中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

欧拉图与中国邮路问题

(一)、欧拉图及其性质

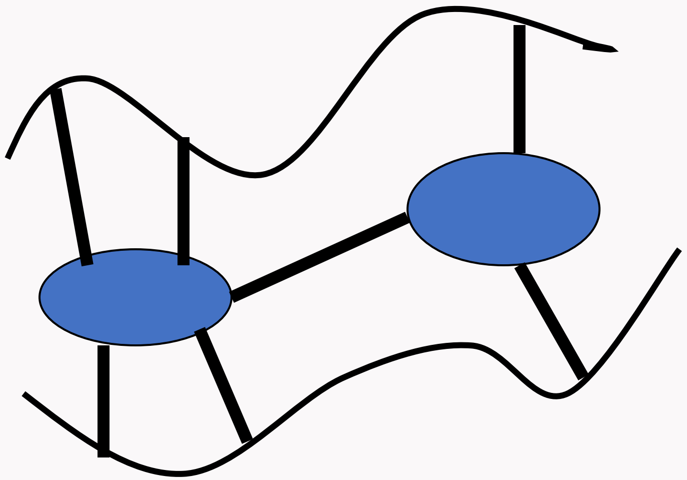
(二)、Fleury算法

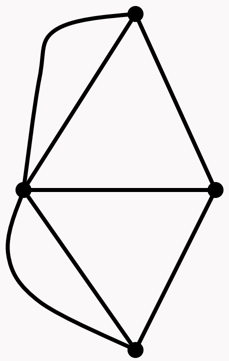
(三)、中国邮路问题

(一)、欧拉图及其性质

1、欧拉图的概念

(1)、问题背景---欧拉与哥尼斯堡七桥问题





问题：对于图G，它在什么条件下满足从某点出发，经过每条边一次且仅一次，可以回到出发点？

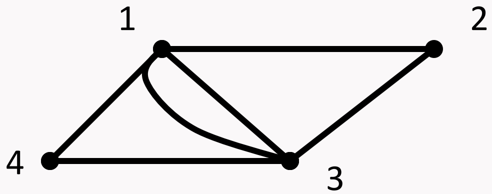
哥尼斯堡城(位于德国北部)，在欧拉的生活与图论历史中扮演着非常重要角色。因为它，产生了著名的欧拉图定理，因为它，产生了图论。

注：一笔画----中国古老的民间游戏

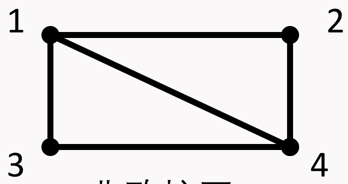
要求：对于一个图G，笔不离纸，一笔画成.

(2)、欧拉图概念

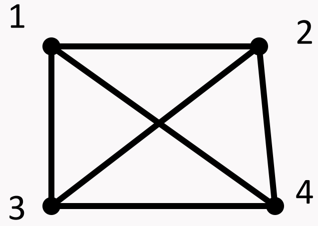
定义1 对于连通图G，如果G中存在经过每条边的**闭迹**，则称G为**欧拉图**，简称G为$\boldsymbol{E}$**图**。**欧拉闭迹**又称为**欧拉环游**，或**欧拉回路**。若存在一个开迹通过每条边恰好一次，则称为**欧拉迹**。



欧拉图



非欧拉图
有欧拉迹



非欧拉图
无欧拉迹

2、欧拉图的性质

定理1 **下列陈述对于非平凡连通图G是等价的：**

（1） **G是欧拉图；**

（2） **G的顶点度数为偶数；**

（3） **G的边集合能划分为圈。**

证明：(1)→(2)

由(1)，设 C是欧拉图G的任一欧拉环游，v是G中任意顶点，v在环游中每出现一次，意味在G中有两条不同边与v关联，所以，在G中与v关联的边数为偶数，即v的度数为偶数，由v的任意性，即证明(2)。

(2)→(3)

