Freude am Kopfrechnen vermitteln

Planung, Durchführung und Auswertung einer Unterrichtseinheit mit dem Ziel, Oberstufenschüler zum Kopfrechnen zu motivieren

Autor, Klasse:
Jérôme Landtwing, M4a

Betreuende Lehrperson:
Hans-Heinrich Huwiler

KSA Pfäffikon
Maturaarbeit Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Abstract

„Früher, da gehörte das Kopfrechnen noch zum Schulalltag“, erzählten mir meine Eltern – und heute? Heute hat das Kopfrechnen sehr an Wert verloren, da jedes Smartphone einen eingebauten Taschenrechner besitzt, praktisch jedes Matheproblem im Alltag von Computern berechnet wird. Diesem Trend, wollte ich ein Stück weit entgegenwirken, indem ich Oberstufenschülern zeigen wollte, dass Kopfrechnen ganz und gar nicht Schnee von Gestern ist. Ich wollte ihnen zeigen, dass sich mit sehr einfachen Mitteln grosse Vorteile herausschlagen lassen. Den meisten bleibt diese Erkenntnis verwehrt. Das wollte ich ändern, indem ich zwei Oberstufenklassen in einer von mir vorbereiteten Doppellektion einige Strategien beibrachte. Strategien, die helfen Rechnungen einfach im Kopf zu lösen. Dieser Doppellektion folgte eine Übungsphase, in welcher die SchülerInnen die Möglichkeit hatten, das Gelernte anzuwenden. Die Übungsphase, welche über drei Wochen dauerte, bestand aus drei Wiederholungen pro Woche zu jeweils 5 Minuten. In diesen 5 Minuten war das Ziel, so viele Aufgaben wie möglich richtig zu lösen. Die Ziele meines Projektes waren:

- Den SchülerInnen Techniken zu vermitteln, welche ihnen das Kopfrechnen erleichtern
- Den SchülerInnen Freude am Kopfrechnen zu vermitteln
- Die SchülerInnen zum Kopfrechnen zu motivieren

Dass sich die SchülerInnen im Verlauf des Projektes verbessern würden, ist zu erwarten, da die SchülerInnen mit jeder Übung mehr und mehr Aufgaben gelöst haben und Routine erhalten. Mein Ziel war nicht, die SchülerInnen zu Kopfrechenmaschinen zu trimmen. Mein Hauptziel war, dass die SchülerInnen Freude am Kopfrechnen gewinnen und jeder SchülerInnen seine Kopfrechenfähigkeiten verbessert. Rückblickend kann ich sagen, dass sich die SchülerInnen einerseits messbar verbessert haben, andererseits habe ich auch meine Ziele erreicht und die Freude am Kopfrechnen ist auf eine Mehrheit der SchülerInnen übergesprungen.

2 Vorwort

Ich war seit Beginn meiner Schulzeit vom Fach Mathematik begeistert. Die Materie bereitete mir nie grosse Probleme und macht mir grossen Spass. Diese Freude, die mir die Mathematik bereitet, möchte ich so gerne an andere Menschen weitergeben, die nichts mit Mathematik anfangen können, sei dies als Nachhilfelehrer für Mitschüler oder Bekannte. Für mich war von Anfang an klar, dass ich mich in meiner Maturaarbeit mit Mathematik befassen will, jedoch nicht in welchem Rahmen. Immer mehr kristallisierte sich heraus, dass ich mich nicht mit der Mathematik selbst befassen wollte, sondern mit deren Vermittlung und schliesslich war ich beim Kopfrechnen angelangt. Das Kopfrechnen eignete sich perfekt als Thema für eine Arbeit, da unabhängig von Vorkenntnissen auf jeder Stufe an der Kopfrechenfähigkeit gearbeitet werden kann. Da mir zu Beginn nicht klar war, mit welcher Stufe ich das Projekt durchführen kann, war dies ein grosser Vorteil. Weiter kann man beim Kopfrechnen mit sehr wenig Aufwand bereits extrem viel herausholen. Dies war wiederum ein Vorteil, da ich von Beginn weg wusste, dass Zeit ein entscheidender Faktor sein wird.

2.1 Danksagungen

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei meiner Betreuungsperson Hans-Heinrich Huwiler, Mathematiklehrer an der KSA Pfäffikon. Bei ihm fand ich immer ein offenes Ohr, wenn Probleme auftauchten. Für alle Unklarheiten war er stets bereit, sie mit mir anzuschauen und zu besprechen. Ich bedanke mich bei ihm ganz besonders für das Vertrauen, dass er mir entgegenbrachte und mich stets Walten und Schalten liess, im Wissen − oder in der Hoffnung − dass es gut kommen würde.

All diesen Personen möchte ich ein Kränzchen widmen:
Testpublikum, für offene Ohren und ehrliche Rückmeldungen: Sanja, Eveline, Jeannine und Céline. Erika Meyer-Riser, Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der PH Zürich, für ein aufschlussreiches Gespräch über die Thematik. Michael Jud, Lehrer an der Sek I Einsiedeln und den Schülern und Schülerinnen der beiden teilnehmenden Mathekursen.

3 Einleitung

Weshalb ist die Mathematik unter einigen meiner MitschülerInnen so unbeliebt? Weshalb fürchten sich so viele meiner MitschülerInnen vor dem Kopfrechnen? Diese Fragen habe ich mir auch gestellt, denn für mich sind sowohl die Mathematik als auch das Rechnen im Kopf zwei Dinge, die ich mit Leidenschaft und gerne tue. Vielfach treffe ich bei meinen Mitschülern auf eine Hilflosigkeit, oder anders ausgedrückt, gehen sie Aufgaben, die sie im Kopf lösen sollen mit sehr brachialen Methoden an und überfordern sich selbst damit. Genau diese SchülerInnen sind es, die mich mit schrägen Blicken beäugen, wenn ich ihnen erzähle, dass ich mich in der Freizeit freiwillig mit Mathematik beschäftige. Jedoch befasse ich mich in der Freizeit nicht mit Schulmathematik, welche vielfach daraus besteht Zahlen aus Aufgaben herauszulesen und in Formeln, die allenfalls umgeformt werden müssen, einzusetzen. Solche Aufgaben, welche Beispielsweise von Mathematikolympiaden stammen, sind so aufgebaut, dass sie nicht mit Zahlen erschlagen werden können, sondern vielmehr durch kreative Lösungsansätze und dem Aufdecken von Systemen. Genau darum geht es in dieser Arbeit.

3.1 Idee des Projekts

Ich möchte einer Oberstufenklasse vermitteln, dass die Mathematik eben nicht nur daraus besteht, Zahlen aus Aufgaben herauszulesen und in Formeln einzusetzen, sondern vielmehr, dass Mathematik eine Materie ist, die sehr viel mit Kreativität zu tun hat. Dies ist auch ein Thema, dass Dambeck (2012) beschäftigt. Dambeck (2012, S. 83) erzählt von einer Studie, welche dem Phänomen der Kapitänsaufgabe genauer auf den Grund gegangen ist. Die Kapitänsaufgabe gibt es in vielen verschiedenen Varianten. Das in der von Dambeck erwähnten Studie verwendete Beispiel lautet wie folgt: „Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?“(Dambeck, 2012, S. 82) Um die Antwort zu erlangen, darf man – um Himmels Willen – nichts rechnen, sondern muss nur die Aufgabe genau lesen, um herauszufinden dass der Hirte 27 Jahre alt ist. Dennoch errechneten erstaunlich viele Kinder, die an dieser Studie teilnahmen, ein Alter für den Kapitän. Das verwunderliche dieser Studie war, je älter die Kinder waren, desto mehr von ihnen errechneten eine Lösung für die Aufgabe. Um die Ergebnisse der Studie zusammenzufassen: „Je mehr Mathematikunterricht die Schüler erlebt haben, umso schneller rechnen sie ohne nachzudenken einfach blind drauflos.“(Dambeck, 2012, s. 83). Die SchülerInnen werden also laut Dambeck in der Schule darauf getrimmt, Zahlen aus der Aufgabe herauszulesen, einer Variable zuzuordnen und eine Formel einzusetzen. Das führt auch dazu, dass die SchülerInnen eine Anzahl Jahre, eine Anzahl Schafe und eine Anzahl Ziegen zu einer Anzahl Jahren zusammenrechnen. Zugegeben, die Aufgabe ist hinterlistig gestellt. In erster Linie werden nicht die mathematischen Fähigkeiten der Probanden getestet. Im Wesentlichen ist diese Aufgabe ein Aufmerksamkeitstest, welcher von diesen SchülerInnen richtig gelöst wird, die fähig sind, alle unnötigen Informationen auszublenden. Über Sinn oder Unsinn anhand einer solchen Testaufgabe die Funktionsweise der Schulmathematik abzuleiten, lässt sich diskutieren. Dennoch finde ich diese Aufgabe ein schönes Beispiel dafür, was sich leider oftmals im Mathematikunterricht abspielt. Weiter finde ich diese Aufgabe ein schönes Beispiel um zu demonstrieren, worum es in der Mathematik wirklich geht. Die Mathematik ist die Kunst, eine möglichst einfache Lösung für ein komplexes Problem zu finden. Auf die Kapitänsaufgabe angewendet heisst das, die eine relevante von den unwichtigen Informationen zu trennen. Um eine mathematische Aufgabe zu lösen, muss man nicht immer primär mit Zahlen jonglieren, vielfach reicht es aus, eine Lösung zu suchen, wie man ein Problem auf eine einfache Art lösen kann. Diesen Grundgedanken wollte ich einer Oberstufenklasse vermitteln.

3.2 Themenwahl

Besonders geeignet dafür erschien mir das Thema Kopfrechnen. Denn gerade beim Kopfrechnen kann man extrem viel herausholen, indem man eine geschickte Lösung sucht. Laut Dambeck (2012, S. 10) gewinnen die SchülerInnen Freude an der Mathematik, wenn sie eigene Wege suchen und auch gehen können. Genau dafür eignet sich das Kopfrechnen besonders gut, da es eine Vielzahl an verschiedenen Wegen gibt, die ans Ziel führen. Ich wollte somit gleich zweierlei Dinge erreichen. Ich wollte einer Gruppe von Oberstufenschülern einige Techniken beibringen, die es ihnen erlauben Kopfrechenaufgaben auf verschiedene Weisen zu lösen und ihnen so einerseits auf der einen Seite Freude am Kopfrechnen vermitteln und ihnen andererseits auf einer Metaebene zeigen, worum es in der Mathematik wirklich geht und sie dafür begeistern. Um dies zu erreichen hatte ich eine Doppellektion zu Verfügung. Bei der Planung der Lektion waren mit vielerlei Dinge sehr wichtig. Einerseits wollte ich den SchülerInnen möglichst viele verschiedenen Werkzeuge auf den Weg geben, jedoch so, dass sie von allen SchülerInnen verstanden werden. Am wichtigsten war mir jedoch, dass alle SchülerInnen aus dem Projekt profitieren können.

Im Folgenden werden zwei Begriffe eingeführt, die im Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle spielen: Kopfrechnen und halbschriftliches Rechnen.

- Unter Kopfrechnen verstehen Krauthausen und Scherer (2014, S. 43): „Kopfrechnen, bei dem ohne einen Notation von Zwischenschritten die Lösung einer Aufgabe im Kopf erfolgt (dies geschieht unter Ausnutzung von Strategien) [...]“Dieser Definition kann ich 1:1 zustimmen und werde sie deshalb auch so übernehmen.

- Die Definition des halbschriftlichen Rechnens lautet wie folgt: „*Halbschriftliches (oder gestütztes Kopfrechnen)*, welches durch die Notation von Zwischenschritten oder Teilergebnissen gekennzeichnet ist.“(Krauthausen & Scherer, 2014, S. 43) Das halbschriftliche Rechnen dient in meinem Sinne dazu, sich Strategien für das Kopfrechnen anzueignen und sie auf einem begleiteten Weg auszuprobieren und zu verinnerlichen.

In der Arbeit wird des Öfteren von *mathematischen Tricks* die Rede sein. Diese *mathematischen Tricks* sind einfache Termumformungen, die kompliziert aussehende Rechnungen so umformen, dass sie einfacher im Kopf auszurechnen sind. Diese Tricks gründen auf den mathematischen Grundgesetzen und sind mathematisch korrekt.

Im folgenden Kapitel geht es darum, was ich vermitteln möchte: Es werden die mathematischen Grundlagen und wie die Tricks funktionieren, erklärt.

4 Mathematische Grundlagen

Unter einer Vielzahl mathematischer Rechenregeln gibt es drei grundlegende. Diese heissen: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz. Diese drei sind fundamental, da beinahe die ganze Mathematik auf ihnen aufbaut. Diese drei Gesetze gelten für alle Zahlen, die in der Menge der reellen Zahlen enthalten sind.

4.1 Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Hier wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Summanden das Resultat nicht beeinflusst. Bei der Addition und der Subtraktion darf die Reihenfolge, in der man die einzelnen Summanden zusammenzählt bzw. die Faktoren multipliziert, frei gewählt werden. Konkret erlaubt uns dieses Gesetz, die einzelnen Summanden oder Faktoren so zu gruppieren, dass es uns leichter fällt, sie zusammenzuzählen.

4.2 Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Es spielt also keine Rolle ob ich zuerst a und b zusammenzähle und dann c addiere oder zuerst b und c addiere und dann a dazuzähle, gleiches Prinzip gilt auch für die Multiplikation. Das Assoziativgesetz ist gültig für die Addition und die Multiplikation, jedoch nicht für die Subtraktion und Division.

4.3 Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Das Distributivgesetz besagt, dass bei der Multiplikation eines Faktors mit einer Summe (oder auch einer Differenz) die Multiplikation in zwei Teilschritte aufgeteilt werden darf, indem man die beiden Summanden (in der Allgemeinen Formel b und c) einzeln mit dem Faktor a multipliziert und aus diesen zwei Teilprodukten ($a \cdot c$, $b \cdot c$) die Summe bildet. Das Distributivgesetz, kann auch angewendet werden, wenn beide Faktoren als Summe bzw. Differenz vorliegen:

$$(a + b) \cdot (c + d) = \ ?$$

$$a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Da nun die mathematischen Grundlagen erläutert wurden, möchte ich mit deren Anwendungen weiterfahren und im kommenden Teil nacheinander drei der vier Grundrechenarten besprechen. Ich werde jeweils erklären, wie der Trick funktioniert, wenn nötig eine algebraische Begründung liefern und anschliessend ein Beispiel mit gezeigter Methode lösen.

4.4 Anwendungen bei der Addition

Bei einer Addition werden zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt. Formal wird eine Addition so dargestellt:

$$Summand_1 + Summand_2 + Summand_3 + \ldots + Summand_n = Summe$$

4.4.1 Gruppen bilden

Bei Additionen und Multiplikationen darf die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren frei gewählt werden. Dies ist vor allem bei Kettenrechnungen ein sehr mächtiges Werkzeug. Am besten ordnet man die einzelnen Glieder einer Kettenrechnung so an, dass man mit dem kleinstmöglichen Aufwand ans Ziel kommt. Diese Aussage geht auf das Kommutativgesetz (zu finden im Kapitel 4.1) zurück.

$$13 + 56 + 34 + 53 = \ ?$$

Versucht man Gruppen zu bilden, so wird auffallen, dass sich die Einerstellen der Zahlen 56 und 34 zusammen auf 10 ergänzen, (56 + 34) also eine Zehnerzahl (90) ergeben. Wendet man diesen Weg an, so kann man die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(56 + 34) + 13 + 53 = 90 + 13 + 53 = 103 + 53 = 156$$

Jedoch könnte man auch sehen, dass die Einerstellen der Zahlen 13, 34, 53 sich auch auf 10 ergänzen und die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(13 + 34 + 53) + 56 = 100 + 56 = 156$$

Sowohl der erste als auch der zweite Weg sind korrekt. Man könnte auch im Kopf von links nach rechts immer eine Zahl zur nächsten addieren, jedoch entsteht dabei eine Vielzahl an Zwischenschritten und Zwischenresultaten. Genau das wollen wir jedoch beim Kopfrechnen vermeiden. Mit diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aufgabe im Kopf zu rechnen. Es gibt dabei weder richtig noch falsch, vielmehr gibt es individuelle Rechenwege, die zum Resultat führen. Jeder SchülerIn soll also seinen eigenen Weg finden, der für ihn am logischsten erscheint.

4.4.2 Von rechts nach links

Da ich mich in meiner Arbeit mit dem Rechnen im Kopf befasse und meine Probanden die Oberstufe besuchen, setze ich die Kenntnis der schriftlichen Addition voraus und werde sie hier nicht weiter erläutern.

