《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

图的连通性

主要内容

图的连通性刻画

一、割边、割点和块

二、图的连通度与敏格尔定理

三、图的宽直径简介

本次课主要内容

割边、割点和块

(一)、割边及其性质

(二)、割点及其性质

(三)、块及其性质

研究图的连通性的意义

研究图的连通性，主要研究图的连通程度的刻画，其意义是：

图论意义：图的连通程度的高低，是图结构性质的重要表征，图的许多性质都与其相关，例如：连通图中任意两点间不相交路的条数就与图的连通程度有关。

实际意义：图的连通程度的高低，对应于通信网络“可靠性程度”的高低。

网络可靠性，是指网络运作的好坏程度，即指如计算机网络、通信网络等对某个组成部分崩溃的容忍程度。

网络可靠性，是用可靠性参数来描述的。参数主要分确定性参数与概率性参数。

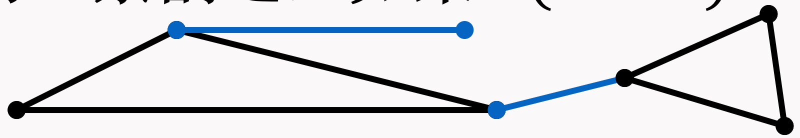
确定性参数主要考虑网络在最坏情况下的可靠性度量，常称为网络拓扑的“容错性度量”，通常用图论概念给出，其中，本章将介绍的图的连通度就是网络确定性参数之一。近年来，人们又提出了“坚韧度”、“核度”、“整度”等描述网络容错性的参数。

概率性参数主要考虑网络中处理器与信关以随机的、彼此独立的按某种确定性概率损坏的情况下，网络的可靠性度量，常称为网络拓扑的“可靠性度量”。

(一)、割边及其性质

定义1 边e为图G的一条割边，如果$\omega(G-e)>\omega(G)$.

图的分支数



蓝色边为该图的割边

注：割边又称为图的“桥”。

图的割边有如下性质：

定理1 边e是图G的割边当且仅当e不在G的任何圈中。

证明：可以假设G连通。

“必要性”

若不然。设e在图G的某圈C中，且令$e = uv$.

考虑$P = C - e$, 则P是一条(u, v)路。下面证明$G - e$连通。

对任意$x, y \in V(G - e)$, 由于G连通，所以存在(x, y)路Q. 若Q不含e, 则x与y在$G - e$里连通；若Q含有e, 则可选择路：$x --uPv-- y$, 说明x与y在$G - e$里也连通。所以, 若边e在G的某圈中，则$G - e$连通。

但这与e是G的割边矛盾！

“充分性”

如果e不是G的割边，则$G-e$连通，于是在$G-e$中存在一条(u,v) 路，显然：该路并上边e得到G中一个包含边e的圈，矛盾。

推论1 e为连通图G的一条边，如果e含于G的某圈中，则$G-e$连通。

证明：若不然，$G-e$不连通，于是e是割边。由定理1，e不在G的任意圈中，矛盾！

例1 求证：(1) **若G的每个顶点的度数均为偶数，则G没有割边；** (2) **若G为k正则二部图$(k\geq 2)$，则G无割边。**

证明：(1)若不然，设$e=uv$为G的割边。则$G-e$的含有顶点u（或v)的那个分支中点u（或v)的度数为奇，而其余点的度数为偶数，与握手定理推论相矛盾！

(2)若不然，设$e = uv$为G的割边。取$G - e$的其中一个分支G_1，显然，G_1中只有一个顶点的度数是$k - 1$, 其余点的度数为k。并且G_1仍然为偶图。

假若G_1的两个顶点子集包含的顶点数分别为m与n，并且包含m个顶点的顶点子集包含度为$k - 1$的那个点，那么有：$km - 1 = kn$。但是因$k \geq 2$，所以等式不能成立！

边割集简介

边割集跟回路、树等概念一样，是图论中重要概念。在应用上，它是电路网络图论的基本概念之一。所以，下面作简单介绍。

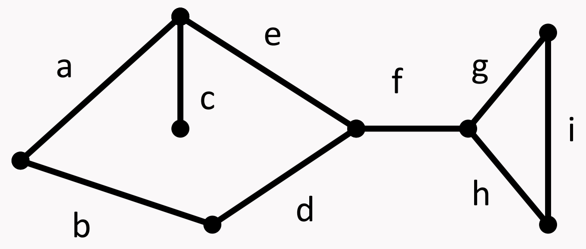
定义2 一个具有n个顶点的连通图G, 定义$n-1$为该**连通图的秩**；具有**p个分支的图的秩**定义为$n-p$, 记为$R(G)$.