由于G是连通非平凡的且每个顶点度数为偶数，所以G中至少存在圈C_1, 从G中去掉C_1中的边，得到G的生成子图G_1

若G_1没有边, 则(3)成立。否则, G_1的每个非平凡分支是度数为偶数的连通图, 于是又可以抽取一个圈。反复这样抽取, $E(G)$最终划分为若干圈。

(3)→(1)

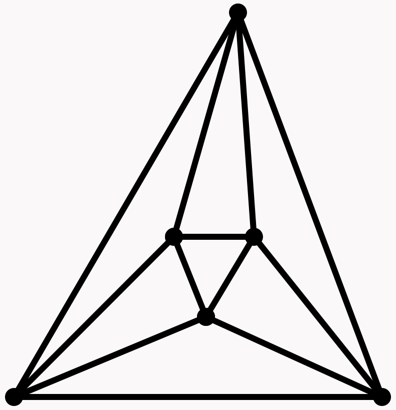
设C_1是G的边划分中的一个圈。若G仅由此圈组成，则G显然是欧拉图

否则，由于G连通，所以，必然存在圈C_2, 它和C_1有公共顶点。于是，$C_1 \cup C_2$是一条含有C_1与C_2的边的欧拉闭迹，如此拼接下去，得到包含G的所有边的一条欧拉闭迹。即证G是欧拉图。

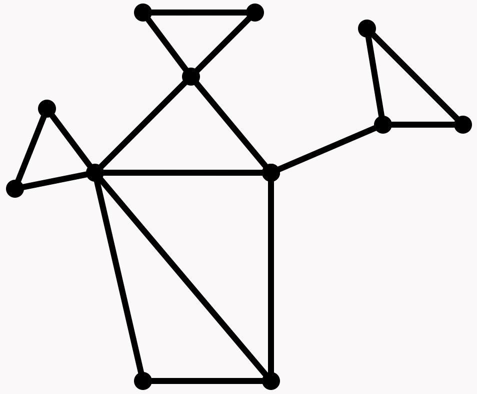
推论1 **连通图G是欧拉图当且仅当G的顶点度数为偶。**

推论2 **连通非欧拉图G存在欧拉迹当且仅当G中只有两个顶点度数为奇数。**

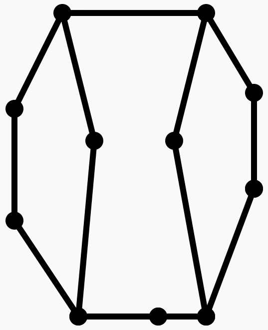
例1 下面图中谁是欧拉图？谁是非欧拉图但存在欧拉迹？谁是非欧拉图且不存在欧拉迹？



G_1



G_2



G_3

解：$G1$是欧拉图；$G2$是非欧拉图，但存在欧拉迹；$G3$中不存在欧拉迹。

例2 证明：若G和H是欧拉图，则$G \times H$是欧拉图。

证明：首先证明：对任意$u \in V(G), v \in V(H)$,有：

$$d(u) + d(v) = d((u, v))$$

事实上，设z是u的任意一个邻点，一定有(u, v)的一个邻点(z, v),反之亦然。

同理，对于v的任意一个邻点w,一定有(u, v)的一个邻点(u, w),反之亦然。

即：(u, v)在乘积图中邻点个数等于u在G中邻点个数与v在H中邻点个数之和。所以，G, H是欧拉图，那么$G \times H$顶点度数为偶数。

其次证明：$G \times H$是连通的。

$\forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G \times H)$,由于$G, H$都是欧拉图，所以都连通。

设 最 短 的 $(u1,u2)$ 路 、 最 短 的 (v_1,v_2) 路 分 别 为 ：$u_1x_1x_2\cdots x_ku_2, v_1y_1y_2\cdots y_mv_2$.

