中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

最小生成树

(一)、克鲁斯克尔算法

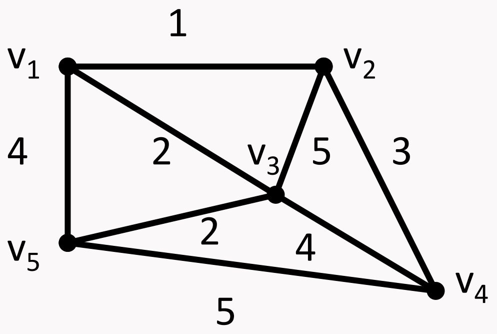
(二)、管梅谷的破圈法

(三)、Prim算法

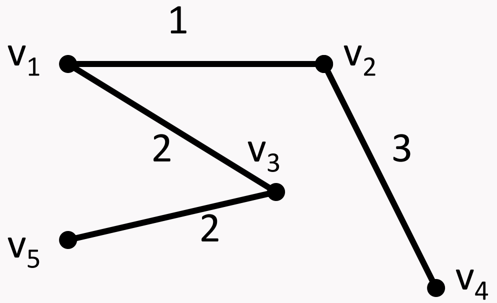
最小连接问题：

交通网络中，常常关注能把所有站点连接起来的生成树，使得该生成树各边权值之和为最小。例如：

假设要在某地建造5个工厂，拟修筑道路连接这5处。经勘探，其道路可按下图的无向边铺设。现在每条边的长度已经测出并标记在图的对应边上，如果我们要求铺设的道路总长度最短，这样既能节省费用 ，又能缩短工期 ，如何铺设？



不难发现：最小代价的连接方式为：



最小连接问题的一般提法为：

在连通边赋权图G中求一棵总权值最小的生成树。该生成树称为最小生成树或最小代价树。

(一)、克鲁斯克尔算法

克鲁斯克尔(Kruskal):1928年生，一家3弟兄都是数学家，1954年在普林斯顿大学获博士学位，导师是ErdÖs,他大部分研究工作是数学和语言学，主要在贝尔实验室工作。1956年发表包含克鲁斯克尔算法论文，使他名声大振。

1、算法思想

从G中的最小边开始，进行避圈式扩张。

2、算法

(1)、选择边e_1,使得其权值最小；

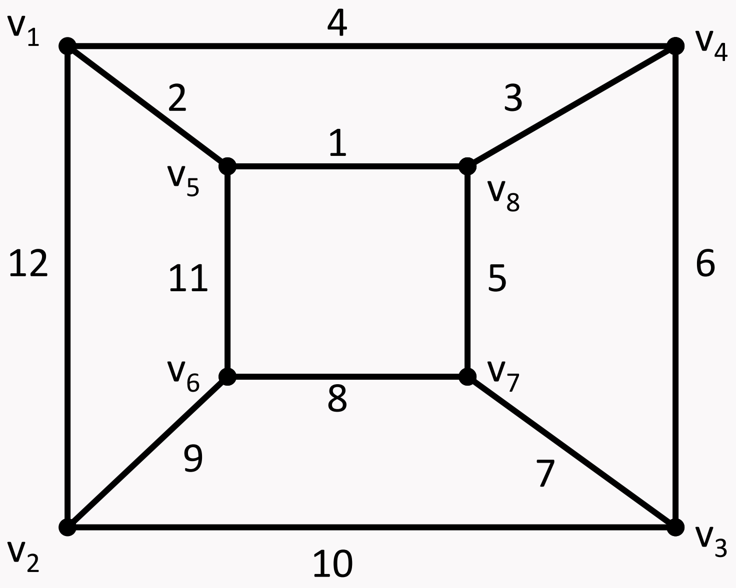
(2)、若已经选定边$e_1, e_2, \ldots, e_k$,则从$E-\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$中选择边$e_{k+1}$,使得：

