Exercice 10 *Déterminer les limites suivantes :*

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, *limite en 0 ?*
2. $D_f = \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = e^x(\frac{1}{x} - 3)$, *limite en* $+\infty$ *?*
3. $D_f = \mathbb{R}_-^*$, $f(x) = \frac{-e^x}{x^3}$, *limite en* $-\infty$ *?*
4. $D_f = \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-3x^2+2}$, *limite en* $+\infty$ *?*

Exercice 11 *Déterminer les variations et les limites en* $+\infty$ *et en* 0 *de* $f(x) = x^\alpha$ *dans les cas suivants :*

1. $\alpha < 0$
2. $0 < \alpha < 1$
3. $1 \leq \alpha$

Exercice 12 *Déterminer les variations et les limites en* $-\infty$ *et en* $+\infty$ *de* $f(x) = a^x$ *dans les cas suivants :*

1. $0 < a < 1$
2. $a = 1$
3. $1 < a$

5 Retour sur les limites : lever les indéterminations

5.1 La comparaison

Afin de ne pas multiplier artificiellement les cas, nous ne considèrerons dans cette sous-section (sauf indication contraire) que des fonctions définies sur un intervalle I de la forme $]a; b[$ où a et b sont soit des réels, soit $-\infty$ (pour a) ou $+\infty$ (pour b). Nous étudierons leur limite en b mais les résultats sont tout aussi valables pour leur limite en a.

On peut déterminer de nombreuses limites en utilisant les fonctions usuelles et les résultats d'opérations sur les limites. Quand cela n'est pas directement possible, il faut recourir à un argument de **comparaison**, c'est-à-dire déterminer "ce qui est petit" et "ce qui est grand". Ces notions sont bien évidemment relatives : par exemple la distance de la Terre à la Lune est gigantesque par rapport à la taille d'une cellule, mais elle est minuscule par rapport à la taille de la Voie Lactée. Voici un premier résultat de comparaison :

Théorème 2 *Soient f et g deux fonctions définies sur I, s'il existe $c \in I$ tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \geq c$, alors les limites de f et g en b, si elles existent, vérifient*

$$\lim_{x \to b} f(x) \geq \lim_{x \to b} g(x)$$

Démonstration Supposons que les deux limites existent et que $\lim_{x \to b} f(x) < \lim_{x \to b} g(x)$. On peut alors trouver un réel α tel que : $\lim_{x \to b} f(x) < \alpha < \lim_{x \to b} g(x)$. Par définition de la limite, il existe donc $y \in I$ et $z \in I$ tels que pour tout $x \in I$:

$$x > y \Rightarrow f(x) < \alpha,$$

$$x > z \Rightarrow g(x) > \alpha.$$

En prenant $x > Max\{c; y; z\}$ on trouve que $f(x) > g(x)$ ce qui est absurde.□

Ce dernier théorème ne permet pas de trouver directement des limites, mais on peut le préciser de la façon suivante :

Théorème 3 *Soient f et g deux fonctions définies sur I, s'il existe $c \in I$ tel que $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \geq c$, alors :*

1. *si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$ alors la limite de g en b existe et vaut $-\infty$.*
2. *si $\lim\limits_{x \to b} g(x) = +\infty$ alors la limite de f en b existe et vaut $+\infty$.*
3. *s'il existe une troisième fonction h définie sur I telle que $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ pour tout $x \geq c$, et si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} h(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors la limite de g en b existe et vaut l.*

Le troisième cas porte souvent le nom de "théorème des gendarmes".

Démonstration

1. Si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$ alors pour tout $M < 0$, il existe $x_M \in I$ tel que $x > x_M \Rightarrow f(x) < -M$. Puisque $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \geq c$, on en déduit que $x > Max(c; x_M) \Rightarrow g(x) < -M$ donc $\lim\limits_{x \to b} g(x) = -\infty$
2. La démonstration est exactement le même que la précédente.
3. Si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} h(x) = l$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe x_ε et y_ε dans I tels que :
$$x > x_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon,$$
$$x > y_\varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon.$$
On en déduit donc que $x > Max\{c; x_\varepsilon; y_\varepsilon\} \Rightarrow l - \varepsilon < h(x) \leq g(x) \leq f(x) < l + \varepsilon$ et donc que $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$. □

Exercice 13 *Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

1. $f(x) = x^2 + 2cos(x)$
2. $g(x) = \dfrac{sin(x)}{x}$
3. $h(x) = e^{-x} - cox(x)sin(x)$

5.2 La domination

Nous ne considérerons ici que des fonctions **strictement positives** définies sur un intervalle I de la forme $]a, b[$ où a et b sont soit des réels, soit $-\infty$ ou $+\infty$. On définit à présent **la domination au voisinage de b** (la domination au voisinage de a se définissant exactement de la même façon).

