中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

第一章 图的基本概念

本次课主要内容

子图、图运算、路与连通性

(一)、子图的相关概念

(二)、图运算

(三)、路与连通性

(一)、子图的相关概念

1、子图

简单地说，图G的任意一部分(包括本身)都称为是图G的的一个子图。

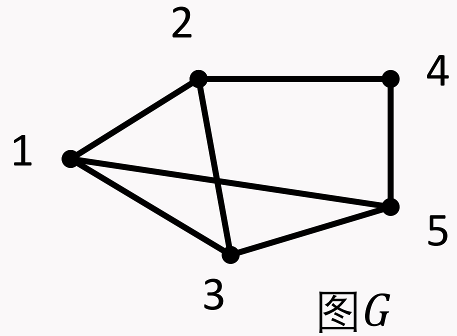
定义1 如果$V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$且H中边的重数不超过$G$中对应边的条数，则称H为$G$的子图，记为$H \subseteq G$，当$H \subseteq G, H \neq G$时，称H是G的真子图，记为$H \subset G$.

2、点与边的导出子图

（1）图G的顶点导出子图

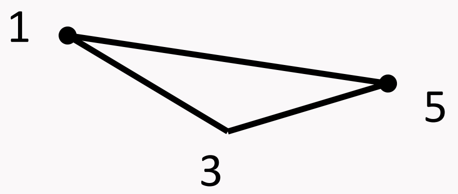
定义2 如果$V' \subseteq V(G)$，则以V'为顶点集，以两个端点均在V'中的边集组成的图，称为图G的点导出子图。记为：$G[V']$.

例1 如图所示，求$G[V']$, 其中$V' = \{1,3,5\}$.



图G

解：由点导出子图的定义得：

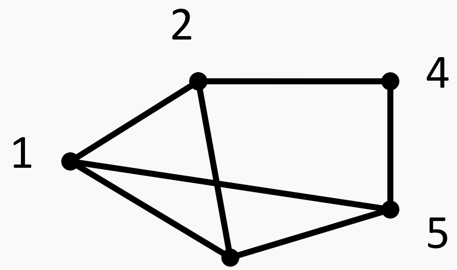


$G[V']$

（2）图G的边导出子图

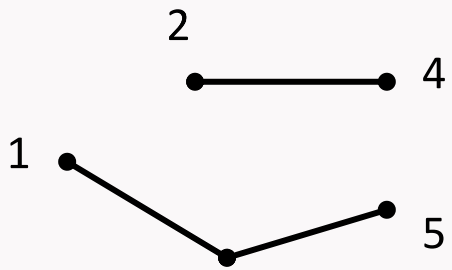
定义3 如果$E' \subseteq E(G)$，则以E'为边集，以E'中边的所有端点为顶点集组成的图，称为图G的边导出子图。记为：$G[E']$.

例2 如图所示，求$G[E']$. 其中$E' = \{13,24,35\}$.



图G

解：由边导出子图的定义得：

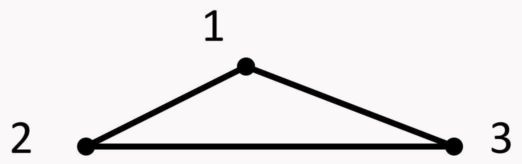


$G[E']$

3、图的生成子图

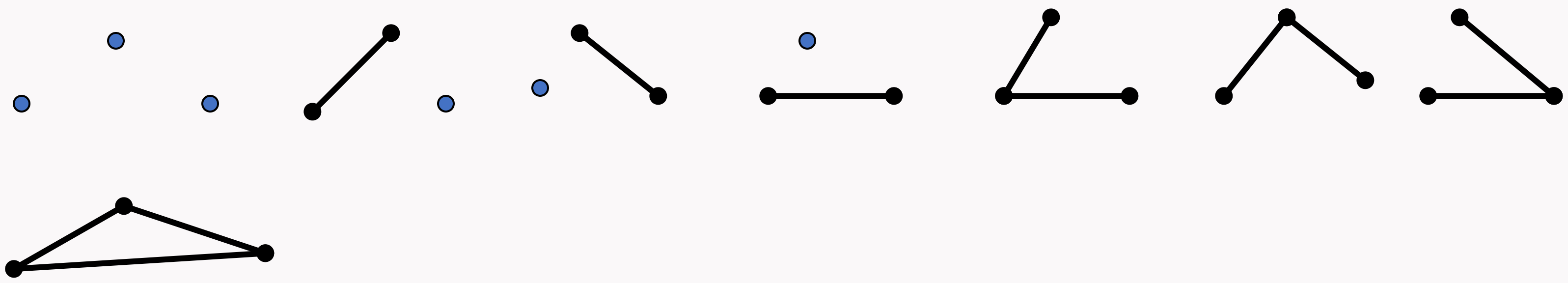
定义3 如果图G的一个子图包含G的所有顶点，称该子图为G的一个**生成子图**。