那么，由乘积图的定义：在乘积图中有路：

$$(u_1,v_1)(x_1,v_1)\cdots(x_k,v_1)(u_2,v_1)(u_2,y_1)\cdots(u_2,y_m)(u_2,v_2)$$

这样，我们证明了$G\times H$是连通的且每个顶点度数为偶数。即它是欧拉图。

(二)、Fleury(弗勒里)算法

该算法解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法。方法是尽可能避割边行走。

算法:

(1)、 任意选择一个顶点v_0, 置$w_0=v_0$;

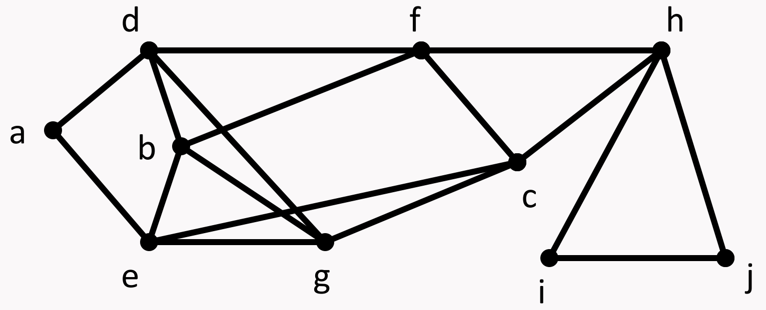
（2）、假设迹$w_i = v_0 e_1 v_1 \ldots e_i v_i$ 已经选定，那么按下述方法从$E - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ 中选取边e_{i+1}：

1）、e_{i+1} 与v_i 相关联；

2）、除非没有别的边可选择，否则e_{i+1}不能是$G_i = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ 的割边。

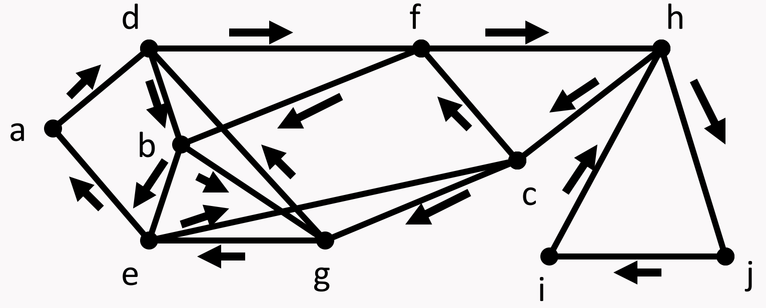
（3）、当（2）不能执行时，算法停止。

例3 在下面欧拉图G中求一条欧拉回路。



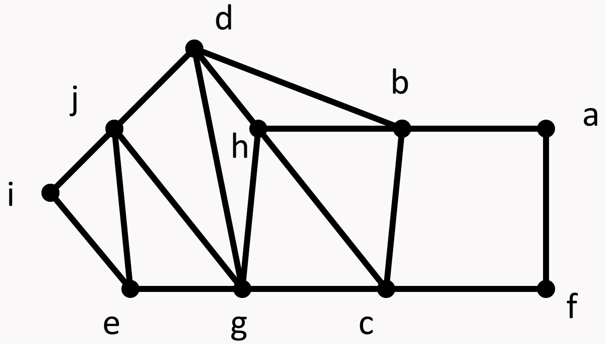
图G

解：



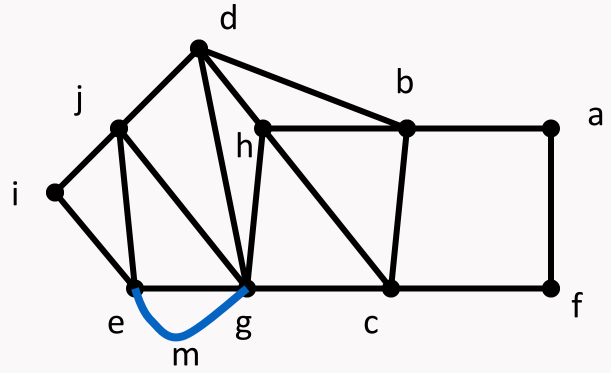
图G

例4 某博物馆的一层布置如下图，其中边代表走廊，结点e是入口，结点g是礼品店，通过g我们可以离开博物馆。请找出从博物馆e进入，经过每个走廊恰好一次，最后从g处离开的路线。



