Freude am Kopfrechnen vermitteln

Planung, Durchführung und Auswertung einer Unterrichtseinheit mit dem Ziel, Oberstufenschülern zum Kopfrechnen zu motivieren

Autor, Klasse:
Jérôme Landtwing, M4a

Betreuende Lehrperson:
Hans Heinrich Huwiler

KSA Pfäffikon
Maturaarbeit Oktober 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

- Weshalb habe ich dieses Thema gewählt: Freude an Mathematik, Freude weitergeben, evtl. Absicht später im Lehrerberuf tätig zu sein
- Mir fällt es leicht, mit Zahlen zu jonglieren, Mathematik hat mich von klein auf begeistert, möchte mein Wissen, meine Freude weitergeben!
- Meist verlieren junge Menschen die Lust am Kopfrechnen, an der Mathematik weil sie überfordert werden, Aufgaben nur nach Schema XY lösen müssen.

1.1 DANKSAGUNGEN:

Testpublikum Probelektion: Sanja, Evelin, Jeannine und Céline
Céline fürs Zuhören und die private Unterstützung.

\input{abstract } Kurzzusammenfassung → am Schluss schreiben. 1 A4 Seite

2 Einleitung

Weshalb ist die Mathe unter meinen Mitschülern so unbeliebt? Weshalb fürchten sich so viele Schüler vor dem Kopfrechnen? Diese Fragen habe ich mir auch gestellt, denn für mich sind sowohl die Mathematik als auch das Rechnen im Kopf zwei Dinge, die ich mit Leidenschaft und gerne tue. Vielfach treffe ich bei meinen Mitschülern auf eine Hilfslosigkeit oder anders ausgedrückt gehen sie Aufgaben, die sie im Kopf lösen sollen mit sehr brachialen Methoden an und überfordern so ihren Kopf und sich selbst damit. Genau diese Schüler sind es, die mich mit schrägen Blicken beäugen, wenn ich ihnen erzähle, dass ich mich in der Freizeit freiwillig mit Mathematik beschäftige. Jedoch befasse ich mich in der Freizeit nicht mit Schulmathematik, welche hauptsächlich daraus besteht Zahlen aus Aufgaben herauszulesen und in Formeln, die allenfalls umgeformt werden müssen, einzusetzen. Solche Aufgaben, welche Beispielsweise von Matheolympiaden stammen, sind so aufgebaut, dass sie nicht mit Zahlen erschlagen werden können, sondern vielmehr durch kreative Lösungsansätze und dem Aufdecken von Systemen gelöst werden können. Genau darum geht es in dieser Arbeit. Ich möchte einer Oberstufenklasse vermitteln, dass es in der Mathematik eben nicht darum geht, Zahlen aus Aufgaben herauszulesen und in Formeln einzusetzen, sondern vielmehr, dass Mathematik sehr viel mit Kreativität zu tun hat. Dies ist auch ein Thema dass Dambeck (2012) beschäftigt. Dambeck (2012, S. 83) erzählt von einer Studie, welche dem Phänomen der Kapitänsaufgabe genauer auf den Grund gegangen ist. Die Kapitänsaufgabe gibt es in vielen verschiedenen Varianten, das in der von Dambeck (2012) erwähnten Studie verwendete Beispiel lautet wie folgt: „Ein 27 Jahre alter Hirte hat 25 Schafe und 10 Ziegen. Wie alt ist der Hirte?“(Dambeck, 2012, S. 82) Um die Antwort zu erlangen, darf man – um himmels Willen – nichts rechnen, sondern muss nur die Aufgabe genau lesen, um herauszufinden dass der Hirte 27 Jahre alt ist. Dennoch errechneten erstaunlich viele Kinder ein Alter für den Kapitän. Das verwunderliche dieser Studie war, desto älter die Kinder waren, desto mehr von ihnen errechneten eine Lösung für die Aufgabe. Um die Ergebnisse der Studie zusammenzufassen: „Je mehr Mathematikunterricht die Schüler erlebt haben, umso schneller rechnen sie ohne nachzudenken einfach blind drauflos.“(Dambeck, 2012, s. 83). Die Schüler werden also in der Schule darauf getrimmt, Zahlen aus der Aufgabe herauszulesen, einer Variable zuzuordnen und eine Formel einzusetzen. Das führt auch dazu, dass die Schüler aus einer Anzahl Jahren, einer Anzahl Schafen und einer Anzahl Ziegen zu einer Anzahl Jahren zusammenzählen. Vielmehr ist die Mathematik die Kunst, eine möglichst einfache Lösung für ein komplexes Problem zu finden. Diesen Grundgedanken wollte ich einer Oberstufenklasse vermitteln. Besonders geeignet dafür erschien mir das Thema Kopfrechnen. Denn gerade im Kopfrechnen kann man extrem viel herausholen, indem man eine geschickte Lösung sucht. Laut Dambeck (2012, S. 10) gewinnen die Schüler

Freude an der Mathematik, wenn sie eigene Wege suchen und auch gehen können. Genau dafür eignet sich das Kopfrechnen besonders gut, da es eine Vielzahl an verschiedenen Wegen gibt, die ans Ziel führen. Ich möchte somit gleich zweierlei Dinge erreichen. Ich möchte einer Gruppe von Oberstufenschülern einige Techniken beibringen, die es ihnen erlauben Kopfrechenaufgaben auf verschiedene Weisen zu lösen und ihnen so einerseits auf der einen Seite Freude am Kopfrechnen vermitteln und andererseits auf einer Metaebene ihnen zeigen, worum es in der Mathematik wirklich geht.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich sogleich noch zwei wichtige Begriffe einführen, die im Verlauf der Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Unter Kopfrechnen versteht Krauthausen und Scherer (2014, S. 43): „Kopfrechnen, bei dem ohne einen Notation von Zwischenschritten die Lösung einer Aufgab im Kopf erfolgt (dies geschieht unter Ausnutzung von Strategien) [...] “diese Definition kann ich 1:1 zustimmen und werde sie deshalb auch so übernehmen. Die Definition des halbschriftlichen Rechnens lautet wie folgt: „*Halbschriftliches (oder gestütztes Kopfrechnen)*, welches durch die Notation von Zwischenschritten oder Teilergebnissen gekennzeichnet ist. “(Krauthausen & Scherer, 2014, S. 43) Das halbschriftliche Rechnen dient, in meinem Sinne, vor allem dazu sich Strategien für das Kopfrechnen anzulegen und so auf einem begleiteten Wege auszuprobieren und zu verinnerlichen.

In der Arbeit werde ich des öfteren von *mathematischen Tricks* sprechen. Diese *mathematischen Tricks* sind einfache Termumformungen, die kompliziert aussehende Rechnungen so umformen, damit sie im Kopf lösbar sind. Diese Tricks gründen auf den mathematischen Grundgesetzen und sind mathematisch korrekt!

Wenn es um das Kopfrechnen geht, ist die Vedische Mathematik nicht weit. Die Vedische Mathematik besteht hauptsächlich auf Abkürzungen, die einem Helfen Rechnungen im Kopf zu lösen auf. Ich habe mich bewusst von der Vedischen Mathemaik ferngehalten, da ich diese Tricks selbst nicht durchschauen kann, weiter braucht es um erfolgreich zu sein ein sehr breites Repetoire, an der Zahl sind es rund 30 Methoden, die man kennen sollte.

3 (KICKEN) Inhalte der Lektion

Das Ziel meiner Lektion war den Schülern die Freude am Kopfrechnen zu vermitteln, die ich besitze. Dies wollte ich erreichen, indem ich ihnen einige Tricks beibringen wollte, mit denen sich Rechnungen so vereinfachen lassen und sich so im Kopf lösbar sind. Im folgenden Kapitel geht es darum, was ich vermitteln möchte. Es werden die mathematischen Grundlagen und wie die Tricks funktionieren erklärt.

3.1 Übergeordnetes Ziel

Bei der Planung der Lektion waren mit vielerlei Dinge sehr wichtig. Einerseits wollte ich den Schülern möglichst viele verschiedenen Werkzeuge auf den Weg geben, jedoch so, dass sie von allen Schülern verstanden werden. Weiter wollte ich, das meine Freude am Kopfrechnen auf einige Schüler überspringt und dass hoffentlich einige von ihnen den mathematischen Grundgedanken mit auf den Weg nehmen. Am wichtigsten war mir jedoch, dass alle Schüler aus dem Projekt profitieren konnten.

Um dies zu erreichen, möchte den Schülern diverse Tricks beibringen, die ihnen helfen Rechnungen zu vereinfachen. Die Tricks sind im wesentlichen algebraische Umformungen und mathematisch korrekt! Die meisten Tricks greifen auf die drei mathematischen Grundgesetze zurück, da sie die Schüler bereits kennengelernt haben, werde ich sie im kommenden Teil nur kurz erläutern.

4 Mathematische Grundlagen

Unter einer Vielzahl mathematischer Rechenregeln, gibt es drei besonders grundlegende. Diese heissen: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz und Distributivgesetz. Diese drei sind besonders fundamental, da beinahe die ganze Mathematik auf ihnen aufbaut. Diese Drei Gesetze gelten für alle Zahlen, die in der Menge der rationalen Zahlen enthalten sind.

4.1 Kommutativgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Hier wird verdeutlicht, dass die Anordnung der einzelnen Summanden das Resultat nicht beeinflusst. Bei der Addition und der Subtraktion darf die Reihenfolge, in der man die einzelnen Summanden zusammenzählt bzw. die Faktoren multipliziert frei gewählt werden. Konkret erlaubt uns dieses Gesetz die einzelnen Summanden oder Faktoren so zu gruppieren, dass es uns leichter fällt sie zusammenzuzählen. Mehr dazu in Kapitel 4.4.1.

4.2 Assoziativgesetz

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

In Worten ausgedrückt heisst das, dass die Reihenfolge der Ausführung keine Rolle spielt. Es spielt also keine Rolle ob ich zuerst a und b zusammenzähle und dann c addiere oder zuerst b und c addiere und dann a dazuzähle. Das

Assoziativgesetz ist gültig für die Addition und die Multiplikation, jedoch nicht für die Subtraktion und Division.

4.3 Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Das Distributivgesetz besagt, dass bei der Multiplikation eines Faktors mit einer Summe (oder auch einer Differenz) die Multiplikation in zwei Teilschritte aufgeteilt werden darf, indem man die beiden Summanden (in der Allgemeinen Formel b und c) einzeln mit dem Faktor a multipliziert und aus diesen zwei Teilprodukten ($a \cdot c$, $b \cdot c$) die Summe bildet.
Das Distributivgesetz, kann auch angewendet werden, wenn beide Faktoren als Summe bzw. Differenz vorliegen:

$$(a + b) \cdot (c + d) = \ ?$$

$$a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Da nun die mathematischen Grundlagen erläutert wurden, möchte ich mit deren Anwendungen weiterfahren und im kommenden Teil nacheinander drei der vier Grundrechenarten besprechen. Ich werde jeweils erklären, wie der Trick funktioniert, wenn nötig eine algebraische Begründung liefern und anschliessend ein Beispiel mit gezeigter Methode lösen.