例2 如图所示，求G的所有生成子图



图G

解：按边数分别求出



定理：简单图$G=(n,m)$的所有生成子图个数为$2m$.

(二)、图运算

在图论中，将两个或更多的图按照某种方式合并，或者对一个图作某种形式的操作，可以得到很有意义的新图。将图合并或对一个图进行操作，称为图运算。图运算形式很多。

1、图的删点、删边运算

(1)、图的删点运算

设$V' \subseteq V(G)$，在G中删去V'中的顶点和G中与之关联的所有边的操作，称为删点运算。记为$G-V'$.

特别地，如果只删去一个点v，则记为$G-v$.

(2)、图的删边运算

设$E' \subseteq E(G)$，在G中删去E'中的所有边的操作，称为删边运算，记为$G - E'$.

特别地，如果只删去一条边e，则记为$G - e$.

注：删点、删边后得到的图是原图的子图。

2、图的并运算

设G_1, G_2是G的两个子图，G_1与G_2并是指由$V(G_1) \cup V(G_2)$为顶点集，以$E(G_1) \cup E(G_2)$为边集组成的子图，记为：$G_1 \cup G_2$.

特别是，如果G_1, G_2不相交(没有公共顶点)，称它们的并为直接并，可以记为：$G_1 + G_2$.

2、图的交运算

设G_1,G_2是G的两个子图，G_1与G_2交是指由$V(G_1)\cap V(G_2)$为顶点集，以$E(G_1)\cap E(G_2)$为边集组成的子图。记为：$G_1\cap G_2$.

3、图的差运算

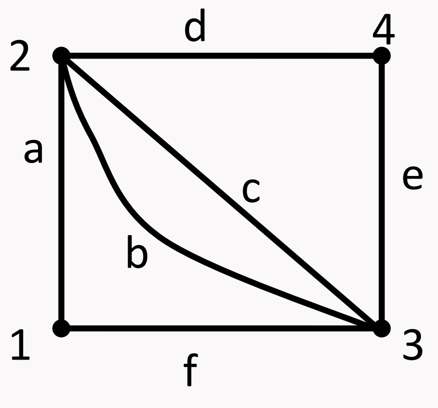
设G_1,G_2是两个图， G_1与G_2的差是指从G_1中删去G_2中的边得到的新图。记为G_1-G_2.

4、图的对称差运算(或环和运算)

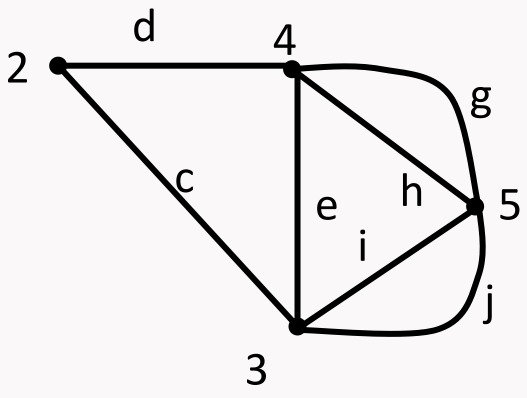
设G_1,G_2是两个图， G_1与G_2的对称差定义为：

$$G_1\Delta G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2).$$

例3 已知G_1与G_2，求$G_1 \cup G_2$，$G_1 \cap G_2, G_2 - G_1, G_1 \Delta G_2$.