定义3 设S是连通图G的一个边子集，如果：

(1) $R(G-S)=n-2$;

(2) 对S的任一真子集S_1, 有$R(G-S_1)=n-1$. 称S为G的一个**边割集**，简称G的一个**边割**。（破坏连通性的极小边子集）

例2 边子集：$S_1=\{a,c,e\}, S_2=\{a,b\}, S_3=\{f\}$是否是下图$G$的边割？



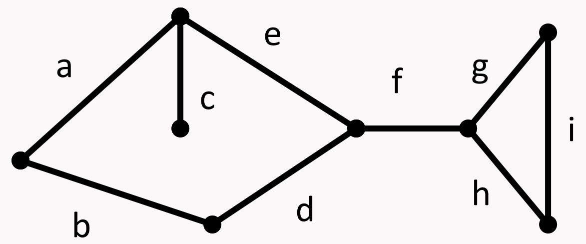
图G

解：S_1不是；　S_2与S_3是。

定义4　在G中，与顶点v关联的边的集合，称为v的**关联集**，记为：$S(v)$.

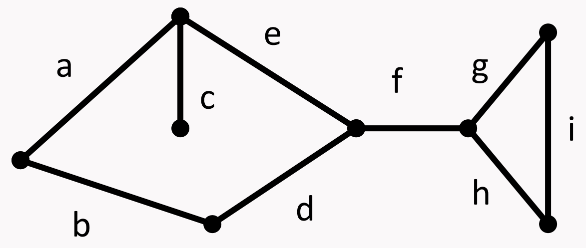
例3 关联集是割集吗？为什么？

答：不一定！如在下图中，关联集$\{a,b\}$是割集，但是，关联集$\{d,e,f\}$不是割集。



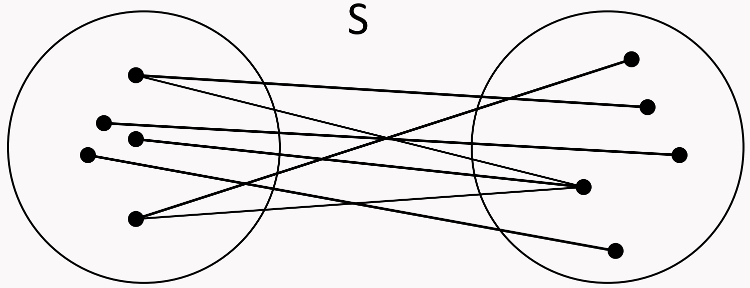
图G

定义5　在G中，如果$V=V_1\cup V_2, V_1\cap V_2=\Phi, E_1$是$G$中端点分属于$V_1$与$V_2$的$G$的边子集，称$E_1$是$G$的一个**断集**。



图G

在上图G中：$\{d,e\},\{f\},\{e,d,f\}$等都是G的断集。一个图若按断集S来画，形式为：

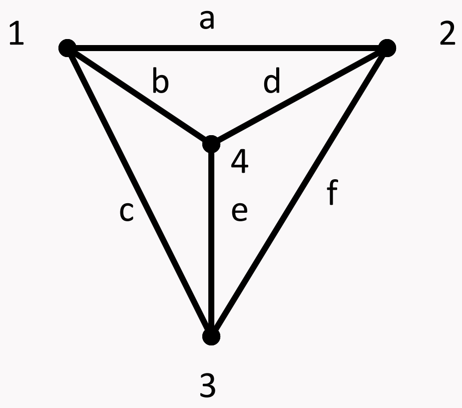


注:割集、关联集是断集，但逆不一定。断集和关联集之间的关系为:

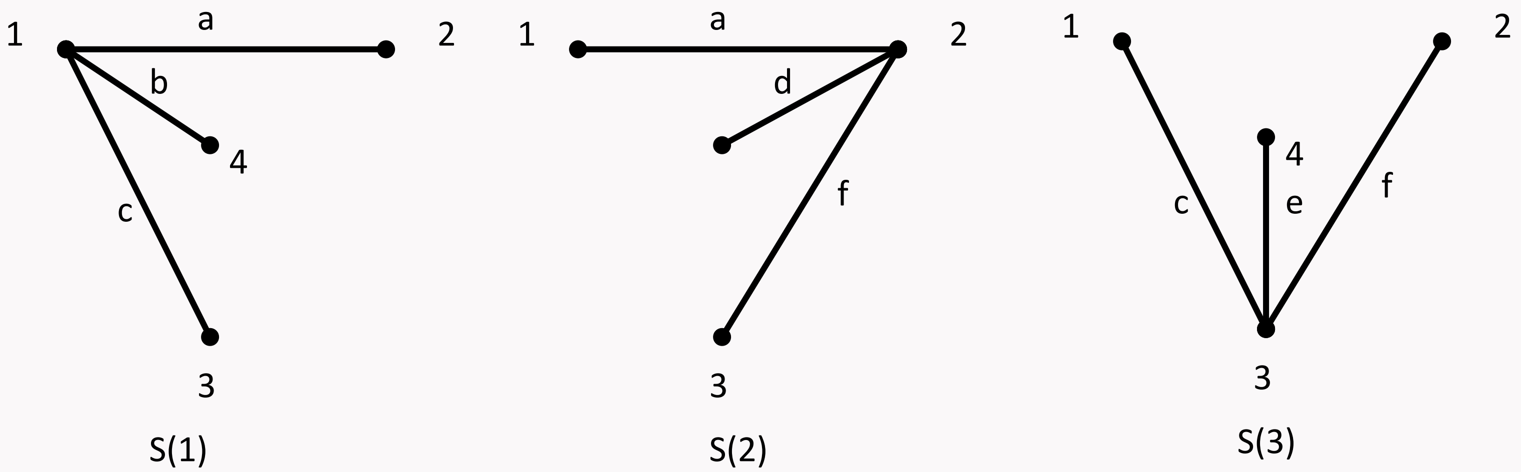
定理2 **任意一个断集均是若干关联集的环和(对称差).** 注: $E_1 \oplus E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$

定理3 **连通图$\boldsymbol{G}$的断集的集合作成子图空间的一个子空间，其维数为$\boldsymbol{n-1}$. 该空间称为图的断集空间。**(其基为$n-1$个线性无关的关联集)

