Freude am Kopfrechnen vermitteln

Eine Unterrichtseinheit planen, mit dem Ziel Oberstufenschülern Freude am Kopfrechen zu vermitteln

eine Maturaarbeit von

Jérôme Landtwing

8. Mai 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

- Weshalb habe ich dieses Thema gewählt: Freude an Mathematik, Freude weitergeben, evtl. Absicht später im Lehrerberuf tätig zu sein

[1] nach Mittring
[2] nach Mittring

- Mir fällt es leicht, mit Zahlen zu jonglieren, Mathematik hat mich von klein auf begeistert, möchte mein Wissen, meine Freude weitergeben!
- Meist verlieren junge Menschen die Lust am Kopfrechnen, an der Mathematik weil sie überfordert werden, Aufgaben nur nach Schema XY lösen müssen.

DANKSAGUNGEN:

2 Abstract

Kurzzusammenfassung → am Schluss schreiben. 1 A4 Seite

3 Einleitung

- Gegenstand der Untersuchung
- Problemstellung
- Hypothese
- Theorie und Ziel meiner Arbeit
- Eingrenzung des Untersuchungsfeldes
- Ausgangslage Skizzieren

2 A4 Seiten
Kopfrechnen ist keine schwierige Sache, zumindest nach meiner Auffassung. Oftmals beschäftige ich mich mit der Frage, weshalb das, was mir so leicht fällt, anderen so schwer fällt. Kopfrechnen bedeutet für mich nicht, dass wenn man eine Rechnung wie $31 \cdot 29$ sieht, unmittelbar das Resultat 899 ausspuckt wie ein Taschenrechner. Vielmehr bedeutet Kopfrechnen für mich sich zu helfen wissen, wie man die Rechnung so vereinfachen kann, damit sie im Kopf lösbar ist. Mit anderen Worten, will man Rechnungen im Kopf lösen, so wie dies ein Taschenrechner tut, so wird es schnell komplex und man verliert die Lust am Kopfrechnen. Geht man jedoch anders an Rechnungen heran und probiert diese zuerst zu vereinfachen und anschliessend eine einfachere Rechnung im Kopf zu lösen, so wird man erfolgreich sein und öfters den Kopf anstelle des Taschenrechners brauchen. In meiner Arbeit möchte ich eine Gruppe von Oberstufenschülern dazu motivieren im Alltag nicht sofort zum im Smartphone integrierten Taschenrechner zu greifen, sondern solche Rechnungen im Kopf zu lösen Um dies zu erreichen, möchte ich den Schülern einige dieser Tricks weitergeben. Dafür habe ich eine Doppelllektion

zu Verfügung. Jedoch sich der gewünschte Effekt nicht nach dieser Doppellektion einstellen, vielmehr müssen die neu erlernten Methoden angewendet und bestenfalls von den Schülern selbst weiterentwickelt und verfeinert werden. Deshalb lösen die Schüler nach dieser Doppellektion übern einen Monat zu Beginn jeder Mathestunde 5 Minuten Aufgaben. Dadurch wird meine Arbeit in drei Teile aufgeteilt. Die Planung der Doppellektion, was will ich vermitteln, wie will ich es vermitteln, welche Probleme sind dabei aufgetreten. Im zweiten Teil werde ich dokumentieren, wie die Durchführung abgelaufen ist, was hat so geklappt, wie ich es mir wünschte, was nicht. Im letzten Teil bereite ich das ganze nochmals auf und schaue auf mein Projekt zurück. Habe ich mein Ziel erreicht?, was müsste ich für eine weitere Durchführung verbessern? Dieser Teil basiere ich auf der Rückmeldung der Lehrperson (Herr Jud) und dem Verlauf der Aufgaben die die Schüler zu Beginn jeder Lektion lösten mussten.

4 Material und Methoden

Vorgehen

5 Inhalt der Lektionen

Ich möchte den Schülern diverse Tricks beibringen, die ihnen helfen Rechnungen zu vereinfachen. Diese Tricks sind im wesentlichen algebraische Umformungen und mathematisch korrekt! Damit kein Durcheinander entsteht, bespreche und erläutere ich im kommenden Teil nacheinander die vier Grundrechenarten: den Hintergrund, Alltagsbeispiele und die Tricks, welche für die jeweilige Rechenart angewendet werden können bezüglich der jeweiligen Rechenart.