解：图中只有两个奇度顶点e和g,因此存在起点为e,终点为g的欧拉迹

为了在G中求出一条起点为e,终点为g的欧拉迹，在e和g间添加一条平行边m



用Fleury算法求出欧拉环游为：

$$emgcfabchbdhgdjiejge$$

所以：解为：$egjeijdghdbhcbafcg$

例4 证明：若G有$2k>0$个奇数顶点，则存在k条边不重的迹$Q_1, Q_2 \ldots, Q_k$，使得：

$$E(G)=E(Q_1)\cup E(Q_2)\cup\cdots\cup E(Q_k).$$

证明：不失一般性，只就G是连通图进行证明。

设$G=(n,m)$是连通图。令$v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{2k}$是$G$的所有奇度点

在v_i与v_{i+k}间连新边e_i得图$G^*(1\le i\le k)$. 则G^*是欧拉图，因此，由Fleury算法得欧拉环游C.

在C中删去$e_i(1 \le i \le k)$. 得k条边不重的迹Q_i $(1 \le i \le k)$:

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup \cdots \cup E(Q_k).$$

例5　设G是非平凡的欧拉图，且$v \in V(G)$. 证明：G的每条具有起点v的迹都能扩展成G的欧拉环游当且仅当$G - v$是森林。

证明：“必要性”

若不然，则$G - v$有圈C.

考虑$G_1 = G - E(C)$的含有顶点v的分支H.

由于G是非平凡欧拉图，所以G_1的每个顶点度数为偶数，从而，H是欧拉图。

H是欧拉图，所以存在欧拉环游T. 对于T, 把它看成v为起点和终点的一条欧拉迹，这里可以证明T与C不相交，且图G与v关联的边都在T中。

假设T与C相交，即有公共边，则在$G-E(C)$时就会将其删掉，则不可能再H中构成回路，所以T与C不相交；同时，圈C是由$G-v$得到，所以与v相关联的边一定不在圈C上，然后与v关联的边一定出现在v所在的连通分支上，不出现在其他连通分支上，所以一定在T中。

此时，与v关联的边都在T中，无法继续走下去，所以无法扩展，即不能扩充为G的欧拉环游。这与条件矛盾！

"充分性"

若不然，设$Q=(v,w)$是G的一条不能扩充为G的欧拉环游的最长迹。

首先，$v=w$，即Q是一条闭迹，否则，v和w是$G-Q$仅有的两个奇度点，从而，$G-Q$中存在以w为奇点，v为终点的迹P, 因此，迹Q可以通过P继续扩展，所以Q必须是闭迹。

其次，Q包含与v关联的所有边，否则，Q还可以延长。

于是，$G-v$包含$G-Q$, 且$G-Q$的每个顶点度数为偶数。

于是，$G-Q$的非平凡分支是欧拉图，说明有圈，即$G-v$有圈（就不可能是森林），这与条件矛盾。

(三)、中国邮路问题

1962年，中国数学家管梅谷提出并解决了“中国邮路问题”

1、问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最短？

如果邮路图本身是欧拉图，那么由Fleury算法，可得到他的行走路线

如果邮路图本身是非欧拉图，如何重复行走街道才能使行走总路程最短？

2、管梅谷的结论

定理2 **若W是包含图G的每条边至少一次的闭途径，则W具有最小权值当且仅当下列两个条件被满足：**

（1）G的每条边在W中最多重复一次；

（2）对于G的每个圈上的边来说，在W中重复的边的总权值不超过该圈非重复边总权值。

证明：“必要性”

首先，设G是连通非欧拉图，u与v是G的两个奇度顶点，把连接u与v的路上的边改为2重边，则路中的点的度数奇偶性没有改变，仍然为偶数，但u与v的度数由奇数变成了偶数。如果对G中每对奇度点都如此处理，则最终得到的图为欧拉图。设该图为G_1.

其次，对G_1作修改：

如果在G_1中，边e重复数大于2，则在G_1中删掉2条重复的e边后，所得之图仍然是包含G的欧拉图。

在G_1中，对每组平行边都做上面的处理，最后得到一个重复边数最多为1的包含G的欧拉图G_2.