Eine Methode, bei der man exakt die gleichen Rechenschritte wie bei der schriftlichen Addition durchführt, jedoch ohne sich die Zahlen untereinander aufzuschreiben, nennt sich *von rechts nach links*. Man rechnet jeweils zuerst die Einer aller Summanden zusammen, beachtet die Überschläge und arbeitet sich zur Hunderterstelle vor. Dies ist eine sehr brachiale Standardmethode. Auch sie führt ans Ziel, doch muss man sich, und das ist der grosse Nachteil dieser Methode, extrem viele Zwischenresultate merken. Ich möchte niemanden der sich diese Methode zu eigen gemacht hat davon abhalten so zu rechnen.

$$438 + 237 = \ ?$$

Unter Anwendung der Methode *von rechts nach links* zählt man die Einer, Zehner und Hunderter separat zusammen:

$$\text{Hunderter: } 4 + 2, \ \text{Zehner: } 3 + 3, \ \text{Einer: } 8 + 7$$

$$\text{Hunderter: } 6, \ \text{Zehner: } 6, \ \text{Einer: } 15 = 675$$

4.4.3 Hinüberschieben

Die Summe verändert sich nicht, wenn beim einen Summanden eine Zahl addiert wird, vorausgesetzt man subtrahiert beim anderen Summanden dieselbe Zahl wieder. Dieser Trick ist sehr hilfreich um Zehnerübergänge zu vermeiden. Man vermeidet den Zehnerübergang, indem man die eine Zahl auf eine Zehnerzahl ergänzt bzw. reduziert. Dadurch führt man nicht einen Zehnerschritt im eigentlichen Sinne aus, sondern macht den Schritt zum vollen Zehner. Die Korrektheit dieses Tricks lässt sich wie folgt verallgemeinern

$$(a + x) + (b - x) = a + b + (x - x) = a + b$$

Ein ganz banales Beispiel hierfür ist die Addition von 99. Was ergibt

$$23 + 99 = \ ?$$

In diesem Beispiel lohnt es sich einen Einer von 23 zu 99 hinüberzuschieben, also die Rechnung wie folgt umzuformen, was uns schlussendlich zu einer Rechnung bringt, die einfach im Kopf zu rechnen ist.

$$23 + 99 = (23 - 1) + (99 + 1) = 22 + 100 = 122$$

4.5 Anwendungen bei der Subtraktion

Bei einer Subtraktion werden eine oder mehrere Zahlen von einer Zahl abgezogen. Der allgemeine Fall wird so dargestellt.

$$Minuend - Subtrahend_1 - Subtrahend_2 - \ldots - Subtrahend_n = Differenz$$

Wie bereits bei der Addition wird auch die Kenntnis der schriftlichen Subtraktion vorausgesetzt und nicht weiter erläutert.

4.5.1 Ergänzen auf 1000

Der folgende Trick zeigt, wie man einfach Zahlen von 1000 subtrahieren kann. Dieser Trick kann auch auf alle anderen Zehnerpotenzen (10, 100, 1'000, 10'000, ...) angewendet werden. Ich beschränke mich in diesem Teil auf die Subtraktion von 1000, da diese im Kopfrechnen am häufigsten gebraucht wird. Am Beispiel der Rechnung (1000 − 738) möchte ich erklären, wie man die Subtraktion von 1000 und vereinfachen kann. In Abbildung 1 ist zu sehen, dass in allen Spalten ausser der Einerstelle ein Übertrag von 1 entstanden. Dies ist keine Überraschung, denn zieht man von Null eine Zahl die ungleich 0 ist ab, so muss man sich einen Zehner von der nächst grösseren Stelle borgen. Dies ist bei der Subtraktion von 1000 immer der Fall. Muss man eine Zahl von einer Potenz von zehn abziehen, so kann man alle Stellen auf 9 ergänzen und die Einerstelle auf 10. Die Regel für die Subtraktion von 1000 lautet wie folgt: **Subtraktion von 1000: Alle von 9 abziehen, die letzte von 10.** Mit diesem Trick können Zahlen ohne grosse Rechnerei auf den nächsten Tausender oder auch Hunderter ergänzt werden. Dieser Trick dient dazu, die Subtraktion zu vereinfachen, wenn der Minuend eine ganze Hunderter- oder Tausenderzahl ist.

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	0	0	0
-		7	3	8
Überträge	1	1	1	
		2	6	2

Abbildung 1: Die Subtraktion von 738 von 1000

$$1000 - 738 = \ ?$$

Um das Resultat zu erlangen ergänzen wir also 7 auf 9 (ergibt 2), 3 auf 9 (ergibt 6) und 8 auf 10 (ergibt 2) . Zum Schluss schreiben wir die Zahlen in dieser Reihenfolge nieder:

$$1000 - 738 = 262$$

4.5.2 Der unsichtbare Helfer

Die Differenz gibt an, wie gross der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist. Denkt man an zwei Hochhäuser, wobei das eine um 10 Meter höher ist als das andere, so stellt sich die Frage, von wo aus diese Differenz korrekterweise gemessen werden muss. Man könnte von Dach des einen Hochhauses messen, wie auch von der Oberfläche, auf der die beiden Häuser stehen. Die Distanz bleibt die gleiche, selbst wenn aus dem Weltraum gemessen würde. Aus dieser Überlegung wird der folgende Trick abgeleitet: die Differenz verändert sich nicht, wenn sowohl beim Minuenden als auch beim Subtrahenden die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird. Die algebraische Begründung sieht so aus:

$$(a - x) - (b - x) = a - x - b + x = a - b - x + x = a - b$$

$$(a + x) - (b + x) = a + x - b - x = a - b + x - x = a - b$$

Weil das Minus die Vorzeichen in der Klammer wechselt, entstehen im Zusammenhang mit x zwei gegenteilige Vorzeichen, die sich gegenseitig aufheben.

Es ist sinnvoll, entweder den Minuenden oder den Subtrahenden auf eine runde Zahl zu ergänzen, denn so lässt es sich besonders einfach weiterrechnen. Wie die Methode der unsichtbare Helfer funktioniert möchte ich am folgenden Beispiel verdeutlichen:

$$285 - 93 = \ ?$$

Wir ergänzen den Subtrahenden auf die nächste runde Zahl, in diesem Fall 100. Damit sich die Differenz nicht verändert, müssen wir jedoch auch den Minuenden auf die gleiche Weise verändern, folglich zählen wir sowohl zum Minuenden als auch zum Subtrahenden 7 dazu. Daraus entsteht die folgende Rechnung:

$$285 - 93 = (285 + 7) - (93 + 7) = 292 - 100 = 192$$

Natürlich gibt es auch hier eine zweite Möglichkeit die Rechnung zu vereinfachen, indem man 285 auf eine Zahl ergänzt, mit der es sich einfach rechnen lässt (beispielsweise 300) und bei 93 gleichviel dazuzählt:

$$285 - 93 = (285 + 15) - (93 + 15) = 300 - 108 = 192$$

Da der Rechenaufwand geringer ist, bevorzuge ich den ersten Weg, einen ganzen Hunderter abzuziehen anstatt von einem ganzen Hunderter abzuziehen.

4.5.3 Kettenrechnungen

Zieht man nacheinander mehrere Zahlen von einer Zahl ab, kann die Summe aller Subtrahenden vom Minuenden abgezogen werden. Dies lässt sich ganz einfach mit dem Trick bewirken, dass man alle Subtrahenden in eine Klammer und ein Minus davor setzt, denn das Minus wechselt alle Vorzeichen in der Klammer.

$$a - b - c - d = a - (b + c + d)$$

So entstehen zwei Teilrechnungen: Zum einen die Addition der Summanden b, c und d zum andern die Subtraktion dieser Summe vom Minuenden a. Bei der Addition von b, c und d handelt es sich um eine Kettenrechnung, welche man mit Hilfe des Tricks *Gruppen bilden* (Kapitel 4.4.1) lösen kann. Die anschliessende Subtraktion kann mit Hilfe der zuvor erklärten Tricks für die Subtraktion im Kopf gelöst werden.

$$1000 - 232 - 137 - 288 = \ ?$$

Zuerst fassen wir alle Minuenden als Summe in einer Klammer zusammen und stellen die Summanden in der Klammer so um, damit sie sich einfach zusammenzählen lassen:

$$1000 - (232 + 173 + 288) = 1000 - (232 + 288 + 173) = \ ?$$

Anschliessend rechnen wir die Klammer aus und subtrahieren die ergebene Summe vom Minuenden:

$$1000 - (520 + 173) = 1000 - 693 = 307$$

4.6 Anwendungen bei der Multiplikation

Die Multiplikation wird allgemein wie folgt dargestellt und kann aus beliebig vielen Faktoren zusammengesetzt sein.

$$Faktor_1 \cdot Faktor_2 \cdot Faktor_3 \cdot \ldots \cdot Faktor_n = Produkt$$

4.6.1 Summen bilden

Wandelt man einen Faktor in eine Summe um, so entstehen zwei Teilrechnungen. Es macht vor allem dann Sinn, diesen Trick anzuwenden, wenn man das eine Teilresultat bereits kennt. Beispiele solcher Teilresultate können Zehnerzahlen, Quadratzahlen aber auch das kleine Einmaleins sein. Vor allem bei der Multiplikation mit Zahlen die nahe an einem Zehner liegen ist dies ein Mittel um sehr schnell an das Resultat zu gelangen. Dieser Trick ist eine Anwendung des Distributivgesetzes (siehe Kapitel 4.3). Vielfach wird das Distributivgesetz unbewusst angewandt. Rechnungen wie $(15 \cdot 7)$ werden vielfach intuitiv als $(10 \cdot 7 + 5 \cdot 7 = 70 + 35 = 105)$ gelöst, was genau der Anwendung dieses Tricks entspricht. Jedoch möchte ich die Mächtigkeit dieses Trickes am folgenden Beispiel demonstrieren:

$$13 \cdot 12 = \ ?$$

Wir wissen, dass 12 im Quadrat 144 ergibt, deshalb formen wir 13 zu (12+1) um.

$$(12 + 1) \cdot 12 = 12^2 + 12 = 144 + 12 = 156$$

ohne grossen Rechenaufwand sind wir zum Resultat gelangt.

4.6.2 Doppelte Summe

Die Methode *doppelte Summe* ist im Grunde genommen nichts anderes als die Weiterführung der Methode *Summen bilden*. Statt einen Faktor in eine Summe umzuwandeln wie im Kapitel zuvor, bildet man in diesem Fall aus beiden Faktoren je eine Summe. Allgemein sieht eine Multiplikation zweier Summen so aus:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Diese Formel mag unschön erscheinen, kann und wird jedoch unter Einführung einer Nebenbedingung vereinfacht werden. Die Nebenbedingung lautet: In beiden Summen soll der gleiche Summand vorkommen. Wir gehen davon aus, dass die Summen so gewählt wurden, dass die Variablen a und c den gleichen Wert haben und deshalb beide mit der Variable a dargestellt werden können:

$$(a + b) \cdot (a + d) = a^2 + ab + ad + bd$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes (Kap. 4.3) kann der Term wie folgt vereinfacht werden:

$$a^2 + ab + ad + bd = a^2 + a \cdot (b + d) + bd$$

Somit wurde die Multiplikation von zwei Faktoren umgewandelt in die Addition von einer Quadratzahl und zwei Produkten. Damit diese Endformel auch wirklich für jedermann im Kopf lösbar ist, sollten die Zahlen geschickt gewählt werden. Besonders einfach wird die Rechnung, wenn die Variable a so gewählt wird, dass sie eine ganze Zehnerzahl ist. Dass man dank diesem Kniff eine schwierige Multiplikation, im Kopf lösen kann, möchte ich mit folgendem Beispiel untermauern.

$$23 \cdot 16 = \ ?$$

Als erstes wandeln wir beide Faktoren in eine Summe um und achten darauf, dass in beiden Summen der gleiche Summand vorkommt. Hat man zwei Zahlen in der Nähe des gleichen Zehners, in unserem Beispiel 20, so macht es Sinn die Summen mit diesem Zehner zu bilden. Streng genommen ist die Umwandlung von 16 zu $(20 - 4)$ keine Addition sondern eine Subtraktion, auch das ist erlaubt.

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) = \ ?$$

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) = 20^2 + (3 - 4) \cdot 20 - 3 \cdot 4 = \ ?$$

Aus vier Zwischenresultaten wurden drei und von diesen dreien ist eines (20^2) eine Quadratzahl, sollte also den SchülerInnen bekannt sein. Also bleiben noch zwei Rechenschritte übrig: $20 \cdot (3 - 4) = 20 \cdot (-1) = -20$ Hier ist es wichtig, dass zuerst die Klammer ausgerechnet und erst anschliessend die Multiplikation durchgeführt wird. Damit wird der Aufwand möglichst gering gehalten. Zum Schluss muss einzig noch die Rechnung $3 \cdot (-4) = -12$ wirklich ausgerechnet werden. Im normalen Fall sollte dies jedoch mit dem kleinen Einmaleins möglich sein. Also haben wir zum Schluss die folgende Rechnung:

$$23 \cdot 16 = 400 - 20 - 12 = 400 - 32 = 368$$

Ein Spezialfall

Die dritte binomische Formel sieht wie folgt aus:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Liegen die Zahlen günstig, so kann man die dritte binomische Formel anwenden. Die dritte binomische Formel kann dann angewendet werden wenn zwei unterschiedliche Zahlen die gleiche Differenz zu einer dritten Zahl haben. Einige Beispiele um diesen Spezialfall zu verdeutlichen:

$$22 \cdot 18 = (20 + 2) \cdot (20 - 2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$$

$$14 \cdot 16 = (15 - 1) \cdot (15 + 1) = 15^2 - 1^2 = 225 - 1 = 224$$

4.6.3 Faktoren Aufteilen

Eine Multiplikation kann in mehrere Schritte aufgeteilt werden. Beispielsweise darf eine Multiplikation mit 4 als eine Multiplikation mit 2 und nochmals mit 2 angesehen werden. Oder eine Multiplikation mit 5 darf als eine Multiplikation mit 10 und eine anschliessende Division mit 2 (äquivalent zu der Multiplikation mit $\frac{10}{2}$) Grund dafür ist das Assoziativgesetz (Kapitel 4.2). Nähere Erläuterungen möchte ich am folgenden Beispiel durchführen.

$$4 \cdot 27$$

Betrachtet man die formale Schreibweise des multiplikativen Assoziativgesetzes (Formel 4.2 auf Seite 5) so kann man die Rechnung auf die folgenden

Arten anschauen: Man interpretiert die Rechnung so, dass der Faktor 4 in der Form $(a \cdot b)$ vorliegt, die Rechnung sähe also so aus:

$$(4) \cdot 27 = \; ?$$

Wie das Assoziativgesetz besagt, können in der Klammer mehrere Faktoren stehen. Damit sich das Ergebnis der Rechnung nicht verändert muss jedoch das Produkt in der Klammer 4 ergeben. Es bieten sich die folgenden Rechnungen an: $(1 \cdot 4)$ oder $(2 \cdot 2)$ (natürlich gäbe es noch viel mehr Multiplikationen mit dem Ergebnis 4. Diese Rechnungen würden jedoch negative Zahlen und oder Brüche beinhalten und sowohl negative Zahlen als auch Brüche sind schwieriger zu handhaben als positive, ganze Zahlen.) Weil mit der Umformung $(4 = 1 \cdot 4)$ keine wirkliche Veränderung stattfindet, fahren wir mit der zweiten Möglichkeit $(4 = 2 \cdot 2)$ fort. Also schreiben wir die Rechnung so:

$$(2 \cdot 2) \cdot 27 = \; ?$$

Da die Multiplikation auch kommutativ ist, dürfen die Faktoren in eine beliebige Reihenfolge gebracht werden. Da die Multiplikation mit 2 einfacher ist als die Multiplikation mit 27 nehmen wir die 27 an den Anfang und multiplizieren diese zweimal mit der Zwei.

$$(27 \cdot 2) \cdot 2 = (54) \cdot 2 = 108$$

Es ist jedoch auch erlaubt, die 27 in Faktoren zu zerlegen. Hier gibt es wiederum zwei Möglichkeiten: $(1 \cdot 27)$ und $(3 \cdot 9)$. Wie im vorherigen Beispiel wird mit der Umformung von 27 zu $(27 \cdot 1)$ keine Vereinfachung herbeigeführt. Deshalb fahren wir weiter mit der Umformung von 27 zu $(3 \cdot 9)$ fort und erhalten die folgende Rechnung:

$$4 \cdot (27) = 4 \cdot (3 \cdot 9) = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 12 \cdot 9 = 108$$

So wurde aus der Rechnung $4 \cdot 27$ eine völlig andere Rechnung $9 \cdot 12$. Die letzte Teilrechnung $(9 \cdot 12)$, lässt sich beispielsweise mit dem Trick *summen bilden* einfach lösen.