Définition 10 *Soient f et g deux fonctions strictement positives définies sur I. On dit que f **domine g au voisinage de b** (ou que g est négligeable devant f au voisinage de b), si*

$$\lim_{x \to b} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

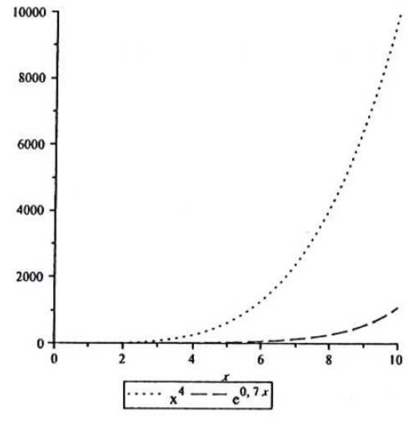
Cela se note $g \ll_b f$.

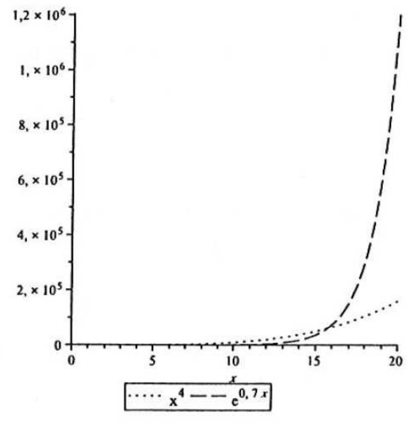
La proposition suivante, que l'on donne sans démonstration, est fondamentale : elle nous indique ce qui est négligeable. Elle nous sera extrêmement utile pour calculer de nombreuses limites.

Proposition 6 *Soient a un réel* ***strictement positif*** *et b un réel* ***positif****. On a :*
- $x^b \ll_{+\infty} e^{ax}$
- $ln^b(x) \ll_{+\infty} x^a$
- $ln^b(x) \ll_{+\infty} e^{ax}$

Cette proposition nous dit que "c'est exponentiel le plus grand, ensuite les exposants (et donc les polynômes) et finalement le logarithme". Il faut toutefois se méfier de cette interprétation : une exponentielle devient plus grande qu'un exposant **à partir d'une certaine valeur de x**, et rien dans le résultat précédent ne nous donne d'information sur cette valeur palier. Ainsi, comme on peut le voir sur les graphes ci-dessous, $e^{0,7x}$ devient beaucoup plus grand que x^4 à partir de $x \simeq 16$, mais si on ne s'intéresse qu'à des valeurs de x comprises entre 1 et 10, c'est $e^{0,7x}$ qui est négligeable par rapport à x^4.

La même remarque s'applique aux comparaisons logarithmes/exposants et logarithmes/exponentielles.





On peut également comparer facilement entre eux les produits d'exponentielles, d'exposants et de logarithmes. Pour cela, rappelons brièvement ce qu'est l'ordre lexicographique strict. Si a, b, c, d, e et f sont six réels, alors

$$(a, b, c) <_{lex} (d, e, f) \Leftrightarrow ((a < d) \text{ ou } (a = d \text{ et } b < e) \text{ ou } (a = d \text{ et } b = e \text{ et } c < f))$$

On a alors le résultat suivant qui généralise la proposition 5 :

Proposition 7 *Soient a, b, c, d, e et f six réels positifs. On a :*

$$e^{ax}.x^b.ln^c(x) \ll_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x) \Longleftrightarrow (a, b, c) <_{lex} (d, e, f)$$

Démonstration Supposons que $(a, b, c) <_{lex} (d, e, f)$, et étudions le quotient $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)}$ suivant les différents cas possibles :

- $a < d$
  Dans ce cas, $d - a > 0$ et donc $\dfrac{d-a}{2} > 0$. En écrivant
  $$\frac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)} = \frac{x^b.ln^c(x)}{e^{(d-a)x}.x^e.ln^f(x)} = \frac{x^b}{e^{(d-a)x/2}}.\frac{ln^c(x)}{e^{(d-a)x/2}}.\frac{1}{x^e.ln^f(x)},$$
  on remarque que les trois derniers quotients tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc que $e^{ax}.x^b.ln^c(x) \ll_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x)$.