Die meisten Tricks bauen auf den 3 Grundgesetze der Mathematik auf. Die Schüler haben sie im Unterricht bereits kennengelernt, deshalb werde ich sie hier nur kurz anschneiden und nicht gründlich ausführen.

5.1 die Grundgesetze der Mathematik

Assoziativgesetz

$$(a+b)+c = a+(b+c) \tag{1}$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Es spielt also keine Rolle ob ich zuerst a und b zusammenzähle und dann c addiere oder zuerst b und c addiere und dann a dazuzähle. Das Assoziativgesetz ist gültig für die Addition und die Multiplikation, jedoch nicht für die Subtraktion und Division. Muss ich den allgemeinen Fall ∘ besprechen?

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{2}$$

Das Distributivgesetz besagt, dass bei der Multiplikation eines Faktors mit einer Summe (oder auch einer Differenz) die Multiplikation in zwei Teilschritte aufgeteilt werden darf, indem man die beiden Summanden (in der Allgemeinen Formel a und b) einzeln mit dem Faktor (in der allgemeinen Formel c) multipliziert und aus diesen zwei Teilprodukten ($a \cdot c$, $b \cdot c$) die Summe bildet.
~~Ausformuliert bedeutet das Distributivgesetz, dass bei einer Multiplikation die Faktoren in Summe aufgeteilt werden und nach obigem Schema weitergerechnet werden kann, das Distributivgesetz gilt für den allgemeinen Fall einer Multiplikation, wobei der Faktor in sowohl in eine Summe als auch in eine Differenz aufgeteilt werden darf.~~

Kommutativgesetz

$$a + b = b + a \tag{3}$$

Hier wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Summanden das Resultat nicht beeinflusst. Bei der Addition und der Subtraktion darf die Reihenfolge, in der man die einzelnen Summanden zusammenzählt bzw. die Faktoren multipliziert frei gewählt werden. Konkret erlaubt uns dieses Gesetz die einzelnen Summanden oder Faktoren so zu gruppieren, dass es uns leichter fällt sie zusammenzuzählen. Mehr dazu auf Seite **??**.

5.2 Addition

Bei einer Addition werden zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt. Formal wird eine Addition so dargestellt:

$$Summand_1 + Summand_2 + Summand_3 + \ldots + Summand_n = Summe$$

Plusrechnen, was tut man genau?, was passiert?, evtl Zahlenstrahl

5.2.1 Schriftlich

Da ich mich in meiner Arbeit mit dem Rechnen im Kopf befasse und meine Probanden die Oberstufe besuchen, setze ich die Kenntnis der schriftlichen Addition voraus. Deshalb werde ich hier nur kurz im Tiefflug darüberstreifen, um zu repetieren, exerzieren oder aufzufrischen.
Die schriftliche Addition funktioniert folgendermassen: Man schreibt die

Zahlen untereinander und beginnt von der Einerstelle sich vorzuarbeiten bis man bei der Stelle mit der grössten Zehnerpotenz angekommen (im Beispiel die Hunderterstelle) ist. Die Rechenrichtung ist von rechts nach links. Ist das Ergebnis in einer Spalte grösser als 10, so wird dies als Übertrag in die nächste Spalte (nächst grössere Zehnerstelle) eingeschrieben.

		Hunderter	Zehner	Einer
		1	3	4
		1	6	4
	+		5	3
		2	14	11
		2	4	1
Überträge	+	1	1	
		3	5	1

Abbildung 1: Die schriftliche Addition von 134 + 164 + 53

5.2.2 Von rechts nach links

Eine beliebte Methode, bei der man exakt die gleichen Rechenschritte wie bei der schriftlichen Addition durchführt, jedoch ohne sich die Zahlen untereinander aufzuschreiben. Man Rechnet also nach dem gleichen Schema wie in Abbildung 5.2.1. Man rechnet Zeile für Zeile, beginnend bei der Einerstelle und arbeitet sich Zeile für Zeile nach links vor bis die Zahlen ausgehen. Dies ist jedoch eine sehr brachiale Standardmethode, klar führt auch sie ans Ziel, doch muss man sich, und das sei der grosse Nachteil dieser Methode extrem viele Zwischenresultate merken. Ich möchte niemanden der sich diese Methode zu eigen gemacht hat davon abhalten so zu rechnen, jedoch werde ich im folgenden einige Tricks zeigen, mit welchen man solche Rechnungen auf eine andere Weise lösen kann.