(a)、$[e_1, e_2, \ldots, e_{k+1}]$为无圈图

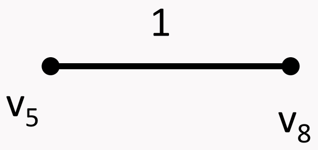
(b)、 e_{k+1}的权值$w(e_{k+1})$尽可能小。

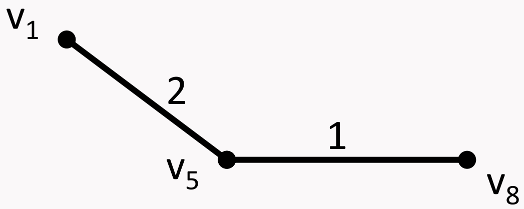
(3)、当(2)不能进行时，停止。

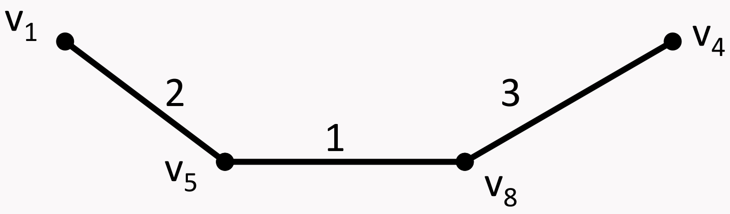
例1 用克鲁斯克尔算法求下图的最小生成树。

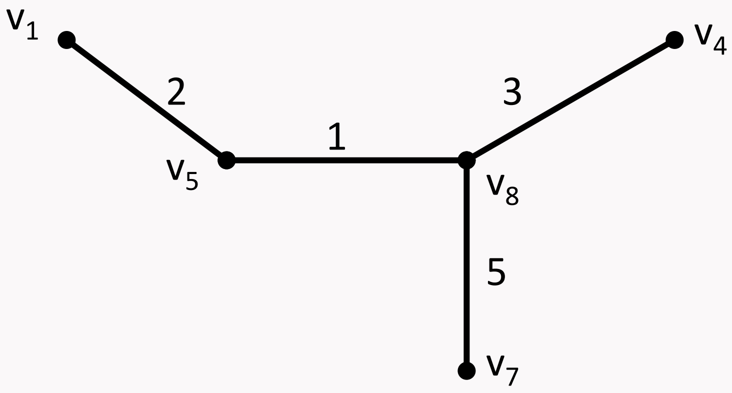


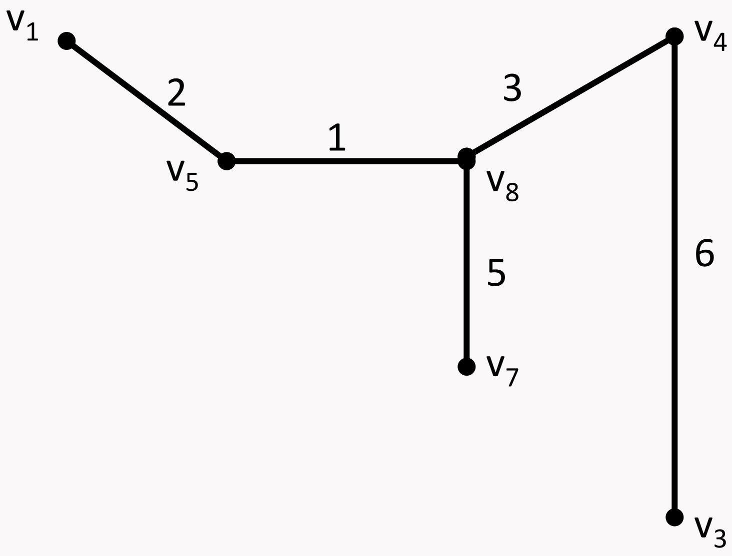
解：过程如下：

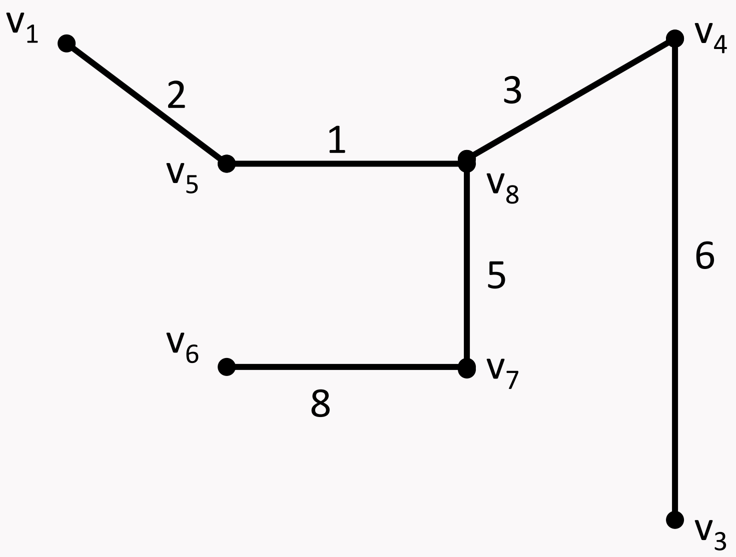

1
v_5
v_8

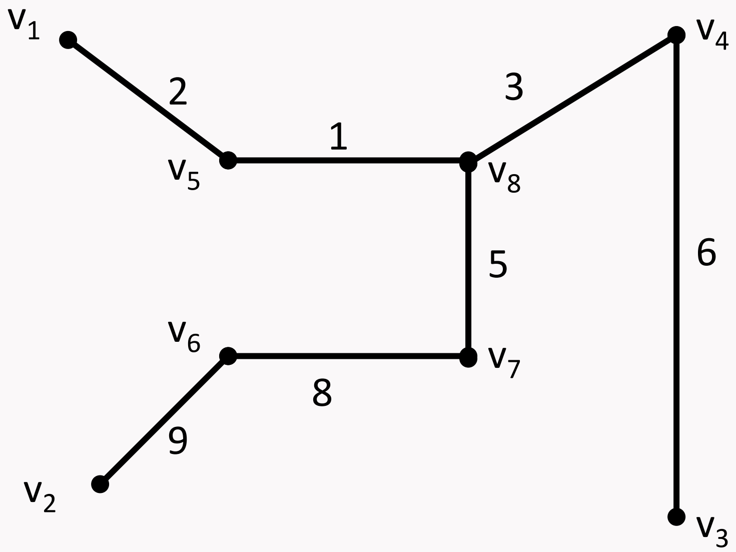

v_1
2
1
v_5
v_8


v_1
v_4
2
3
1
v_5
v_8


v_1
v_4
2
3
1
v_5
v_8
5
v_7


v_1
v_4
2
3
1
v_5
v_8
5
6
v_7
v_3





2、算法证明

定理1 由克鲁斯克尔算法得到的任何生成树一定是最小生成树。

证明：设G是一个n阶连通赋权图，用$T^* = G[\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}]$表示由克鲁斯克尔算法得到的一棵生成树，我们证明：它是最小生成树。