5 Didaktische Grundlagen

Mir war von Anfang an bewusst, dass ich eine grosse Fülle von Stoff in einer Doppellektion vermitteln wollte. Das zuvor erarbeitete Repertoire an Tricks ist bereits eine gekürzte Fassung einer Auswahl von Tricks. Ich war mir bewusst, dass es zeitlich sehr knapp werden könnte. Dennoch trennte ich mich von keinem weiteren Trick. Mein Ziel war, die SchülerInnen nich zu nötigen, nach einem vorgegebenen Schema zu rechnen, sondern dass sie selbst einen Weg suchen können und das ist nur möglich, wenn sie eine breite Sammlung an zu Verfügung stehenden Möglichkeiten haben. Ich wollte den SchülerInnen verschiedene Werkzeuge beibringen. Je nach Situation ist ein schweizer Taschenmesser ein sehr wertvolles Utensil, man kann damit notfalls auch einen Baum fällen. Ein Baum lässt sich jedoch viel leichter mit einer Säge fällen. Mein Ziel war den SchülerInnen einige besonders grundlegende und effiziente Werkzeuge für die drei wichtigsten Grundrechenarten mitzugeben: Ihren Werkzeugkasten mit Hammer, Schraubenzieher, Säge und einigen Zangen auszurüsten, damit sie im Alltag auftretende mathematische Probleme lösen können.

Im folgenden Kapitel wird beschrieben, wie ich die Lektion aufgebaut habe.

5.1 Arbeitsformen

Damit die SchülerInnen kreativ werden können, brauchen sie eine Fülle an Tricks. Deshalb legte ich den Fokus nicht auf das gemeinsame Erarbeiten des Inhalts, dafür fehlte schlicht und einfach die Zeit. Das Verstehen und die Fähigkeit, die erlangten die Tricks anzuwenden und bestenfalls weiter zu entwickeln standen im Mittelpunkt.

5.1.1 Vormachen - Nachmachen - Üben

Das Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben* wurde von Landwehr (1997, s. 151f) vorgestellt. Diese Technik dient der Vermittlung von Fertigkeiten und Handlungstechniken. Der Name ist Programm: Das System baut, wie es der Name sagt, darauf auf, dass die Lehrperson eine Technik vorzeigt, die SchülerInnen diese imitieren und sie anschliessend selbst anwenden, indem sie Übungen mit gezeigter Methode lösen. Bemängelt werden, der fehlende Erkenntnisgewinn und der mangelnde Platz für eigene Lösungsvorschläge. Diesen Kritikpunkten kann ich entgegenhalten, dass die Technik lediglich der Vermittlung von Lösungsstrategien fungiert und diese Lösungsstrategien für die SchülerInnen Mittel zum Zweck sind, kreative Lösungswege zu entwickeln. Die Technik *Vormachen - Nachmachen - Üben* diente also dazu, den SchülerInnen die notwendigen Werkzeuge mitzugeben, damit sie eigene Lösungswege für die verschiedenen Rechnungen entwickeln konnten. Ich entschied mich für diese Technik, weil die gemeinsame Erarbeitung der einzelnen Strategien nicht das übergeordnete Ziel war und die Zeit dafür schlicht nicht reichte.

5.1.2 Lehrervortrag

Ich habe mich für den Lehrervortrag entschieden, da ich den SchülerInnen viele Inputs in kurzer Zeit mitgeben wollte. Deshalb hatte ich die Zeit nicht, die SchülerInnen verschiedenste Techniken selbständig erarbeiten zu lassen. Natürlich achtete ich während der Lektion darauf, dass ich immer wieder

Schülerinputs einbrachte. Beispielsweise indem ich die Klasse fragte, wie sie solche Rechnungen lösen würden.

5.2 Lektionsaufbau

Ein von Meyer (2015) vorgestelltes Modell für den Unterrichtsaufbau nennt sich *AITUS* und gliedert sich in 5 Phasen: *Anfangen, Interesse wecken, Theorie erarbeiten, Umsetzen, Schluss*. Diesen Aufbau erachtete ich als geeignet und kompatibel mit dem zuvor vorgestellten Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben*. Ich wollte die Doppelstunde so aufbauen, dass ich für jeden Trick einzeln die Schritte Theorie erarbeiten und Umsetzen durchführen wollte. Somit ergaben sich 9 kleine Theorieblöcke mit anschliessender Übungsphase. Durch das Aufteilen in kleine Portionen wollte ich verhindern, dass die SchülerInnen zu lange passiv zuhören müssen. Dadurch sollte sich ein guter Mix aus abwechselnd kleinen Theoriehäppchen, gefolgt von einer kurzen Übungsphase ergeben.

Unter dem von Meyer (2015) vorgestellten Punkt *Anfangen* gehört das gegenseitige Kennenlernen. Dies setzte ich um, indem ich zu Beginn eine Vorstellungsrunde machte. Ich wollte jedoch über das simple nennen des Vornamens hinausgehen, da ich auch etwas mehr über die SchülerInnen erfahren wollte. Aus diesem Grund sollte sich jeder kurz vorstellen, indem er neben seinem Namen auch noch erwähnt, was ihn mit der Mathematik verbindet und wo ihm Mathematik im Alltag begegnet. Diese zwei Zusatzbedingungen hatten den positiven Nebeneffekt, dass die SchülerInnen bereits ein erstes Mal damit befassten, inwiefern Mathematik und Kopfrechnen im Alltag präsent ist. Da es für die SchülerInnen eine spezielle Situation war und ich als SchülerInnen in solchen Situationen meist sehr schüchtern war, machte ich den Anfang.
Nach (Meyer, 2015) sollte man weiterfahren, indem man das Interesse weckt, durch das Aktivieren von Vorwissen, um Lust auf den Stoff zu versprühen. Dem wollte ich gerecht werden, indem ich ihnen erklärte, worum es in meinem Projekt geht und ihnen die Ziele bekanntgab. Um sie dort abzuholen wo sie standen, machte ich zu Beginn eine Repetition der Grundgesetzte und gab bereits einige Inputs gab, die auf das Bevorstehende abzielten. Um die nächsten zwei Aspekte: *Theorie erarbeiten und Umsetzen* in die Praxis zu übertragen, bereitete ich die kurzen Theorieblöcke und dazu passende Aufgaben vor. Die Aufgaben waren jeweils so gestaltet, dass sie sich gut mit der soeben vorgestellten Technik lösen liessen. Auf dem Aufgabenblatt waren jeweils 6 Aufgaben darauf, der Schwierigkeitslevel steigerte sich von Aufgabe zu Aufgabe.

Zum Schluss der Lektion, auch wenn es nicht explizit von Meyer empfohlen wurde, machte ich einen Ausblick und erzählte den SchülerInnen, wie das

Projekt nun weiterläuft.

5.3 Theorie erarbeiten

Mir war es sehr wichtig, dass die SchülerInnen auch wirklich verstanden, was ich ihnen vermittle. Um dies zu erreichen wollte ich den Unterricht weg von der einen Dimension Wandtafel lösen und in die Dimension *selbst Hand anlegen und erfahren, was man tut* übertragen. Dies will ich erreichen indem ich die Mahtematik, die nur im Imaginären stattfindet so in Modelle zu übersetzen versuchte, dass die SchülerInnen sie selbst erfahren konnten in einer Weise, in der sie diese auch verstanden. Ein weiteres Problem meiner Arbeit ist, dass wenn die SchülerInnen alles im Kopf rechneten, ich ihren Lösungsweg nicht nachvollziehen konnte. Da jedoch genau das einer der zentralen Punkte für die Auswertung war, musste ich eine Lösung finden. An dieser Stelle kommt das halbschriftliche Rechnen (definiert auf Seite 4) ins Spiel. Einerseits bot das halbschriftliche Rechnen den SchülerInnen die Möglichkeit, sich langsam an das Kopfrechnen heranzutasten, andererseits wurde dadurch ihr Lösungsweg für mich nachvollziehbar. Dass die SchülerInnen zu Beginn halbschriftlich rechneten, erachtete ich auch als einen Vorteil für sie. Dadurch konnten sie sich anfangs nur auf den Rechenweg selbst konzentrieren, ohne sich die Zwischenresultate merken zu müssen. Die Benützung des halbschriftlichen Rechnens war also eine Win-win-Situation.
Im Folgenden werde ich nun erklären, wie ich die einzelnen Tricks vermitteln wollte:

5.3.1 Gruppen Bilden

Ich schrieb die Zahlen, wie sie in der Beispielaufgabe im Kapitel 4.4.1 verwendet wurden, auf Papier und heftete sie mit Magneten an die Wandtafel und schrieb jeweils ein Additionszeichen dazwischen. Dann liess ich den SchülerInnen kurz Zeit, sich zu überlegen, wie sie das Resultat ausrechnen würden. Danach erwähnte ich nochmals kurz, was genau das Kommutativgesetz besagt und zeigte ihnen, dass man bei der Addition die Summanden vertauschen darf, im Optimalfall so, dass einem die Rechnung leichter fällt. Um dies zu Verbildlichen, verschob ich die Zahlen an der Wandtafel und vertauschte so deren Reihenfolge, bis die Rechnung einfach zu lösen war. (Wie man diese Aufgabe genau lösen kann, steht im Kapitel 4.4.1 auf Seite 6)

5.3.2 Von rechts nach links

Um das zu erklären, bedurfte es keiner weiteren Hilfsmittel. Ich löste eine Aufgabe schriftlich vor und sagte, dass sie diese Schritte (zuerst Einer zusammenzählen, dann Zehner, dann Hunderter, ...) auch auf die gleiche

Weise im Kopf durchführen können (Wie das funktioniert, findet sich auf Seite 7). Ich bereitete für jeden SchülerIn eine Streichholzschachtel vor, die je 20 schwarze, weisse und rote Streichhölzer enthielt. Die verschiedenfarbigen Streichhölzer stehen jeweils für Hunderter, Zehner und Einer. Damit konnten die SchülerInnen die Zahlen auf ihren Schreibtischen auslegen und anfassen. Man könnte hier diese Streichhölzer einbinden indem die SchülerInnen die zu addierenden Zahlen mit Streichhölzern darstellen und danach ein Wirbelsturm über den Tisch fegt und alles durcheinanderbringt. Die Summe der beiden Zahlen kann auch jetzt noch bestimmt werden - jedoch nicht die einzelnen Summanden - indem man zählt wie viele Einer, Zehner und Hunderter im Durcheinander liegen. Diesen Schritt können wir auch ohne die Streichhölzer und den Wirbelsturm durchführen indem wir direkt Einer, Zehner und Hunderter der Zahlen im Kopf zusammenzählen.

5.3.3 Hinüberschieben

Wie dieser Trick funktioniert, wurde bereits im Kapitel 4.4.3 erklärt, wie ich ihn vermitteln will, folgt hier. Ich stellte den SchülerInnen eine Rechnung, welche sie mit den Streichhölzern auslegen sollten. Dies hatte den Sinn, dass sie visuell und motorisch erfahren konnten, dass sie von der einen Zahl etwas wegnehmen und bei der anderen Zahl hinzufügen. Nach zwei Beispielen nur mit den Streichhölzern legten wir die Streichhölzer beiseite und schrieben nieder. Da das Vorgehen bei diesem Trick sehr ähnlich ist wie das des Trickes *der unsichtbare Helfer* habe ich für die SchülerInnen die folgende Eselsbrücke vorbereitet:

> Das Pluszeichen (+) besteht aus zwei Strichen, folglich müssen wir zwei verschiedene Operationen (Addition **und** Subtraktion) verwenden

5.3.4 Ergänzen auf 1000

Da dieser Trick so simpel wie genial ist, brauchte es keine grossen Mittel, um ihn zu erklären. Ich rechnete ihnen schriftlich vor und zeigte ihnen, dass bei allen Stellen ausser der Einerstelle das Resultat und der Subtrahenden zusammen 9 ergeben, bei der Einerstelle 10. Ich erklärte ihnen weshalb dass immer so ist wenn man von $1'000$ subtrahiert. Um diesen Trick weiterzuführen, erklärte ich den SchülerInnen, dass man nach selbem Prinzip auch Zahlen auf den nächsten Hunderter ergänzen kann.

5.3.5 Der unsichtbare Helfer

Ich erzählte den SchülerInnen vom selben Experiment, welches auch schon zuvor im Theorieteil (4.5.2) beschrieben wurde und unterlegte dies mit einer Abbildung (Abb. 2). Das Resultat ist das selbe, unabhängig vom Messort.

Also dürfen wir selbst bestimmen von wo aus wir die Differenz bestimmen wollen. Dies können wir bewerkstelligen, indem wir einen Betrag zum Minu-

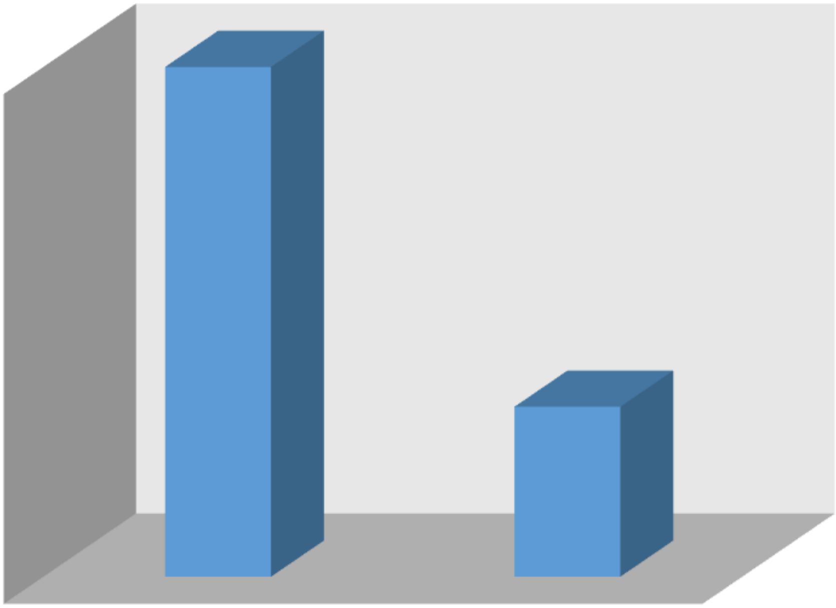


Abbildung 2: Modell zur Verbildlichung des Tricks *der unsichtbare Helfer*

enden und zum Subtrahenden hinzuzählen oder vom Minuenden und Subtrahenden abziehen. Wie bereits erwähnt ist dieser Trick leicht verwechselbar mit dem Trick *Hinüberschieben* deshalb hatte ich auch hier eine Eselsbrücke vorbereitet.

> Das Subtraktionszeichen (−) besteht aus einem Strich, deshalb müssen wir **nur eine Operation** anwenden. Entweder zählen wir bei beiden Zahlen den gleichen Betrag hinzu oder ziehen bei beiden Operatoren den gleichen Betrag ab.

5.3.6 Kettenrechnungen Subtraktion

Wie schon bei der Kettenrechnung der Addition, heftete ich auch um die Subtraktion mit mehreren Subtrahenden zu Verbildlichen, Zahlen auf Papier an die Wandtafel (dieselben Zahlen, wie im Beispiel im Kapitel 4.5.3), diesmal schrieb ich jedoch Subtraktionszeichen (−) dazwischen. Nun öffnete ich nach dem Minuenden eine Klammer und schloss sie nach dem letzten Subtrahenden wieder und fragte, was ich tun muss, damit sich das Resultat nicht verändert – alle Subtraktionszeichen in der Klammer müssen zu Additionszeichen abgeändert werden. Die neu entstandene Aufgabe stellte sich aus einer Kettenrechnung der Addition und einer Subtraktion zusammen, für beide dieser Teilrechnungen hatten die SchülerInnen zuvor Tricks kennengelernt und konnten diese bereits ein erstes Mal anwenden und verknüpfen.

5.3.7 Summen bilden

Um diesen Trick den SchülerInnen näherzubringen, rief ich nochmals das Distributivgesetz in Erinnerung und zeigte an einem praktischen Beispiel (ein geeignetes Beispiel findet sich im Kapitel 4.6.1) vor, wie man sich das zunutze machen kann.

5.3.8 Doppelte Summe

Hier wollte ich einsteigen, indem ich den SchülerInnen den Trick algebraisch vorstellte. Damit keine zu grossen Verwirrungen entstanden, führte ich die Bedingung, dass derselbe Summand in beiden Klammern vorkommen soll, zuerst ein und liess sie die Formel danach algebraisch ausrechnen. Ich stellte ihnen also die Aufgabe:

$$(a+b)(a+d) = \ ?$$

$$(a+b)(a+d) = a^2 + a \cdot (b+d) + bd$$

Was uns zur gleichen Endformel führt, wie sie im Kapitel 4.6.2 vorgestellt wurde. Danach zeigte ich ihnen an dieser Formel, dass schwierig aussehende Rechnungen einfach lösbar werden, weil man grosse Teile des Resultats bereits kennt und der Rest meist einfach auszurechnen ist.