5.2.3 Kommutativgesetz / Gruppen Bilden

Die Definition des Kommutativgesetzes (zu finden auf Seite 3 Gleichung 3) besagt, dass bei Additionen und Multiplikationen die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren frei gewählt werden kann. Dies ist vor allem bei Kettenrechnungen ein sehr mächtiges Werkzeug! Am besten ordnet man die einzelnen Glieder einer Kettenrechnung so an, dass man mit dem kleinstmöglichen Aufwand ans Ziel kommt.

~~Das Kommutativgesetz wurde bereits auf Seite 3, Gleichung 3 vorgestellt. Hier erläutere ich nun, wie man sich die vom Kommutativgesetz besagten Regeln zu nutze machen kann. Aus dem Kommutativgesetz folgt, dass die Reihenfolge, in der man die verschiednen Summanden zusammenzählen will frei wählbar ist. Am besten wählt man sie so, dass man möglichst wenig zu~~

~~rechnen hat, indem man zum Beispiel Gruppen bilden, die Zusammen eine runde Zahl ergeben. Der Trick, Gruppen zu bilden, ist vor allem wenn es um Kettenrechnungen geht ein sehr mächtiges Werkzeug!~~

$$13 + 56 + 34 + 53 =?$$

Versucht man Gruppen zu bilden, so wird den meisten ins Auge stechen, dass sich die Einerstellen der Zahlen 56 und 34 zusammen auf 10 ergänzen, 56 + 34 also eine runde Zahl (90) ergeben. Wendet man diesen Weg an, so kann man die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(56 + 34) + 13 + 53 = 90 + 13 + 53 = 103 + 53 = 156$$

Jedoch könnte man auch sehen, dass die Einerstellen der Zahlen 13, 34, 53 sich auch auf 10 ergänzen und die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(13 + 34 + 53) + 56 = 100 + 56 = 156$$

Sowohl der erste als auch der zweite Weg sind korrekt, klar könnte man auch im Kopf von Links nach Rechts immer eine Zahl zur nächsten dazu addieren, jedoch entstehen dabei eine Vielzahl an Zwischenschritten / Zwischenresultaten und das wollen wir beim Kopfrechnen vermeiden. Mit diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aufgabe im Kopf zu rechnen. Es gibt dabei weder richtig noch falsch vielmehr sind es Wege. Jeder Schüler soll also seinen eigenen Weg finden, der für ihn am logischsten erscheint.

5.2.4 [Mein Trick] der unsichtbare Gehilfe

Die Summe verändert sich nicht, wenn beim einen Summanden eine Zahl addiert wird, wenn man beim anderen Summanden die selbe Zahl wieder abzieht. Diesen Trick ist sehr hilfreich um **Zehnerübergänge zu vermeiden**. Man vermeidet den Zehnerübergang indem man die eine Zahl zu einer Zehnerzahl ergänzt bzw. reduziert. Dadurch führt man nicht einen Zehnerschritt im eigentlichen Sinne aus, sondern macht den Schritt zum vollen Zehner. Ein ganz banales Beispiel hierfür ist die Addition von 99. Was ergibt 23 + 99. In diesem Beispiel lohnt es sich $(23 - 1) + (99 + 1)$ zu rechnen, also $22 + 100 = 122$ Die Korrektheit dieses Tricks lässt sich ganz einfach wie folgt beweisen.

$$(a + x) + (b - x) = a + b + (x - x) = a + b$$

5.2.5 Die Rädchenmethode[3]

Eine Methode die hilfreich ist, den Vorgang zu visualisieren. Diese Methode basiert auf einem Rad auf dem die Ziffern von 1 - 10 der Reihe nach aufgelistet sind (siehe Abbildung 2). Die Rechenrichtung ist wieder von rechts nach