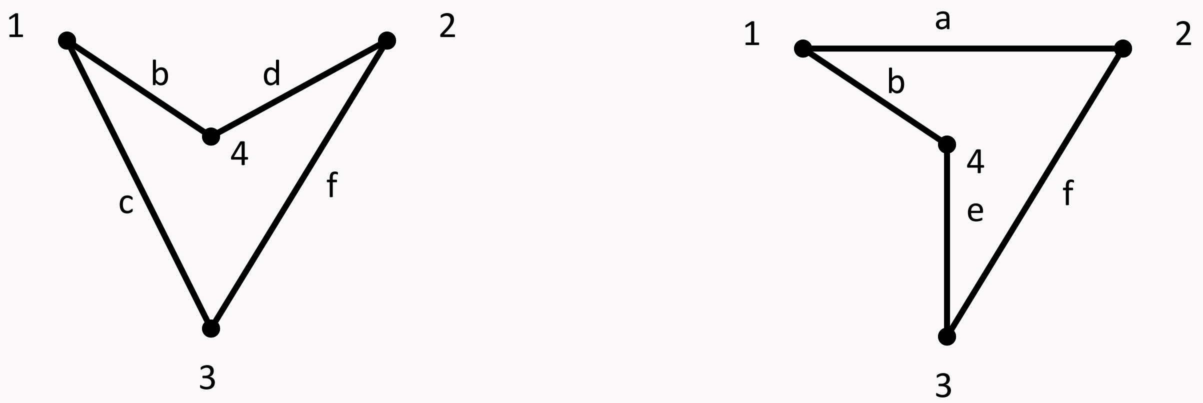
例4 求出下图G的所有断集。



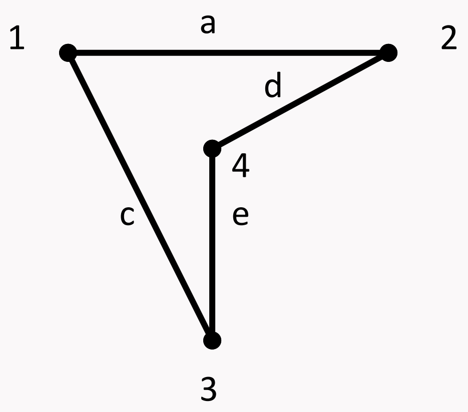
解：容易知道：$S(1)$，$S(2)$，$S(3)$是线性无关断集。

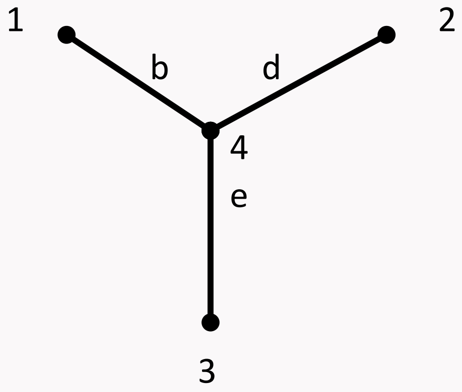


$(1), S(1)\Delta S(2)=\{b,c,d,f\}; (2), S(1)\Delta S(3)=\{a,b,e,f\}$



$(3), S(2)\Delta S(3) = \{a, c, d, e\}; (4), S(1)\Delta S(2)\Delta S(3) = \{b, d, e\}$



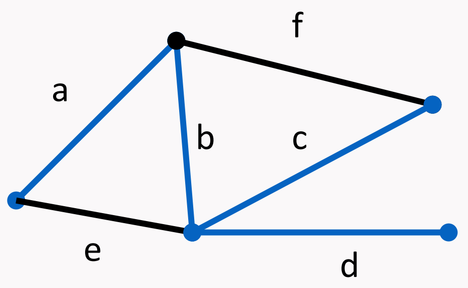


上图形成的断集空间为：

$\{\Phi, S(1), S(2), S(3), \{a, c, d, e\}, \{a, b, e, f\}\{b, c, d, f\}, \{b, d, e\}\}.$

定义6 设G是连通图，T是G的一棵生成树。如果G的一个割集S恰好包含T的一条树枝，称S是G的对于T的一个**基本割集**。

例如：在图G中



图G

G的相对于T的基本割集为：

$$\{a, e\}, \quad \{f, c\}, \quad \{f, b, e\}, \quad \{d\}.$$

关于基本割集，有如下重要结论：

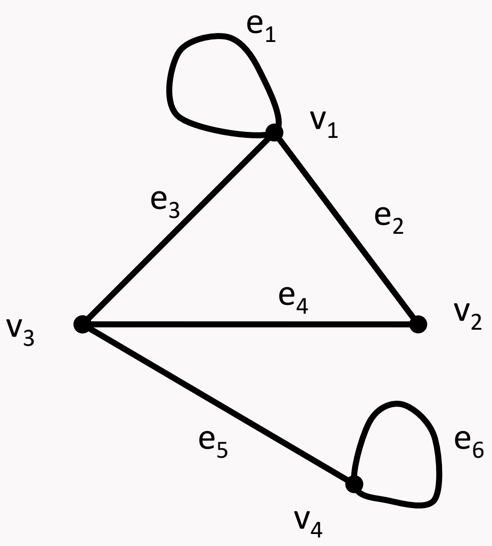
定理4 **连通图G的断集均可表为G的对应于某生成树T的基本割集的环和。**

定理5 **连通图$\boldsymbol{G}$对应于某生成树$\boldsymbol{T}$的基本割集的个数为$\boldsymbol{n-1}$,它们作成断集空间的一组基。**

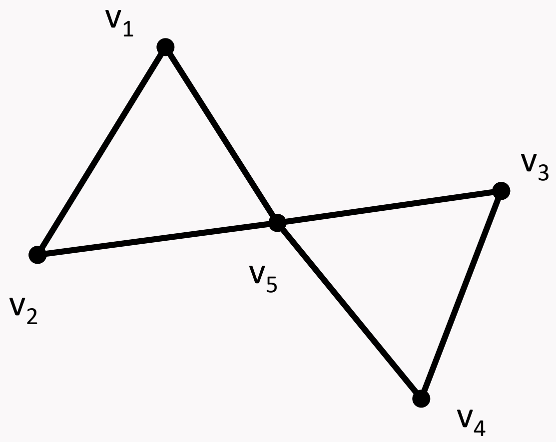
注：到目前为止，我们在子图空间基础上，先后引进了图的回路空间和断集空间，它们都是子图空间的子空间，这些概念，均是网络图论的基本概念，当然也是代数图论的基本概念。

