1、

(a) $I(X=0) = -\log_2 \frac{1}{16} = 4$, $I(X=1) = 4 - \log_2 3$, $I(X=2) = 1$, $I(X=3) = 4 - \log_2 3$

$I(X=4) = 4$

(b) $H(X) = \frac{4}{16} \times 2 + (4 - \log_2 3) \times \frac{3}{16} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{8}\log_2 3$

2、由题意得，该生成矩阵为G

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [I : P]$$

那么由系统码可以推出其校验矩阵H

$$H = [P^T \ I] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

而 $GH^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

故由此可验证 $GH^T = 0$

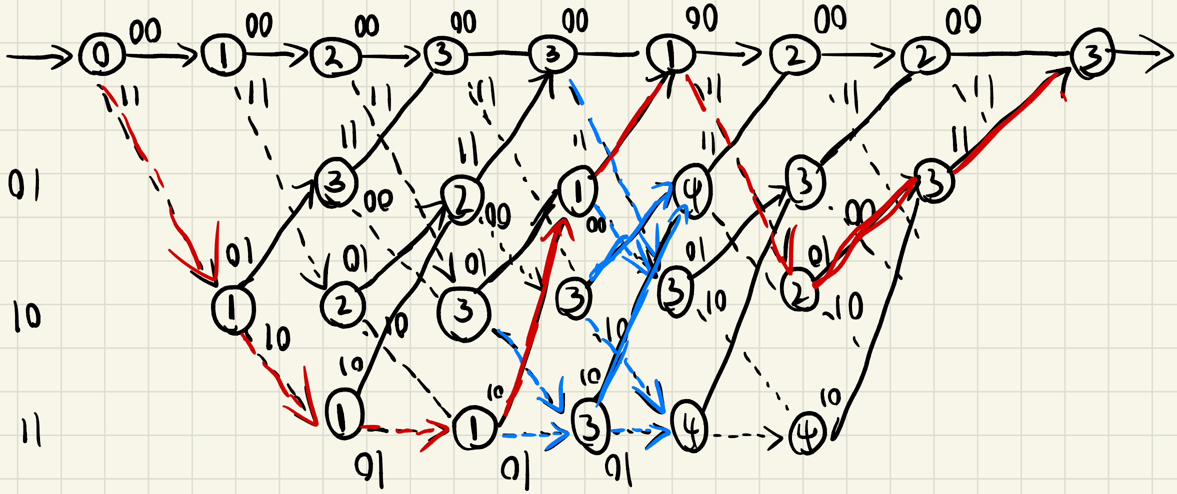
3、由于题目中提到消息最后以两个比特0结尾，即就是初始状态寄存器中的值均为0

接收到的序列 $r = (10, 10, 01, 10, 11, 01, 00, 11)$

总体译码过程如下：

红色为最终路径，蓝色为备选路径

10 10 01 10 11 01 00 11



如图所示，译码序列为(11,10,01,10,11,11,01,11)

4、由于熵的定义为 $H(X)=\sum_{x\in X} -P(X=x)\log P(X=x)$

其中，若X服从均匀分布，则其拥有最大的熵，此时熵计算如下：

$$H(X)=-\sum_{x\in X}\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}=\log_2 6$$

证明：对于所有的分布而言，将支撑集表示为 $\{p_0, p_1, \cdots, p_5\}$

那么 $H(X)=-\sum_{i=0}^{5} p_i\log p_i$，那我们要求H(X)的最大化，相当于求 $\sum_{i=0}^{5} p_i\log p_i$ 的最小值，而由于 $-p\log p$ 为关于p的凸函数，根据Jensen不等式 $f(E(X))\le E(f(x))$，可得当变量均匀分布时，取得最大值.