[3]nach Mittring

links, also von der Einerstelle hin zur Zehner-, Hunderter-, und Tausenderstelle. Wie bei der schriftlichen Addition zählt man die Werte der jeweiligen Spalte zusammen, in diesem Fall mithilfe des Zählrades. Die Anzeigeposition ist jeweils oben in der Mitte. Man stellt nun das Rad auf den Startwert ein, also den Einerwert der ersten Zahl. Den nächsten Wert addiert man indem man das Rad um so viele Stellen dreht, wie die Zahl die man addieren gross ist. Schliesslich erhält man einen neuen Wert und kann, sofern eine weitere Zahl addiert werden muss, den selben Schritt nochmals von vorne machen. Die Richtung für die Addition ist für das Rad in Abbildung 2 im Uhrzeigersinn. Wichtig ist, dass sobald man die Zehn überquert, sich merkt, dass ein Überschlag entstanden ist und diesen bei der Berechnung der nächsten Zeile berücksichtigt indem man ihn addiert. Beispiel anfügen.

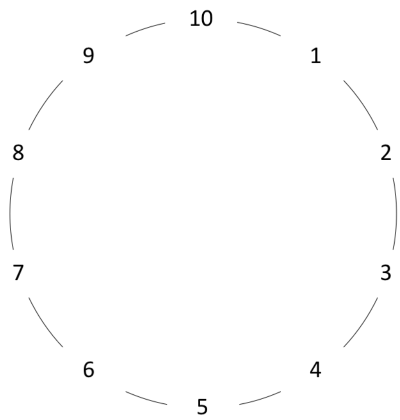

Abbildung 2: Verbildlichung der Rädchenmethode

5.2.6 Aufrunden[4]

Diese Methode ist eine Methode die vor allem im Alltag ihre Anwendung findet. Man braucht sie hauptsächlich um eine Überschlagsrechnung anzustellen. Die Methode funktioniert folgendermassen. Wir stellen uns einen Rundgang durch den Einkaufsmarkt vor. Ich lege nacheinander einen Bund Tomaten für 3.95CHF, ein Yoghurt für 0.95CHF, eine Tafel Schokolade für 1.35CHF und eine Flasche Champagner für 9.95 in meinen Einkaufswagen. Ich möchte überprüfen ob, das was die Kassiererin berechnet stimmt, deshalb überschlage ich die Kosten für meinen Einkauf im Kopf: Ich könnte die genauen Preise addieren, jedoch würden die vielen Kommastellen mein Gedächtnis stark beanspruchen, deshalb wenden wir einen kleinen Trick an und runden die Preise auf den nächstgelegenen schönen Betrag (je nach dem wie genau die Überschlagsrechnung sein soll). Damit ich die Zahlen leichter

[4] nach Mittring

im Kopf addieren kann, zähle ich bei allen 5 Rappen hinzu, also zähle ich: $4+1+1.40+10 = 16.40$ zusammen. Da ich jedoch das genaue Resultat wissen möchte, überlege ich wie viel mal ich 5 Rappen dazugezählt habe. Es sind 4 Mal, damit ich den genauen Betrag erhalte, ziehe ich diesen Betrag also 4 Mal 5 Rappen (= 20 Rappen) vom Endergebnis ab: $16.40 - 0.20 = 16.20$ Und siehe da, an der Kasse muss ich exakt 16.20 Franken bezahlen.

Die Zahlen, die man zusammenzählen will, auf schöne Beträge runden für eine Überschlagsrechnung. Will man am Schluss das genaue Ergebnis, so muss man den Betrag den man dazugezählt hat wieder abzählen.