(二)、割点及其性质

定义7 在G中，如果$E(G)$可以划分为两个非空子集E_1与E_2,使$G[E_1]$和$G[E_2]$以点v为公共顶点，称v为G的一个**割点**。



图G_1



图G_2

在图G_1中，点v_1, v_4, v_3均是割点；在G_2中，v_5是割点。

定理6 **G无环且非平凡，则v是G的割点，当且仅当$\omega(G-v) > \omega(G)$.**

无环且非平凡情形下，割点与各边的定义一致

证明：“必要性”

设v是G的割点。则$E(G)$可划分为两个非空边子集E_1与E_2，使$G[E_1], G[E_2]$恰好以v为公共点。由于G没有环，所以，

$G[E_1], G[E_2]$分别至少包含异于v的G的点，这样，$G-v$的分支数比G的分支数至少多1，所以：$\omega(G-v)>\omega(G)$.

“充分性”

为什么？

由割点定义结论显然。

定理7 **v是树T的顶点，则v是割点，当且仅当v是树的分支点。**

证明：

“必要性”：若不然，有$d(v)=1$, 即v是树叶，显然不能是割点。

“充分性”：

设v是分支点，则$d(v)>1$. 于是设x与y是v的邻点，由树的性质，只有唯一路连接x与y, 所以$G-v$分离x与y. 即v为割点。

定理8 **设$\boldsymbol{v}$是无环连通图$\boldsymbol{G}$的一个顶点，则$\boldsymbol{v}$是$\boldsymbol{G}$的割点，当且仅当$\boldsymbol{V(G-v)}$可以划分为两个非空子集$\boldsymbol{V_1}$与$\boldsymbol{V_2}$, 使得对任意$\boldsymbol{x \in V_1, y \in V_2}$, 点$\boldsymbol{v}$在每一条$\boldsymbol{xy}$路上。**

证明：“*必要性*”：v是无环连通图G的割点，由定理6，$G-v$至少有两个连通分支。设其中一个连通分支顶点集合为V_1, 另外连通分支顶点集合为V_2, 即V_1与V_2构成V的划分。

对于任意的$x \in V_1, y \in V_2$, 如果点v不在某一条xy路上，那么，该路也是连接$G-v$中的x与y的路，这与x, y处于$G-v$的不同分支矛盾。

“*充分性*”：若v不是图G的割点，那么$G-v$连通，因此在$G-v$中存在xy路，当然也是G中一条没有经过点v的x, y路。矛盾.

例5 求证：无环非平凡连通图至少有两个非割点。

证明：由于G是无环非平凡连通图，所以存在非平凡生成树，而非平凡生成树至少两片树叶，它不能为割点，所以，<u>它也不能为G的割点</u>。

为什么？

例6 求证：恰有两个非割点的连通简单图是一条路。

证明：设T是G的一棵生成树。由于G有$n-2$个割点，所以，T有$n-2$个割点，即T只有两片树叶，所以T是一条路。这说明，G的任意生成树为路。

一个单图的任意生成树为路，则该图为圈或路，若为圈，则G没有割点，矛盾，所以，G为路。

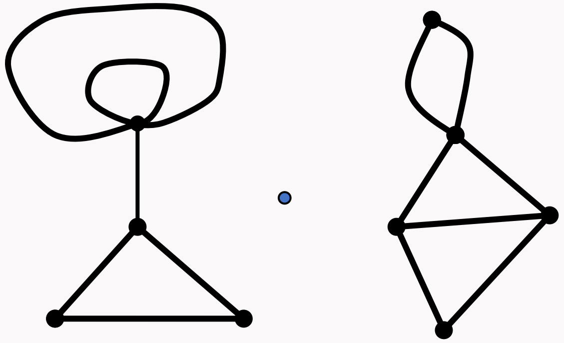
例7 求证：若v是单图G的割点，则它不是G的补图的割点。

证明：v是单图G的割点，则$G-v$至少两个连通分支。现任取$x, y \in V(\bar{G}-v)$，如果x, y在$G-v$的同一分支中，令u是与x, y处于不同分支的点，那么，通过u，可说明，x与y在$G-v$的补图中连通。若x, y在$G-v$的不同分支中，则它们在$G-v$的补图中邻接。所以，若v是G的割点，则v不是其补图的割点。