4.4 Anwendungen bei der Addition

Bei einer Addition werden zwei oder mehr Zahlen zusammengezählt. Formal wird eine Addition so dargestellt:

$$Summand_1 + Summand_2 + Summand_3 + \ldots + Summand_n = Summe$$

4.4.1 Gruppen bilden

Bei Additionen und Multiplikationen darf die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren frei gewählt werden. Dies ist vor allem bei Kettenrechnungen ein sehr mächtiges Werkzeug! Am besten ordnet man die einzelnen Glieder einer Kettenrechnung so an, dass man mit dem kleinstmöglichen Aufwand ans Ziel kommt. Diese Aussage geht auf das Kommutativgesetz (zu finden im Kapitel 4.1) zurück.

$$13 + 56 + 34 + 53 = \ ?$$

Versucht man Gruppen zu bilden, so wird vielen Leuten auffallen, dass sich die Einerstellen der Zahlen 56 und 34 zusammen auf 10 ergänzen, 56 + 34 also eine runde Zahl (90) ergeben. Wendet man diesen Weg an, so kann man die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(56 + 34) + 13 + 53 = 90 + 13 + 53 = 103 + 53 = 156$$

Jedoch könnte man auch sehen, dass die Einerstellen der Zahlen 13, 34, 53 sich auch auf 10 ergänzen und die Rechnung wie folgt vereinfachen:

$$(13 + 34 + 53) + 56 = 100 + 56 = 156$$

Sowohl der erste als auch der zweite Weg sind korrekt, klar könnte man auch im Kopf von Links nach Rechts immer eine Zahl zur nächsten addieren, jedoch entstehen dabei eine Vielzahl an Zwischenschritten / Zwischenresultaten und das wollen wir beim Kopfrechnen vermeiden. Mit diesem Beispiel möchte ich zeigen, dass es viele verschiedene Wege gibt, eine Aufgabe im Kopf zu rechnen. Es gibt dabei weder richtig noch falsch, vielmehr sind es verschiedene Wege. Jeder Schüler soll also seinen eigenen Weg finden, der für ihn am logischsten erscheint.

4.4.2 Von rechts nach links

Da ich mich in meiner Arbeit mit dem Rechnen im Kopf befasse und meine Probanden die Oberstufe besuchen, setze ich die Kenntnis der schriftlichen Addition voraus und werde sie hier nicht weiter erläutern.

Eine beliebte Methode, bei der man exakt die gleichen Rechenschritte wie bei der schriftlichen Addition durchführt, jedoch ohne sich die Zahlen untereinander aufzuschreiben, nennt sich *von rechts nach links.* Man rechnet jeweils zuerst die Einer aller Summanden zusammen, beachtet die Überschläge und arbeitet sich zur Hunderterstelle vor. Dies ist jedoch eine sehr brachiale Standardmethode. Klar führt auch sie ans Ziel, doch muss man sich, und das sei der grosse Nachteil dieser Methode extrem viele Zwischenresultate merken. Ich möchte niemanden der sich diese Methode zu eigen gemacht hat davon abhalten so zu rechnen, jedoch werde ich im folgenden einige weitere Tricks vorstellen, mit welchen man Additionen auf eine andere Weise lösen kann.

$$438 + 237 = \ ?$$

Unter Anwendung der Methode *von rechts nach links* zählt man die Einer, Zehner und Hunderter separat zusammen:

$$\text{Hunderter: } 4 + 2,\ \text{Zehner: } 3 + 3,\ \text{Einer: } 8 + 7$$

$$\text{Hunderter: } 6,\ \text{Zehner: } 6,\ \text{Einer: } 15 = 675$$

4.4.3 Hinüberschieben

Die Summe verändert sich nicht, wenn beim einen Summanden eine Zahl addiert wird, wenn man beim anderen Summanden die selbe Zahl wieder subtrahiert. Diesen Trick ist sehr hilfreich um Zehnerübergänge zu vermeiden. Man vermeidet den Zehnerübergang indem man die eine Zahl zu einer Zehnerzahl ergänzt bzw. reduziert. Dadurch führt man nicht einen Zehnerschritt im eigentlichen Sinne aus, sondern macht den Schritt zum vollen Zehner. Die Korrektheit dieses Tricks lässt sich ganz einfach wie folgt verallgemeinern

$$(a + x) + (b - x) = a + b + (x - x) = a + b$$

Ein ganz banales Beispiel hierfür ist die Addition von 99. Was ergibt

$$23 + 99 = \ ?$$

In diesem Beispiel lohnt es sich einen Einer von 23 zu 99 hinüberzuschieben. Also die Rechnung wie folgt umzuformen, was uns schlussendlich zu einer Rechnung bringt, die einfach im Kopf zu rechnen ist.

$$23 + 99 = (23 - 1) + (99 + 1) = 22 + 100 = 122$$

4.5 Anwendungen bei der Subtraktion

Bei einer Subtraktion werden eine oder mehrere Zahlen von einer Zahl abgezogen. Der Allgemeine Fall wird so dargestellt.

$$Minuend - Subtrahend_1 - Subtrahend_2 - \ldots - Subtrahend_n = Differenz$$

Wie bereits bei der Addition werde ich auch die schriftliche Subtraktion nicht weiter erläutern.

4.5.1 Ergänzen auf 1000

Der folgende Trick zeigt, wie man einfach Zahlen von Tausend und allen anderen Zehnerpotenzen subtrahieren kann. Am Beispiel der Rechnung 1000 - 738 möchte ich erklären, wie man die Subtraktion von einer Runden zahl vereinfachen kann: Wie man sieht ist in allen Spalten ausser der Einerstelle ein übertrag von 1 entstanden, dies ist keine Überraschung, denn zieht man von Null eine Zahl die ungleich 0 ist ab, so muss man sich einen Zehner von der nächst grösseren Stelle borgen. Dies ist bei der Subtraktion von 1000 und allgemein allen Potenzen von 10 der Fall! Muss man eine Zahl von einer Potenz von zehn abziehen, so kann man alle Stellen auf 9 ergänzen und die Einerstelle auf 10. Die Regel lautet wie folgt: **Subtraktion einer schönen Zehnerpotenz: Alle von 9 abziehen, die letzte von 10.**

	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer
	1	0	0	0
-		7	3	8
Überträge	1	1	1	
		2	6	2

Abbildung 1: Die Subtraktion von einer schönen Zahl

$$1000 - 738 = \ ?$$

Um das Resultat zu erlangen ergänzen wir also 7 auf 9 (ergibt 2), 3 auf 9 (ergibt 6) und 8 auf 10 (ergibt 2) . Zum Schluss schreiben wir die Zahlen in dieser Reihenfolge nieder:

$$1000 - 738 = 262$$

4.5.2 Der unsichtbare Helfer

Die Differenz gibt an, wie gross der Unterschied zwischen zwei Zahlen ist. Als Beispiel möchte ich zwei fiktive nebeneinander stehende Hochhäuser ins Leben rufen, das eine ist 10 Meter höher als das andere. Meine Überlegungen zu diesem Beispiel: Niemand hat definiert, von wo aus der Höhenunterschied zwischen den beiden Häusern korrekterweise gemessen werden muss. Man könnte von Dach des einen Hochhauses messen, wie auch von der Oberfläche, auf der die beiden Häuser stehen. Die Distanz bleibt die gleiche, selbst wenn aus dem Weltraum aus gemessen würde. Aus dieser Überlegung habe ich den folgenden Trick abgeleitet: die Differenz verändert sich nicht, wenn sowohl beim Minuenden als auch beim Subtrahenden die gleiche Zahl addiert oder subtrahiert wird. Die algebraische Begründung sieht so aus:

$$(a - x) - (b - x) = a - x - b + x = a - b - x + x = a - b$$

$$(a + x) - (b + x) = a + x - b - x = a - b + x - x = a - b$$

Weil das Minus die Vorzeichen in der Klammer wechselt, entstehen im Zusammenhang mit x zwei gegenteilige Vorzeichen, die sich gegenseitig auslöschen.

Es ist sinnvoll, entweder den Minuenden oder den Subtrahenden auf eine runde Zahl zu ergänzen, denn so lässt es sich besonders einfach weiterrechnen. Wie die Methode der unsichtbare Helfer funktioniert möchte ich am folgenden Beispiel verdeutlichen:

$$285 - 93 = \ ?$$

Wir ergänzen also, naheliegenderweise den Subtrahenden auf die nächste runde Zahl, in diesem Fall 100. Damit sich die Differenz nicht verändert, müssen wir jedoch auch den Minuenden auf die gleiche Weise verändern, folglich zählen wir sowohl zum Minuenden als auch zum Subtrahenden 7 dazu. Daraus entsteht die folgende Rechnung:

$$285 - 93 = (285 + 7) - (93 + 7) = 292 - 100 = 192$$

Natürlich gibt es auch hier einen zweite Möglichkeit die Rechnung zu vereinfachen indem man 285 auf die nächste Zahl ergänzt und bei 93 gleichviel dazuzählt:

$$285 - 93 = (285 + 15) - (93 + 15) = 300 - 108 = 192$$

Jedoch bevorzuge ich den ersten Weg, da der Rechenaufwand geringer ist, einen ganzen Hunderter abzuziehen anstatt von einem ganzen Hunderter abzuziehen.

4.5.3 Kettenrechnungen

Zieht man nacheinander mehrere Zahlen von einer Zahl ab, kann die Summe aller Subtrahenden vom Minuenden abgezogen werden. Dies lässt sich ganz einfach mit dem Trick bewirken, das man alle Subtrahenden in eine Klammer setzt und ein Minus davor. Denn das Minus wechselt alle Vorzeichen in der Klammer.

$$a - b - c - d = a - (b + c + d)$$

So entstehen zwei Teilrechnungen zum einen die Addition der Summanden b, c und d zum andern die Subtraktion dieser Summe vom Minuenden a. Bei der Addition von b, c und d handelt es sich um eine Kettenrechnung, welche man mit Hilfe des Tricks *Gruppen bilden* (Kapitel 4.4.1) lösen kann. Die anschliessende Subtraktion kann mit Hilfe der zuvor erklärten Tricks für die Subtraktion im Kopf gelöst werden.

$$1000 - 232 - 137 - 288 = \ ?$$

Zuerst fassen wir alle Minuenden als Summe in einer Klammer zusammen und stellen die Summanden in der Klammer so um, damit sie sich einfach zusammenzählen lassen:

$$1000 - (232 + 173 + 288) = 1000 - (232 + 288 + 173) = \ ?$$

Anschliessend rechnen wir die Klammer aus und subtrahieren die ergebene Summe vom Minuenden:

$$1000 - (520 + 173) = 1000 - 693 = 307$$

4.6 Anwendungen bei der Multiplikation

Die Multiplikation wird allgemein wie folgt dargestellt und kann aus beliebig vielen Faktoren zusammengesetzt sein.

$$Faktor_1 \cdot Faktor_2 \cdot Faktor_3 \cdot \ldots \cdot Faktor_n = Produkt$$

4.6.1 Summen Bilden

Wandelt man einen Faktor in eine Summe um, so entstehen zwei Teilrechnungen. Es macht vor allem dann Sinn, diesen Trick anzuwenden, wenn man das eine Teilresultat bereits kennt. Beispiele solcher Teilresultate können Zehnerzahlen, Quadratzahlen aber auch das kleine Einmaleins sein. Vor allem bei der Multiplikation mit Zahlen die nahe an einem Zehner liegen ist dies ein Mittel um sehr schnell an das Resultat zu gelangen. Dieser Trick ist eine Anwendung des Distributivgesetzes (siehe Kapitel 4.3). Vielfach wird das Distributivgesetz unbewusst angewandt. Rechnungen wie $15 \cdot 7$ werden vielfach intuitiv als $10 \cdot 7 + 5 \cdot 7$ gelöst, was genau der Anwendung dieses Tricks entspricht. Jedoch möchte ich die Mächtigkeit dieses Trickes am folgenden Beispiel zeigen:

$$13 \cdot 12 = \ ?$$

Wir wissen, dass 12 im Quadrat 144 ergibt, deshalb können wir 13 zu (12+1) umformen.

$$(12 + 1) \cdot 12 = 12^2 + 12 = 144 + 12 = 156$$

ohne grossen Rechenaufwand sind wir zum Resultat gelangt.