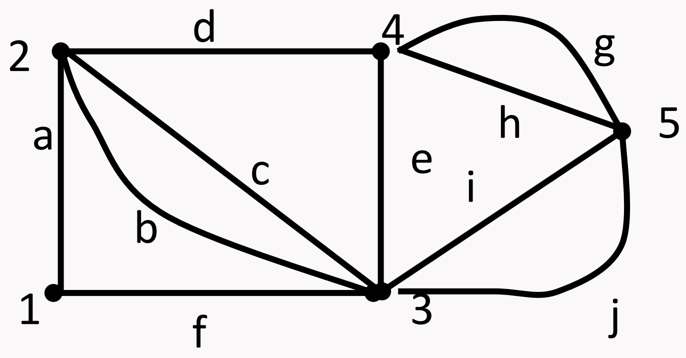


G_1

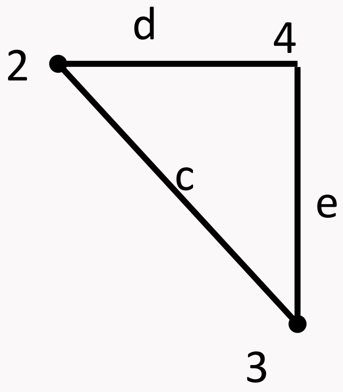


G_2

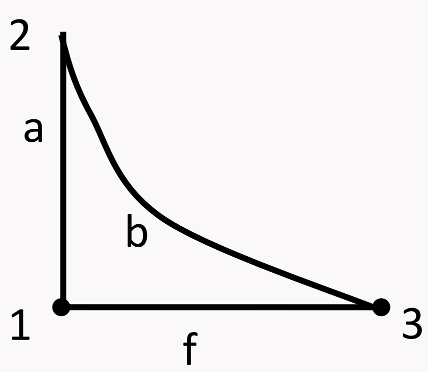
解：由相应运算定义得下面结果：



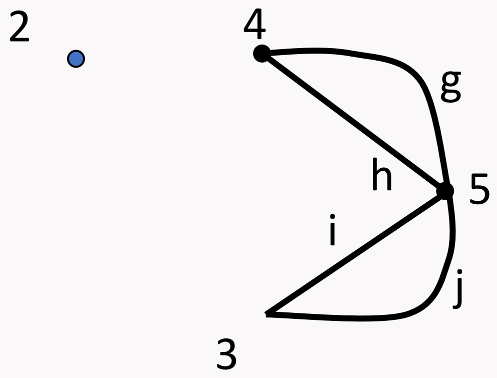
$G_1 \cup G_2$



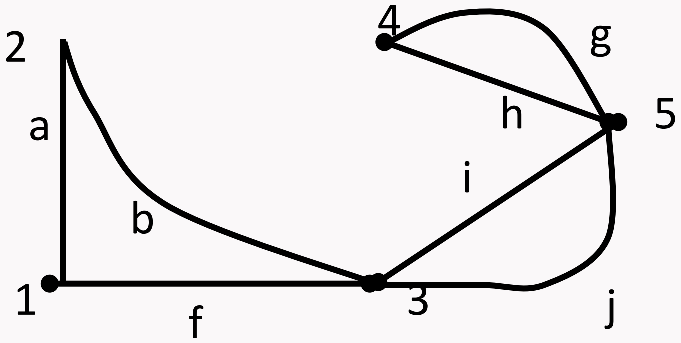
$G_1 \cap G_2$



$G_1 - G_2$



$G_2 - G_1$

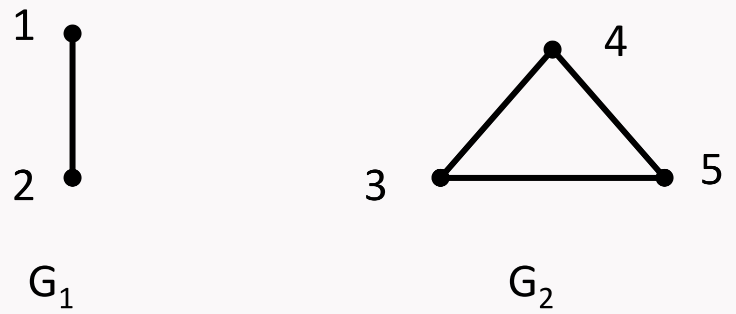


$G_1 \Delta G_2$

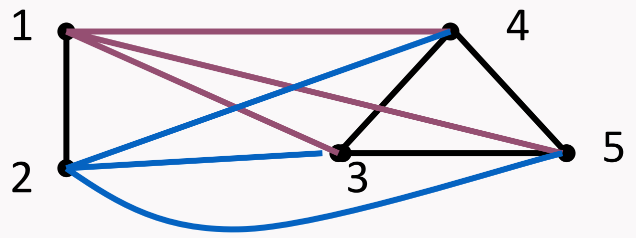
5、图的联运算