这说明，若W是包含G的所有边的欧拉环游，则G中每条边至多在W里出现两次。这就证明了(1).

又设C是G_2中任意一个圈，在该圈中，如果重复边的总权值超过该圈中非重复边总权值，那么可以把该圈中重复边改为非重复边，而把非重复边改为重复边，如此修改，得到的图仍然是包含G的欧拉图（顶点的度数不变或变化2），但对应的欧拉环游长度减小了。

这就是说，只要对G_2的每个圈都作上面的修改，最后得到的图仍然为包含G的欧拉图，而最后的图正好满足(2).

“充分性”

只需证明：任何两条包含G中所有边的闭途径W_1与W_2,如果满足定理2的两个条件，则它们有相同的总权值。

设Y_1与Y_2分别表示W_1与W_2中重复出现的边集合。

我们先证明：对于任意一个圈C^*,如果满足：

$$\sum_{e\in Y_i\cap E(C^*)} w(e) \leq \sum_{e\in Y_i-E(C^*)} w(e),(i=1,2).$$

有：

$$\sum_{e\in Y_1} w(e) = \sum_{e\in Y_2} w(e).$$

令：$Y = (Y_1 - Y_2) \cup (Y_2 - Y_1)$

断言1：$G[Y]$的每个顶点度数必然为偶数。

首先：对于G中任意点v, 如果$d_G(v)$是奇数，那么Y_1与Y_2中与v关联的边数均为奇数；

如果$d_G(v)$是偶数，那么Y_1与Y_2中与v关联的边数均为偶数。

其次，设Y_1与Y_2中与v关联的边数分别为y_1与y_2, 其中相同的边数为y_0, 那么，Y中与v关联的边数为：

$$(y_1 - y_0) + (y_2 - y_0) = y_1 + y_2 - 2y_0.$$

所以，Y中与v关联的边数为偶数，说明$G[Y]$的每个顶点度数必然为偶数。

由于$G[Y]$的每个顶点度数为偶数。所以，它的每个分支是欧拉图。因此，$G[Y]$可以作不重圈分解。

设$Y = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \cdots \cup E(C_k)$.

断言2：$\sum_{e\in Y_1\cap E(C_i)} w(e) = \sum_{e\in Y_2\cap E(C_i)} w(e)$.

事实上，因为：

$$\sum_{e\in Y_1\cap E(C_i)} w(e) \le \sum_{e\in E(C_i)-Y_1} w(e), (i = 1,2,\cdots,k),$$
$$\sum_{e\in Y_2\cap E(C_i)} w(e) \le \sum_{e\in E(C_i)-Y_2} w(e), (i = 1,2,\cdots,k).$$

又因为：$E(C_i)-Y_1=Y_2\cap E(C_i), E(C_i)-Y_2=Y_1\cap E(C_i)$. 所以：

$$\sum_{e\in Y_1\cap E(C_i)} w(e) \le \sum_{e\in E(C_i)-Y_1} w(e) = \sum_{e\in E(C_i)\cap Y_2} w(e), (i=1,2,\cdots,k),$$
$$\sum_{e\in Y_2\cap E(C_i)} w(e) \le \sum_{e\in E(C_i)-Y_2} w(e) = \sum_{e\in E(C_i)\cap Y_1} w(e), (i=1,2,\cdots,k).$$