5.3.9 Faktoren aufteilen

Hier rief ich das Assoziativgesetz in Erinnerung und erklärte ihnen die Bedeutung dessen. Dadurch, dass man die Faktoren aufteilen und so zusammensetzen kann, wie man gerne möchte, ergeben sich viele neue Konstellationen, um die ursprüngliche Rechnung umzuformen und zu vereinfachen.

5.3.10 Die Übungsphase

Nach dieser Doppelstunde Theorie folgte eine Übungsphase. Die Übungsphase zog sich über eine Periode von drei Wochen. Aufbauen wollte ich die Übungsphase wie folgt:

- Übungsblätter 1 - 4: halbschriftlich, mit Theorieblatt
- Übungsblätter 5 - 6: halbschriftlich, ohne Theorieblatt
- Übungsblatt 7 - 8: Kopfrechnen, ohne Theorieblatt

Durch diesen Aufbau wollte ich den SchülerInnen genügend Zeit geben. Die ersten vier Übungsblätter, um sich an das Thema zu gewöhnen und verschiedene Techniken auszuprobieren. Die Übungsblätter fünf und sechs sollten dazu dienen, die eigenen Techniken zu verinnerlichen und vom Theorieblatt abgelöst zu rechnen. Die Übungen sieben und acht als Abschluss und auch Höhepunkt, die SchülerInnen sollten hier dazu fähig sein, die Aufgaben im Kopf zu lösen.

6 Durchführung

Ich durfte die Doppellektion am 15.6.2016 gleich zweimal, mit zwei verschiedenen Klassen durchführen. Es handelte sich um zwei Mathematikkurse des Niveaus A, der zweiten Sek in Einsiedeln. In den nächsten Kapiteln findet sich ein mit meinen Erfahrungen angereichertes Protokoll. Ich werde hier jedoch beide Doppelstunden gemeinsam protokollieren und auch nur von einer Doppellektion sprechen, da sie praktisch identisch verlaufen sind. Zum Ende der zweiten Doppelstunde, musste der Klassenlehrer die Klasse vorzeitig verlassen und ich durfte die Stunde alleine zu Ende führen und die SchülerInnen verabschieden.

6.1 Verlauf der Doppellektion

Folgendes Equipment stand mir zu Verfügung: Eine herkömmliche Wandtafel, wobei eine Seite als Beamer agierte. Ebenfalls vorhanden war ein Presenter, die neue Version, des überholten Hellraumprojektors, der es mir ermöglichte ein Blatt direkt auf den Beamer zu projizieren und gemeinsam es mit den SchülerInnen auszufüllen.

Zu Beginn der Doppelstunde begrüsste der Klassenlehrer die Klasse und erklärte ihr, dass ich die heutige Doppelstunde übernehmen würde. Danach übergab er mir das Wort. Ich stieg ein, indem ich die Eröffnungsrunde einleitete, ich stellte mich kurz vor und übergab das Wort danach den SchülerInnen. Die Vorstellungsrunde stockte etwas, da viele SchülerInnen nicht wussten, was sie sagen sollten. Nach 10 Minuten leitete ich über und erzählte den SchülerInnen von meiner Maturaarbeit und deklarierte die gemeinsamen Ziele und wie wir diese erreichen. Das Ganze wurde gestützt durch eine an die Wandtafel gebeamte Präsentation. Danach hielt ich mein kurzes Referat, welches die SchülerInnen mit meiner Ansicht von Mathematik und dem Kopfrechnen vertraut machte und mit einer Repetition der Grundgesetze abgerundet wurde. Anschliessend teilte ich ihnen ein Theoriedossier und ein Aufgabendossier für die Doppelstunde aus. Bis hierhin waren etwa 20 Minuten vergangen.

Anschliessend startete der Teil, in welchem die SchülerInnen gefordert wurden. Ich stieg ein mit dem Trick *Gruppen bilden*, verbildlichte ihnen der Ablauf dieser Methode an der Wandtafel. Ich zeigte ihnen, wie man Kettenrechnungen möglichst einfach lösen kann. Danach teilte ich ihnen das Theorie und das Aufgabendossier aus und füllte ersteres mit ihnen aus. Anschliessend lösten die SchülerInnen einige Aufgaben gelernter Technik. Danach korrigierten wir gemeinsam die Aufgaben. Dieser Teil dauerte etwas länger als geplant, etwa 15 Minuten.

Der nächste Trick *von links nach rechts* war ein Selbstläufer, alle SchülerInnen wussten sofort, worum es geht und wie man diese Technik anwendet. Da die Idee sehr schnell fruchtete, entschied ich mich dazu, die Streichhölzer vorerst nicht zu verwenden. Nach dem gemeinsamen Ausfüllen des Theorieblattes lösten die SchülerInnen einige Aufgaben mit dieser Technik, wiederum mit gemeinsamer Korrektur. Dieser Block dauerte rund 10 Minuten.

Der Trick *hinüberschieben* erklärte ich den SchülerInnen mit Hilfe der Streichhölzer, dafür teilte ich jedem SchülerIn eine Streichholzschachtel mit Streichhölzern aus. Die Streichhölzer waren in drei verschiedenen Farben eingefärbt (symbolisch für Einer, Zehner und Hunderter). Wir lösten zwei Beispiele mit den Streichhölzern, füllten das Theorieblatt aus und die SchülerInnen lösten wiederum die Aufgaben auf dem Aufgabenblatt. Wir besprachen gemeinsam die Lösungswege und korrigierten die Resultate. Nun war insgesamt eine Stunde vergangen. Während der ganzen Zeit tauchten keine Fragen auf.

Wir legten eine zweiminütige Pause ein und wechselten danach zur Subtraktion. Ich erklärte ihnen am Presenter, wie man Zahlen von 1000 subtrahiert und die SchülerInnen lösten Aufgaben dazu, danach gab ich die Kurzlösungen bekannt. Für diesen Block brauchten wir rund 5 Minuten

In den nächsten 5 Minuten erklärte ich den SchülerInnen anhand einer auf dem Beamer projizierte Skizze, wie der Trick *der unsichtbare Helfer* funktioniert . Danach füllten wir das Theorieblatt aus und lösten Aufgaben dazu und ich gab die Kurzlösungen bekannt. Um die Subtraktion abzuschliessen, erklärte ich den SchülerInnen, wie man Subtraktionskettenrechnungen umstellen kann. Für Erklärung, Ausfüllen des Theorieblattes und für das Lösen und Kontrollieren zweier Beispiele brauchten wir knapp 5 Minuten.

Und um die Lektion abzurunden widmeten wir uns zum Schluss noch der Multiplikation. Am Beamer rief ich nochmals das Distributivgesetz in Erinnerung und leitete über zum Trick *Summen bilden.* Ich füllte gemeinsam mit ihnen das Theorieblatt dazu aus, sie lösten Aufgaben mit dieser Technik und ich gab die Kurzlösungen bekannt.

Die Zeit war schon fast um, deshalb schnitt ich in der verbleibenden Zeit noch kurz den Trick *doppelte Summe* an, erklärte den SchülerInnen, wie sie ihn anwenden können und wir füllten gemeinsam das Theorieblatt aus. Da die Zeit zu knapp war noch Aufgaben mit diesem Trick zu bearbeiten, brach ich an dieser Stelle ab und schob bevor es läutete und ich die SchülerInnen verabschiedete noch einen Ausblick ein, wie das Projekt weiterläuft.

6.2 Verlauf der Übungsphase

Danach erhielten die SchülerInnen zu Beginn jeder Mathestunde 5 Minuten Zeit, auf einem von mir erstellten Aufgabenblatt, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen. Dies geschah also 3 Mal wöchentlich. Bis zum Stichtag wären insgesamt acht Übungsserien geplant gewesen. Aus diversen Gründen fand an einigen Tagen kein regulärer Matheunterricht statt, weshalb die beiden Klassen nur fünf respektive sechs Übungsserien gelöst haben. Die Übungsserien korrigierte ich zu Hause und wertete sie aus. Damit die SchülerInnen wussten wo sie stehen, schrieb ich nach vier Übungsblättern jedem SchülerIn eine persönliche Rückmeldung. Die Rückmeldung verschaffte den SchülerInnen einen Überblick, wo sie stehen, was sie gut machen, wo sie sich noch verbessern können und worauf sie besonders genau achten müssen.

6.3 Abschluss

Am 6.7.2016 besuchte ich die Klassen ein zweites Mal, um ihnen mitzuteilen, wie das Projekt verlaufen ist und es mit ihnen auszuwerten. Zuerst liess ich die SchülerInnen ein Rückmeldebogen ausfüllen, damit ich ein Feedback von ihrer Seite hatte und wusste wie sich das Projekt für sie angefühlt hat. Danach erzählte ich den SchülerInnen, wie das Projekt verlaufen ist und dass ich mit dem Verlauf sehr zufrieden war.

6.4 Mein Eindruck

Zu Beginn der Doppellektion war ich extrem angespannt, diese Anspannung legte sich nur zum Teil nieder. Während den Lektionen habe ich die Zeit völlig vergessen und deshalb zu Beginn eher ein zu langsames Tempo angeschlagen, was dazu führte, dass ich nicht so weit kam, wie ich es mir gewünscht hätte. Die SchülerInnen waren während der ganzen Zeit aufmerksam dabei und verstanden, meinem Gefühl nach, was ich ihnen vermitteln wollte. Der Kurzvortrag kam soweit gut an bei den SchülerInnen, sie hörten aktiv zu und niemand schweifte merklich ab oder machte etwas Anderes nebenbei. Meiner Meinung nach sehr gut angekommen ist der Einstieg mit dem Trick *Gruppen bilden*, da dieser für praktisch alle SchülerInnen ein Aha-Erlebnis beinhaltete und ihnen ein erstes Mal zeigte, dass Mathematik auch einfach sein kann. Dadurch waren sie gespannt auf das weitere, dass sie lernen können.

Ich hatte das Arbeitstempo der SchülerInnen etwas unterschätzt, sie brauchten länger als von mir geplant, um die Aufgaben zu bearbeiten. Auf der anderen Seite gab es einige sehr schnelle SchülerInnen, die nach kurzer Zeit fertig waren und keine weiteren Aufgaben mehr hatten.

Mit dem Verlauf der Übungsserien, war ich sehr zufrieden. Bei der Auswertung der Übungsserien, stand ich vor dem Problem, dass ich keinen direkten Kontakt zu den SchülerInnen hatte. Deshalb schrieb ich für jeden SchülerIn eine persönliche Rückmeldung, damit er erfuhr, wo er steht und worauf er besonders achten solle. Während der Übungsphase hatte ich das Gefühl, dass die SchülerInnen grundsätzlich verstanden haben, um was es geht.

7 Auswertung des Projektes

Im folgenden Kapitel geht es darum, eine Bilanz zu ziehen. Diese Bilanz habe ich erstellt mit Hilfe der Schülerfragebogen, eines Gesprächs mit dem Klassenlehrer und aufgrund der Leistungen, welche die SchülerInnen während der Übungsphase erbracht haben. Die Auswertung gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werde ich den Unterricht auswerten, was gut war und was ich ein nächstes Mal anders machen würde. Im nächsten Unterkapitel geht es um die messbaren Werte: Haben die SchülerInnen ihre Kopfrechenfähigkeit verbessert? Zum Schluss werde ich auswerten, ob ich meine Ziele erreicht habe: haben die SchülerInnen mehr Freude am Kopfrechnen gewonnen? Ist der mathematische Grundgedanke bei ihnen angekommen? Diese Auswertung ist statistisch nicht aussagekräftig, weil einerseits zu wenige SchülerInnen am Projekt teilgenommen haben und andererseits waren es SchülerInnen, welche gut in Mathematik sind und den Mathekurs des höchsten Niveaus besuchen.

7.1 Auswertung des Unterrichts

Beim zweiten Besuch in der Klasse wollte ich von ihnen wissen, was ihnen gefallen hatte, was nicht und wie es ihnen ergangen ist. In diesem Gespräch kam heraus, dass auch den SchülerInnen aufgefallen ist, dass ich (zu) viel Stoff in diese Doppellektion hineinpressen wollte. Viele SchülerInnen wünschten sich ein etwas langsameres Tempo und etwas mehr Zeit zwischen den einzelnen Inputs. Auch erwähnt wurde, dass die Stoffdichte sehr hoch war und sie sehr stark forderte. Die weiteren Rückmeldungen waren positiv, alle SchülerInnen stimmten zu, dass die Rückmeldung, die sie erhalten haben, sie sehr stark motivierte. So wussten sie, einerseits auf welchem Weg sie sich befanden (alle befanden sich auf sehr gutem Weg) andererseits motivierte sie die positive Rückmeldung und spornte sie an. Viele SchülerInnen gaben auch an, dass es ihnen wirklich etwas gebracht hat und sie etwas gelernt haben. Techniken,

die sie gelernt haben variierten von: Erlernen des Minusrechnens im Kopf bis zum Erlernen neuer Wege beziehungsweise neuer Strategien. Eine Mehrheit der SchülerInnen empfand die Einschübe zu Beginn jeder Lektion als eine willkommene Abwechslung zum Hauptthema, einige wenige SchülerInnen jedoch empfanden diese Abwechslung als störend.
Vom Klassenlehrer habe ich folgendes Feedback erhalten: Die Lektion war seiner Meinung nach sehr gut und ausführlich vorbereitet. Der Stoff war gut auf ihr Können abgestimmt und die Lektion war didaktisch gut aufgebaut. Folgende Punkte sind verbesserungswürdig: Mein Auftreten war, vor allem zu Beginn, sehr angespannt und nervös. Ich packte zu viel Stoff in diese eine Doppellektion. Ich dozierte sehr stark und band somit die SchülerInnen sehr wenig ein, ein nächstes Mal sollte ich die SchülerInnen mehr einbinden. Wenn ich eine Frage an die Klasse stelle, wartete ich meist nicht bis sich jemand zu Wort meldete, sondern ich erlöste die SchülerInnen, nach kurzer Zeit peinlichen Schweigens und teilte ihnen jeweils die Lösung mit. Die Rückmeldung an die SchülerInnen war notwendig, ich hätte viel lieber noch mehr Kontakt gehabt und viel unmittelbarer eingreifen können.

7.2 Auswertung der Leistungen

Ich werde mich im folgenden Teil den folgenden Mittel und Begriffe bedienen: Boxplotdiagramme, Median, Quartil und Streuung. Damit keine Verwirrungen entstehen, wird hier kurz das Wichtigste, zu diesen Begriffen erklärt:

Median: Der Median ist der Mittelwert einer Probe, vergleichbar mit dem Durchschnitt. Um den Median zu berechnen, werden alle Werte der Grösse nach geordnet, wobei der Median dem Element in der Mitte entspricht (beziehungsweise dem Durchschnitt der zwei mittleren Elementen bei einer geraden Anzahl Elementen). Ich verwende den Median anstelle des Durchschnittes, weil der Median weniger beeinflusst wird durch Ausreisser und somit für meine Auswertungen aussagekräftiger ist. (Kalisch, Bühlmann & Künsch, 2016, S. 45)

Quantil: Als α-Quantil wird der Schwellenwert bezeichnet, bei welchem genau $\alpha\%$ der Werte unterhalb und $(100 - \alpha)\%$ oberhalb dieser Grenze liegen. Verschiedene Quantile geben Auskunft über die Verteilung der Proben. Ein 25% Quantil bezeichnet die Stelle, an welcher genau 25% kleiner sind als dieser Schwellenwert. Der Median ist eigentlich ein Spezialfall eines Quantils ist der Median, welcher eigentlich ein 50% Quantil ist. (Kalisch et al., 2016, S. 45)

Boxplot: Der Boxplot teilt sich auf in die rechteckige Box und die Antennen, auch Whisker genannt. Innerhalb der Box befindet sich eine Linie, welche den Median bezeichnet, folglich befinden sich 50% der Werte oberhalb und 50% der Werte unterhalb dieser Linie. Die Box wird nach oben und unten durch das 75% respektive 25% Quartil begrenzt. Was bedeutet, dass genau die Hälfte aller Werte innerhalb der Box liegen. Der restliche Teil des Boxplottes besteht aus dem Whisker, welcher den kleinsten erreichten *normalen* Wert mit der Box verbindet. Als normale Werte werden Werte bezeichnet, welche weniger als das 1.5-fache der Quartilsdifferenz (die Länge der Box) von der Box entfernt sind. Werte, welche weiter als die eineinhalbfache Quartilsdifferenz von der Box entfernt sind, werden als Ausreisser bezeichnet und durch Punkte dargestellt. Werde ich im folgenden Teil von der Streuung sprechen, so beziehe ich mich dabei auf die Quartilsdifferenz. Ein Boxplot gibt also Auskunft über die Lage und Verteilung der Werte. (Kalisch et al., 2016)

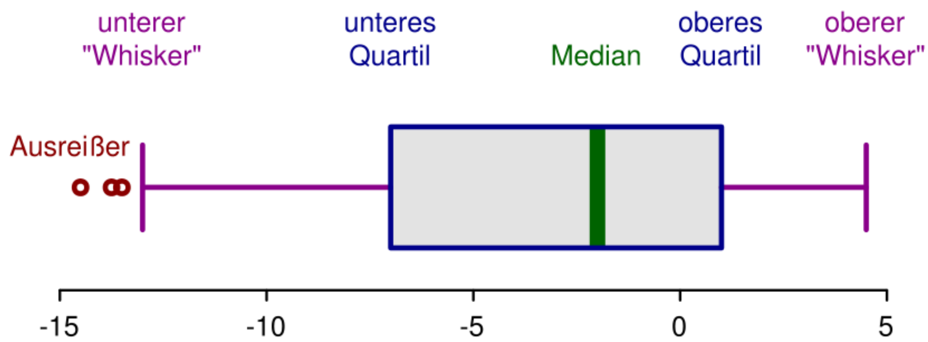


Abbildung 3: Beispiel eines Boxplotdiagrammes
Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elements_of_a_boxplot_en.svg Zugriff: 20.08.2016

Wichtig für die Interpretation der Diagramme ist, dass die Aufgaben tendenziell immer schwieriger wurden. Während die Aufgaben der Übungsserie 1, bewusst trivial gewählt wurden, folgten mit der Zeit immer mehr schwierigere Aufgaben, bei welchen eine einfache Lösung nicht auf den ersten Blick erkennbar ist.