4.6.2 Doppelte Summe

Die Methode „doppelte Summe“ ist im Grunde genommen nichts anderes als die Weiterführung der Methode „Summen bilden“. Statt einen Faktor in eine Summe umzuwandeln, bildet man in diesem Fall aus beiden Faktoren je eine Summe bildet. Allgemein sieht eine Multiplikation zweier Summen so aus:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Diese Formel mag für alle Menschen, die mit Algebra auf Kriegsfuss stehen unschön erscheinen. Keine Angst, die Formel kann und wird noch vereinfacht werden, unter Einführung der Nebenbedingung, dass in beiden Summen der gleiche Summand vorkommen soll. Wir gehen davon aus, dass die Summen so gewählt wurden, dass die Variable a und c den gleichen Wert haben und deshalb beide mit der Variabel a dargestellt werden können:

$$(a + b) \cdot (a + d) = a^2 + ab + ad + bd$$

Unter Anwendung des Distributivgesetzes (kap. 4.3) kann der Term wie folgt vereinfacht werden:

$$a^2 + ab + ad + bd = a^2 + a \cdot (b + d) + bd$$

Somit wurde die Multiplikation von zwei Faktoren umgewandelt in die Addition von einer Quadratzahl und zwei Produkten. Damit diese Endformel auch wirklich für jedermann im Kopf lösbar ist, sollten die Zahlen geschickt gewählt werden. Besonders einfach wird die Rechnung, wenn die Variable a so gewählt wird, dass sie eine ganze Zehnerzahl ist. Dass man dank diesem Kniff eine schwierige Multiplikation, im Kopf lösen kann, möchte ich mit folgendem Beispiel untermauern.

$$23 \cdot 16 = \ ?$$

Als erstes wandeln wir beide Faktoren in eine Summe um und achten darauf, dass in beiden Summen der gleiche Summand vorkommt. Hat man zwei Zahlen in der Nähe des gleichen Zehners, in unserem Beispiel 20, so macht es Sinn die Summen mit diesem Zehner zu bilden. Streng genommen ist die Umwandlung von 16 zu $(20 - 4)$ keine Addition sondern eine Subtraktion, auch das ist erlaubt.

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) = \ ?$$

$$(20 + 3) \cdot (20 - 4) = 20^2 + (3 - 4) \cdot 20 - 3 \cdot 4 = \ ?$$

Aus vier Zwischenresultaten wurden drei und von diesen dreien ist eines (a^2) eine Quadratzahl, sollte also den Schülern bekannt sein. Also bleiben noch zwei Rechenschritte übrig: $a \cdot (b + d)$ Hier ist es wichtig, dass zuerst die Klammer ausgerechnet und erst anschliessend die Multiplikation durchgeführt wird, um den Aufwand möglichst gering zu halten. Zum Schluss muss einzig noch die Rechnung $b \cdot d$ wirklich ausgerechnet werden. Im normalen Fall sollte dies jedoch mit dem kleinen Einmaleins möglich sein. Also haben wir zum Schluss die folgende Rechnung:

$$23 \cdot 16 = 400 - 20 - 12 = 400 - 32 = 368$$

Ein Spezialfall

Die dritte binomische Formel sieht wie folgt aus:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Liegen die Zahlen günstig, so kann man die dritte binomische Formel anwenden. Die dritte binomische Formel kann dann angewendet werden wenn zwei unterschiedliche Zahlen den gleichen Abstand zu einer dritten Zahl haben. Einige Beispiele um diesen Spezialfall zu verdeutlichen:

$$22 \cdot 18 = (20 + 2) \cdot (20 - 2) = 20^2 - 2^2 = 400 - 4 = 396$$

$$14 \cdot 16 = (15 - 1) \cdot (15 + 1) = 15^2 - 1^2 = 225 - 1 = 224$$

4.6.3 Faktoren Aufteilen

Eine Multiplikation in mehrere Schritte aufgeteilt werden. Beispielsweise darf eine Multiplikation mit 4 als eine Multiplikation mit 2 und nochmals mit 2 angesehen werden. Oder eine Multiplikation mit 5 darf als eine Multiplikation mit 10 und eine anschliessende Division mit 2 (äquivalent zu der Multiplikation mit $\frac{10}{2}$) Grund dafür ist das Assoziativgesetz. Nähere Erläuterungen möchte ich am folgenden Beispiel durchführen.

$$4 \cdot 27$$

Betrachtet man die formale Schreibweise des multiplikativen Assoziativgesetzes (Formel 4.2 auf Seite 4) so kann man die Rechnung auf die folgenden Arten anschauen: Man interpretiert die Rechnung so, dass der Faktor 4 als $(a \cdot b)$ angesehen wird, also sähe die Rechnung so aus:

$$(4) \cdot 27 = \ ?$$

Wie das Assoziativgesetz besagt, können in der Klammer mehrere Faktoren stehen. Damit sich das Ergebnis der Rechnung nicht verändert muss jedoch das Produkt in der Klammer 4 ergeben. Es bieten sich die folgenden Rechnungen an: $1 \cdot 4$ oder $2 \cdot 2$ (natürlich gäbe es noch viel mehr Multiplikationen mit dem Ergebnis 4. Diese Rechnungen würden jedoch negative Zahlen und oder Brüche beinhalten und sowohl negative Zahlen als auch Brüche sind schwieriger zu handhaben als positive, ganze Zahlen.) Da mit der Umformung $1 \cdot 4$ keine wirkliche Veränderung stattfindet, fahren wir mit der zweiten Möglichkeit ($4 = 2 \cdot 2$) fort. Also schreiben wir die Rechnung so:

$$(2 \cdot 2) \cdot 27 = \ ?$$

Da die Multiplikation auch kommutativ ist, dürfen die Faktoren in eine beliebige Reihenfolge gebracht werden. Da die Multiplikation mit 2 einfacher ist als die Multiplikation mit 27 nehmen wir die 27 an den Anfang und multiplizieren diese zweimal mit der Zwei.

$$(27 \cdot 2) \cdot 2 = (54) \cdot 2 = 108$$

Es ist jedoch auch erlaubt, die 27 in Faktoren zu zerlegen. Hier gibt es wiederum zwei Möglichkeiten: $1 \cdot 27$ und $3 \cdot 9$. Wie im vorherigen Beispiel wird mit der Umformung von 27 zu $27 \cdot 1$ keine Vereinfachung herbeigeführt. Deshalb fahren wir weiter mit der Umformung von 27 zu $3 \cdot 9$ fort und erhalten die folgende Rechnung:

$$4 \cdot (27) = 4 \cdot (3 \cdot 9) = 4 \cdot 3 \cdot 9 = 12 \cdot 9$$

So wurde aus der Rechnung $4 \cdot 27$ eine völlig andere Rechnung $9 \cdot 12$. Wie man das einfach ausrechnen kann, wird im nächsten Kapitel erklärt.

5 Didaktische Grundlagen

- ohne entsprechende Mittel kann man nicht kreativ werden, speziell nicht in Mathematik! Deshalb vermittelte ich den Schülern verschiedne Werkzeuge, damit sie kreativ werden können. Nicht das Erarbeiten der verschiedenen Tricks steht im Vordergrund, sondern das beherrschen davon.

Mir war von Anfang an bewusst, dass ich eine grosse Fülle von Stoff in einer Doppellektion vermitteln wollte. Das zuvor erarbeitete Repertoire an Tricks ist bereits eine gekürzte Fassung einer Auswahl von Tricks. Ich war mir bewusst, dass es zeitlich sehr knapp werden könnte. Dennoch trennte ich mich von keinem weiteren Trick. Mein Ziel war, die Schüler nich zu nötigen nach einem vorgegebenen Schema zu rechnen, sondern dass sie selbst einen Weg suchen können und das ist nur möglich, wenn sie ein breites Arsenal an zu Verfügung stehenden Möglichkeiten haben. Ich möchte den Schülern Werkzeuge beibringen, je nach Situation ist ein schweizer Taschenmesser ein sehr wertvolles Utensil, man kann damit notfalls auch einen Baum fällen, jedoch lässt sich ein Baum leichter mit einer Säge fällen. Mein Ziel war den Schülern einige besonders grundlegende Werkzeuge für die drei wichtigsten Grundrechenarten mitzugeben. Also ihren Werkzeugkasten mit Hammer, Schraubenzieher und einigen Zangen auszurüsten, damit sie alle im Alltag auftretenden Probleme lösen können.

In diesem Kapitel möchte ich nun genau beschreiben, wie ich die Lektion aufgebaut habe. Was ich aus welchem Grund so gemacht habe. Laut Meyer (2015) soll eine Lektion in die folgenden Teile aufgeteilt werden: Einstieg, Interesse wecken, Theorie erarbeiten, Umsetzung, Abschluss. Ich habe mich dazu entschieden, dass ich die Schritte Theorie erarbeiten und die Umsetzung in einem Schritt zusammen nehme und für jeden Trick einzeln durchführen werde. Dies tat ich aus dem einfachen Grund, damit zum einen keine Verwirrung entsteht, zum anderen, damit die Schüler nicht zu lange Zeit nur zuhören müssen, sondern selbst aktiv werden können.

5.1 Arbeitsformen

Damit die Schüler kreativ werden können, brauchen sie eine Fülle an Tricks. Deshalb legte ich den Fokus nicht auf das gemeinsame Erarbeiten des Inhalts, dafür fehlte schlicht und einfach die Zeit. Ich rückte das Verstehen und die Fähigkeit, die erlangten die Tricks anzuwenden und bestenfalls weiter zu entwickeln in den Mittelpunkt.

5.1.1 Vormachen - Nachmachen - Üben

Das Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben* wurde von Landwehr (1997, s. 151f) vorgestellt. Diese Technik dient der Vermittlung von Fertigkeiten und Handlungstechniken. Der Name ist Programm, das System baut, wie es der Name sagt darauf auf, dass die Lehrperson eine Technik vorzeigt, die Schüler diese imitieren und sie anschliessend selbst anwenden indem sie Übungen mit gezeigter Methode lösen. Bemängelt werden, die fehlende Erkenntnisgewinnung und der mangelnde Platz für die eigene Lösungsvorschläge. Diesen Kritikpunkten kann ich insofern entgegensprechen, als dass die Technik lediglich der Vermittlung von Lösungsstrategien dient und diese Lösungsstrategien dazu da sind, damit die Schüler später, beim Lösen der Aufgaben, eigene Lösungsvorschläge kreieren können. Die Technik *Vormachen - Nachmachen - Üben* ist also lediglich Mittel zum Zweck, um den Schülern die notwendigen Werkzeuge mitzugeben, damit sie einen eigenen Lösungsweg für die verschiedenen Rechnungen entwickeln können. Ich entschied mich für diese Technik, weil die gemeinsame Erarbeitung der einzelnen Strategien, nicht das übergeordnete Ziel ist und die Zeit dafür schlicht zu knapp war.

5.1.2 Lehrervortrag

Ich habe mich für den Lehrervortrag entschieden, da ich den Schülern, viele Inputs in kurzer Zeit mitgeben wollte. Deshalb hatte ich die Zeit nicht, die Schüler verschiedenste Techniken selbständig erarbeiten zu lassen. Sehrwohl achtete ich im Vortrag darauf, dass ich immer wieder Schülerinputs einbrachte indem ich sie beispielsweise fragte, wie sie solche Rechnungen lösen würden.

5.1.3 Motorisches Lernen

Um den Schülern das Merken der Tricks zu vereinfachen, wollte ich diese so verständnisvoll wie möglich vermitteln. Weiter wollte ich für die Schüler eine möglichst abwechslungsreiche Doppellektion vorbereiten. Aus diesem Grund und weil ich den Schülern auch vermitteln wollte, dass die Mathematik greifbar ist, wollte ich ihnen auf die Chance geben sich aktiv motorisch zu betätigen. Ich gab mir Mühe, wann immer möglich das, was ich erklärte mit Bildern zu untermaueren. Ich wollte den Schülern nicht nur abstrakte Tricks mitbringen, sondern diese Tricks auch anreichern mit einer Bewegung oder einem Gefühl für das was sie taten. Deshalb probierte ich wann immer möglich den Theorieteil anzureichern beziehungweise die Schüler gewisse Handlungen selbst ausführen zu lassen.