所以：

$$\sum_{e\in Y_1\cap E(C_i)} w(e) = \sum_{e\in Y_2\cap E(C_i)} w(e).$$

由断言2很容易得到：

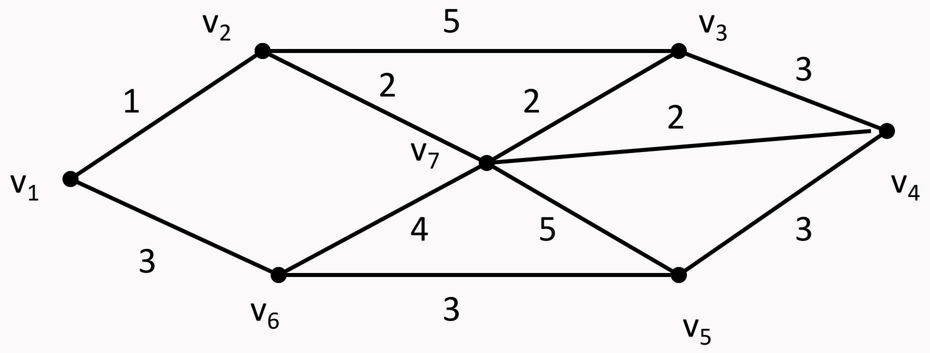
$$\sum_{e\in W_1} w(e) = \sum_{e\in W_2} w(e).$$

又因为：$E(C_i)-Y_1=Y_2\cap E(C_i), E(C_i)-Y_2=Y_1\cap E(C_i)$. 所以：

$$\sum_{e\in Y_1\cap E(C_i)} w(e)\le \sum_{e\in E(C_i)-Y_1} w(e)=\sum_{e\in E(C_i)\cap Y_2} w(e), (i=1,2,\cdots,k).$$