设T是G的一棵最小生成树。若$T^* \neq T$.

由克鲁斯克尔算法容易知道：$T \cap T^* \neq \Phi$.

于是令$f\ (T) = \ k$ 表示T^*中的边e_i不在T中的最小i值。即可令 $T = G[\{e_1, e_2, \dots, c, e_{k-1}, e'_k, \dots, e'_{n-1}\}]$.

考虑：$T \cup e_k$,则由树的性质，它必然为G中圈C.

设e是圈C的在T中，但不在T^*中的边。

作$T_1 = T \cup e_k - e$, 容易知道：T_1还为G的一棵生成树。

由克鲁斯克尔算法知道：$w(e) \geq w(e_k)$.

所以：$w(T) \geq w(T_1)$.

这说明T_1是最小树，但这与$f(T)$的选取假设矛盾！所以：$T \ = \ T^*$.

例2 在一个边赋权G中，下面算法是否可以产生有最小权值的生成路？为什么？

算法:

(1) 选一条边e_1,使得$w(e_1)$尽可能小;

(2) 若边$e_1, e_2, \dots, e_i$已经选定，则用下述方法从$E \setminus \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$中选取边$e_{i+1}$:

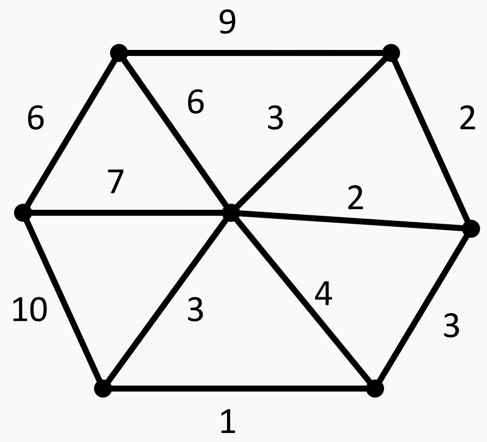
(a) $G[\{e_1, e_2, \dots, e_i, e_{i+1}\}]$为不相交路之并;