(三)、块及其性质

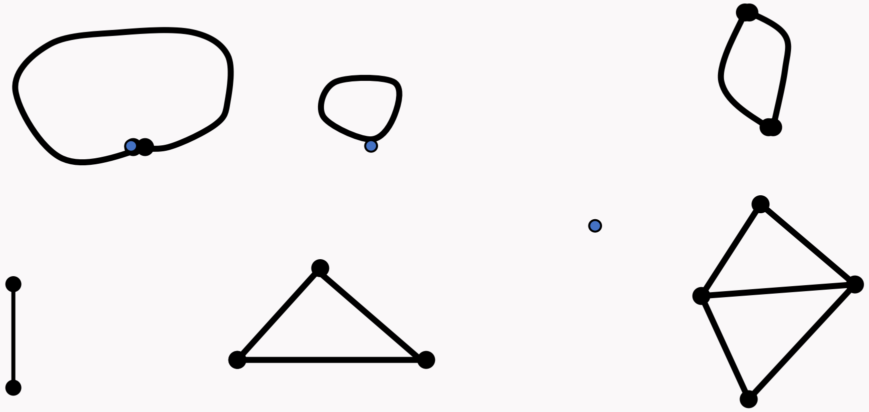
定义8　没有割点的连通图称为是一个**块图**，简称**块**；G的一个子图B称为是**G的一个块**，如果(1)，它本身是块；(2)，若没有真包含B的G的块存在（*极大性*）。

例7 找出下图G中的所有块。



图G

解：由块的定义得：



定理9 **若$|V(G)| \geq 3$, 则G是块，当且仅当G无环且任意两顶点位于同一圈上。**

证明：（必要性）设G是块。因G没有割点，所以，它不能有环。对任意$u, v \in V(G)$, 下面证明u, v位于某一圈上。

对$d(u,v)$作数学归纳法证明。

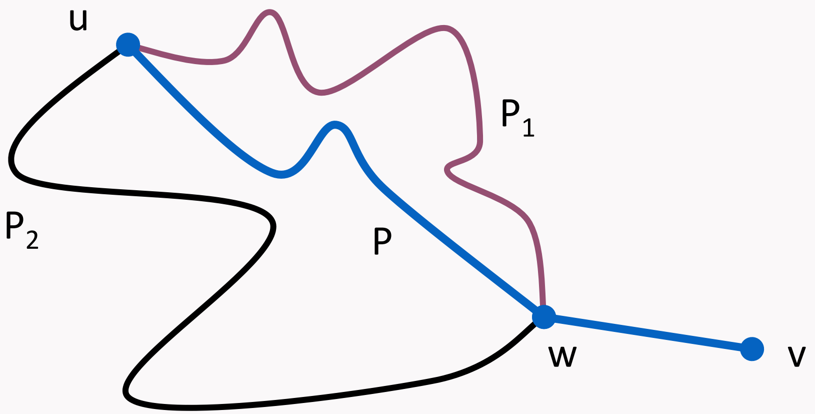
当$d(u,v) = 1$时，由于G是至少3个点的块，所以，边uv不能为割边，否则，u或v为割点，矛盾。由割边性质，uv必然在某圈中。

设当$d\ (u,v)\ < k$时结论成立。

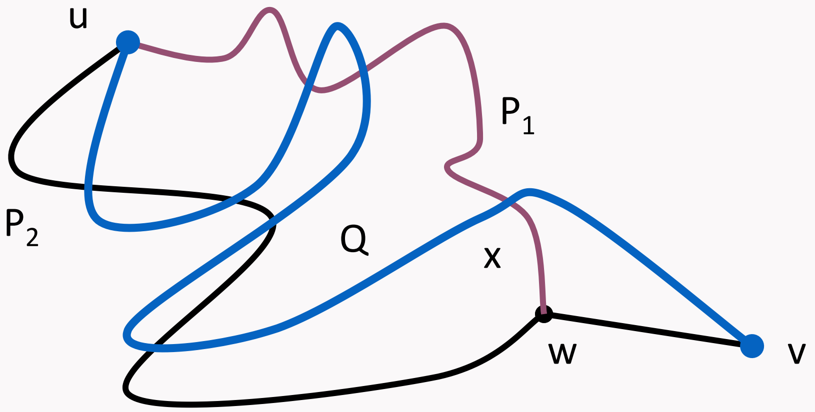
设$d\ (u,v)\ = k$。

设P是一条最短(u,v)路，w是v前面一点，则$d\ (u,w) = k-1.$

由归纳假设，u与w在同一圈$C = P_1 \cup P_2$上。



考虑$G - w$. 由于G是块，所以$G - w$连通。设Q是一条在$G - w$中的(u, v)路，并且设它与C的最后一个交点为x.