5.2 Lektionsaufbau

Ein von Meyer (2015) vorgestelltes Modell für den Unterrichtsaufbau nennt sich *AITUS* und gliedert sich in 5 Phasen: Anfangen, Interesse wecken, Theorie erarbeiten, Umsetzen, Schluss. Diesen Aufbau erachtete ich als geeignet und kompatibel mit dem zuvor vorgestellten Prinzip *Vormachen - Nachmachen - Üben*. Ich wollte die Doppelstunde so aufbauen, dass ich für jeden Trick einzeln die Schritte Theorie erarbeiten und Umsetzen durchführen wollte. Somit ergaben sich 9 kleine Theorieblöcke mit anschliessender Übungsphase. Durch das Aufteilen in kleine Portionen wollte ich verhindern, dass die Schüler zu lange passiv zuhören müssen. Dadurch sollte sich ein guter Mix aus abwechselnd kleinen Theoriehäppchen, gefolgt von einer kurzen Übungsphase ergeben.

Der erste Punkt von Meyer (2015) vorgestellte Punkt ist, das gegenseitige Kennenlernen. Dies setzte ich um, indem ich zu beginn eine Vorstellungsrunde machte. Ich wollte jedoch über das simple nennen des Vornamens hinausgehen, da ich auch etwas mehr über die Schüler erfahren wollte. Aus diesem Grund sollte sich jeder kurz vorstellen, indem er neben seinem Namen auch noch erwähnen, was ihn mit der Mathematik verbindet und wo ihm Mathematik im Alltag begegnet ist. Diese zwei Zusatzbedingungen hatten den positiven Nebeneffekt, dass die Schüler bereits ein erstes mal damit befassten, inwiefern Mathematik und Kopfrechnen im Alltag präsent ist. Da es für die Schüler eine spezielle Situation war und ich als Schüler in solchen Situationen meist sehr schüchtern war, machte ich den Anfang. Zusätzlich erklärte ich den Schülern, dass sie mich nicht zu siezen brauchen, sondern mich beim Vornamen nennen dürfen. Dadurch wollte ich auch noch eine gewisse Nähe schaffen beziehungsweise die Distanz, die das Siezen schafft aus dem Weg räumen.

Nach Meyer sollte man weiterfahren, indem man Vorwissen aktiviert und Lust auf den Stoff zu versprühen. Dem wollte ich gerecht werden, indem ich ihnen erklärte, um was es in meinem Projekt geht und ihnen die Ziele bekanntgab. Um sie dort abzuholen wo sie standen, machte ich zu Beginn eine Repetition der Grundgesetzte und gab bereits einige Inputs gab, die auf das Bevorstehende abzielten. Um die nächsten zwei Aspekte: *Theorie erarbeiten und Umsetzen* in die Praxis zu übertragen, bereitete ich die kurzen Theorieblöcke und dazu passende Aufgaben vor. Die Aufgaben waren jeweils so gestaltet, dass sie sich gut mit der soeben vorgestellten Technik lösen liessen. Auf dem Aufgabenblatt waren jeweils 6 Aufgaben darauf, der Schwierigkeitslevel steigerte sich von Aufgabe zu Aufgabe.

Zum Schluss der Lektion, auch wenn es nicht explizit von Meyer empfohlen wurde, machte ich einen Ausblick und erzählte den Schülern, wie das

Projekt nun weiterläuft.

5.3 Theorie erarbeiten

Mir war es sehr wichtig, dass die Schüler auch wirklich verstanden, was ich ihnen vermittle. Um dies zu erreichen wollte ich den Unterricht weg von der einen Dimension Wandtafel lösen und in die Dimension *selbst Hand anlegen und erfahren, was man tut* übertragen. Dies will ich erreichen indem ich mir selbst die Aufgabe stellte die Mathematik, die nur im Imaginären stattfindet so in Modelle zu übersetzen, dass die Schüler sie selbst erfahren können in einer Weise, in der sie diese auch verstehen. Ein weiteres Problem meiner Arbeit ist, dass wenn die Schüler alles im Kopf rechnen, ich ihren Lösungsweg nicht nachvollziehen kann. Da jedoch genau das einer der zentralen Punkte für die Auswertung ist, musste ich eine Lösung finden. Hier kommt das halbschriftliche Rechnen (definiert auf Seite 3) zum Zuge. Einerseits bietet das halbschriftliche Rechnen den Schülern die Möglichkeit sich langsam an das Kopfrechnen heranzutasten, andererseits wird dadurch ihr Lösungsweg für mich nachvollziehbar. Dass die Schüler zu Beginn halbschriftlich rechneten, erachtete ich auch als einen Vorteil für sie. Dadurch konnten sie sich anfangs nur auf den Rechenweg selbst konzentrieren, ohne sich die Zwischenresultate merken zu müssen. Die Benützung des halbschriftlichen Rechnens ist also eine Win-win-Situation. Im Folgenden werde ich nun erklären, wie ich die einzelnen Tricks vermitteln will:

5.3.1 Gruppen Bilden

Ich schrieb die Zahlen 13, 56, 34, 53 auf Papier und heftete sie mit Magneten an die Wandtafel und schrieb jeweils ein Additionszeichen dazwischen. Dann liess ich den Schülern kurz Zeit, sich zu überlegen, wie sie das Resultat ausrechnen würden. Danach erwähnte ich nochmals kurz, was genau das Kommutativgesetz besagt und zeigte ihnen, dass man bei der Addition die Summanden vertauschen darf. Im Optimalfall so, dass einem die Rechnung leichterfällt. Um das ganze zu verbildlichen, verschob ich die Zahlen an der Wandtafel und vertauschte so deren Reihenfolge, bis die Rechnung einfach zu lösen war. (Wie man diese Aufgabe genau lösen kann, steht auf Seite 5)

5.3.2 Von rechts nach links

Um das zu erklären, bedarf es keiner weiteren Hilfsmittel. Ich löste ihnen die Aufgabe $438 + 237 = ?$ schriftlich vor und sagte, dass sie diese Schritte (zuerst Einer zusammenzählen, dann Zehner, dann Hunderter, ...) auch auf die gleiche Weise im Kopf durchführen können (Wie das funktioniert steht auf Seite 6). Man könnte auch hier die Streichhölzer einbinden indem die Schüler die zu addierenden Zahlen mit Streichhölzern darstellen und danach ein Wirbelsturm über den Tisch fegt und alles durcheinanderbringt. Die

Summe der beiden Zahlen kann immernoch bestimmt werden - jedoch nicht die einzelnen Summanden - indem man zählt wie viele Einer, Zehner und Hunderter im Durcheinander liegen. Diesen Schritt können wir auch ohne die Streichhölzer und den Wirbelsturm durchführen indem wir direkt Einer, Zehner und Hunderter der Zahlen im Kopf zusammenzählen.

5.3.3 Hinüberschieben

Wie dieser Trick funktioniert, wurde bereits im Kapitel 4.4.3 erklärt, wie ich ihn vermitteln will, folgt hier. Ich bereitete für jeden Schüler eine Streichholzschachtel vor die je 20 schwarze, weisse und rote Streichhölzer enthielt. Die verschiedenfarbigen Streichhölzer stehen jeweils für Hunderter, Zehner und Einer. BILD: content of a box of matches Damit konnten die Schüler die Zahlen auf ihren Schreibtischen auslegen. Dies hatte den Sinn, dass sie visuell und motorisch erfahren konnten, dass sie von der einen Zahl etwas wegnehmen und bei der anderen Zahl hinzufügen. Nach zwei Beispielen nur mit den Streichhölzern legten wir die Streichhölzer beiseite und schrieben nieder. Da das Vorgehen bei diesem Trick sehr ähnlich ist wie das des Trickes *der unsichtbare Helfer* habe ich für die Schüler die folgende Eselsbrücke vorbereitet:

> Das Pluszeichen (+) besteht aus zwei Strichen, folglich müssen wir zwei verschiedene Operationen (Addition **und** Subtraktion) verwenden

5.3.4 Ergänzen auf 1000

Da dieser Trick so simpel wie genial ist, wollte ich hier nicht zu viel Schnickschnack rundherum aufbauen. Ich rechnete ihnen schriftlich vor und zeigte ihnen, dass bei allen Stellen ausser der Einerstelle das Resultat und der Subtrahenden zusammen 9 ergeben, bei der Einerstelle 10. Ich erklärte ihnen weshalb dass immer so ist wenn man von $100, 1'000, 10'000, \ldots, 10^n$ subtrahiert. Um das ganze zu vertiefen, schrieb ich die Zehnerpotenz auf, die so viele Nullen hatte, wie Schüler anwesend waren. Von dieser Zahl subtrahierte ich eine Zufalllszahl, welche um eine Stelle kürzer war als die Zehnerpotenz. Danach durften jeder Schüler eine Stelle der entstehenden Differenz nennen und wir hatten gemeinsam das Ergebnis gefunden.

5.3.5 der unsichtbare Helfer

Ich zeigte den Schülern die Abbildung und erzählte vom selben Experiment, welches auch schon zuvor im Theorieteil (4.5.2) beschrieben wurde. Danach machte ich mit ihnen ein Gedankenexperiment und erzählte dass verschiedene Leute an verschiedenen Orten (Plattform zwischen den beiden Hochhäusern, Erdoberfläche, aus dem Erdinnern) und siehe da, alle drei kommen auf das selbe Resultat! Also dürfen wir uns auch weiter von den Häusern entfernen oder eine Plattform auf einer gewissen Höhe bilden. Dies können wir bewerkstelligen indem wir einen Betrag zum Minuenden und zum Subtrahenden hinzuzählen oder vom Minuenden und Subtrahenden abziehen. Wie bereits erwähnt ist dieser Trick leicht verwechselbar mit dem Trick *Hinüberschieben* deshalb habe ich auch hier eine Eselsbrücke vorbereitet.

> Das Subtraktionszeichen ($-$) besteht aus einem Strich, deshalb müssen wir nur eine Operation anwenden. Entweder zählen wir bei beiden Zahlen den gleichen Betrag hinzu oder ziehen bei beiden Operatoren den gleichen Betrag ab.

5.3.6 Kettenrechnungen Subtraktion

Wie schon um die Kettenrechnung der Addition zu verbildlichen, heftete ich auch um die Subtraktion mit mehreren Subtrahenden zu verbildlichen, Zahlen auf Papier an die Wandtafel, diesmal Schrieb ich Subtraktionszeichen ($-$) dazwischen. Nun öffnete ich nach dem Minuenden eine Klammer und schloss sie nach dem letzten Subtrahenden wieder und fragte, was ich tun muss, damit sich das Resultat nicht verändert - alle Subtraktionszeichen in der Klammer müssen zu Additionszeichen abgeändert werden. Die neu entstandene Aufgabe stellte sich aus einer Kettenrechnung der Addition und einer Subtraktion zusammen, für beide dieser Teilrechnungen hatten die Schüler zuvor Tricks kennengelernt und konnten diese bereits ein erstes Mal anwenden und verknüpfen.

5.3.7 Summen bilden

Um diesen Trick den Schüler näherzubringen, rief ich nochmals das Distributivgesetz in Erinnerung und zeigte an einem praktischen Beispiel vor, wie man sich das zu nutze machen kann. Das sollte reichen, damit die Idee dieses Tricks klar ist und die Schüler bereit sind Aufgaben zu lösen.

5.3.8 Doppelte Summe

Hier wollte ich einsteigen, indem ich den Schülern den Trick algebraisch vorstellte. Damit keine zu grossen Verwirrungen entstanden, führte ich die Bedingung, dass der selbe Summand in beiden Klammern vorkommen soll, zuerst ein und liess sie die Formel danach algebraisch ausrechnen. Ich stellte ihnen also die Aufgabe:

$$(a+b)(a+c) = \ ?$$

$$(a+b)(a+c) = a^2 + a \cdot (b+c)$$

Was uns zur gleichen Endformel führt, wie sie im Kapitel 4.6.2 Danach zeigte ich ihnen an dieser Formel, dass schwierig aussehende Rechnungen einfach lösbar werden, weil man grosse Teile des Resultats bereits kennt und der Rest meist einfach auszurechnen ist.