Innerquartilsabstand: Unter dem Interquartilabstandes (oder auch Quartilsdifferenz) wird die Differenz zwischen dem 75% und dem 25% Quartil verstanden. Im Boxplot entspricht diese Grösse der Länge der Box. Dies ist ein alternatives Mass zur Standartabweichung, welches Auskunft über die Streuung.

7.2.1 Streuung der Klasse

In Abbildung 4 ist abgebildet wie viele Aufgaben jeder SchülerIn nach fünf Arbeitsblättern richtig gelöst hat. Bei dieser Darstellung wurden nur die ersten fünf Arbeitsblätter gewertet, da nur Klasse 1 sechs Arbeitsblätter gelöst hat. Beim Vergleich der beiden Klassen fällt auf, dass der Median von Klasse 1 etwas höher liegt als derjenige von Klasse 2. Weiter ist erkennbar, dass die Streuung in Klasse 1 kleiner ist als in Klasse 2.

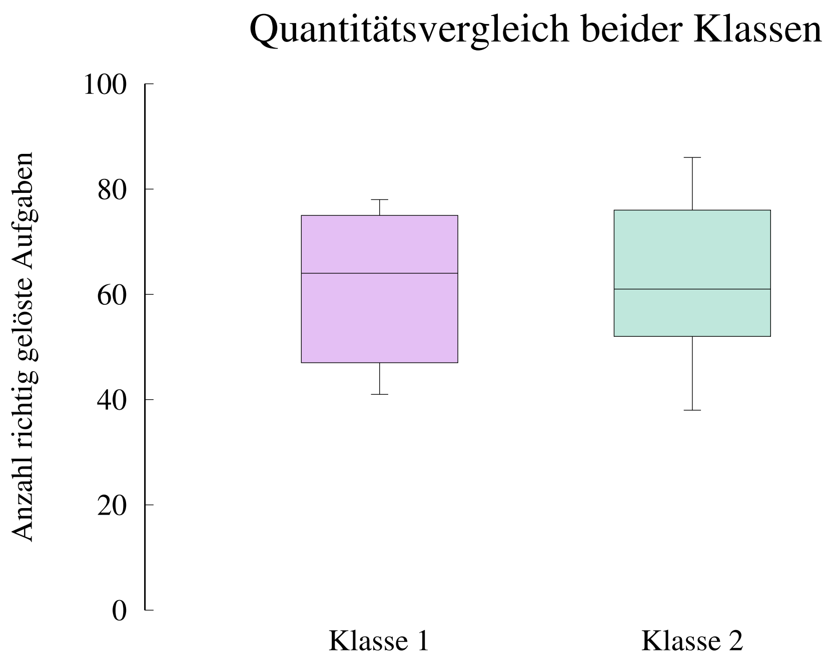


Abbildung 4: Gesamthaft richtig gelöste Aufgaben pro SchülerIn nach 5 Übungsserien. Klasse 1 besteht aus 9 SchülerInnen, Klasse aus 12.

7.2.2 Quantiätsverlauf

In Abbildung 5 ist die Verteilung der quantitativen Leistungen der Klasse 1 abgebildet. Selbes Diagramm für Klasse 2 findet sich in Abbildung 7.
Wie sich jeder SchülerIn der Klasse 1 individuell quantitativ entwickelt hat, ist in Abbildung 6 visuell dargestellt. Die selbige Abbildung für Klasse 2 ist in Abbildung 8 visualisiert.

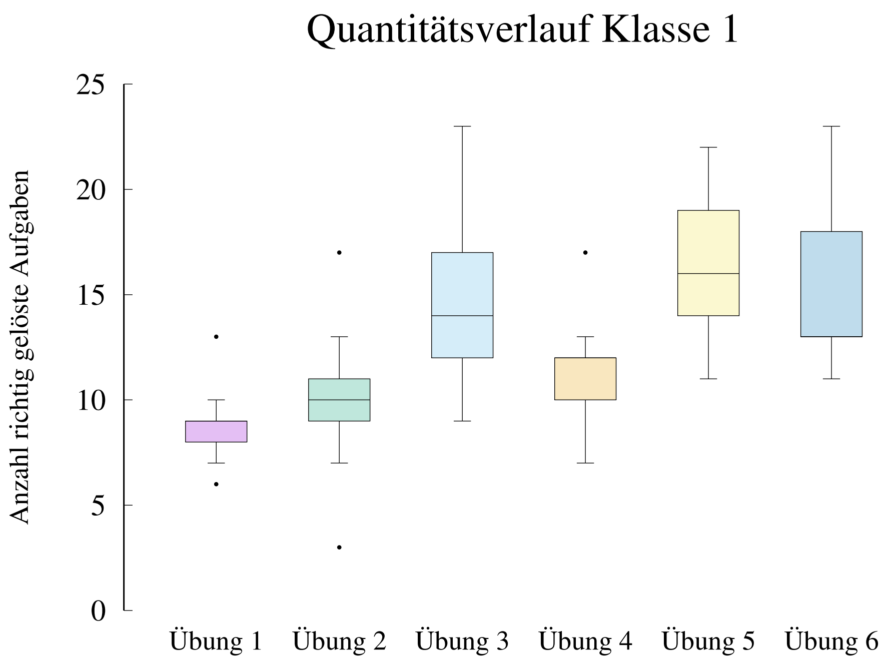


Abbildung 5: Quantitätsentwicklung der Klasse 1 dargestellt als Boxplot. Der Median ist bei Übung 1 und Übung 4 mit dem oberen, bei Übung 6 mit dem unteren Ende der Box zusammengefallen

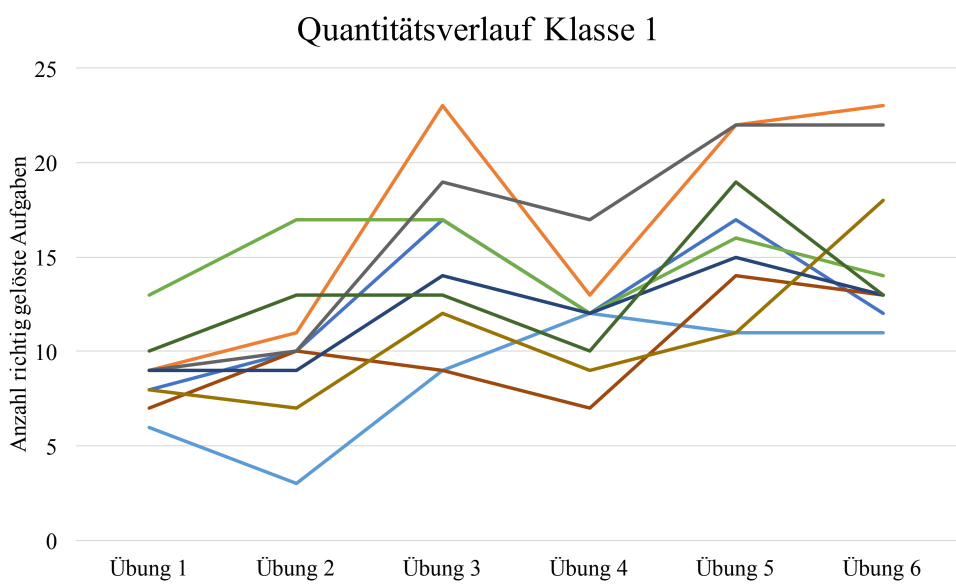
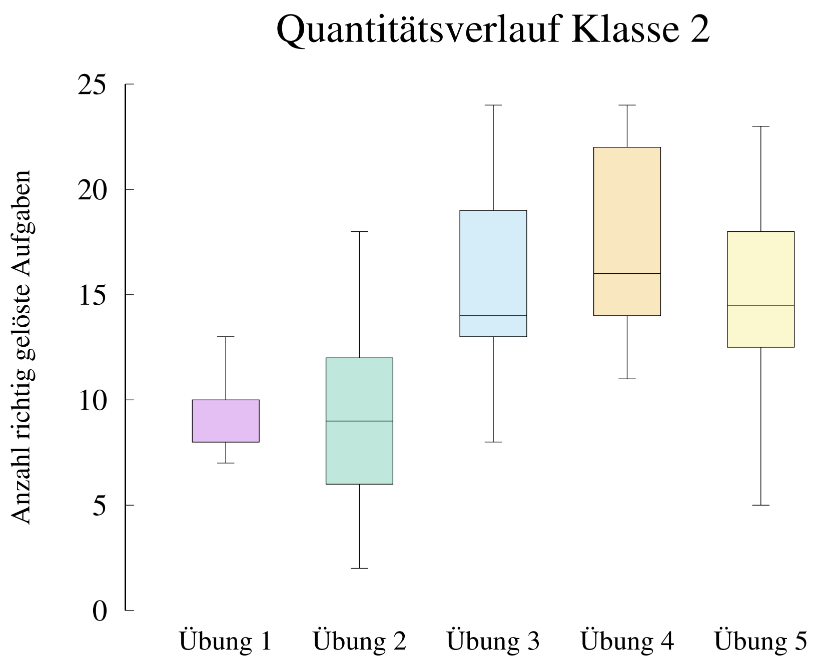


Abbildung 6: Quantitätsentwicklung der Klasse 1 dargestellt als Liniendiagramm



s

Abbildung 7: Quantitätsentwicklung der Klasse 2, dargestellt als Boxplot. Bei Übung 1 bestand die Testgruppe aus 14 Personen, bei Übung 6 aus 13 Personen. Die restlichen Übungen wurden von allen 15 Schülern der Klasse 2 gelöst. Der Median ist bei Übung 1 mit dem unteren Ende der Box zusammengefallen

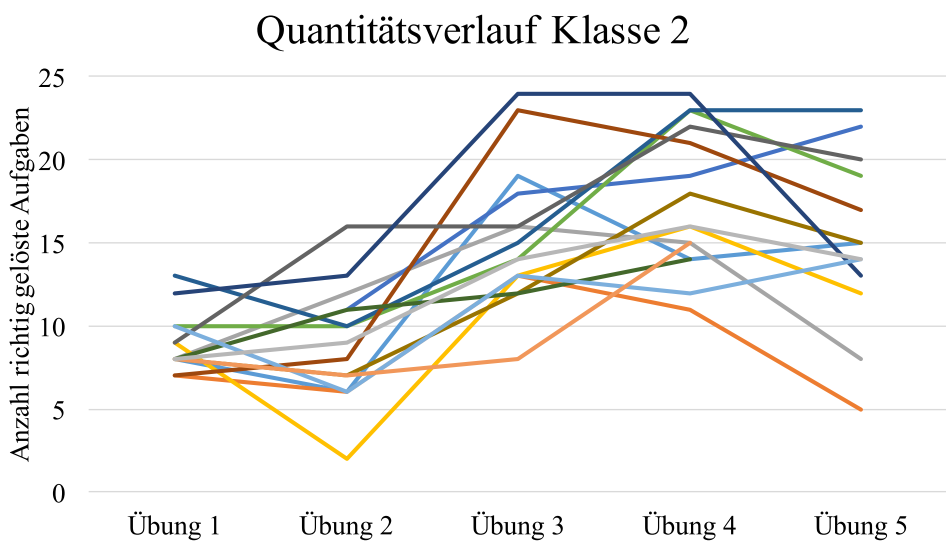


Abbildung 8: Quantitätsentwicklung der Klasse 2, dargestellt als Liniendiagramm. Bei Übung 1 war eine Person abwesend, bei Übung 6 fehlten zwei Personen.

7.2.3 Qualitätsetwicklung

Dieser Teil der Auswertung betrachtet den Quotienten zwischen der Anzahl richtig gelösten Aufgaben im Verhältnis zu den falsch gelösten Aufgaben. Der prozentuale Anteil richtig gelöster Aufgaben lässt sich wie folgt errechnen:

$$\frac{\text{Anzahl richtig gelöste Aufgaben}}{\text{Anzahl total gelöste Aufgaben}} \cdot 100$$

Die Abbildungen 9 und 10 zeigen den Qualitätsverlauf der Klasse 1 respektive Klasse 2.
Der Verlauf der medialen Fehlerquote ist in Abbildung 11 dargestellt. Hier wurde die Anstelle der prozentual richtig gelösten Aufgaben die prozentual falsch gelösten Aufgaben verwendet. Dieser Wert lässt sich auf die folgenden zwei Arten berechnen:

$$\text{Fehlerquote} = 100\% - \text{Prozentsatz richtig gelöste Aufgaben}$$

oder

$$\text{Fehlerquote} = \frac{\text{Anzahl falsch gelöste Aufgaben}}{\text{Anzahl gelöste Aufgaben total}}$$

Abbildung 12 zeigt den Quantitätsverlauf beider Klassen im Vergleich, gemessen am Median, also *dem* mittleren SchülerIn

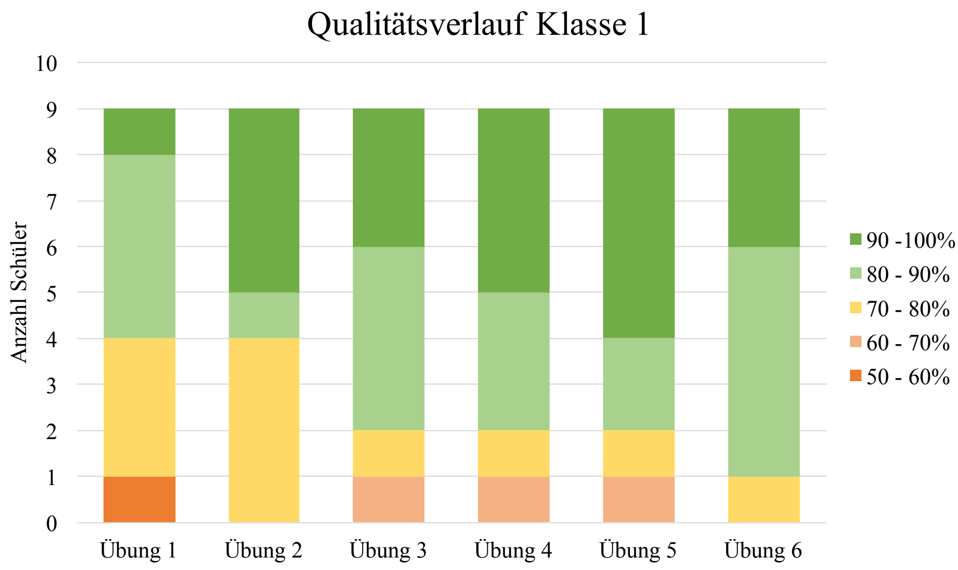


Abbildung 9: Visualisierung der Qualitätsentwicklung der SchülerInnen der Klasse 1

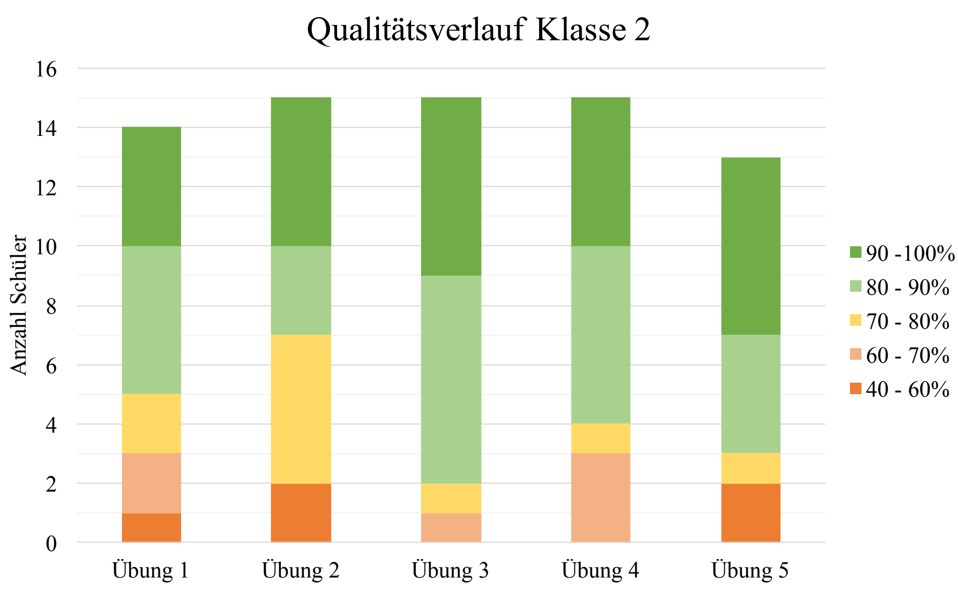


Abbildung 10: Qualitätsentwicklung der SchülerInnen der Klasse 2. Wie in Abb 7 fehlte bei Übung 1 eine Person, bei Übung 5 zwei Personen.