(b) $w(e_{i+1})$是满足(a)的尽可能小的权。

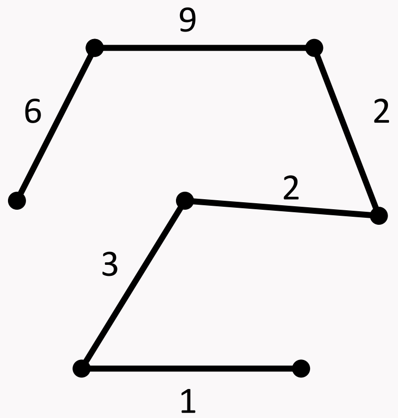
(3)当 (2)不能继续执行时停止。

解：该方法不能得到一条最小生成路。

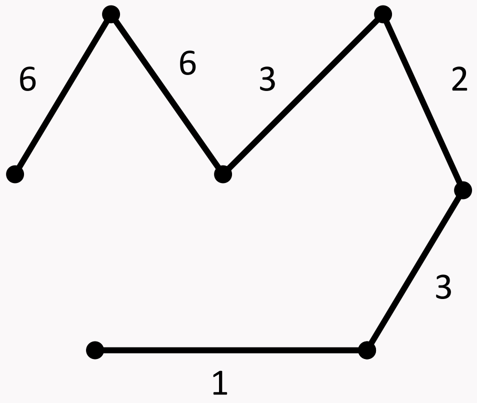
例如，在下图G中我们用算法求生成路：



用算法求出的生成路为：



直接在图中选出的一条生成路为：



后者的权值小于前者。

(二)、管梅谷的破圈法

在克鲁斯克尔算法基础上，我国著名数学家管梅谷教授于1975年提出了最小生成树的破圈法。

管梅谷（１９３４－）。我国著名数学家，曾任山东师范大学校长。中国运筹学会第一、二届常务理事，第六届全国政协委员。从事运筹学及其应用的研究，对最短投递路线问题的研究取得成果 ，冠名为中国邮路问题，该问题被列入经典图论教材和著作。

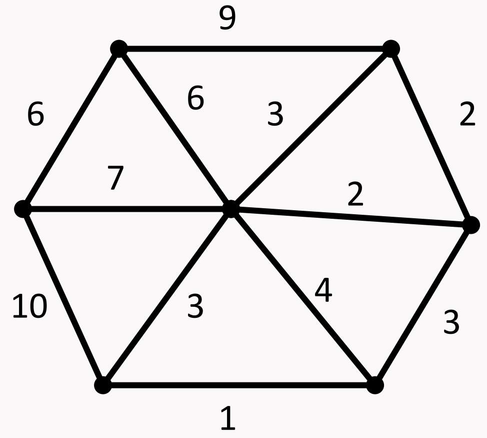
管梅谷教授1957年至1990年在山东师范大学工作。1984年至1990年担任山东师范大学校长，1990年至1995年任复旦大学运筹学系主任。1995年至今任澳大利亚皇家墨尔本理工大学交通研究中心高级研究员，国际项目办公室高级顾问及复旦大学管理学院兼职教授。