设G_1,G_2是两个不相交的图，作G_1+G_2，并且将G_1中每个顶点和G_2中的每个顶点连接，这样得到的新图称为G_1与G_2的联图。记为 ：$G_1 \vee G_2$.

例4 已知G_1与G_2，求$G_1 \vee G_2$.



解：由联图的定义得：

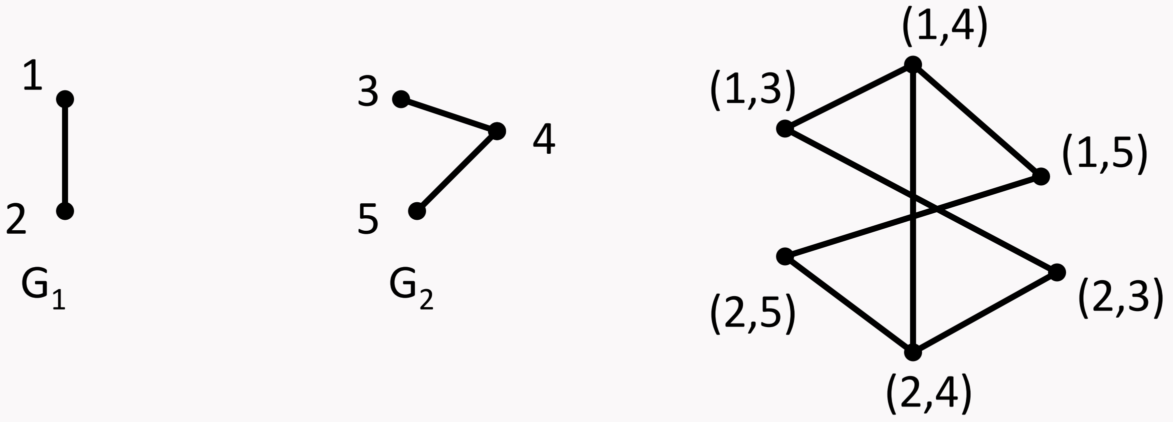


$G_1 \vee G_2$

6、图的积图

设$G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$是两个图。对点集$V=V_1\times V_2$的任意两个点$u=(u_1,u_2)$与$v=(v_1,v_2)$，当（$u_1=v_1$和$u_2\ adj\ v_2$）或（$u_2=v_2$和$u_1\ adj\ v_1$）时，把$u$与$v$相连。如此得到的新图称为$G_1$与$G_2$的积图。记为$G=G_1\times G_2$.

例5 已知G_1与G_2,求$G=G_1\times G_2$.

