
图论及其应用：第一次作业

注意 请回答任意七题，并将答案在北京时间五月五日午夜前发送至2160853158@qq.com，邮件题目中请注明姓名学号

题一 一棵树有 13 个顶点，除了 3 个 2 度顶点和树叶外，其他顶点都是 5 度顶点，画出所有互不同构的这种树。

题二 证明任意六人中必然有三人两两相互认识或不认识。证明：给定六人小组，其中任意三人中总有两人互相认识，则必有三人互相认识。

题三 证明简单图中存在长度至少是 δ 的路。

题四 平面上有 n 个点，两两距离至少为 1，证明这些点中距离恰好为 1 的点对数不超过 $3n$ 。

题五 简单连通图 G 中最长路径的长度为 L ， P 与 Q 为长度为 L 的两条路径，证明 P 与 Q 相交。

题六 简单图 G 满足 $\Delta(G) = \lceil n/2 \rceil$ 与 $\delta(G) = \lfloor n/2 \rfloor - 1$ ， G 是否是连通图，证明或给出反例。

题七 简单图 G 满足 $d(u) + d(v) \geq n, \forall u, v \in V$ ，证明 G 是连通图。

题八 图 G 有 9 个节点，每个节点的度数不是 5 就是 6，证明 G 至少有 5 个度数为 6 的节点，或 6 个度数为 5 的节点。

题九 平面上有 $n \geq 3$ 条线段，其中任意 3 条有公共端点，证明这 n 条线段有公共端点。

题十 考察 $n \geq 6$ 个人组成的一组，已知每人至少认识 $\lfloor n/2 \rfloor$ 人，对任意 $\lfloor n/2 \rfloor$ 人，或者其中有两人相互认识，或者余下的 $n - \lfloor n/2 \rfloor$ 人中有两人相互认识，证明必有 3 人相互认识。