自1986年以来，管教授致力于城市交通规划的研究，在我国最早引进加拿大的交通规划EMMEⅡ软件，取得一系列重要研究成果 。

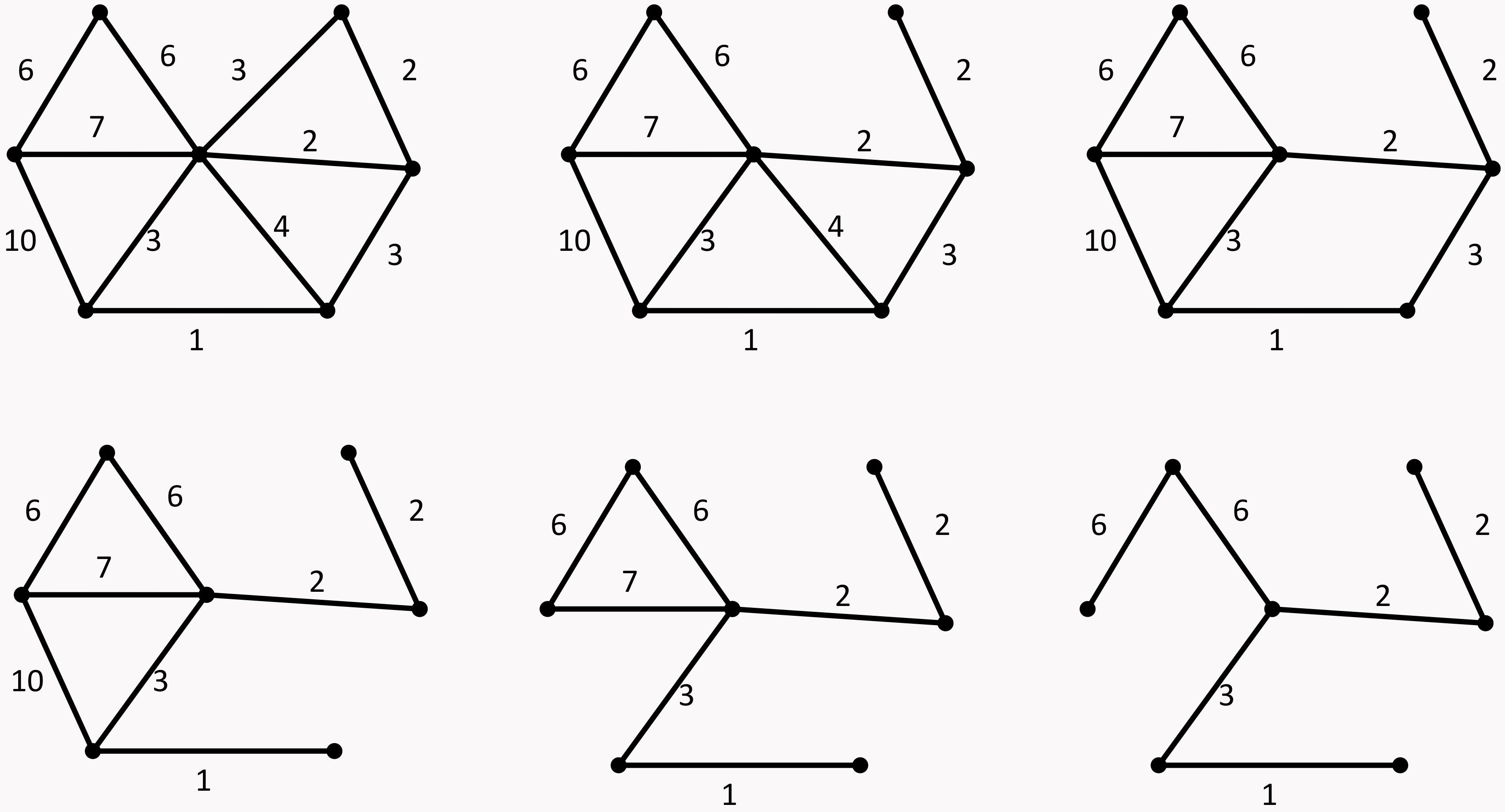
破圈法求最小生成树的求解过程是：从赋权图G的任意圈开始，去掉该圈中权值最大的一条边，称为破圈。不断破圈，直到G中没有圈为止，最后剩下的G的子图为G的最小生成树。

证明可以参看《数学的认识与实践》4,(1975),38-41.

例3 用破圈法求下图G的最小生成树。



解：　过程如下：


6 6 3 2 7 2 10 3 4 3 1
6 6 2 7 2 10 3 4 3 1
6 6 2 7 2 10 3 3 1
6 6 2 7 2 10 3 1
6 6 2 7 2 3 1
6 6 2 2 3 1