5.3.9 Faktoren aufteilen

Hier rief ich das Assoziativgesetz in Erinnerung und erklärte ihnen die Bedeutung dessen. Dadurch dass man die Faktoren aufteilen und so zusammensetzen kann, wie man gerne möchte, ergeben sich viele neue Konstellationen die ursprüngliche Rechnung zu vereinfachen.

5.3.10 Die Übungsphase

Nach dieser Doppellelstunde Theorie folgte eine Übungsphase. Die Übungsphase zieht sich über eine Periode von drei Wochen. Aufbauen wollte ich die Übungsphase wie folgt:

- Übungsblätter 1 - 4: halbschriftlich, mit Theorieblatt
- Übungsblätter 5 - 6: halbschriftlich, ohne Theorieblatt
- Übungsblatt 7 - 8: Kopfrechnen, ohne Theorieblatt

Durch diesen Aufbau wollte ich den Schülern genügend Zeit geben. Die ersten vier Übungsblätter, um sich an das Thema und zu gewöhnen und verschiedne Techniken ausprobieren. Die Übungsblätter fünf und sechs sollten dazu dienen, die eigenen Techniken zu verinnerlichen und sich vom Theorieblatt abgelöst zu rechnen. Die Übungen sieben und acht als Abschluss und auch Höhepunkt, die Schülern sollten hier dazu fähig sein, die Aufgaben im Kopf zu lösen.

6 Durchführung

Ich durfte die Doppellektion am 15.6.2016 gleich zweimal, mit zwei verschiedenen Klassen durchführen. Es handelte sich um zwei Mathematikkurse des Niveaus A, der zweiten Sek in Einsiedeln. In den nächsten Kapiteln findet sich ein mit meinen Erfahrungen angereichertes Protokoll. Ich werde hier jedoch beide Doppelstunden gemeinsam protokollieren und auch nur von einer Doppellektion sprechen, da sie praktisch identisch verlaufen sind. Zum Ende der zweiten Doppelstunde, musste der Klassenlehrer die Klasse vorzeitig verlassen und ich durfte die Stunde alleine zu Ende führen und die Schüler verabschieden.

6.1 Verlauf der Doppellektion

Folgendes Equipment stand mit zu Verfügung: Eine herkömmliche Wandtafel, wobei eine Seite als Beamer agierte. Ebenfalls vorhanden war ein Presenter, die überholte Version des Hellraumprojektors, der es mir ermöglichte ein Blatt direkt auf den Beamer zu projizieren und gemeinsam es mit den Schülern auszufüllen.

Zu Beginn der Doppelstunde begrüsste der Klassenlehrer die Klasse und erklärte ihnen, dass ich die heutige Doppelstunde übernehmen würde. Danach übergab er mir das Wort und mit dem Wort auch die Zügel für die Klasse. Ich stieg ein, indem ich die Eröffnungsrunde einleitete, ich stellte mich kurz vor und übergab das Wort danach den Schülern. Die Vorstellungsrunde stockte etwas, da viele Schüler nicht wussten, was sie sagen sollten. Nach 10 Minuten leitete ich über und erzählte den Schülern von meiner Maturaarbeit und deklarierte die gemeinsamen Ziele und wie wir diese erreichen. Das Ganze wurde gestützt durch eine an die Wandtafel gebeamte Präsentation. Danach hielt ich mein kurzes Referat, welches die Schüler mit meiner Ansicht von Mathematik und dem Kopfrechnen vertraut machte und mit einer Repetition der Grundgesetze abgerundet wurde. Anschliessend teilte ich ihnen ein Theoriedossier und ein Aufgabendossier für die Doppelstunde aus. Bis hierhin waren etwa 20 Minuten vergangen.

Anschliessend startete der Teil, in welchem die Schüler gefordert wurden. Ich stieg ein mit dem Trick *Gruppen bilden*, verbildlichte ihnen der Ablauf dieser Methode an der Wandtafel. Ich zeigte ihnen, wie man Kettenrechnungen möglichst einfach lösen kann. Danach teilte ich ihnen das Theorie und das Aufgabendossier aus und füllte ersteres mit ihnen aus. Anschliessend lösten die Schüler einige Aufgaben mit dieser Technik. Danach korrigierten wir gemeinsam die Aufgaben. Dieser Teil dauerte etwas länger als geplant etwa 15 Minuten.

Der nächste Trick *von links nach rechts* war ein Selbstläufer, alle Schüler wussten sofort, worum es geht und wie man diese Technik anwenden soll. Nach dem gemeinsamen Ausfüllen des Theorieblattes lösten die Schüler einige Aufgaben zu dieser Technik, wiederum mit gemeinsamer Korrektur. Dieser Block dauerte rund 10 Minuten.

Der Trick *hinüberschieben* erklärte ich den Schülern mit Hilfe der Streichhölzer, dafür teilte ich jedem Schüler eine Streichholzschachtel mit drei verschiedenfarbigen Streichhölzern aus (symbolisch für Einer, Zehner und Hunderter). Wir lösten zwei Beispiele mit den Streichhölzern, füllten das Theorieblatt aus und die Schüler lösten wiederum die Aufgaben auf dem Aufgabenblatt. Wir besprachen gemeinsam die Lösungswege und korrigierten die Resultate. Nun war insgesamt eine Stunde vergangen. Während der ganzen Zeit tauchten keine Fragen auf.

Wir legten eine zweiminütige Pause ein und wechselten danach zur Subtraktion. Ich erklärte ihnen am Presenter, wie man Zahlen von 1000 subtrahiert und die Schüler lösten Aufgaben dazu, danach gab ich die Kurzlösungen bekannt. Für diesen Block brauchten wir rund 5 Minuten

In den nächsten 10 Minuten erklärte ich den Schülern wie der Trick *der unsichtbare Helfer* anhand einer auf dem Beamer projizierte Skizze. Danach füllten wir das Theorieblatt aus und lösten Aufgaben dazu und ich gab die Kurzlösungen bekannt. Um die Subtraktion abzuschliessen erklärte ich den Schülern, wie man Subtraktionskettenrechnungen umstellen kann. Für Erklärung, Ausfüllen des Theorieblattes und für das Lösen und Kontrollieren zweier Beispiele brauchten wir knapp 5 Minuten. 1h20

Und um die Lektion abzurunden widmeten wir uns zum Schluss noch der Multiplikation. Am Beamer rief ich nochmals das Distributivgesetz in Erinnerung und leitete über zum Trick *Summen bilden*. Ich füllte gemeinsam mit ihnen das Theorieblatt dazu aus, sie lösten Aufgaben mit dieser Technik und ich gab die Kurzlösungen bekannt.

Die Zeit war schon fast um, deshalb schnitt ich in der verbleibenden Zeit noch kurz den Trick *doppelte Summe* an, erklärte den Schülern, wie sie ihn anwenden können und verewigten ihn auf dem Theorieblatt. Da die Zeit zu knapp war noch Aufgaben mit diesem Trick zu bearbeiten, brach ich an dieser Stelle ab und schob bevor es läutete und ich die Schüler verabschiedete noch einen Ausblick, wie das Projekt weiterläuft ein.

6.2 Verlauf der Übungsphase

Danach erhielten die Schüler zu Beginn jeder Mathestunde 5 Minuten Zeit, auf einem von mir erstellten Aufgabenblatt, so viele Aufgaben wie möglich zu lösen. Dies geschah also 3 Mal wöchentlich. Bis zum Stichtag wären insgesamt acht Übungsserien geplant gewesen. Aus diversen Gründen fand an einigen Tagen kein regulärer Matheunterricht statt, weshalb die beiden Klassen nur fünf respektive sechs Übungsserien gelöst haben. Die Übungsserien korrigierte ich zu Hause und wertete sie aus. Damit die Schüler wussten wo sie stehen, schrieb ich nach vier Übungsblättern jedem Schüler eine persönliche Rückmeldung. Die Rückmeldung verschaffte den Schülern einen Überblick, wo sie stehen, was sie gut machen, wo sie sich noch verbessern können und worauf sie besonders gut achten müssen.

6.3 Abschluss

Am 6.7.2016 besuchte ich die Klassen ein zweites Mal, um ihnen mitzuteilen, wie das Projekt verlaufen ist und gleiches mit ihnen auszuwerten. Zuerst liess ich die Schüler ein Rückmeldebogen ausfüllen, damit ich ein Feedback von ihrer Seite hatte und wusste wie sich das Projekt für sie angefühlt hat. Danach erzählte ich den Schülern, wie das Projekt verlaufen ist und dass ich mit dem Verlauf sehr zufrieden war.

6.4 Mein Eindruck

Zu beginn der Doppellektion war ich extrem angespannt, diese Anspannung legte sich nur zum Teil nieder. Während den Lektionen habe ich die Zeit völlig vergessen und deshalb zu Beginn eher ein zu langsames Tempo angeschlagen, was dazu führte, dass ich nicht so weit kam, wie ich es mir gewünscht hätte. Die Schüler waren während der ganzen Zeit aufmerksam dabei und verstanden, nach meinem Gefühl, was ich ihnen vermitteln wollte. Der Kurzvortrag kam soweit gut an bei den Schülern, alle Schüler hörten aktiv zu und niemand schweifte merklich ab oder machte etwas anderes nebenbei. Meiner Meinung nach sehr gut angekommen ist der Einstieg mit dem Trick *Summen bilden*, da dieser für praktisch alle Schüler ein Aha-Erlebnis beinhaltete und ihnen ein erstes Mal zeigte, dass Mathematik auch einfach geht. Dadurch waren sie gespannt auf das weitere, dass sie lernen können.

Ich hatte das Arbeitstempo der Schüler etwas unterschätzt, sie brauchten länger als von mir geplant um die Aufgaben zu bearbeiten. Auf der anderen Seite gab es einige sehr schnelle Schüler, die nach kurzer Zeit fertig waren und keine weitern Aufgaben mehr hatten.

Mit dem Verlauf der Übungsserien, war ich sehr zufrieden. Bei der Auswertung der Übungsserien, stand ich vor dem Problem, dass ich keinen direkten Kontakt zu den Schülern hatte. Deshalb schrieb ich für jeden Schüler eine Rückmeldung, damit er erfuhr, wo er steht und worauf er besonders achten solle. Während der Übungsphase hatte ich das Gefühl, dass die Schüler grundsätzlich verstanden haben, um was es geht.

7 Auswertung des Projektes

Im folgenden Kapitel geht es darum, eine Billanz zu ziehen. Diese Billanz habe ich erstellt mit Hilfe der Schülerfragebogen, eines Gesprächs mit dem Klassenlehrer und aufgrund der Leistungen, welche die Schüler während der Übungsphase geleistet haben. Die Auswertung gliedert sich in drei Teile. Im ersten Teil werde ich den Unterricht auswerten, was gut war uns was ich ein nächstes Mal anders machen würde. Im nächsten Unterkapitel geht es um die Messbaren Werte, haben die Schüler ihre Kopfrechenfähigkeit verbessert? Zum Schluss werde ich auswerten, ob ich meine Ziele erreicht habe:

haben die Schüler mehr Freude am Kopfrechnen gewonnen? Ist der mathematische Grundgedanke bei ihnen angekommen? Diese Auswertung ist statistisch nicht aussagekräftig, weil einerseits zu wenige Schüler am Projekt teilgenommen haben und andererseits waren es Schüler, welche gut in Mathematik sind und den Mathekurs des höchsten Niveaus besuchen.