- $a = d$
  Dans ce cas $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)} = \dfrac{x^b.ln^c(x)}{x^e.ln^f(x)}$. Il y a encore deux cas possibles :
  - $b < e$
    Dans ce cas, $e - b > 0$, en écrivant
    $$\frac{x^b.ln^c(x)}{x^e.ln^f(x)} = \frac{ln^c(x)}{x^{e-b}.ln^f(x)} = \frac{ln^c(x)}{x^{e-b}}.\frac{1}{ln^f(x)},$$
    on remarque que les deux derniers quotients tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et donc que $e^{ax}.x^b.ln^c(x) \ll_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x)$.

  - $b = e$
    Dans ce cas on a nécessairement $c < f$, soit $f - c > 0$. Alors
    $$\frac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)} = \frac{ln^c(x)}{ln^f(x)} = \frac{1}{ln^{f-c}(x)},$$
    ceci tend bien vers 0 quand x tend vers $+\infty$ et on a donc $e^{ax}.x^b.ln^c(x) \ll_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x)$.

Montrer la réciproque est beaucoup plus rapide : si $e^{ax}.x^b.ln^c(x) \ll_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x)$ alors $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

- Si $(a,b,c) =_{lex} (d,e,f)$ alors $a = d$, $b = e$ et $c = f$ et donc $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)} = 1$ ce qui est absurde.
- Si $(a,b,c) >_{lex} (d,e,f)$ alors on a montré que $e^{ax}.x^b.ln^c(x) \gg_{+\infty} e^{dx}.x^e.ln^f(x)$ et donc que $\dfrac{e^{dx}.x^e.ln^c(f)}{e^{ax}.x^b.ln^f(c)}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Son inverse $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)}$ tend alors vers $+\infty$ (on ne peut l'affirmer uniquement parce que tous les termes considérés sont **positifs**) quand x tend vers $+\infty$ ce qui est absurde.□

Remarque 3 *Ce résultat est crucial en informatique, notamment en théorie de la complexité : la complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations nécessaires en fonction de la taille n des données d'entrée. On peut ainsi affirmer par exemple qu'un algorithme de tri de complexité n.ln(n) nécessitera beaucoup moins d'opérations, et prendra donc beaucoup moins de temps, qu'un algorithme de tri de complexité n^2.*

On peut alors déterminer la limite en $+\infty$ de n'importe quelle fonction construite à partir d'exponentielles, d'exposants et de logarithmes en appliquant la méthode suivante :

1. Tout écrire en puissance positive
2. Réécrire la fonction comme une somme de termes de la forme $\dfrac{e^{ax}.x^b.ln^c(x)}{e^{dx}.x^e.ln^f(x)}$ et déterminer la limite de chaque terme grâce à la proposition 6.
3. Si indétermination, factoriser par "le plus grand" (au sens de $\ll$).
4. Conclure à l'aide de la proposition 6 et des règles de calcul sur les limites.

Ceci permet également de trouver des limites en 0 et en $-\infty$:

- **Limites en $-\infty$.**
  On pose $y = -x$ et on remplace x par $-y$ dans la fonction. Chercher sa limite quand x tend vers $-\infty$, c'est donc chercher sa limite quand y tend vers $+\infty$. On applique alors la technique précédente.

- **Limites en 0.**
  ATTENTION ! ! ce qui suit n'est valable que si l'on travaille à signe constant, c'est à dire si x est toujours négatif ou toujours positif.
  On pose $y = \dfrac{1}{x}$ et on remplace x par $\dfrac{1}{y}$ dans la fonction. Chercher sa limite quand x tend vers 0, c'est donc chercher sa limite quand y tend vers $+\infty$ (si x est positif) ou vers $-\infty$ (si x est négatif). On applique alors la technique précédente.

Exercice 14 *Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :*

1. $\dfrac{e^{0,01x}}{x^{1000}}$
2. $e^{3x} - ln(x)$
3. $\dfrac{\pi^x - 3}{ln(x)}$
4. $e^{-x}x^3 - x^{0,2}ln^{-100}(x) + e^{3x}x^{-5}$

Exercice 15 *Déterminer les limites suivantes :*

1. *en $-\infty$ de $e^x x^9$ définie sur $\mathbb{R}$*
2. *en 0 de $-\frac{ln(x)e^{4x+1}}{x^7}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$*
3. *en 0 de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}$ définie sur $\mathbb{R}_-^*$*
4. *en $-\infty$ de $e^{-x}x^3 + (-x)^{0,2}ln^{-100}(-x) + e^{3x}x^{-5}$ définie sur $\mathbb{R}_-^*$.*