(三)、Prim算法

Prim算法是由Prim在1957年提出的一个著名算法。作者因此而出名。

Prim(1921---) 1949年在普林斯顿大学获博士学位，是Sandia公司副总裁。

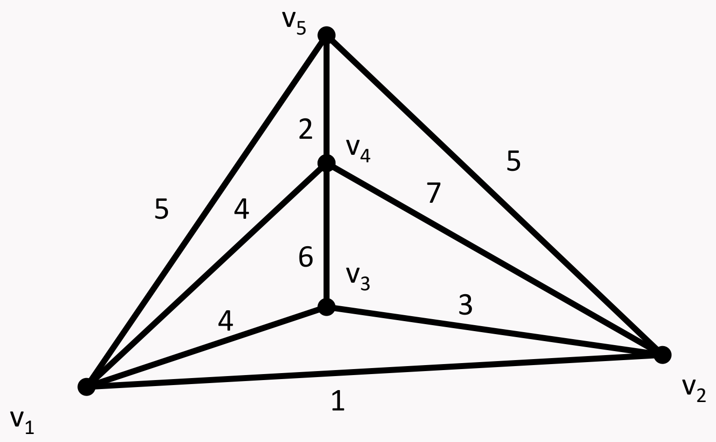
Prim算法：

对于连通赋权图G的任意一个顶u，选择与点u关联的且权值最小的边作为最小生成树的第一条边e_1；

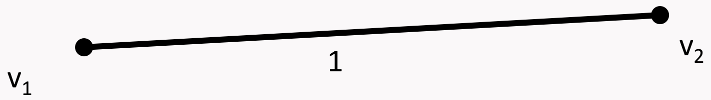
在接下来的边$e_2, e_3, \cdots, e_{n-1}$，在与一条已经选取的边只有一个公共端点的的所有边中，选取权值最小的边。

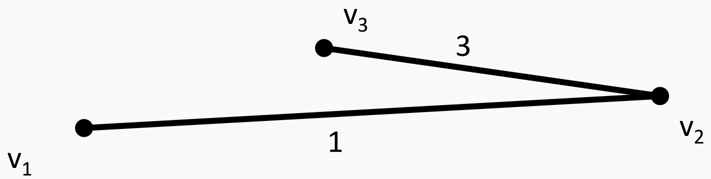
用反证法可以证明该算法。即证明：由Prim算法得到的生成树是最小生成树。(证明略)

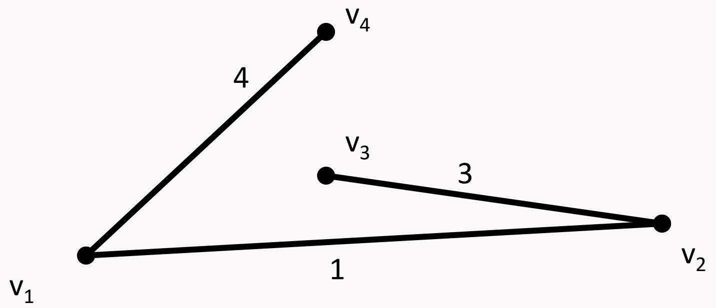
例4 用Prim算法求下图的最小生成树。

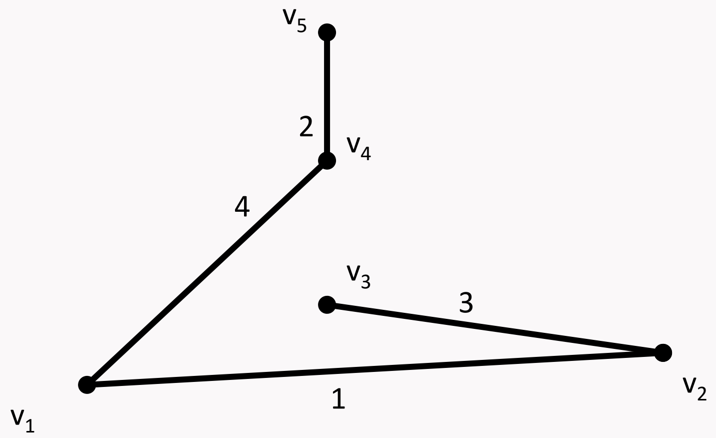


解：过程如下：









最小生成树权值为：$w\,(T)\ = 10.$

例 5 连通图G的<u>树图</u>是指这样的图，它的顶点是G的生成树$T_1, T_2, \ldots, T_\tau$，T_i与T_j相连当且仅当它们恰有$n-2$条公共边。证明任何连通图的树图是连通图。

证明：只需证明，对任意T_i与T_j，在树图中存在连接它们的路即可！

对任意T_i与T_j，设$\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}(k < n-2)$ 是它们的公共边。

由树的性质：$\exists e'_{k+1} \in E(T_i)$, 但$e'_{k+1} \notin E\left(T_j\right)$, 使得：$T_j + e'_{k+1}$有唯一圈. 该圈中:$\exists e_{k+1} \in E\left(T_j\right)$, 但$e_{k+1} \notin E(T_i)$.

作： $T_{i+1} = T_i - e'_{k+1} + e_{k+1}$,则$T_i$与$T_{i+1}$有$n-2$条边相同，于是，它们邻接。此时，$T_{i+1}$与$T_j$有$k+1$条边相同。

如此这样作下去，可以得到连接T_i与T_j的一条路为：

$$T_i, T_{i+1}, \cdots, T_j.$$

所以，连通图G的树图是连通的。

Thank You !