zum anderen, damit die Schüler nicht zu lange Zeit nur zuhören müssen, sondern selbst aktiv werden können.

6.1 Arbeitsformen

Damit die Schüler kreativ werden können, brauchen sie eine Fülle an Tricks. Deshalb legte ich den Fokus nicht auf das gemeinsame Erarbeiten des Inhalts, dafür fehlte schlicht und einfach die Zeit. Ich rückte das Verstehen und die Fähigkeit, die erlangten die Tricks zu anzuwenden und bestenfalls weiter zu entwickeln in den Mittelpunkt.

6.1.1 Vormachen - Nachmachen - Üben

Das Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben* wurde von Landwehr (1997, s. 151f) vorgestellt. Diese Technik dient der Vermittlung von Fertigkeiten und Handlungstechniken. Der Name ist Programm, das System baut, wie es der Name sagt darauf auf, dass die Lehrperson eine Technik vorzeigt, die Schüler diese imitieren und anschliessend selbst anwenden und das ganze üben. Bemängelt werden, die fehlende Erkenntnisgewinnung und der man-

[1] http://arbowis.ch/index.php/erwachsenenbildung/unterrichtsplanung/67-2014/erwachsenenbildung/unterrichtsplanung/phasenmodelle/42-aitus-5-phasen-unterrichtsaufbau

gelnde Platz für die eigene Lösungsvorschläge. Diesen Kritikpunkten kann ich insofern entgegensprechen, als dass die Technik lediglich der Vermittlung von Lösungsstrategien dient und diese Lösungsstrategien dazu da sind, damit die Schüler später, beim Lösen der Aufgaben, eigene Lösungsvorschläge kreieren können. Die Technik *Vormachen - Nachmachen - Üben* ist also lediglich Mittel zum Zweck, um den Schülern die notwendigen Werkzeuge mitzugeben, damit sie einen eigenen Lösungsweg für die verschiednen Rechnungen entwickeln können. Ich entschied mich für diese Technik, weil die gemeinsame Erarbeitung der einzelnen Strategien, nicht das übergeordnete Ziel ist und die Zeit dafür schlicht zu knapp war.

6.2 Lektionsaufbau

Ein von Meyer (2015) vorgestelltes Modell für den Unterrichtsaufbau nennt sich *AITUS* und gliedert sich in 5 Phasen: Anfangen, Interesse wecken, Theorie erarbeiten, Umsetzen, Schluss. Diesen Aufbau erachtete ich als geeignet und kompatibel mit dem zuvor vorgestellten Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben*. Ich wollte die Doppelstunde so aufbauen, dass ich für jeden Trick einzeln die Schritte Theorie erarbeiten und Umsetzen durchführen wollte. Somit ergaben sich 9 kleine Theorieblöcke mit anschliessender Übungsphase. Durch das Aufteilen in kleine Portionen wollte ich verhindern, dass die Schüler zu lange passiv zuhören müssen. Dadurch sollte sich ein guter Mix aus abwechselnd kleinen Theoriehäppchen, gefolgt von einer kurzen Übungsphase ergeben.

Der erste Punkt von Meyer (2015) vorgestellte Punkt ist, das gegenseitige Kennenlernen. Dies setzte ich um, indem ich zu beginn eine Vorstellungsrunde machte. Ich wollte jedoch über das plumpe nennen des Vornamens hinausgehen, da ich auch etwas mehr über die Schüler erfahren wollte. Aus diesem Grund sollte sich jeder kurz vorstellen, indem er neben seinem Namen auch noch erwähnen, was ihn mit der Mathematik verbindet und wo ihm Mathematik im Alltag begegnet ist. Die zwei Zusatzbedingungen hatten den positiven Nebeneffekt, dass die Schüler bereits ein erstes mal damit befassten, inwiefern Mathematik und Kopfrechnen im Alltag präsent ist. Da es für die Schüler eine spezielle Situation war und ich als Schüler in solchen Situationen meist sehr schüchtern war, machte ich den Anfang. Zusätzlich erklärte ich den Schülern, dass sie mich nicht zu siezen brauchen, sondern mich beim Vornamen nennen dürfen. Dadurch wollte ich auch noch eine gewisse Nähe schaffen beziehungsweise die Distanz die das Siezen schafft aus dem Weg räumen. Ich stellte mich also in etwa so vor: Mein Name ist Jérôme, ich bin 18 Jahre alt. Mathematik faszinierte mich schon als Kleinkind. Mathematik begegnet mir im Alltag sehr oft. Wenn ich auf den Zug stresse und auf die Uhr blicke und ausrechne, wie viel Zeit ich noch habe. Im Supermarkt in der Schule, beim Volleyballspielen. Weiter gehört die Bekanntgabe der Absicht und der Zielsetzung unter den Punkt *Anfang*

Nach Meyer sollte man weiterfahren, indem man Vorwissen aktiviert und Lust auf den Stoff zu versprühen. Dem wollte ich gerecht werden, indem ich ihnen erklärte, um was es in meinem Projekt geht und ihnen die Ziele bekannt gab. Um sie dort abzuholen wo sie standen, machte ich zu Beginn eine Repetition der Grundgesetzte und gab bereits einige Inputs gab, die auf das Bevorstehende abzielten. Um die nächsten zwei Aspekte: *Theorie erarbeiten und Umsetzen* in die Praxis zu übertragen, bereitete ich die kurzen Theorieblöcke und dazu passende Aufgaben vor. Die Aufgaben waren jeweils so gestaltet, dass sie sich gut mit der soeben vorgestellten Technik lösen liessen. Auf dem Aufgabenblatt waren jeweils 6 Aufgaben darauf, der Schwierigkeitslevel steigerte sich von Aufgabe zu Aufgabe.