7.1 Auswertung des Unterrichts

Beim zweiten Besuch in der Klasse, fühlte ich den Schülern auf den Zahn und wollte von ihnen wissen, was ihnen gefallen hat, was nicht und wie es ihnen ergangen ist. In diesem Gespräch kam heraus, dass auch den Schülern aufgefallen ist, dass ich (zu) viel Stoff in diese Doppellektion hineinpressen wollte. Viele Schüler wünschten sich ein etwas langsameres Tempo und etwas mehr Zeit zwischen den einzelnen Inputs. Auch erwähnt wurde, dass die Stoffdichte sehr hoch war und sie sehr stark forderte. Die weiteren Rückmeldungen waren positiv, alle Schüler stimmten zu, dass die Rückmeldung, die sie erhalten haben, sie sehr stark motivierte. So wussten sie, einerseits auf welchem Weg sie sich befanden (alle befanden sich auf sehr gutem Weg) andererseits motivierte sie die positive Rückmeldung und spornte sie an. Viel Schüler gaben auch an, dass es ihnen wirklich etwas gebracht hat und sie etwas gelernt haben. Dinge die sie gelernt haben variierten vom: Erlernen des Minusrechnens im Kopf bis zum Erlernen neuer Wege beziehungsweise neuer Strategien. Eine Mehrheit der Schüler empfand die Einschübe zu Beginn jeder Lektion als eine willkommene Abwechslung zum Hauptthema, einige wenige Schüler jedoch empfanden diese Abwechslung als störend.

Aus dem Feedback des Klassenlehrers kam folgendes heraus: Die Lektion war seiner Meinung nach sehr gut und ausführlich vorbereitet. Der Stoff war gut auf ihr Können abgestimmt und die Lektion war didaktisch gut aufgebaut. Folgende Punkte sind verbesserungswürdig: Mein Auftreten war, vor allem zu Beginn, sehr angespannt und nervös. Ich packte zu viel Stoff in diese eine Doppellektion. Ich habe sehr stark doziert und somit die Schüler wenig eingebunden, ein nächstes Mal sollte ich die Schüler mehr einbinden. Wenn ich eine Frage an die Klasse stelle, wartete ich meist nicht bis sich jemand zu Wort meldete, sondern erlöste ich die Schüler, nach kurzer Zeit peinlichen Schweigens und teilte ihnen jeweils die Lösung mit. Die Rückmeldung an die Schüler war notwendig, ich hätte viel lieber noch mehr Kontakt gehabt und viel unmittelbarer eingreifen können.

7.2 Auswertung der Leistungen

Ich werde mich im folgenden Teil den folgenden Mittel und Begriffe bedienen: Boxplotdiagramme, Median, Quartil und Streuung. Damit keine Verwirrungen entstehen, wird hier kurz das wichtigste, dass es über die Begriffe zu wissen gibt erklärt:

Median: Der Median ist der Mittelwert einer Probe, vergleichbar mit dem Durchschnitt. Um den Median zu berechnen werden alle Werte der Grösse nach geordnet, wobei der Median dem Element in der Mitte entspricht (beziehungsweise dem Durchschnitt der zwei mittleren Elementen bei einer geraden Anzahl Elementen). Ich verwende den Median anstelle des Durchschnittes, weil der Median weniger beeinflusst wird durch Ausreisser und somit für meine Auswertungen aussagekräftiger ist. (Kalisch, Bühlmann & Künsch, 2016, S. 45)

Quantil: Als α-Quantil wird der Schwellenwert bezeichnet, bei welchem genau α% der Werte unterhalb und $(100 - \alpha)$% oberhalb dieser Grenze liegen. Verschiedene Quantile geben Auskunft über die Verteilung der Proben. Ein 25% Quantil bezeichnet die Stelle, an welcher genau 25% kleiner sind als dieser Schwellenwert. Der Median ist eigentlich ein Spezialfall eines Quantils ist der Median, welcher eigentlich ein 50% Quantil ist. (Kalisch et al., 2016, S. 45)

Boxplot: Der Boxplot teilt sich auf in die rechteckige Box und die Antennen, auch Whisker genannt. Innerhalb der Box befindet sich eine Linie, welche den Median bezeichnet, folglich befinden sich 50% der Werte überhalb und 50% der Werte unterhalb dieser Linie. Die Box wird nach oben und unten durch das 75% respektive 25% Quartil begrenzt. Was bedeutet, dass genau die Hälfte aller Werte innerhalb der Box liegen. Der restliche Teils des Boxplottes besteht aus dem Whisker, welcher den kleinsten erreichten *normalen* Wert mit der Box verbindet. Als normale Werte werden Werte bezeichnet, welche weniger als das 1.5-fache der Quartilsdifferenz (die Länge der Box) von der Box entfernt sind. Werte, welche weiter als die eineinhalbfache Quartilsdifferenz von der Box entfernt sind, werden als Ausreisser bezeichnet und durch Punkte dargestellt. Werde ich im folgenden Teil von der Streuung sprechen, so beziehe ich mich dabei auf die Quartilsdifferenz. Ein Boxplot gibt also Auskunft über die Lage und Verteilung der Werte.

Wichtig für die Interpretation der Diagramme ist, dass die Aufgaben tendenziell immer schwieriger wurden. Während die Aufgaben der Übungsserie 1, bewusst trivial gewählt wurden, wurden mit der Zeit immer schwierigere Aufgaben, bei welchen eine einfache Lösung nicht auf den ersten Blick erkennbar war eingestreut.

Innerquartilsabstand: Unter dem Interquartilabstandes (oder auch Quartilsdifferenz) wird die Differenz zwischen dem 75% und dem 25% Quartil verstanden. Im Boxplot entspricht diese Grösse der Länge der Box. Dies ist ein alternatives Mass zur Standartabweichung, welches Auskunft über die Streuung gibt.

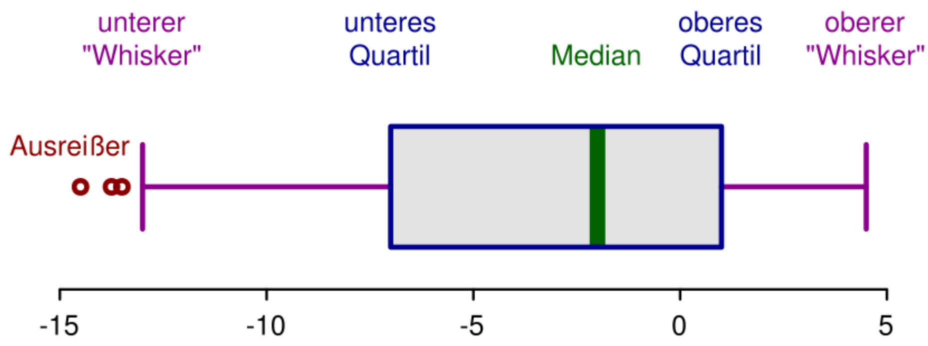

Abbildung 2: Beispiel eines Boxplotdiagrammes
Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elements_of_a_boxplot_en.svg

7.3 Streuung der Klasse

In Abbildung 3 ist abgebildet wie viele Aufgaben jeder Schüler nach fünf Arbeitsblättern richtig gelöst hat. Bei dieser Darstellung wurden nur die ersten fünf Arbeitsblätter gewertet, da nur Klasse 1 sechs Arbeitsblätter gelöst hat.

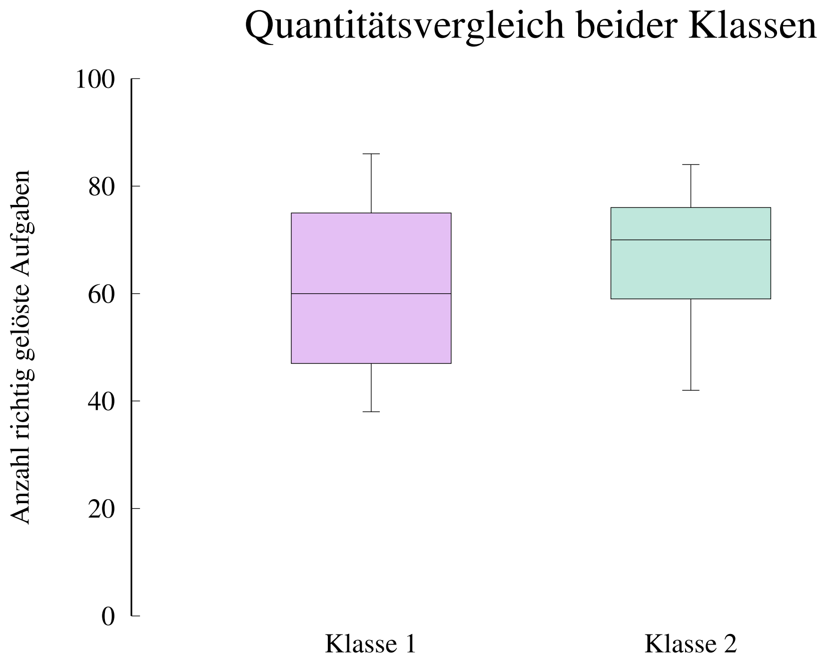

Abbildung 3: Gesamthaft richtig gelöste Aufgaben pro Schüler nach 5 Übungsserien

7.4 Quantiätsverlauf

In Abbildung 4 ist die Verteilung der quantitativen Leistungen der Klasse 1 abgebildet. Selbes Diagramm für Klasse 2 findet sich in Abbildung 6.
Wie sich jeder Schüler der Klasse 1 individuell quantitativ entwickelt hat, ist in Abbildung 5 visuell dargestellt. Die selbige Abbildung für Klasse 2 ist in Abbildung 7 visualisiert.

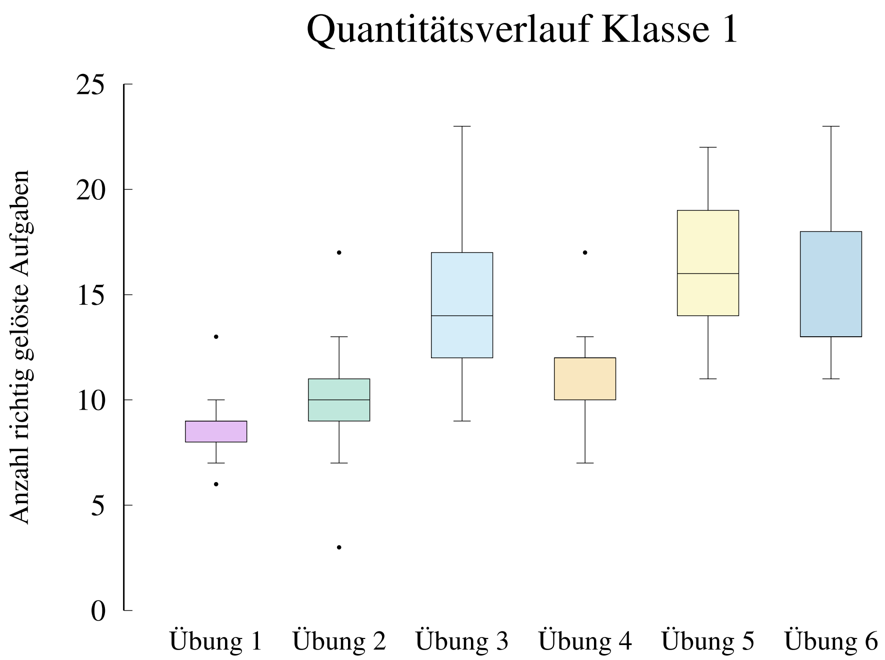

Abbildung 4: Quantitätsentwicklung der Klasse 1 dargestellt als Boxplot. Der Median ist bei Übung 1 und Übung 4 mit dem oberen, bei Übung 6 mit dem unteren Ende der Box zusammengefallen