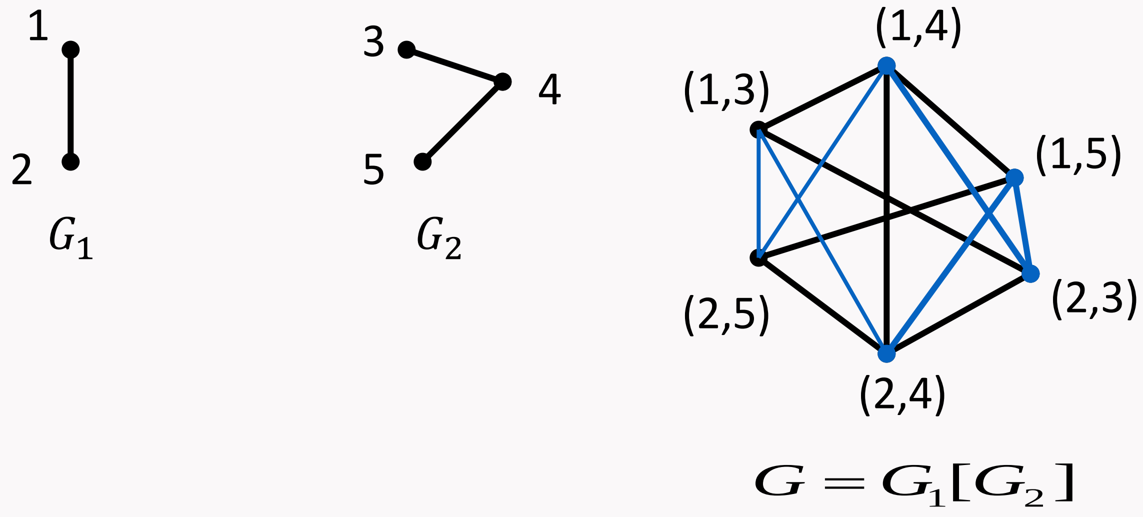


$G=G_1\times G_2$

6、图的合成图

设$G_1=(V_1,E_1),G_2=(V_2,E_2)$,是两个图。对点集$V=V_1\times V_2$的任意两个点$u=(u_1,u_2)$与$v=(v_1,v_2)$，当$(u_1\ adj\ v_1\ )$或$(u_1=v_1$和$u_2\ adj\ v_2)$时，把u与v相连。如此得到的新图称为$G_1$与$G_2$的合成图。记为$G=G_1[G_2]$.

例6 已知G_1与G_2，求$G=G_1[G_2]$.

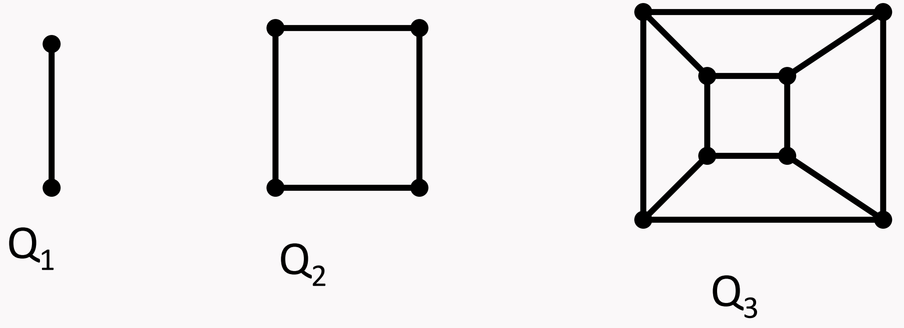


图的积运算是网络构造的常用方法。并行计算机中的网络拓扑常采用所谓的“超立方体”结构。采用该结构可使网络具有较好的可靠性、较小的通信延迟和很好的可扩展性以及便于并行编程等优点。

“超立方体”可以采用积图来递归构造。定义如下：

（1）1方体$Q_1 = K_2$;

（2）n方体定义为：$Q_n = K_2 \times Q_{n-1}$.



“超立方体”常采用下面简单的递归构造方法：

n方体Q_n的顶点可用一个长度为n的二进制码来表示。Q_n的顶点数目正好等于$2n$个。

由$n-1$方体Q_{n-j}构造Q_n的方法是：将Q_{n-j}拷贝一个。将原Q_{n-j}每个顶点的码前再添加一个零，将拷贝得来的$n-1$方体每个顶点的码前面再添加一个1。然后在两个$n-1$方体之间连线：当且仅当两个顶点码只有一位对应位数字不同时，该两点连线。如此得到的图即为n方体。

关于n方体Q_n的性质研究，可以查阅到很多文献。经典文章是：

Saad Y, Schultz M H. Topological properties of hypercubes [J]. IEEE Trans. Comput . 1988, 37(7) : 867--872

(三)、路与连通性

对图的路与连通性进行研究，在计算机网络研究中有十分重要的意义。因为网络的抽象就是一个图。研究网络信息传递，信息寻径是主要问题之一，这恰对应于图中路的研究；在网络研究中，可靠性也是主要问题之一，它与图的连通性问题相对应。

1、路与连通性的相关概念

(1)、图中的途径

G 的一条途径（或通道或通路）是指一个有限非空序列 $w = v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2 \ldots e_k\ v_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对 $1 \leq i \leq k$，e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i.