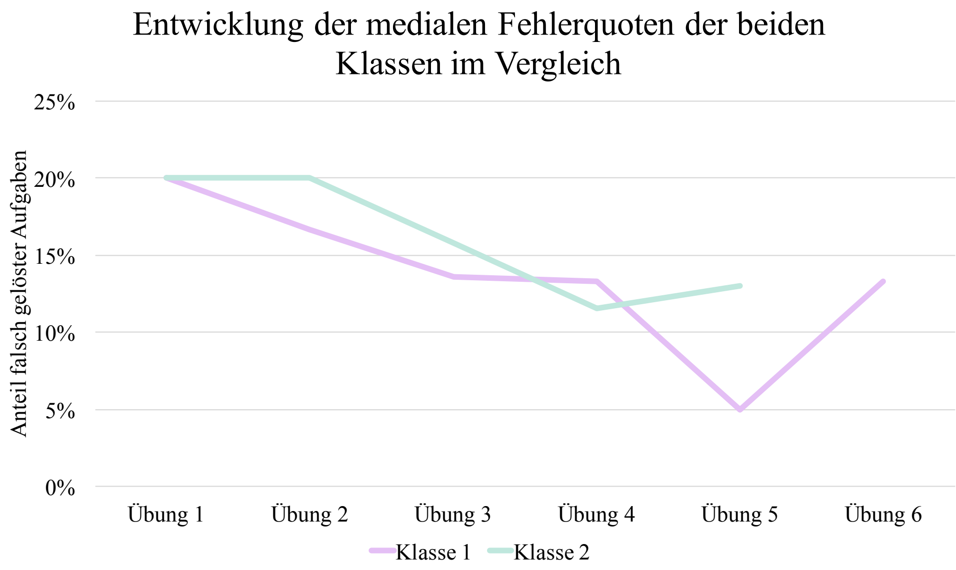


Abbildung 11: Verlauf der Fehlerquote des *mittleren SchülerIns* beider Klassen im Vergleich

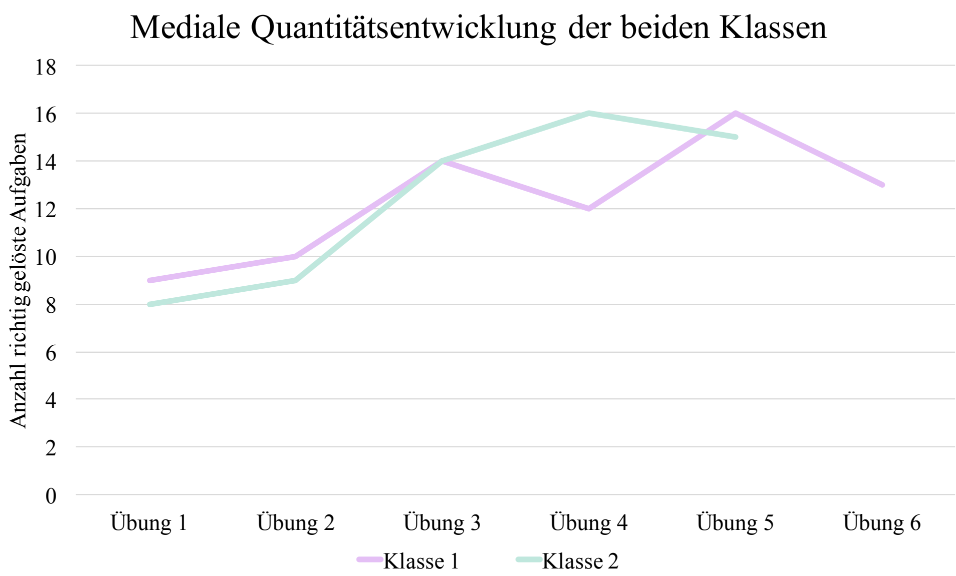


Abbildung 12: Megngenmässige Enwticklung des *mittleren SchülerIns* beider Klassen

7.3 Auswertung meiner Ziele

Zum Schluss der Auswertung geht es um die Frage, ob ich meine Ziele erreicht habe. Da Werte wie Freude oder Motivation von Person zu Person unterschiedlich aufgefasst werden, ist es beinahe unmöglich solche Werte zuverlässig mit Zahlen zu erfassen und auszudrücken. Deshalb habe ich diese Auswertung aufgrund eines Kreisgespräches erstellt. 15 von 24 der SchülerInnen gaben an, dass sie nach dem Projekt motivierter als vorhin an Kopfrechnungsaufgaben herangingen. 19 von 24 der SchülerInnen gaben an, neue Techniken erlernt zu haben, der Rest rechnete weiterhin mit bereits zuvor selbst erlernten Methoden. Jeder dritte SchülerIn stimmte zu, dass er Freude am Kopfrechnen gewonnen hatte. Schlussendlich, und das ist das wichtigste, gaben alle SchülerInnen an, dass sie sich besser zu helfen wussten als zu vor. Mit einigem Nachhaken stimmten alle SchülerInnen zu, dass die mathematischen Gesetze nicht nur da sind um SchülerInnen zu plagen, sondern auch nützlich sein können und ausgenutzt werden dürfen. Dass es in der Mathematik darum geht, sich eine möglichst einfache Lösung für ein vorhandenes Problem zu suchen, dem stimmten auch alle SchülerInnen zu. Ich habe meine Ziele also erreicht.

8 Diskussion der Ergebnisse

Hier möchte ich abermals anmerken, dass es nicht darum geht, eine statistisch aussagekräftige Analyse meines Projektes durchzuführen. Vielmehr geht es darum auszuwerten ob das Projekt, so wie es durchgeführt wurde, erfolgreich war oder nicht.

In Abbildung 4 abzulesen, ist dass die Klassen über das Gesamte Projekt gesehen ungefähr gleich stark waren. Keine Klasse war viel besser als die andere, die Leistungen waren etwa ausgeglichen. Während die Klasse 1 als Kollektiv etwas stärker war. Waren die Leistungen in Klasse 2 über eine grössere Breite verteilt.

8.1 Quantitative Entwicklung

Einerseits lässt sich bei Betrachtung der Abbildungen 5, 6, 7 und 8 relativ schnell erkennen, dass die SchülerInnen im Verlauf des Projektes fähig waren mehr Aufgaben in der gleichen Zeit zu lösen. Dies ist einerseits nicht verwunderlich, da sie mit der Zeit den Ablauf kannten und auch die Methoden verinnerlicht haben. Unter Einbezug des Indizes, dass die Aufgaben mit der Zeit schwieriger wurden, lässt sich dennoch auf eine Verbesserung schliessen.

Untersucht man in Abbildung 5 genauer, so erkennt man, dass sich in der Klasse 1 sowohl die Anfangs schlechten SchülerInnen, als auch die Anfangs besseren SchülerInnen verbessert haben. Der gleiche Trend ist für Klasse 2 in Abbildung 7 erkennbar. Auffallend ist, dass bei beiden Klassen Übung 5 schlechter ausgefallen ist, als Übung 4. Eine mögliche Erklärung dafür ist, dass sie bis und mit Übung 4 das Theorieblatt zu Hilfe nehmen durften und in Übung 5 das erste Mal auf sich alleine gestellt waren. Klasse 1 hatte bei Übung 4 einen Abschiffer, was vermutlich auf einen schlechten Tag hinweist, denn Klasse 2 hatte unter den gleichen Bedingungen ihr Spitzenresultat abgeliefert.

In den Abbildungen 6 und 8 lässt sich der individuelle Verlauf der einzelnen Testpersonen nachvollziehen. Gut Erkennbar ist, dass die tiefsten Werte immer von unterschiedlichen SchülerInnen erreicht wurden. In Abbildung 8 zeigt sich, dass in Klasse 2 zum Schluss eine Testperson unten wegfällt. Diese Testperson hat einen Trick falsch verstanden und folglich auch falsch angewandt. Dies führte dazu, dass sie alle Aufgaben des gleichen Typs falsch löste, ebenfalls diese Testperson realisierte in Abbildung 10 jeweils einen der tiefsten Werte. Vergleicht man die Verteilung der Werte, also die Streuung der Leistungen, so zeigt sich in beiden Klassen zunächst eine sehr kleine Streuung, welche jedoch im Verlauf des Projektes stark zunimmt. Die Streuung wird in den Boxplots dargestellt durch die Länge der Box, beziehungsweise in den Liniendiagrammen durch die Dichte der Linien. Diese grösser werdende Streuung weist darauf hin, dass die SchülerInnen sehr unterschiedliche Entwicklungsgeschwindigkeiten aufweisen. Umso erfreulicher ist es, dass bei allen SchülerInnen eine Verbesserung erkennbar.

8.2 Entwicklung der Qualität

Um die qualitative Entwicklung zu verfolgen, dienen die Abbildungen 9 und 10. Eine sehr starke Entwicklung legte die Klasse 1 an den Tag. Sehr schön ist der Trend erkennbar, dass der grüne Anteil der Säulen immer grösser wird. Setzt man die Abbildung 9 in Korrelation mit Abbildung 5 so fällt auf, dass die SchülerInnen nicht nur fähig waren mehr Aufgaben zu lösen, sondern von diesen Aufgaben auch einen grösseren Anteil korrekt lösten. Setzt man diese zwei Erkenntnisse in Verbindung mit dem Fakt, dass die Aufgaben stetig schwieriger wurden, so erkennt man: Klasse 1 zeigt eine grosse Entwicklung. Die SchülerInnen haben immer mehr immer schwierigere Aufgaben korrekt gelöst.
Die qualitative Entwicklung von Klasse 2 bewegt sich in einem ähnlichen Bereich wie diejenige der Klasse 1. Aus Abbildung 10 lässt sich ablesen, dass auch die Testpersonen der Klasse 2 den Anteil richtig gelöster Aufgaben verbessern konnten. Anzumerken ist, dass die zwei Personen, welche bei Übung 5 abwesend waren, bei Übung 4 einen Korrektheitsgrad zwischen (80% und 90% bzw. 90% - 100%) erreichten. Auffallend ist, dass sich hartnäckig eine oder zwei Testpersonen im dunkelorangen Bereich befanden. Dies ist nicht

weiter beunruhigend, da sich diese Werte auf verschiedene Testpersonen verteilen, welche vermutlich an diesem Tag einen schlechten Tag einzogen. Erstaunlich ist, dass diese Testperson, welche einen Trick falsch anwendete dennoch gute Werte erreichte und nur zweimal in den dunkelorangen Bereich abtauchte, sie also dennoch gute Leistungen erbracht hat.

8.3 Zusammenfassung

Um die Ergebnisse nochmals kurz zusammenfassen, dienen die Abbildungen 11 und 12. Sie visualisieren sowohl die Quantitäts- als auch die Qualitätsentwicklung des Medians. Der Median steht für *den mittleren SchülerIn*, die Diagramme zeigen also die Entwicklung des mittleren SchülerIns, stellvertretend für die ganze Klasse. In Abbildung 11 zeigt sich, dass in beiden Klassen die Fehlerquote reduziert wurde. Dass die Kurve der Klasse 1 zum Schluss wieder nach oben bewegt, deutet auf eine kollektiv ausserordentliche Leistung in der fünften Übungsserie hin. Die quantitative Entwicklung des mittleren SchülerIns, oder eben der Klassen, ist in Abbildung 12 dargestellt.Wiederum ist eine konstante Entwicklung erkennbar, auch hier Schön erkennbar, dass die Klasse 1 in der vierten Übungsserie einen schlechten, Klasse 2 einen sehr guten Tag eingezogen haben. Zusammenfassend kann man sagen, dass sich beide Klassen qualitativ und quantitativ verbessert haben. Die Zahlen sprechen für sich, die SchülerInnen waren am Ende des Projektes fähig, Kopfrechenaufgaben schneller und mit weniger Fehlern zu lösen als zu Beginn des Projektes. Somit war, mit diesen SchülerInnen durchgeführt, das Projekt definitiv ein Erfolg.

8.4 Persönliche Bilanz

Das Unterrichten der SchülerInnen und das Auswerten ihrer Arbeiten hat mir sehr grossen Spass bereitet. Umso schöner ist es, zu sehen, dass mein Aufwand Früchte trägt. Für mich persönlich ist das Projekt ein grosser Erfolg, der Ausdruck in den Gesichtern, als die SchülerInnen erkannt haben, dass es Kopfrechnen auch in einfach gibt – unbezahlbar.

Literatur

Dambeck, H. (2012). *Je mehr löcher, desto weniger käse - mathematik verblüffend einfach* (5. Aufl.). Köln: Kiepenheuer & Witsch.

Kalisch, M., Bühlmann, P. & Künsch, H. (2016, Februar). *Statistik 1 für biologie, gesundheitswissenschaften und pharmazeutische wissenschaften.* (Nicht offiziell veröffentlicht)

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Einführung in die mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Springer Spektrum.

Landwehr, N. (1997). *Neue wege der wissensvermittlung: ein praxisorientiertes handbuch für lehrpersonen im bereich der sekundarstufen i und ii (berufsschulen, gymnasien) sowie in der lehrer- und erwachsenenbildung* (3. Aufl.). Verlag für Berufsbildung, Sauerländer.

Meyer, R. (2015). *Aitus: Die fünf phasen im überblick.* Airbowis. Zugriff am 4.8.2016 auf http://arbowis.ch/index.php/67-2014/erwachsenenbildung/unterrichtsplanung/phasenmodelle/42-aitus-5-phasen-unterrichtsaufbau

Abbildungsverzeichnis

Eigenstandserklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Quellen verfasst habe und ich auf eine eventuelle Mithilfe Dritter in der Arbeit ausdrücklich hinweise.

Datum und Unterschrift

Anhänge

Freude am Kopfrechnen vermitteln

Skript für die Durchführung einer Dopellektion zur Thematik Kopfrechnen

Jérôme Landtwing

08.06.2016

1 Einstieg 15'

1.1 Vorstellrunde 10'

Vorstellungsrunde: ⇒ Mein Name an die Tafel schreiben. Jeder stellt sich vor mit: Name, Beziehung zur Mathe.

- **kleines Kind:** an der Kasse Rückgeld berechnet und dafür Extrazückerli erhalten.
- **grosses Kind:** 80.- Gutschein bei Wettbewerben in der Schule gewonnen.
- **Hobby:** Zeitvertrieb, Sudokus, andere Zahlenrätsel im Zug
- **Alltag:** auf den Zug stressen: Wie viel Zeit habe ich noch?

Vorwissen aktivieren, Emotionen wecken. **Fragen stellen erlaubt / erwünscht!**

Was ist Kopfrechnen ?

Kopfrechnen heisst nicht $19 \cdot 21 = 399$ wie das kleine Einmaleins zu beherrschen, oder das Resultat wie ein Taschenrechner auszuspucken. Kopfrechnen heisst, wissen, wie man es so vereinfachen kann, dass es im Kopf lösbar ist. Den Baum nicht mit dem Sackmesser fällen wollen, sondern geeignetes Werkzeug dafür zu Hilfe nehmen.

Zielsetzung

- Freude am Kopfrechnen vermitteln, sie mit meiner Freude anstecken.
- zum Kopfrechnen motivieren.
- Werkzeuge beibringen, damit sie Rechnungen vereinfachen können.
- Sich zu helfen wissen.