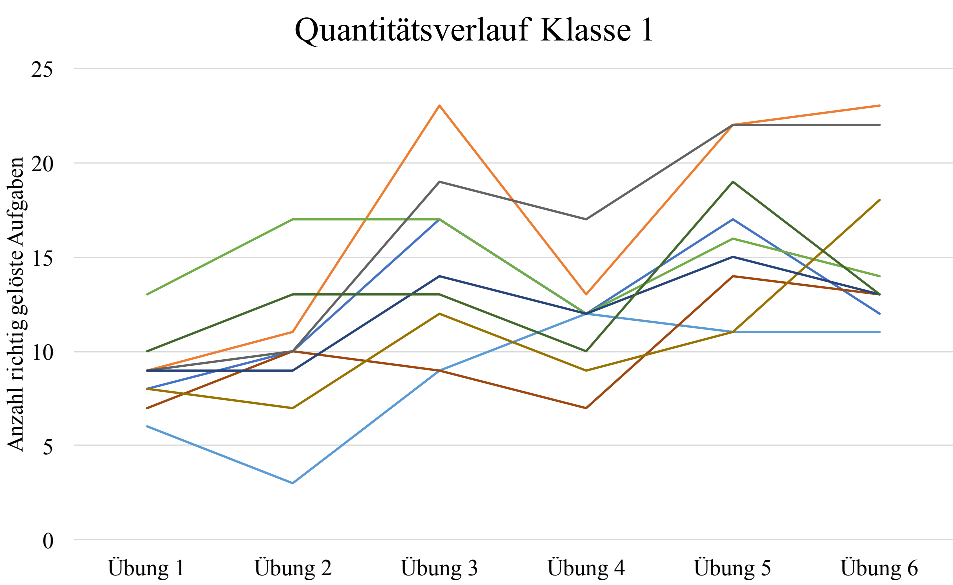

Abbildung 5: Quantitätsentwicklung der Klasse 1 dargestellt als Liniendiagramm

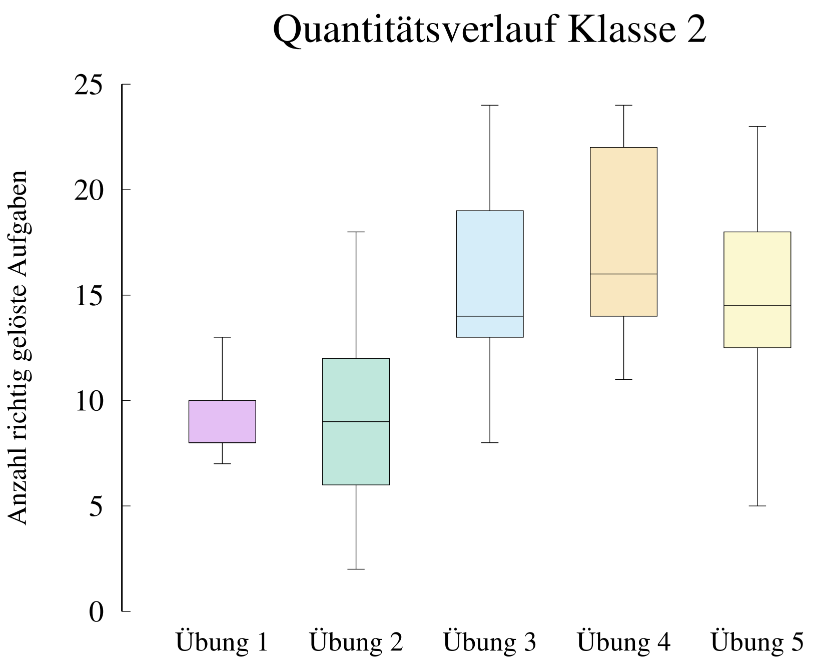

Abbildung 6: Quantitätsentwicklung der Klasse 2, dargestellt als Boxplot. Bei Übung 1 bestand die Testgruppe aus 14 Personen, bei Übung 6 aus 13 Personen. Die restlichen Übungen wurden von allen 15 Schülern der Klasse 2 gelöst. Der Median ist bei Übung 1 mit dem unteren Ende der Box zusammengefallen

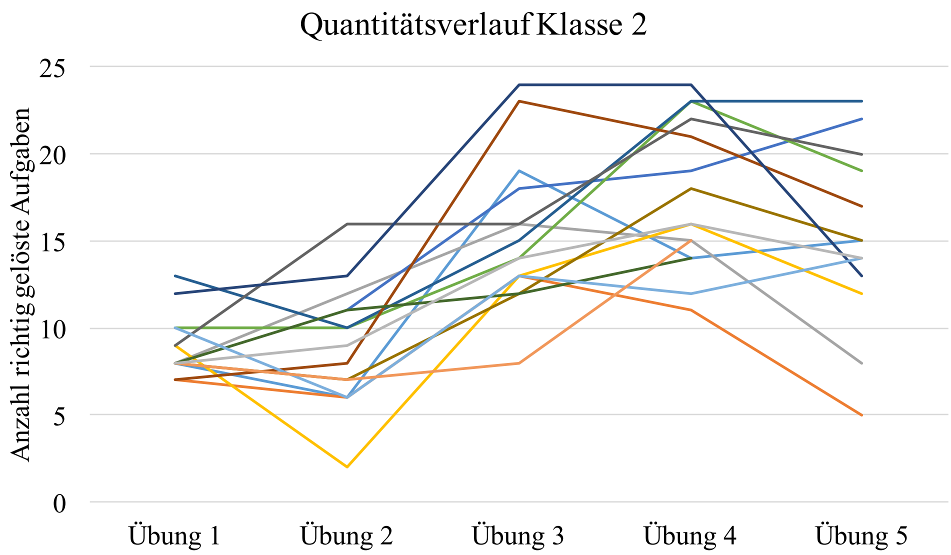

Abbildung 7: Quantitätsentwicklung der Klasse 2, dargestellt als Liniendiagramm. Bei Übung 1 war eine Person abwesend, bei Übung 6 fehlten zwei Personen.

7.5 Qualitätsetwicklung

Dieser Teil der Auswertung betrachtet den Quotienten zwischen der Anzahl richtig gelösten Aufgaben im Verhältnis zu den falsch gelösten Aufgaben. Der prozentuale Anteil richtig gelöster Aufgaben lässt sich wie folgt errechnen:

$$\frac{\text{Anzahl richtig gelöste Aufgaben}}{\text{Anzahl total gelöste Aufgaben}} \cdot 100$$

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen den Qualitätsverlauf der Klasse 1 respektive Klasse 2.
Der Verlauf der medialen Fehlerquote ist in Abbildung 10 dargestellt. Hier wurde die Anstelle der prozentual richtig gelösten Aufgaben die prozentual falsch gelösten Aufgaben verwendet. Dieser Wert lässt sich auf die folgenden zwei Arten berechnen:

$$\text{Fehlerquote} = 100\% - \text{Prozentsatz richtig gelöste Aufgaben}$$

oder

$$\text{Fehlerquote} = \frac{\text{Anzahl falsch gelöste Aufgaben}}{\text{Anzahl gelöste Aufgaben total}}$$

Abbildung 11 zeigt den Quantitätsverlauf beider Klassen im Vergleich, gemessen am Median, also *dem* mittleren Schüler

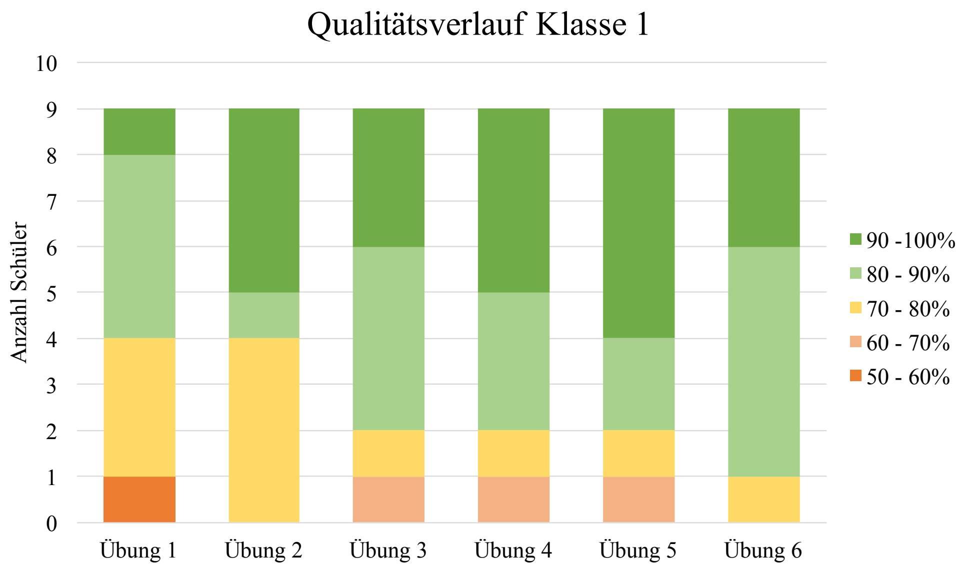

Abbildung 8: Visualisierung der Qualitätsentwicklung der Schüler der Klasse 1

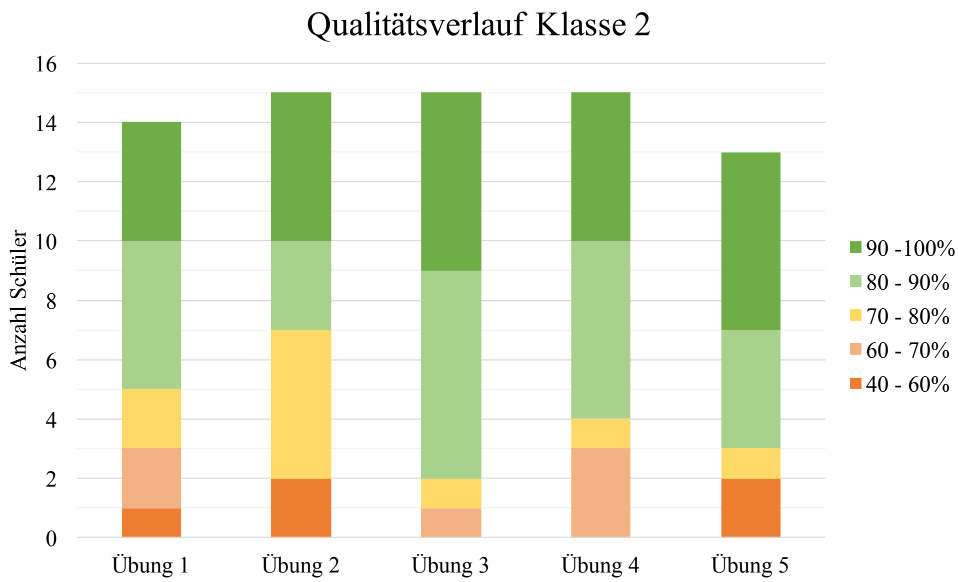

Abbildung 9: Qualitätsentwicklung der Schüler der Klasse 2

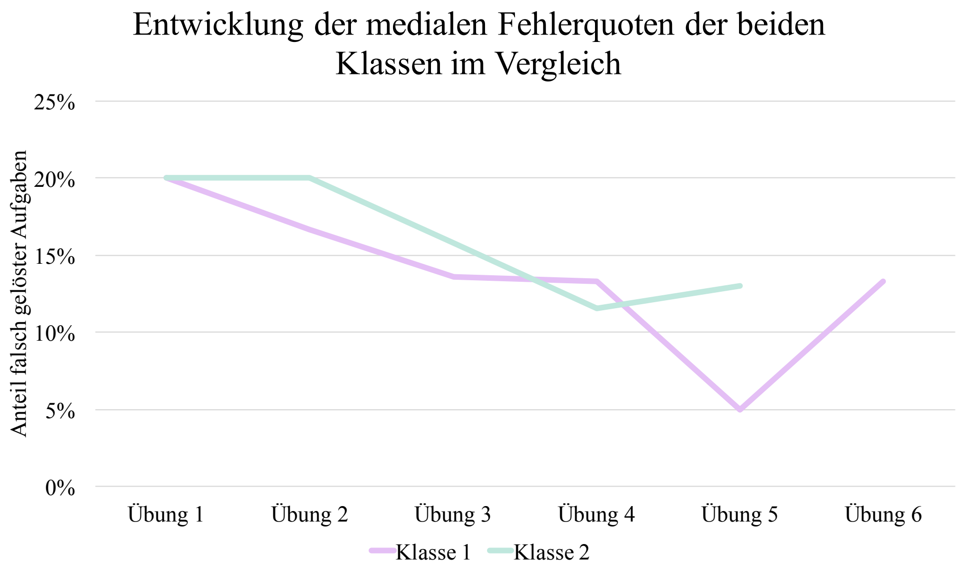

Abbildung 10: Verlauf der Fehlerquote des *mittleren Schülers* beider Klassen im Vergleich