途径中边数称为途径的长度；v_0, v_k分别称为途径的起点与终点，其余顶点称为途径的内部点。

(2)、图中的迹

边不重复的途径称为图的一条迹。

(3)、图中的路

顶点不重复的途径称为图的一条路。

注：起点与终点重合的途径、迹、路分别称为图的闭途径、闭迹与圈。闭迹也称为回路。长度为k的圈称为k圈， k为奇数时称为奇圈，k为偶数时称为偶圈。

定理2：设图G为n阶图，若对G中任意两个不相邻顶点u与v，有：$d(u)+d(v)\geq n-1$. 则G是连通的，且$d\ (G)\leq 2$.

证明：我们证明，对G中任意两点x与y，一定存在一条长度至多为2的连接x与y的路。

若$xy\in E(G)$，则上面论断成立！若$xy\notin E(G)$，

可以证明，存在点w，它与x,y同时邻接。

若不然，在G的剩下的$n-2$个顶点中，假设有k个与x邻接，但与y不邻接，有l个顶点和y邻接，但不和x邻接，同时假定有m个顶点和x,y均不邻接。

则：$d(x)=k,d(y)=l$. 由于$k+l+m=n-2$，所以，$d\ (x)+d\ (y)=n-m-2\leq n-2$，矛盾！

(4)、图中两顶点的距离

图中顶点u与v的距离：u与v间最短路的长度称为**u与v间距离**。记为$d(u,v)$. 如果u与v间不存在路，定义$d(u,v)=\infty$.

(5)、图中两顶点的连通性

图G中点u与v说是**连通**的，如果u与v间存在通路。否则称u与v不连通。点的连通关系是等价关系。

如果图G中任意两点是连通的，称G是**连通图**，否则，称G是非连通图。非连通图中每一个极大连通部分，称为G的**连通分支**。G的连通分支的个数，称为G的**分支数**，记为$\omega(G)$.

(6)、图的直径

连通图G的直径定义为：$d(G)=\max\{d(u,v)|u,v\in V(G)\}$. 如果G不连通，图G的**直径**定义为$d(G)=\infty$.

例7 证明：在n阶连通图中

(1) 至少有$n-1$条边；

(2) 如果边数大于$n-1$，则至少有一条闭迹；

(3) 如果恰有$n-1$条边，则至少有一个奇度点。

证明:(1) 若G中没有1度顶点，由握手定理：

$$2m=\sum_{v\in V(G)} d(v)\geq 2n\Rightarrow m\geq n\Rightarrow m>n-1.$$

若G中有1度顶点u，对G的顶点数作数学归纳。

当$n=2$时，结论显然；设结论对$n=k$时成立。

当$n=k+1$时，考虑$G-u$, 它仍然为连通图，所以，边数$\geq k-1$. 于是G的边数$\geq k$.

{另证：由于G连通，所以，存在如下形式的途径：

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n.$$

显然该途径至少含有$n-1$条边。($v_1, v_2, \cdots, v_n$是G的n个不同顶点)}

（2）考虑G中途径：$W: v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{n-1} \to v_n$.

若W是路，则长为$n-1$;但由于G的边数大于$n-1$, 因此，存在v_i与v_j, 它们相异，但邻接。于是：

$$v_i \to v_{i+1} \to \cdots \to v_j \to v_i.$$

为G中一闭途径，于是也就存在闭迹。

（3） 若不然，G中顶点度数至少为2，于是由握手定理：$2m = \sum_{v\in V(G)} d(v) \geq 2n \Rightarrow m \geq n \Rightarrow m > n-1$.