1.2 Repetition der Grundgesetze / Grundlagen 5'

Summand + Summand = Summe	Vor Beginn an die Tafel schreiben
Minuend - Subtrahend = Differenz	
Faktor · Faktor = Produkt	um Begriffe zu klären
Divisor : Dividend = Quotient	und Missverständnisse vorzubeugen

Erklären, was die Grundgesetze für eine Bedeutung haben. Bewusstsein hervorrufen, dass man sie sich auch zu nutze machen kann / soll!

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

Bei der **Addition und der Multiplikation** dürfen jegliche **Summanden / Faktoren in der Reihenfolge beliebig vertauscht werden!** Ich kann sie so zuammenzählen, wie es mir am ringsten geht. → 2 Rechnungen die völlig verschieden aussehen, jedoch das gleiche Resultat ergeben!
⇒ Es gibt viele verschiedene korrekte Lösungswege, jeder darf den Weg wählen, der ihm am besten gefällt / am ringsten von der Hand läuft.

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Das bedeutet, dass die **Reihenfolge, in der man die Rechenschritte durchführt** keine Rolle spielt! Gültig nur für Addition und Multiplikation. Ich kann selbst bestimmen, in welcher Reihenfolge ich Zahlen zusammenzählen, multiplizieren will.
→ Wer sagt mir dass in der Aufgabe a + b nicht bereits ein solcher Schritt stattgefunden hat und sie so ausgesehen hat?
und auch hier sieht man wieder, dass die gleiche Rechnung in verschiedenen Formen auftreten kann und alle gleichwertig sind!

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Gibt vor, wie man **Summen mit einer Zahl multipliziert** werden müssen. Nutzen: Ich darf grosse / unangenehmen Zahlen in eine Summe aufteilen und die Rechnung nach dem Distributivgesetz weiterrechnen! Gültig für Addition oder Subtraktion in der Klammer, aber nur Multiplikation mit der Klammer.

2 Addition 30'

2.1 Gruppen bilden 10'

Rechnung: (13 + 56 + 53 + 34) an der Tafel darstellen. Jede Zahl wird einzeln auf ein Papier geschrieben und mit Magneten an die Tafel geheftet. Dann die Schüler fragen, wie man eine solche Aufgabe lösen kann. → **Slide:** Kommutativgesetz. **auf Presenter wechseln** Möglichkeiten:

- Von links nach rechts, jede Zahl fortlaufen hinzuzählen
- 56 + 34 = 90
- 53 + 13 + 34 = 100

Tipp geben, das Kommutativgesetz lässt uns die Reihenfolge frei wählen. Auch erwähnen, dass man Zahlen auseinander nehmen darf. Beispielsweise (77 + 24 = 100 + 1).

$$\text{2. Beispiel: } 64 + 18 + 35 + 54$$

Bewusstsein wecken, dass es viele verschiedene Lösungswege gibt! Sie auch ihre eigenen Lösungsstrategien entwickeln sollen.

2.2 Von links nach rechts 10'

Die Aufgabe (367 + 285) am Presenter schreiben mit der Frage, wie man eine solche Aufgabe lösen kann? Auftrag die Aufgabe mit Streichhölzern darstellen. Danach den Auftrag geben, die Streichhölzer des Nachbars durcheinanderzubringen " Erdbeben " → fragen, ob es möglich ist, das Resultat der Aufgabe dennoch festzustellen → Man schaut wie viele Einer, Zehner und Hunderter man hat.
Aufgabe

$$342 + 455 = H : 7Z : 9E : 7$$

mit Ihnen lösen, fragen was ich wie machen soll. Aufgabe:

$$583 + 269 = H : 7Z : 14E : 12 = 852$$

2.3 Hinüberschieben 10'

Die Rechnung (573 + 199) auf den Presenter schreiben. Den Schülern die Aufgabe geben, sie mit den Streichhölzern auszulegen. Wie im Beispiel vorhin gesehen, spielt es keine Rolle, wie die Streichhölzer auf die beiden Summanden verteilt sind! Deshalb ist es erlaubt, die Streichhölzer so anzuordnen, dass sich die Aufgabe einfacher lösen lässt.
→ Im Beispiel vorher haben wir gesehen, dass nur die Summe der einzelnen Einheiten nicht verändert werden darf! Also spielt es keine Rolle, wie sie

aufgeteilt sind. $\rightarrow$ ich darf selbst wählen, wie ich die Summe aufteile. am besten möglichst geschickt. Hier 1 Einer von 573 nach 199 bewegen. Die neue Rechnung sieht also so aus:

$$(573 - 1) + (199 + 1) = 572 + 200 = 772$$

$$(476 + 24) + (283 - 24) = 500 + 259 = 759$$
$$(476 - 17) + (283 + 17) = 459 + 300 = 759$$

Wenn notwendig ein weiteres Beispiel, um zu verdeutlichen :

$$225 + 186 = (225 - 14) + (186 + 14) = 219 + 200 = 419$$

Eselsbrücke: Plus besteht aus 2 Strichen $\rightarrow$ 2 Verschiedene Operationen. $\Rightarrow$ unter Notizen aufschreiben

3 Subtraktion 25'

3.1 Ergänzen auf 1000 10'

schöne Zahlen sind ganze Hunderter oder Tausender Zahlen. Schriftlich am Presenter die Rechnung:

$$1000 - 638 = 362$$

vorlösen, dabei alle Überträge mit einer Farbe hervorheben. Danach darauf aufmerksam machen, dass jeweils die zwei Zahlen ohne Überschlag sich immer auf 9 ergänzen ausser bei der Zehnerstelle auf 10.

- alle Zahlen auf 9 Ergänzen und die Zehnerstelle auf Zehn

Spezialfälle sind wenn eine schöne Zahl von einer schönen Zahl subtrahiert wird. Bsp. 1000 - 400 = 600. $\rightarrow$ **auf die Slides zrückwechseln**

3.2 der unsichtbare Helfer 10'

Erzählen von zwei benachbarten Hochhäusern, nun gibt es 3 Personen (Steve Jobs, Albert Einstein und Chuck Norris) die ausrechnen wollen, um wie viel das eine Haus höher ist als das andere. Steve Jobs baut eine Plattform auf mittlerer Höhe des kleineren Hauses. Albert Einstein vom Erdboden aus und Chuck Norris vom Erdinneren aus. Alle Messen die Höhe des grösseren Hauses und ziehen die Höhe des kleineren Hauses ab. **Nun die Frage stellen, ob sie auf das gleiche Ergebnis kommen.** Alle drei sind auf das gleiche Ergebnis gekommen. Sie haben sich lediglich weiter oder näher vom "Zielpunkt" entfernt. Dies dürfen wir auch tun! **Wird dürfen zum Minuenden und den Subtrahenden die gleiche Zahl hinzu oder abzählen, ohne dass sich das Ergebnis verändert.** Am einfachsten geht es eine schöne Zahl zu subtrahieren. Jedoch können wir nun auch auf schöne Zahlen ergänzen. Also macht es doch Sinn, dass wir den Minuenden und den Subtrahenden so verändern dass einer von beiden eine Schöne Zahl wird. Rechnung: 991 - 475 = stellen und fragen wie man diesen Trick nun anwenden kann.

- (991 + 9) - (475 + 9) = 1000 - 484 = 516
- 368 - 289 = (368 + 11) - (289 + 11) = 379 - 300 = 79

weiteres Beispiel:

$$685 - 387 = (685 + 13) - (387 + 13) = 698 - 400 = 298$$

Eselsbrücke: Minus besteht aus einem Strich → Eine Operation.

3.3 Kettenrechnungen Subtraktion 5'

rhetorische Frage stellen, ob die Schüler lieber Plus oder Minus rechnen. → Lieber addieren als subtrahieren. Frage ob man eine solche Rechnung in eine Addition umwandeln könne? Vorzeigen, dass ein Minus vor der Klammer alle Vorzeichen wechselt. Eine Klammer vor dem ersten Subtrahenden öffnen nach dem letzten schliessen. Fragen ob das Resultat das selbe sei oder was ich machen muss, damit das Resultat nicht ändert. → rechnung wie bei Kettenrechnugen-addition auf Zettel schreiben und an die Tafel heften. Auch erlaubt, zuerst eine Zahl vom Minuenden abziehen und den Rest als Gruppe anschauen!

$$497 - 22 - 26 - 38 = 497 - (22 + 38 + 26) = 497 - 86 = 411$$

$$385 - 73 - 36 - 54 = 385 - (36 + 54) - 73 = 385 - 163 = 222$$

4 Multiplikation 25'

4.1 Summen bilden 5'

Distributivgesetz anwenden: $(a \pm b) \cdot c = ac \pm bc$ Also darf ich aus einem Faktor eine Summe oder Differenz bilden! Das macht vor allem Sinn wenn man ein Teilresultat des Ergebnisses des Endresultates bereits kennt (Quadratzahlen oder 10er Zahlen, kleines Einmaleins).

$$15 \cdot 7 = (10 + 5) \cdot 7 = 70 + 35 = 105$$

$$12 \cdot 13 = 12 \cdot (12 + 1) = 144 + 12 = 156$$

4.2 Doppelte Summe 10’

$\rightarrow$ Aufgabe:

$$(a+b)(a+c) = a^2 + a(b+c) + bc$$

als Aufgabe den Schülern stellen. Von den Schülern ausrechnen lassen. Zeigen dass wenn:

- a kleiner 25
- b und c kleiner c
- dann a^2 auswendig
- Mittelteil einfach
- Schlussteil kleines 1x1

Quadratzahl, Distributivgesetz, Kleines 1x1 Es ist auch möglich mit grösseren Zahlen zu machen. Also Rechnungen wie:

$$24 \cdot 17 = (20+4)(20-2) = 20^2 + 20 - 12 = 408$$

unter Anwendung des Distributivgesetzes im Mittelteil kommt man auf das folgende: $400 + 20 - 42$ Wichtig, dass die erste Zahl in der Klammer identisch ist und zuerst die Addition im Mittelteil durchführen erst danach die Multiplikation.

4.3 Binomische Formeln 5’

Spezialfall der gebildeten Summe, wenn beide Zahlen den gleichen Abstand zu einer Zahl haben, kann man die dritte binomische Formel anwenden. $\rightarrow 21 \cdot 19$

4.4 Faktoren aufteilen 5’

Assoziativgesetz ausnutzen:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = ab \cdot c$$

Heisst dass man Faktoren aufteilen darf, wie man will. Rechnung $4 \cdot 27$ kann also angesehen werden als: $2 \cdot 2 \cdot 27$ nun noch die Reihenfolge geschickt wählen also $27 \cdot 2 \cdot 2 = 108 \Rightarrow$ Zahlen suchen, die einfach sind: bsp. 10, 15 ...

$$6 \cdot 21 = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 63 \cdot 2 = 126$$

$$32 \cdot 27 = 4 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 9 = 72 \cdot 12 = 720 + 144 = 864$$

Tricks, die das Kopfrechnen erleichtern

Jérôme Landtwing

15.6.2016

Was ist Kopfrechnen?

Ziele:

- Zum Kopfrechnen motivieren.
- Freude am Kopfrechnen vermitteln.
- Kopfrechentechniken erlernen / beherrschen / entwickeln.
- Sich zu helfen wissen.

Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Kommutativgesetz:

$$3 + 5 = 5 + 3$$
$$7 \cdot 2 = 2 \cdot 7$$

Assoziativgesetz:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Assoziativgesetz:

$$(4+5)+9 = 4+(5+9)$$
$$9+9 = 4+14$$

Distributivgesetz:

$$a \cdot (b+c) = ab+ac$$

Distributivgesetz:

$$7 \cdot (10 + 5) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 5$$

Addition

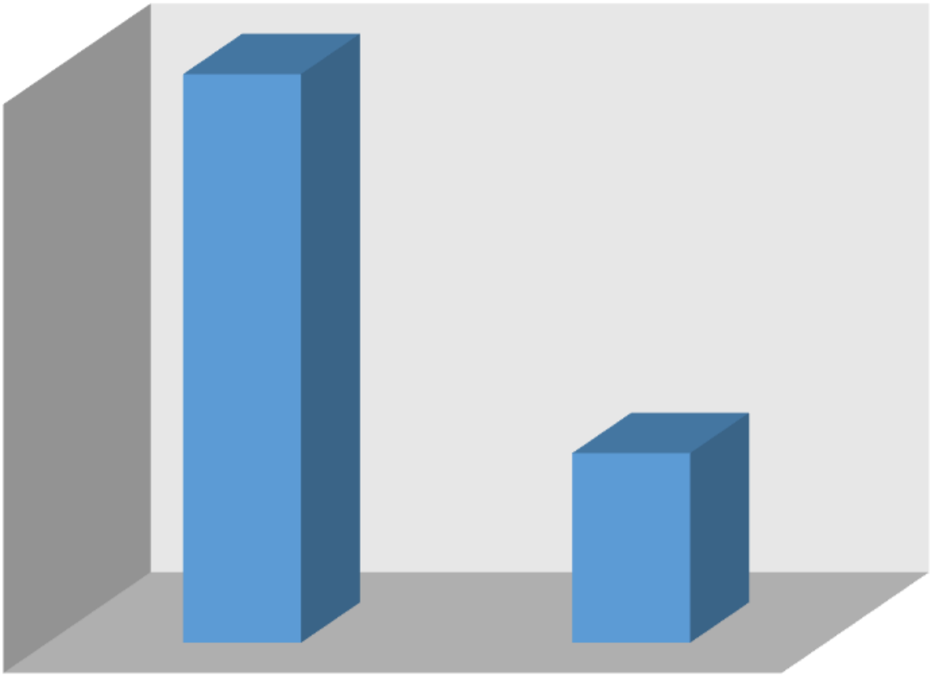
Kommutativgesetz:

$$a + b = b + a$$

- Ich darf die Summanden beliebig vertauschen!

Subtraktion

Der unsichtbare Gehilfe:



Wie gross ist die Distanz zwischen den Hochhäusern?

Multiplikation

Summen bilden:

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

- Wie kann ich dieses Gesetz ausnützen?

Distributivgesetz:

$$a \quad \cdot (b + c) = ab + ac$$

- Es gibt ein Gesetz, das besagt, wie man Summen mit einer Zahl multipliziert.
- Ich darf grosse Zahlen in Summen umwandeln.

Doppelte Summe:

$$(a+b)\cdot(a+c) = ??$$

3. Binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$19\cdot 21 = (20+1)\cdot(20-1)$$

Faktoren aufteilen:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- Wer sagt mir, dass dieser Schritt nicht schon gemacht wurde?
- Ich darf Faktoren in Teilfaktoren zerlegen und anschliessend neu anordnen. $\rightarrow$ Kommutativgesetz

Faktoren aufteilen:

$$6 \cdot 15 = (2 \cdot 3) \cdot 15$$

Ausblick:

- zu Beginn jeder Mathelektion 5 Minuten üben.
- Nach einer Woche vom Theorieblatt ablösen.
- Nach 2 Wochen immer weniger Zwischenschritte aufschreiben.
- am 6.7 gemeinsamer Abschluss.

Tipps und Tricks für die Addition

Diese Tricks kannst du zu Hilfe nehmen, um **Additionen** zu vereinfachen:

Gruppen bilden: Verändere die Reihenfolge der Summanden so, wie du sie am besten zusammenzählen kannst. **Tipp:** Du darfst auch neue Summen bilden.

$13 + 56 + 53 + 34 =$

$64 + 18 + 35 + 54 =$

Von rechts nach links: Nacheinander jeweils Einer-, Zehner- und Hunderterstelle zusammenzählen

$342 + 455 =$

$583 + 269 =$

Hinüberschieben: Nimm einen Teil von einem Summanden weg und zähle ihn bei einem anderen dazu.

$573 + 199 =$

$476 + 283 =$

Meine Notizen:

Tipps und Tricks für die Subtraktion

Diese Tricks helfen dir, **Subtraktionen** im Kopf zu lösen:

Ergänzen auf 1000: Subtrahiere alle Stellen von 9, die letzte von 10. *dies gilt auch für alle ganzen 10er, 100er, 1000er, ...* Auf die gleiche Weise, kannst du auch 435 auf 700 ergänzen

$1000 - 435 =$

$500 - 435 =$

$700 - 435 =$

Der unsichtbare Helfer: Zähle bei beiden Operatoren die gleiche Zahl hinzu oder weg.

$991 - 475 =$

$368 - 289 =$

Kettenrechnungen Subtraktion: Fasse mehrere Subtrahenden zu einer Summe zusammen und ziehe diese anschliessend vom Minuenden ab.

$497 - 22 - 26 - 38 =$

$385 - 73 - 36 - 54 =$

Meine Notizen:

Tipps und Tricks für die Multiplikation

Diese Tricks sind nützlich, um **Multiplikationen** zu erleichtern.