5.3 Subtraktion

Bei einer Subtraktion werden eine oder mehrere Zahlen von einer Zahl abgezogen. Der Allgemeine Fall wird so dargestellt.

$$Minuend - Subtrahend_1 - Subtrahend_2 - \ldots - Subtrahend_n = Differenz \tag{4}$$

5.3.1 die schriftliche Subtraktion

Wie bereits bei der Addition werde ich auch die schriftliche Subtraktion nur aus dem Gründen der Anschaulichkeit hier besprechen. Wie bei der schriftlichen Addition werden die Zahlen untereinander hingeschrieben so dass Einer-, Zehner- und Hunderterstelle übereinander stehen. Danach wird in jeder Spalte einzeln jeweils alle Subtrahenden vom Minuenden abgezogen. Ist die Summe der Subtrahenden kleiner als der Minuend, so kann die Differenz problemlos ausgerechnet werden und in der jeweiligen Spalte als Ergebnis eingetragen werden. Etwas komplizierter wird es, wenn die Summe der Subtrahenden grösser ist als der Minuend, also eine grosse Zahl von einer kleinen abgezogen werden soll. Da wir uns in der Menge der natürlichen Zahlen bewegen gibt es keine negativen Zahlen und Resultate. Deshalb muss man, damit die Subtraktion dennoch vollführt werden kann von der nächsthöheren Stelle einen oder mehrere Zehner geborgt werden. (in der Abbildung grün hervorgehoben.) Wer möchte kann es auch wie folgt umstellen und den Überschlag als zusätzlichen Subtrahenden in der jeweiligen Zeile hineinschreiben. Eine alternative Methode findet sich im Kapitel **??**. Summe bilden und ergänzen im Kapitel Gruppen bilden erklären!

		Hunderter	Zehner	Einer
Minuend		(6 -1)	2	8
Subtrahend	-	1	8	2
Differenz		4	4	6

Abbildung 3: Die schriftliche Subtraktion: 628 - 182

5.3.2 Kettenrechnungen

Zieht man nacheinander mehrere Zahlen von einer Zahl ab, kann die Summe aller Subtrahenden vom Minuenden abgezogen werden. Dies lässt sich ganz einfach mit dem Trick beweisen, das man alle Subtrahenden in eine Klammer setzt und ein Minus davor. Denn das Minus wechselt alle Vorzeichen in der Klammer.

$$a - b - c - d = a - (b + c + d)$$

		Hunderter	Zehner	Einer
Minuend		(5 - 1)	2	3
Subtrahend_1	-	3	4	1
Subtrahend_2	-	1	3	1
Differenz			5	1

Abbildung 4: Die schriftliche Subtraktion: 523 - 341 - 131

5.3.3 [mein Trick] der unsichtbare Helfer

Die Differenz gibt an, wie gross der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist. Als Beispiel möchte ich zwei fiktive nebeneinanderstehende Hochhäuser ins Leben rufen, das eine ist 10 Meter höher als das andere. Meine Überlegungen zu diesem Beispiel: Ich rufe drei Betrachter ins Leben: der erste Betrachter ist auf der Höhe des zehnten Stockwerkes der Hochhäuser, der zweite auf der Höhe des Erdgeschosses und der dritte Betrachter befindet sich im Erdmittelpunkt. Nun wollen alle drei Betrachter herausfinden wie gross der Höhenunterschied zwischen den beiden Häusern ist. Erhalten sie verschiedene Resultate? Nein erhalten sie nicht. Aus dieser Überlegung habe ich den folgenden Trick abgeleitet: die Differenz verändert sich nicht, wenn sowohl beim Minuenden als auch beim Subtrahenden die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird. Der algebraische Beweis sieht so aus:

$$(a - x) - (b - x) = a - x - b + x = a - b - x + x = a - b$$

$$(a + x) - (b + x) = a + x - b - x = a - b + x - x = a - b$$

Weil das Minus die Vorzeichen in der Klammer wechselt, entstehen im Zusammenhang mit x zwei gegenteilige Vorzeichen, die sich gegenseitig auslöschen.

5.3.4 Subtraktion einer schönen Zahl

Der Begriff schöne Zahlen wurde in der Einleitung definiert. MACHEN! Am Beispiel der Rechnung 1000 - 738 möchte ich erklären, wie man die Subtraktion von einer Runden zahl vereinfachen kann: Wie man sieht ist in

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	0	0	0
-		7	3	8
Überträge	1	1	1	
		2	6	2

Abbildung 5: Die Subtraktion von einer schönen Zahl

allen Zeilen ausser der Einerstelle ein übertrag von 1 entstanden, dies ist keine Überraschung, denn zieht man von Null eine Zahl die ungleich 0 ist ab, so muss man sich einen Zehner von der nächst grösseren Stelle borgen. Da das für alle schönen Zahlen der Fall ist, kann man die folgende Regel ableiten: **Subtraktion einer schönen Zahl: Alle von 9 abziehen, die letzte von 10.**