这与G中恰有$n-1$条边矛盾！

例8 证明：若$\delta \geq 2$，则G中必然含有圈。

证明：只就连通图证明即可！

设$W = v_1\, v_2\, \cdots\, v_{k-1}\, v_k$是$G$中的一条最长路。由于$\delta \geq 2$，所以$v_k$必然有相异于$v_{k-1}$的邻接顶点。又$W$是$G$中最长路, 所以，这样的邻接点必然是$v_1\, v_2\, \cdots\, v_{k-2}$中之一。设该点为$v_m$，则$v_m v_{m+1} \cdots\, v_k v_m$为$G$中圈。

例9 设G是具有m条边的n阶单图，证明：若G的直径为2且$\Delta = n - 2$，则$m \geq 2n - 4$.

证明：设$d(v) = \Delta = n - 2$, 且设v的邻接点为$v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$. u是剩下的一个顶点。由于$d(G) = 2$且u不能和v邻接，所以u至少和$v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}$中的一个顶点邻接。否则有$d(G) > 2$. 不妨假设$u$和$v_1, v_2, \ldots, v_k$邻接。

为了保证u到各点距离不超过2, $v_{k+1}, \ldots . v_{n-2}$这些顶点的每一个必须和前面$v_1, v_2, \ldots, v_k$中某点邻接，这样，图中至少又有$n - 2$条边。总共至少有$2n - 4$条边。

2、连通性性质

定理1：若图G不连通，则其补图连通。

证明：对$\forall u, v \in V(\bar{G})$, 如果$u, v$属于$G$的同一分支，设$w$是与$u, v$处于不同分支中的点，则在$G$的补图中，$u$与$w$，$v$与$w$分别邻接，于是，$u$与$v$在$G$的补图中是连通的。

如果u与v在G的两个不同分支中，则在G的补图中必然邻接，因此，也连通。

所以，若G不连通，G的补图是连通的。

推论：设图G为n阶图，若$\delta \geq (n-1)/2$, 则G连通。

证明：对G中任意两个不相邻顶点u与v，有：

$$d(u)+d(v) \geq \frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=n-1.$$

所以，G是连通的。

注意：定理2的界是紧的(Sharpness)。即不能再修改！

例如：设G由两个分支作成的图，两个分支均为K_m，则G中不相邻顶点度数之和恰为$n-2.(n=2m)$

3、偶图的判定定理

定理3　一个图是二部图（偶图）当且当它不包含奇圈。

证明：　必要性：设G是具有二分类(X,Y)的偶图，并且$C = v_0 v_1 \dots v_k v_0$是$G$的一个圈.

不失一般性，可假定$v_0 \in X$. 一般说来，$v_{2i} \in X, v_{2i+1} \in Y$.

又因为$v_0 \in X$，所以$v_k \in Y$, 由此即得C是偶圈。

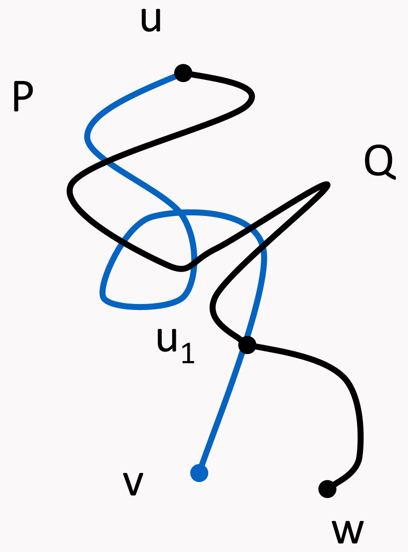
充分性：在G中任意选取点u，定义V的分类如下：

$X = \{x \mid d(u,x)$ 是偶数$, x \in V(G)\}$

$Y = \{y \mid d(u,y)$是奇数$, y \in V(G)\}$

下面证明：对X中任意两点v与w，v与w不邻接！

设v与w是X中任意两个顶点。P是一条最短(u,v)路，而Q是一条最短的(u,w)路。



又设u_1是P和Q的最后一个交点。由于P,Q是最短路，所以，P,Q中u到u_1段长度相同，因此奇偶性相同。又P,Q的长均是偶数，所以，P,Q中u_1v段和u_1w段奇偶性相同。

如果v与w邻接，则可得到奇圈，矛盾！

谢 谢！