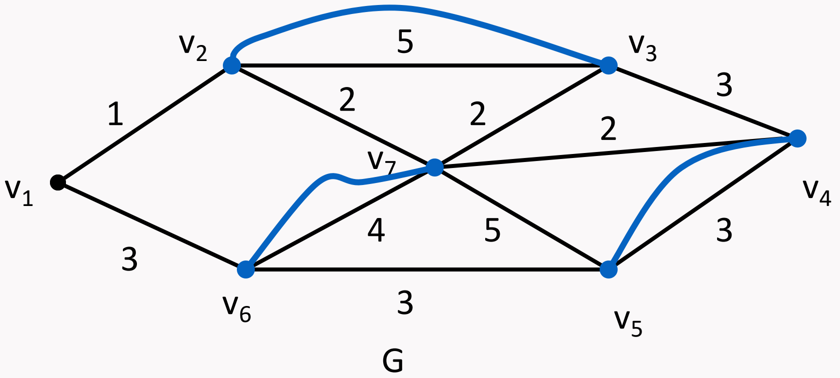
注：定理2的必要性证明过程实际上给出了求中国邮路问题的方法. 下面看一个例题。

例5　求包含下图G的一个最优欧拉环游。

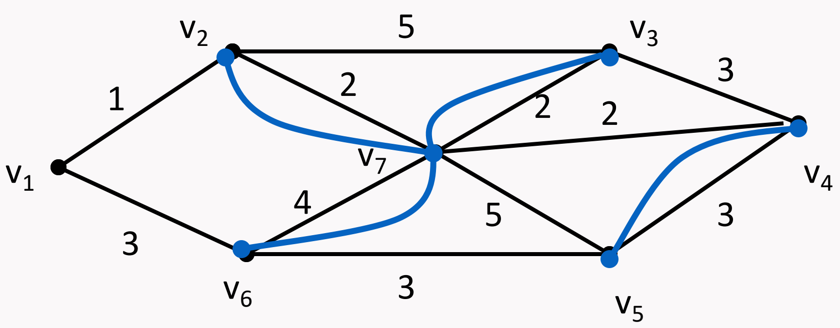


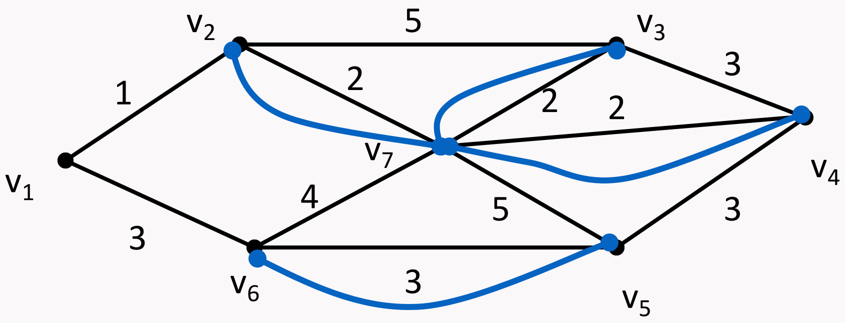
G

解：由定理2：

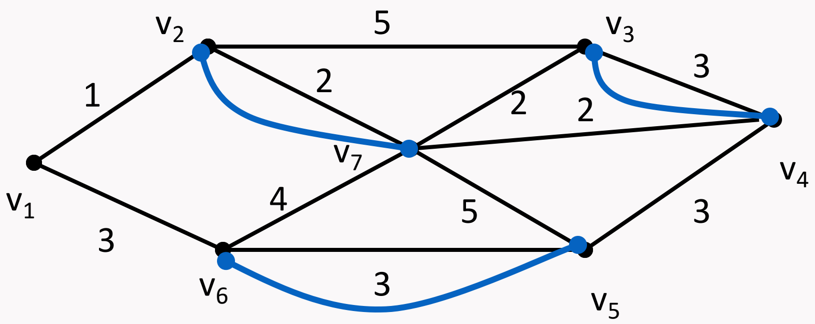


⇒





⇒



例6 如果一个非负权的边赋权图G中只有两个奇度顶点u与v，设计一个求其最优欧拉环游的算法。

解： 1、 算法

(1)、 在u与v间求出一条最短路P; (最短路算法)

(2)、在最短路P上，给每条边添加一条重复边得G的欧拉图G^*;

(3)、在G的欧拉图G^*中用Fleury算法求出一条欧拉环游。

2、 算法证明

定理：**用上面方法求出的欧拉环游是最优欧拉环游。**

证明：设u与v是G的两个奇度顶点, G^*是G的任意一个欧拉图。

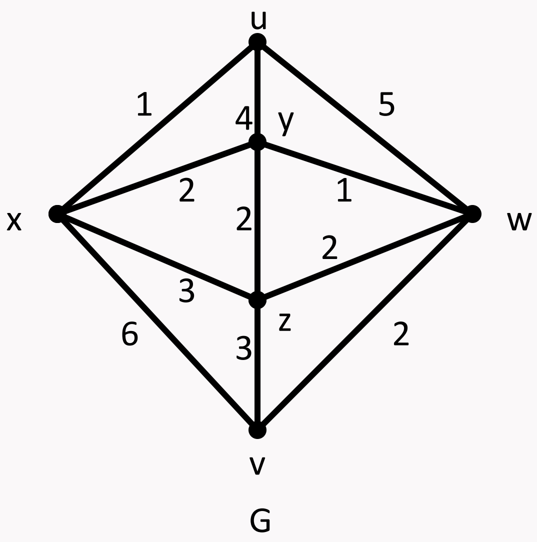
考虑$G^*[E^* - E]$, 显然它只有两个奇数顶点u与v, 当然它们必须在$G^*[E^* - E]$的同一个分支中，因此，存在(u, v)路P^*.

所以，

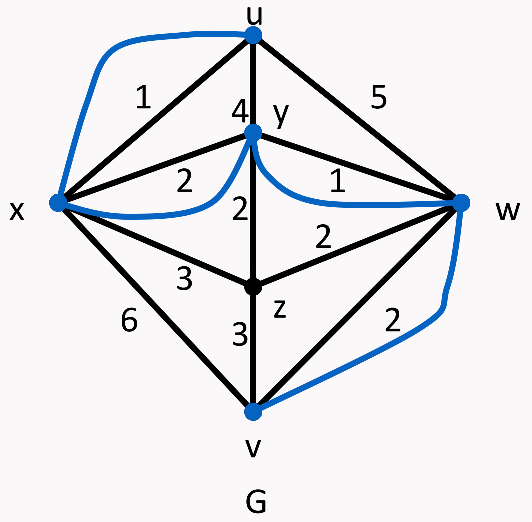
$$\sum_{e \in E^* - E} w(e) \geq w(P^*) \geq w(P).$$

即证明定理。

例如：求出下图的一条最优欧拉环游。



解：



最优欧拉环游：$x\ u\ y\ w\ v\ z\ w\ y\ x\ u\ w\ v\ x\ z\ y\ x$