Summen bilden: Betrachte einen Faktor als Summe und löse die Rechnung mit Hilfe des Distributivgesetzes. Bilde die Summe so, dass du ein Teilergebnis des Resultates bereits kennst.

$15 \cdot 7 =$

$12 \cdot 13 =$

Doppelte Summe: Wandle beide Faktoren in eine Summe oder Differenz um, so dass in beiden Klammern an erster Stelle die gleiche Zahl vorkommt.

$13 \cdot 18 =$

$24 \cdot 17 =$

Faktoren aufteilen: Du darfst Faktoren als Produkte ansehen und sie in Teilfaktoren zerlegen.

$6 \cdot 21 =$

$32 \cdot 27 =$

Meine Notizen:

Übungsblatt Lektion

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Du darfst die Theorieblätter zu Hilfe nehmen.
- Du darfst den Rechenweg und Zwischenresultate aufschreiben, jedoch keine ganzen Rechnungen.

Kettenrechnungen:

11 + 43 + 67 + 49 =

98 + 55 + 30 + 45 =

74 + 33 + 28 + 16 + 12 =

91 + 77 + 18 + 41 =

47 + 28 + 24 + 19 =

Von rechts nach links:

235 + 353 =

183 + 436 =

743 + 147 =

859 + 343 =

958 + 193 =

406 + 493 =

Hinüberschieben:

168 + 99 =

378 + 203 =

398 + 444 =

436 + 142 =

486 + 158 =

245 + 438 =

Ergänzen auf 1000:

1000 – 123 =

1000 – 397 =

1000 – 835 =

500 – 421 =

800 – 219 =

700 – 429

Der unsichtbare Helfer:

518 – 499 =

693 – 646 =

774 – 431 =

949 – 648 =

922 – 754 =

745 – 167 =

Subtraktion Kettenrechnungen:

200 – 78 – 6 – 14 – 94 =

406 – 30 – 17 – 76 – 13 =

768 – 33 – 69 – 21 =

384 – 28 – 41 – 49 – 24 =

292 – 97 – 64 – 15 =

Freude am Kopfrechnen Name:

Summen bilden:

15 * 8 =

17 * 9 =

12 * 27 =

14 * 15 =

11 * 49 =

21 * 41 =

29 * 17 =

Doppelte Summe:

14 * 23 =

17 * 22 =

23 * 25 =

29 * 17 =

22 * 38 =

Faktoren aufteilen:

18 * 5 =

15 * 6 =

8 * 17 =

35 * 12 =

13 * 6 =

32 * 5 =

Arbeitsblatt 1:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Du darfst die Theorieblätter benutzen.
- Du darfst den Rechenweg und Zwischenresultate aufschreiben, jedoch keine Rechnungen schriftlich lösen.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

317 + 250 =

251 + 339 =

134 + 214 =

61 + 21 + 22 + 15=

25 + 53 + 46 + 6=

89 + 22 + 39 + 47 + 31 =

1000 - 405 =

1000 - 706 =

1000 - 572 =

888 - 122 =

855 - 208 =

905 - 672 =

19 * 17 =

31 * 20 =

167 + 294 =

285 + 298 =

370 + 158 =

95 + 15 + 51 + 30 + 57 =

22 + 34 + 42 + 30 + 36 =

98 + 51 + 8 + 32=

Freude am Kopfrechnen Name:

1000 - 906 =

1000 - 342 =

1000 - 769 =

890 - 587 =

806 - 546 =

203 - 120 =

17 * 33 =

16 * 25 =

19 * 49 =

454 + 394 =

288 + 388 =

276 + 123 =

69 + 15 + 33 + 16=

87 + 16 + 39 + 25=

33 + 23 + 29 + 19=

3 + 95 + 33 + 14=

14 * 29 =

18 * 24 =

Arbeitsblatt 2:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Du darfst die Theorieblätter benutzen.
- Schreibe den Rechenweg bzw. die Zwischenresultate so auf, dass dein Rechenweg nachvollziehbar ist.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

7 * 14 =

11 * 30 =

591 - 269 =

267 - 107 =

409 - 73 – 21 - 36 - 31 - 48 =

1000 - 863 =

1000 - 189 =

286 + 391 =

400 + 195 =

291 + 132 =

89 + 18 + 78 + 10 + 72 =

47 + 12 + 9 + 31 =

11 * 25 =

34 + 91 + 21 + 41 =

272 + 287 =

339 + 227 =

305 - 16 - 27 - 71 - 24 - 89 =

1000 - 753 =

1000 - 475 =

680 - 524 =

Freude am Kopfrechnen Name:

925 - 143 =

461 - 184 =

932 - 829 =

18 * 23 =

27 * 33 =

14 * 21 =

Arbeitsblatt 3:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Du darfst die Theorieblätter benutzen.
- Schreibe den Rechenweg bzw. die Zwischenresultate so auf, dass dein Rechenweg nachvollziehbar ist.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

1000 - 693 =

1000 - 105 =

32 * 12 =

14 * 15 =

130 + 495 =

133 + 258 =

18 + 33 + 90 + 15 + 52 =

68 + 25 + 6 + 42 + 33 =

76 + 81 + 27 + 19 =

572 - 506 =

970 - 654 =

1000 - 758 =

1000 - 96 =

500 - 238 =

13 * 31 =

15 * 19 =

82 + 76 + 14 + 17 =

90 + 34 + 33 + 41 + 25 =

268 + 241 =

331 + 124 =

Freude am Kopfrechnen Name:

248 + 466 =

155 + 258 =

12 * 20 =

35 * 18 =

607 - 511 =

819 - 503 =

Arbeitsblatt 4:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Du darfst die Theorieblätter benutzen.
- Schreibe den Rechenweg bzw. die Zwischenresultate so auf, dass dein Rechenweg nachvollziehbar ist.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

1000 - 41 =

1000 - 748 =

17 * 12 =

18 * 27 =

650 - 248 =

748 - 674 =

107 + 153 =

316 + 137 =

383 + 197 =

62 + 36 + 51 + 13 + 51 =

22 + 10 + 97 + 44 + 46 =

512 - 162 =

1000 - 975 =

1000 - 692 =

1000 - 349 =

14 * 41 =

11 * 31 =

863 - 72 =

615 - 509 =

808 - 219 =

Freude am Kopfrechnen Name:

7 * 13 =

340 + 485 =

290 + 125 =

72 + 42 + 24 + 18 =

12 * 29 =

48 * 43 =

935 - 189 =

Arbeitsblatt 5:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Schreibe so wenig Zwischenschritte wie möglich auf und löse so viel wie möglich im Kopf.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

1000 - 585 =

1000 - 169 =

1000 - 773 =

1000 - 76 =

13 * 24 =

15 * 26 =

174 + 463 =

167 + 306 =

862 - 134 =

533 - 369 =

17 * 25 =

12 * 25 =

66 + 43 + 49 + 48 =

592 - 12 - 61 - 29 - 19=

11 * 47 =

32 * 13 =

158 + 294 =

383 + 478 =

368 - 178 =

912 - 628 =

Freude am Kopfrechnen Name:

450 + 355 =

937 - 31 - 31 - 18 - 13=

267 + 464 =

441 + 575 =

14 * 26 =

28 * 31 =

76 + 12 + 25 + 13 =

762- 94 - 67 - 32 - 7=

153 + 415 =

172 + 294 =

828 - 235 =

261 + 347 =

480 - 353 =

698 - 362 =

774 - 406 =

389 + 416 =

228 + 375 =

18 * 23 =

15 * 27 =

22 * 25 =

28 * 36 =

27 * 33 =

Arbeitsblatt 6:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Schreibe so wenig Zwischenschritte wie möglich auf und löse so viel wie möglich im Kopf.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

1000 - 571 =

1000 - 858 =

1000 - 704 =

1000 - 393 =

25 * 11 =

20 * 22 =

12 * 23 =

68 + 53 + 44 + 8 =

409 + 199 =

397 + 328 =

443 + 282 =

750 - 568 =

933 - 411 =

26 + 43 + 46 + 35 =

23 * 19 =

23 * 28 =

562 - 476 =

499 - 331 =

375 - 282 =

853 - 638 =

Freude am Kopfrechnen Name:

11 * 22 =

13 * 22 =

285 - 3 - 71 - 29 - 25 =

8 + 42 + 14 + 7 =

1000 - 159 =

1000 - 487 =

415 + 226 =

491 + 260 =

236 + 270 =

152 + 295 =

735 - 382 =

886 - 161 =

282 + 415 =

237 + 383 =

115 + 326 =

286 + 258 =

344 + 467 =

13 * 25 =

13 * 28 =

94 + 33 + 6 + 48 =

652 - 192 - 28 - 44 -107 =

295 - 68 +- 70 - 23 - 45 =

38 * 42 =

Arbeitsblatt 7:

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Schreibe so wenig Zwischenschritte wie möglich auf und löse so viel wie möglich im Kopf.
- Löse in 5 Minuten so viele Aufgaben wie möglich.

1000 - 722 =

1000 - 542 =

1000 - 771 =

49 + 414 =

162 + 206 =

473 + 454 =

420 + 481 =

11 * 13 =

12 * 41 =

15 * 26 =

327 - 217 =

286 - 50 =

902 - 468 =

527 - 475 =

94 + 96 + 45 + 63 =

14 + 20 + 97 + 75 =

1000 - 602 =

1000 - 205 =

253 + 262 =

178 + 464 =

163 + 255 =

730 - 198 =

836 - 83 =

10 + 22 + 34 + 86 =

95 + 37 + 53 + 9 =

24 * 15 =

11 * 28 =

17 * 23 =

18 * 18 =

411 + 156 =

396 + 146 =

300 + 302 =

296 + 224 =

549 - 480 =

493 - 17 =

914 - 775 =

16 * 27 =

13 * 36 =

239 + 325 =

736 - 49 - 10 - 68 - 82 =

236 + 66 - 29 – 54 - 52 =

298 + 391 + 251 =

892 – 756 =

332 + 356 =

Arbeitsblatt 8 (LEHRER):

- Schreibe das Blatt mit deinem Namen an.
- Die Aufgaben werden dir vorgelesen, schreibe nur das Resultat auf das Blatt.

1000 - 181 = 819

1000 - 662 = 338

279 + 181 = 460

128 + 247 = 375

5 + 77 + 30 + 63 =175

219 - 24 = 195

695 - 316 = 379

10 * 15 = 150

21 * 18 = 378

23 * 13 = 299

368 + 266 = 634

172 + 160 = 332

267 + 357 = 624

1000 - 311 = 689

1000 - 497 = 503

1000 - 65 = 935

129 - 4 = 125

649 - 230 = 419

15 * 28 = 420

106 + 496 = 602

132 + 403 = 535

Freude am Kopfrechnen Name:

453 + 338 = 791

418- 204 = 214

404 - 108 = 296

12 * 8 = 96

7 * 13 = 91

63 + 8 + 56 + 24 = 151

66 + 48 + 68 + 87 = 269

Klasse 1 Anzahl richtig gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5	Übung 6
Schüler 1	6	3	9	12	11	11
Schüler 2	9	11	23	13	22	23
Schüler 3	8	10	17	12	17	12
Schüler 4	13	17	17	12	16	14
Schüler 5	7	10	9	7	14	13
Schüler 6	9	10	19	17	22	22
Schüler 7	8	7	12	9	11	18
Schüler 8	9	9	14	12	15	13
Schüler 9	10	13	13	10	19	13
Median	**9**	**10**	**14**	**12**	**16**	**13**

Klasse 1 Anzahl falsch gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5	Übung 6
Schüler 1	2	1	1	0	3	1
Schüler 2	2	1	0	2	0	0
Schüler 3	2	1	1	1	2	3
Schüler 4	1	0	3	1	0	0
Schüler 5	5	2	5	2	2	2
Schüler 6	3	3	3	0	1	5
Schüler 7	3	2	5	4	6	4
Schüler 8	2	3	3	3	0	4
Schüler 9	2	1	2	2	1	2

Klasse 1 Anzahl gesamthaft gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5	Übung 6
Schüler 1	8	4	10	12	14	12
Schüler 2	11	12	23	15	22	23
Schüler 3	10	11	18	13	19	15
Schüler 4	14	17	20	13	16	14
Schüler 5	12	12	14	9	16	15
Schüler 6	12	13	22	17	23	27
Schüler 7	11	9	17	13	17	22
Schüler 8	11	12	17	15	15	17
Schüler 9	12	14	15	12	20	15

Klasse 1 Fehlerquote

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5	Übung 6
Schüler 1	0.25	0.25	0.1	0	0.21428571	0.08333333
Schüler 2	0.18181818	0.08333333	0	0.13333333	0	0
Schüler 3	0.2	0.09090909	0.05555556	0.07692308	0.10526316	0.2
Schüler 4	0.07142857	0	0.15	0.07692308	0	0
Schüler 5	0.41666667	0.16666667	0.35714286	0.22222222	0.125	0.13333333
Schüler 6	0.25	0.23076923	0.13636364	0	0.04347826	0.18518519

Schüler 7	0.27272727	0.22222222	0.29411765	0.30769231	0.35294118	0.18181818
Schüler 8	0.18181818	0.25	0.17647059	0.2	0	0.23529412
Schüler 9	0.16666667	0.07142857	0.13333333	0.16666667	0.05	0.13333333
Median	**0.2**	**0.16666667**	**0.13636364**	**0.13333333**	**0.05**	**0.13333333**

Klasse 2 Anzahl richtig gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5
Schüler 10	8	6	19	14	15
Schüler 11	7	6	13	11	5
Schüler 12	8	12	16	15	8
Schüler 13	9	2	13	16	12
Schüler 14	abwesend	11	18	19	22
Schüler 15	10	10	14	23	19
Schüler 16	13	10	15	23	23
Schüler 17	7	8	23	21	17
Schüler 18	9	16	16	22	20
Schüler 19	8	7	12	18	15
Schüler 20	12	13	24	24	13
Schüler 21	8	11	12	14	abwesend
Schüler 22	10	6	13	12	14
Schüler 23	8	7	8	15	abwesend
Schüler 24	8	9	14	16	14
Median	**8**	**9**	**14**	**16**	**15**

Klasse 2 Anzahl falsch gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5
Schüler 10	4	7	4	7	4
Schüler 11	5	2	3	6	4
Schüler 12	1	3	1	7	6
Schüler 13	3	2	0	2	0
Schüler 14	0	2	5	2	2
Schüler 15	1	0	3	3	1
Schüler 16	0	0	1	2	1
Schüler 17	4	3	2	5	4
Schüler 18	1	0	3	2	3
Schüler 19	1	3	2	3	1
Schüler 20	0	3	1	2	1
Schüler 21	2	0	3	1	0
Schüler 22	3	2	1	4	3
Schüler 23	2	2	4	2	0
Schüler 24	2	0	3	2	3

Klasse 2 Anzahl gesamthaft gelöste Aufgaben

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5
Schüler 10	12	13	23	21	19
Schüler 11	12	8	16	17	9
Schüler 12	9	15	17	22	14
Schüler 13	12	4	13	18	12
Schüler 14	abwesend	13	23	21	24
Schüler 15	11	10	17	26	20

Schüler 16	13	10	16	25	24
Schüler 17	11	11	25	26	21
Schüler 18	10	16	19	24	23
Schüler 19	9	10	14	21	16
Schüler 20	12	16	25	26	14
Schüler 21	10	11	15	15	abwesend
Schüler 22	13	8	14	16	17
Schüler 23	10	9	12	17	abwesend
Schüler 24	10	9	17	18	17

Fehlerquote

	Übung 1	Übung 2	Übung 3	Übung 4	Übung 5
Schüler 10	0.33333333	0.53846154	0.17391304	0.33333333	0.21052632
Schüler 11	0.41666667	0.25	0.1875	0.35294118	0.44444444
Schüler 12	0.11111111	0.2	0.05882353	0.31818182	0.42857143
Schüler 13	0.25	0.5	0	0.11111111	0
Schüler 14	abwesend	0.15384615	0.2173913	0.0952381	0.08333333
Schüler 15	0.09090909	0	0.17647059	0.11538462	0.05
Schüler 16	0	0	0.0625	0.08	0.04166667
Schüler 17	0.36363636	0.27272727	0.08	0.19230769	0.19047619
Schüler 18	0.1	0	0.15789474	0.08333333	0.13043478
Schüler 19	0.11111111	0.3	0.14285714	0.14285714	0.0625
Schüler 20	0	0.1875	0.04	0.07692308	0.07142857
Schüler 21	0.2	0	0.2	0.06666667	abwesend
Schüler 22	0.23076923	0.25	0.07142857	0.25	0.17647059
Schüler 23	0.2	0.22222222	0.33333333	0.11764706	abwesend
Schüler 24	0.2	0	0.17647059	0.11111111	0.17647059
Median	**0.2**	**0.2**	**0.15789474**	**0.11538462**	**0.13043478**