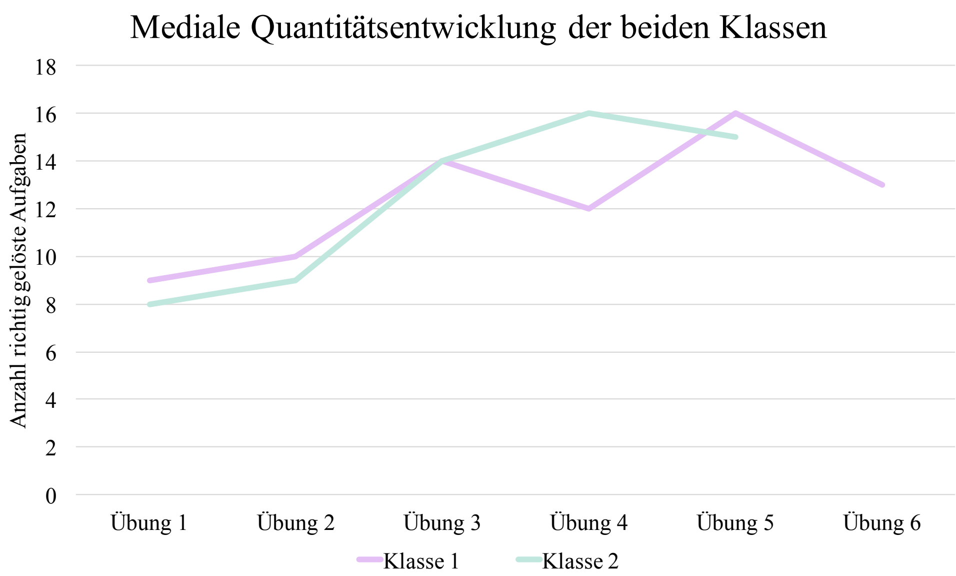

Abbildung 11: Megngenmässige Enwticklung des *mittleren Schülers* beider Klassen

7.6 Das Unmessbare

Zum Schluss der Auswertung geht es darum, ob ich meine Ziele erreicht habe oder nicht. Da Werte wie Freude oder Motivation von Person zu Person unterschiedlich aufgefasst werden, ist es beinahe unmöglich solche Werte zuverlässig mit Zahlen zu erfassen und auszudrücken. Deshalb habe ich diese Auswertung aufgrund eines Kreisgespräches erstellt. Rund $\frac{2}{3}$ der Schüler gaben an, dass sie nach dem Projekt motivierter als vorhin an Kopfrechnungsaufgaben herangingen. $\frac{4}{5}$ der Schüler gaben an, neue Techniken erlernt zu haben, der Rest rechnete weiterhin mit bereits zuvor selbst erlernten Methoden. Jeder dritte Schüler stimmte zu, dass er Freude am Kopfrechnen gewonnen hatte. Schlussendlich, und das sei das wichtigste, gaben alle Schüler an, dass sie sich besser zu helfen wussten als zu vor. Mit einigem nachhaken stimmten alle Schüler zu, dass die mathematischen Gesetze nicht nur da sind um Schüler zu plagen, sondern auch nützlich sein können und ausgenutzt werden dürfen. Dass es in der Mathematik darum geht, sich eine möglichst einfache Lösung für ein vorhandenes Problem zu suchen, dem stimmten auch alle Schüler zu.

8 Diskussion der Ergebnisse

Hier möchte ich abermals anmerken, dass es nicht darum geht eine statistisch aussagekräftige Analyse meines Projektes durchzuführen. Vielmehr geht es darum auszuwerten ob das Projekt, so wie es durchgeführt wurde, erfolgreich war oder nicht.

8.1 Allgemeine Ergebnisse

8.2 Quantitative Entwicklung

Einerseits lässt sich bei Betrachtung der Abbildungen 4, 5, 6 und 7 relativ schnell erkennen, dass die Schüler im Verlauf des Projektes fähig waren mehr Aufgaben in der gleichen Zeit zu lösen. Dies ist einerseits nicht verwunderlich, da sie mit der Zeit den Ablauf kannten und auch die Methoden verinnerlicht haben. Unter Einbezug des Indizes, dass die Aufgaben mit der Zeit schwieriger wurden, lässt sich dennoch auf eine Verbesserung schliessen. Untersucht man in Abbildung 4 genauer, so erkennt man, dass sich in der Klasse 1 sowohl die Anfangs schlechten Schüler, als auch die Anfangs besseren Schüler verbessert haben. Der gleiche Trend ist für Klasse 2 in Abbildung 6 erkennbar. Auffallend ist dass bei beiden Klassen Übung 5 schlechter ausgefallen ist, als Übung 4. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sie bis und mit Übung 4 das Theorieblatt zu Hilfe nehmen durften. Klasse 1 hatte bei Übung 4 einen Abschiffer, was vermutlich auf einen schlechten Tag hinweist, denn Klasse 2 hatte unter den gleichen Bedingungen ihr Spitzenresultat abgeliefert.

In den Abbildungen 5 und 7 lässt sich der individuelle Verlauf der einzelnen Testpersonen nachvollziehen. Gut Erkennbar ist, dass die tiefsten Werte immer von unterschiedlichen Schülern erreicht wurden. In Klasse 2 zeigt sich eine Ausnahme wobei eine Testperson etwas zum Schluss unten wegfällt. Diese Testperson hat einen Trick falsch verstanden und folglich auch falsch angewandt. Dies führte dazu, dass sie alle Aufgaben des gleichen Typs falsch löste, ebenfalls diese Testperson realisierte in Abbildung 9 jeweils einen der tiefsten Werte. Vergleicht man die Verteilung der Werte, also die Streuung der Leistungen, so zeigt sich in beiden Klassen zunächst eine sehr kleine Streuung, welche jedoch im Verlauf des Projektes stark zunimmt. Die Streuung wird in den Boxplots dargestellt durch die Länge der Box, beziehungsweise in den Liniendiagrammen durch die Dichte der Linien. Diese grösserwerdende Streuung weist darauf hin, dass die Schüler sehr unterschiedliche Entwicklungsgeschwindigkeiten aufweisen. Aber nichts desto trotz, ist bei allen Schülern eine Verbesserung erkennbar.

8.3 Entwicklung der Qualität

Um die qualitative Entwicklung zu verfolgen, dienen die Abbildungen 8 und 9. Eine sehr starke Entwicklung legte die Klasse 1 an den Tag. Sehr schön ist der Trend erkennbar, dass der grüne Anteil der Säulen immer grösser wird. Setzt man die Abbildung 8 in Korellation mit Abbildung 4 so fällt auf, dass die Schüler nicht nur fähig waren mehr Aufgaben zu lösen sondern von diesen Aufgaben auch einen grösseren Anteil korrekt lösten. Setzt man diese zwei Erkenntnisse in den Verbindung mit dem Fakt, dass die Aufgaben stetig schwieriger wurden, so erkennt man: Klasse 1 hat eine grosse Entwicklung hingelegt. Sie haben immer mehr immer schwierigere Aufgaben korrekt gelöst.
Die qualitative der Klasse 2 bewegt sich in einem ähnlichen Bereich wie derjenige der Klasse 1. Aus Abbildung9 lässt sich ablesen, dass auch die Testpersonen der Klasse 2 den Anteil richtig gelöster Aufgaben verbessern konnten. Anzumerken ist, dass die zwei Personen, welche bei Übung 5 abwesend waren, bei Übung 4 einen Korrektheitsgrad zwischen (80% und 90% bzw. 90% - 100%) erreichten. Auffallend ist, dass sich hartnäckig eine oder zwei Testpersonen im dunkelorangen Bereich befanden, dies ist nicht weiter beunruhigend, da sich diese Werte auf verschiedene Tespersonen verteilen, welche vermutlich an diesem Tag einen schlechten Tag einzogen. Erstaunlich ist, dass diese Testperson, welche einen Trick falsch anwendete dennoch gute Werte erreichte und nur zweimal in den dunkelorangen Bereich abtauchte.

8.4 Zusammenfassung

Um die Ergebnisse nochmals kurz zusammenfassen, dienen die Abbildungen 10 und 11. Sie visualisieren sowohl die Quantitäts- als auch die Qualitätsentwicklung des Medians. Der Median steht für *den mittleren Schüler*, die Diagramme zeigen also die Entwicklung des mittleren Schülers, stellvertretend für die ganze Klasse. In Abbildung 10 zeigt sich dass in beiden Klassen die Fehlerquote reduziert wurde. Dass die Kurve der Klasse 1 zum Schluss wieder nach oben bewegt, deutet auf eine kollektiv ausserordentliche Leistung in der fünften Übungsserie hin. Die quantitative Entwicklung des mittleren Schülers, oder eben der Klassen, ist in Abbildung 11 dargestellt.Wiederum ist eine konstante Entwicklung erkennbar, auch hier Schön erkennbar, dass die Klasse 1 in der vierten Übungsserie einen schlechten, Klasse 2 einen sehr guten Tag eingezogen haben. Zusammenfassend kann man sagen, dass sich beide Klassen qualitativ und quantitativ verbessert haben. Die Zahlen sprechen für sich, die Schüler waren am Ende des Projektes fähig, Kopfrechenaufgaben schneller und mit wenigern Fehlern zu lösen als zu Beginn des Projektes. Somit war das Projekt, mit diesen Schülern durchgeführt, definitiv ein Erfolg.

8.5 Persönliche Billanz

Das Unterrichten der Schüler und das Auswerten ihrer Arbeiten hat mir sehr grossen Spass bereitet. Umso schöner ist es, zu sehen, dass die Ernte Früchte trägt. Für mich persönlich ist das Projekt ein grosser Erfolg, der Ausdruck in den Gesichtern, als die Schüler erkannt haben, dass es Kopfrechnen auch in einfach gibt – unbezahlbar.

9 Schlusswort

Mit \cite {mittring2011} entsteht folgender Eintrag (Mittring, 2011)
Mit \citeA {Schlüsselwort} entsteht folgender Eintrag Mittring (2011)

10 Nützliches

Sekundärzitat Krauthausen und Scherer (2014, zitiert nach ; Mittring, 2011, S. 180)

Literatur

Dambeck, H. (2012). *Je mehr löcher, desto weniger käse - mathematik verblüffend einfach* (5. Aufl.). Köln: Kiepenheuer & Witsch.

Kalisch, M., Bühlmann, P. & Künsch, H. (2016, Februar). *Statistik 1 für biologie, gesundheitswissenschaften und pharmazeutische wissenschaften.* (Nicht offiziell veröffentlicht)

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Einführung in die mathematikdidaktik* (3. Aufl.). Springer Spektrum.

Landwehr, N. (1997). *Neue wege der wissensvermittlung: ein praxisorientiertes handbuch für lehrpersonen im bereich der sekundarstufen i und ii (berufsschulen, gymnasien) sowie in der lehrer- und erwachsenenbildung* (3. Aufl.). Verlag für Berufsbildung, Sauerländer.

Meyer, R. (2015). *Aitus: Die fünf phasen im überblick.* Airbowis. Zugriff am 4.8.2016 auf http://arbowis.ch/index.php/67-2014/erwachsenenbildung/unterrichtsplanung/phasenmodelle/42-aitus-5-phasen-unterrichtsaufbau

Mittring, G. (2011). *Rechnen mit dem weltmeister - mathematik und gedächtnistraining für den alltag.* Frankfurt am Main: S. Fischer Verlag.