则uP_1xvwP_2为包含u,v的圈。

（充分性）：若G不是块，则G中有割点v. 由于G无环，所以$G-v$至少两个分支。设x,y是$G-v$的两个不同分支中的点，则x,y在G中不能位于同一圈上，矛盾！

定理10 **点v是图G的割点当且仅当v至少属于G的两个不同的块。**

证明：（必要性）设v是G的割点。由割点定义：$E(G)$可以划分为两个边子集E_1与E_2. 显然$G[E_1]$与$G[E_2]$有唯一公共顶点v. 设B_1与B_2分别是$G[E_1]$和$G[E_2]$中包含v的块，显然它们也是G的块。即证明v至少属于G的两个不同块。

（充分性）如果v属于G的两个不同块，我们证明：v一定是图G的割点

如果包含v的其中一个块是环，显然v是割点；

设包含v的两个块是B_1与B_2. 如果包含v的两个块不是环，那么两个块分别至少有两个顶点。假如v不是割点，在B_1与B_2中分别找异于v的一个点x与y，$x \in V(B_1)$，$y \in V(B_2)$, 则在$G - v$中有连接x与y的路P.

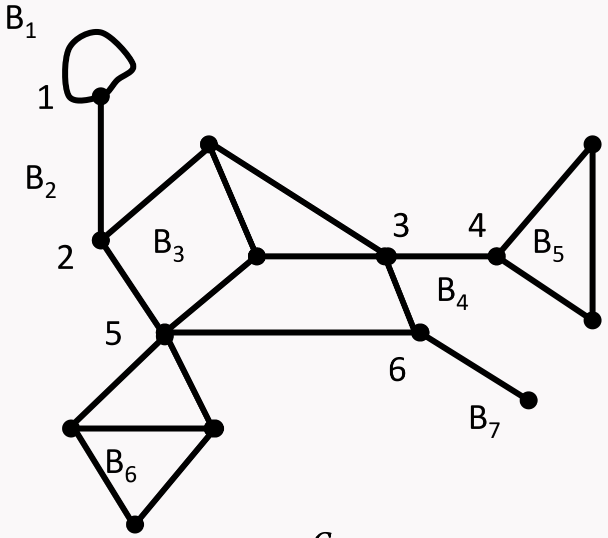
显然：$B_1 \cup B_2 \cup P$无割点。这与B_1, B_2是块矛盾！

注：该定理揭示了图中的块与图中割点的内在联系：*不同块的公共点一定是图的割点*。也就是说，图的块可以按割点进行寻找。所以，该定理的意义在于：*可以得到寻找图中全部块的算法*。

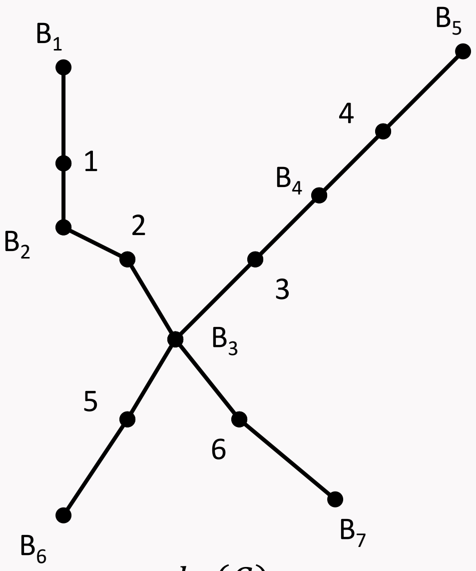
为了直观反映图的块和割点之间的联系，引进所谓的块割点树。

设G是非平凡连通图。$B_1, B_2, \ldots, B_k$是G的全部块，而$v_1, v_2, \ldots, v_t$是G的全部割点。构作G的<u>**块割点树**</u>$bc(G)$: 它的顶点是G的块和割点，连线只在块割点之间进行，一个块和一个割点连线，当且仅当该割点是该块的一个顶点。

例8 画下图G中的块割点树。



G



$bc(G)$

Thank You !