5.3.5 Rädchenmethode

Wie bereits bei der Addition kann auch die Subtraktion mit einem Rad verbildlicht werden. Eine Abbildung eines solchen Rades ist auf Seite 6 zu finden. Das System funktioniert auf die gleiche Weise wie bei der Addition nur dass die Umlaufrichtung im gegenuhrzeigersinn gewählt werden muss. Auch der Zehnerüberschlag beim Überschreiten der Null bleibt exakt gleich, nur dass er von der nächsten Stelle abgezogen werden muss statt hinzuzuzählen.

5.4 Multiplikation

Was ist eine Multiplikation

5.4.1 Faktoren Aufteilen

Da die Multiplikation assoziativ ist, darf eine Multiplikation in mehrere Schritte aufgeteilt werden. Beispielsweise darf eine Multiplikation mit 4 als eine Multiplikation mit zwei und nochmals mit zwei angesehen werden. Oder eine Multiplikation mit 5 darf als eine Multiplikation mit 10 und eine anschliessende Division mit 2 (äquivalent zu der Multiplikation mit $\frac{1}{2}$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c \tag{5}$$

Nähere Erläuterungen möchte ich am Beispiel der Rechnung $4 \cdot 27$ durchführen. man kann die Rechnung wie folgt ansehen:

$$4 \cdot 27$$

Betrachtet man die formale Schreibweise des multiplikativen Assoziativgesetzes (Formel 5 auf Seite 9) so kann man die Rechnung auf die folgenden Arten anschauen:

- Man interpretiert die Rechnung so, dass der Faktor 4 als $(a \cdot b)$ angesehen wird also sähe die Rechnung so aus:

  $$(4) \cdot 27 =?$$

  Wie in Formel 5 zu sehen ist, können in der Klammer mehrere Faktoren stehen. Damit sich das Ergebnis der Rechnung nicht verändert muss jedoch das Produkt in der Klammer 4 ergeben. Es bieten sich die folgenden Rechnungen an: $1 \cdot 4$ oder $2 \cdot 2$ (natürlich gäbe es noch viel mehr Multiplikationen mit dem Ergebnis 4. Diese Rechnungen würden jedoch negative Zahlen und oder Brüche beinhalten und sowohl negative Zahlen als auch Brüche sind schwieriger zu handhaben als positive, ganze Zahlen.) Da mit der Umformung $1 \cdot 4$ lediglich Anschauungskosmetik ist, da die Multiplikation mit 1 vernachlässigt werden kann, fahren wir mit der zweiten Möglichkeit $(4 = 2 \cdot 2)$ Also schreiben wir die Rechnung so:

  $$(2 \cdot 2) \cdot 27 =??$$

  Da die Multiplikation kommutativ ist, dürfen die Faktoren in eine beliebige Reihenfolge gebracht werden. Da die Multiplikation mit 2 einfacher ist als die Multiplikation mit 27 nehmen wir die 27 an den Anfang und multiplizieren diese zweimal mit der Zwei.

  $$(27 \cdot 2) \cdot 2 = (54) \cdot 2 = 108$$

- Es ist jedoch auch erlaubt, die 27 in Faktoren zu zerlegen. Hier gibt es wiederum zwei Möglichkeiten: $1 \cdot 27$ und $3 \cdot 9$. Wie im vorherigen Beispiel wird mit der Umformung von 27 zu $27 \cdot 1$ keine Vereinfachung herbeigeführt. Deshalb fahren wir weiter mit der Umformung von 27 zu $3 \cdot 9$ fort und erhalten die folgende Rechnung:

  $$4 \cdot (27) = 4 \cdot (3 \cdot 9) = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 12 \cdot 9$$

  So wurde aus der Rechnung $4 \cdot 27$ eine völlig andere Rechnung $9 \cdot 12$. Wie man das einfach ausrechnen kann, wird im nächsten Kapitel erklärt.

Häääää?