Zum Schluss der Lektion, auch wenn es nicht explizit von Meyer empfohlen wurde, machte ich einen Ausblick und erzählte den Schülern, wie das Projekt nun weiterläuft.

6.3 Theorie erarbeiten

Mir war es sehr wichtig, dass die Schüler auch wirklich verstanden, was ich ihnen vermittle. Um dies zu erreichen wollte ich den Unterricht weg von der Dimension Wandtafel lösen und in die Dimension selbst Hand anlegen übertragen. Dies will ich erreichen indem ich mir selbst die Aufgabe stellte die Mathematik, die nur im Imaginären stattfindet so in Modelle übersetzte, dass die Schüler sie selbst erfahren können in einer Weise in der sie sie auch verstehen. Ein weiteres Problem meiner Arbeit ist, dass wenn die Schüler alles im Kopf rechnen, ich ihren Lösungsweg nicht nachvollziehen kann. Da jedoch genau das einer der zentralen Punkte für die Auswertung ist, musste ich eine Lösung finden. Ich führte den Begriff "halbschriftlichïns Leben. Halbschriftlich bedeutet so viel wie: Umformungen sollen aufgeschrieben werden, Zwischenresultate jedoch nicht. Dadurch will ich erreichen dass ich ihre Rechenwege nachvollziehen kann, sie aber dennoch den grössten Teil im Kopf rechnen müssen. Im folgenden werde ich nun erklären, wie ich die einzelnen Tricks vermitteln will:

Von rechts nach links 10'

Um das zu erklären, brauchte ich keine weiteren Hilfsmittel. Ich rechnete mit den Schülern ein Beispiel schriftlich an der Tafel vor und erklärte ihnen, dass sie diese Schritte (zuerst einer Zusammenzählen, dann Zehner, dann Hunderter, ...) auch auf die gleiche Weise im Kopf durchführen können. Um das ganze zu vertiefen, liess ich die Schüler gleich danach Übungen lösen, die sich speziell gut eigneten, mit dieser Methode zu lösen.

Gruppen Bilden 15'

Ich schrieb die Zahlen 13, 56, 34, 53 auf Zettel und heftete sie mit Magneten an die Wandtafel und schrieb + dazwischen. Dann bat ich die Schüler darum, mir das Ergebnis zu nennen. Ich erwartete, dass die Meisten nach der eben gelernten Methode von rechts nach links rechnen. Also zuerst alle Einer zusammenzählen und anschliessend die Zehner. Danach wollte ich die Frage aufwerfen ob es nicht auch einfacher zu haben sei. Danach zeige ich ihnen, dass die Summanden in eine beliebige Reihenfolge bringen kann, indem ich sie an der Tafel in und her geschoben habe. Danach liess ich die Schüler wiederum Aufgaben dazu lösen, die sich besonders gut dazu eigneten mit dieser Methode zu lösen.

6.3.1 der unsichtbare Gehilfe

7 Ergebnisse

8 Diskussion der Ergebnisse

9 Schlusswort

Mit \cite {mittring2015} entsteht folgender Eintrag (Mittring, 2015)
Mit \citeA {Schlüsselwort} entsteht folgender Eintrag (Mittring, 2011)

Test (Mittring, 2013)
Test (Landwehr, 1997)
Test (Dambeck, 2013)
Test (Dambeck, 2012) (Meyer, 2015)

Literatur

Dambeck, H. (2012). *Je mehr löcher, desto weniger käse - mathematik verblüffend einfach* (5. Aufl. Aufl.). Köln: Kiepenheuer & Witsch.

Dambeck, H. (2013). *Nullen machen einsen groß - mathe-tricks für alle lebenslagen* (1. Aufl. Aufl.). Köln: Kiepenheuer & Witsch.

Landwehr, N. (1997). *Neue wege der wissensvermittlung: ein praxisorientiertes handbuch für lehrpersonen im bereich der sekundarstufen i und ii (berufsschulen, gymnasien) sowie in der lehrer- und erwachsenenbildung* (3. Aufl Aufl.). Verlag für Berufsbildung, Sauerländer.

Meyer, R. (2015). *Aitus: Die fünf phasen im überblick.* Airbowis. Zugriff auf http://arbowis.ch/index.php/67-2014/erwachsenenbildung/unterrichtsplanung/phasenmodelle/42-aitus-5-phasen-unterrichtsaufbau

Mittring, G. (2011). *Rechnen mit dem weltmeister - mathematik und gedächtnistraining für den alltag*. Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag.

Mittring, G. (2013). *Fit im kopf mit rechenweltmeister dr. dr. mittring - gedächtnistraining für jeden tag von kaffeekochen bis schäfchenzählen*. Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag.

Mittring, G. (2015). *Von pi nach pisa: mit zahlen die ganze welt verstehen - neues vom rechenweltmeister*. Fischer.