Das Resultat (~~Produkt~~) einer Multiplikation verändert sich nicht, wenn ein Faktor mit einer Zahl multipliziert wird und ein anderer Faktor durch die selbe Zahl geteilt wird. Dankbar für diesen Fall sind alle Zahlen die Vielfache von zwei sind. Beispielsweise die Multiplikation mit 8:

$$125 \cdot 8 = 250 \cdot 4 = 500 \cdot 2 = 1000$$

Die Multiplikation mit 8 wurde substituiert mit drei Multiplikationen mit Zwei.

5.4.2 Summen Bilden

Um diesen Trick anzuwenden macht man sich das Distributivgesetz zu nutze indem man sich aus einem Faktor eine Summe bildet. Es entstehen zwei Teilrechnungen, deshalb macht es vor allem dann Sinn, diesen Trick anzuwenden, wenn man das eine Teilresultat bereits kennt. Vor allem bei der Multiplikation mit Zahlen die nahe an einem Zehner liegen ist dies ein Mittel um sehr schnell an das Resultat zu gelangen. Im vorangehenden Kapitel tauchte die Rechnung $9 \cdot 12$ auf. es gibt wiederum zwei Fälle wie man diese Rechnung lösen kann mit Hilfe des Distributivgesetzes:

- Man macht aus der neun eine Summe: $9 = (10 + (-1)) = (10 - 1)$ und multipliziert diese mit 12:

  $$(10 - 1) \cdot 12 = 10 \cdot 12 - 1 \cdot 12 = 120 - 12 = 108$$

  Die Multiplikation mit 10 ist keine schwierige Sache, lediglich eine null muss am Ende der Zahl angehängt werden und die Multiplikation mit 1 erübrigt sich auch. Also erhält man die Zwischenresultate ohne grosse Rechnereien. Die Subtraktion am Schluss dürfte den meisten leichter von der Hand gehen als die Ursprüngliche Rechnung im Kopf durchzuführen.

- Man verwandelt die 12 in die Summe $12 = (10 + 2)$ und rechnet auf die gleiche Weise wie eben mit Hilfe des Distributivgesetzes weiter:

  $$9 \cdot (10 + 2) = 90 + 18 = 108$$

  Hier tauchen wiederum zwei Multiplikationen auf, deren Produkte zusammengezählt werden müssen. Die Multiplikation $9 \cdot 10$ ist ein Kinderspiel, und die Rechnung $2 \cdot 9$ gehört zum kleinen Einmaleins und erledigt sich auch ohne grosse Schwierigkeiten.

5.4.3 Fingertricks

Die Methode Fingertricks ist eine Veranschaulichung der Methode SSummen Bilden". Sie ist anwendbar, wenn die beiden zu multiplizierenden Zahlen in der Nähe des gleichen Zehners liegen und der Abstand zu diesem nicht grösser als 5 ist. Zuerst werden jede Zahl mit einer Hand dargestellt. Für jeden Einer der zum Zehner dazugezählt werden muss, wird ein Finger nach oben gestreckt. Nicht gebrauchte Finger bleiben an der Hand angelegt und spielen keine Rolle. Für jeden Einer der vom Zehner abgezählt werden muss, wird ein Finger nach unten abgespreizt. Für das Beispiel $23 \cdot 16$ sieht das wie folgt aus: BILD Einfügen Was mit diesem Schritt auf visuell-motorischer Ebene durchgeführt wurde ist nichts anderes als dass die zwei Zahlen 16 und 23 als Summen (20 + (-4)) und (20 + 3) dargestellt.

ohne Finger

5.4.4 Dritte Binomische Formel

Die dritte binomische Formel sieht wie folgt aus:

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$$

Diese Formel kann man sich zu nutze Machen, sobald man zwei Zahlen haben, die nahe beieinander liegen, bevorzugt mit einem Zehner in der Mitte. Beispiel: $22\cdot 18=(20+2)\cdot(20-2)=400-4=496$

5.5 Division

- Lektionen weshalb?
- Weshalb ein grosses Arsenal an Werkzeugen -¿ Damit die Schüler eigene Lösungswege suchen können und diese weiterentwickeln können.
- Aufbau der Lektion
- Aufbau der Übungsblättern / Tests

6 Ergebnisse

7 Diskussion der Ergebnisse

8 Schlusswort