中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》
2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

匈牙利算法与最优匹配算法

(一)、匈牙利算法

(二)、最优匹配算法

(一)、匈牙利算法

1、偶图中寻找完美匹配

（1）、**问题**

设$G=(X,Y)$，$|X|=|Y|$，在G中求一完美匹配M.

（2）、**基本思想**

从任一初始匹配M_0出发，通过寻求一条M_0可扩路P，令$M_1=M_0\Delta E(P)$，得到比M_0更大的匹配M_1(近似于迭代思想)。

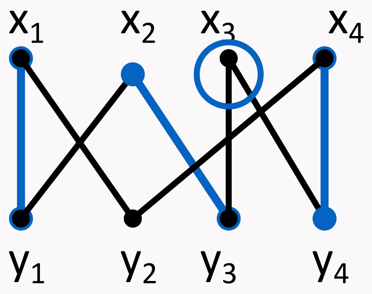
（3）、**M可扩扩路的寻找方法**

1965年，Edmonds首先提出：用扎根于M非饱和点u的M交错树的生长来求M可扩路。

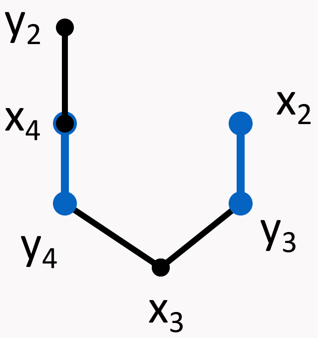
定义1 设$G=(X,Y)$，M是G的匹配，u是M非饱和点。称树H是G的**扎根于点u的M交错树**，如果：

1） $u \in V(H)$ ；

2） 对任意$v \in V(H)$，(u,v)路是M交错路。



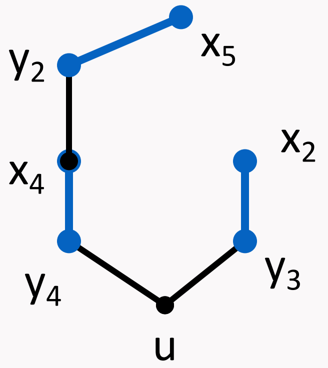
$G=(X,Y)$



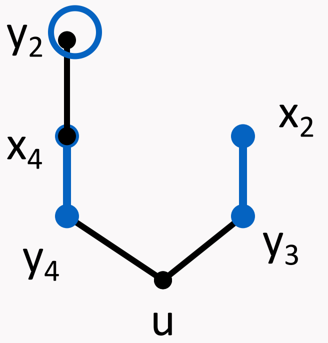
扎根 x_3的M交错树

扎根于M非饱和点u的M交错树的生长讨论：

假如扎根于M非饱和点u的M交错树为H。它有两种情形：**情形1** 除点u外，H中所有点为M饱和点，且在M上配对；**情形2** H包含除u外的M非饱和点。



扎根 u 的M交错树H

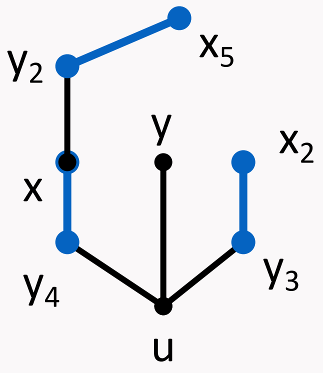


扎根 u 的M交错树H

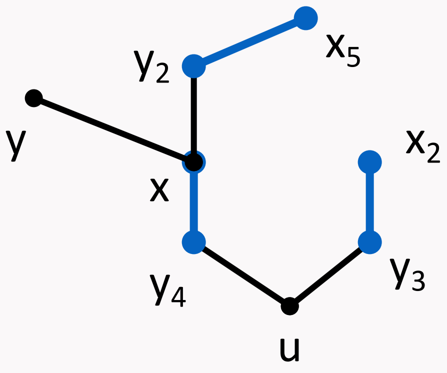
对于情形1，令$S = V(H) \cap X$， $T = V(H) \cap Y$， 显然：$T \subseteq N(S)$. 若$N(S) = T$, 由于$S - \{u\}$ 中点与T中点配对，所以有：$|T| = |S| - 1$, 于是有：$|N(S)| = |S| - 1 < |S|$. 由Hall定理，G中不存在完美匹配；

2）若$T \subset N(S)$

令$y \in N(S) - T$, 则在树H中存在点x与y邻接。因为H的所有点，除u外，均在M下配对。所以，或者$x = u$, 或者x与H的某一顶点配对，但无论哪种情况，都有$xy \notin M$.



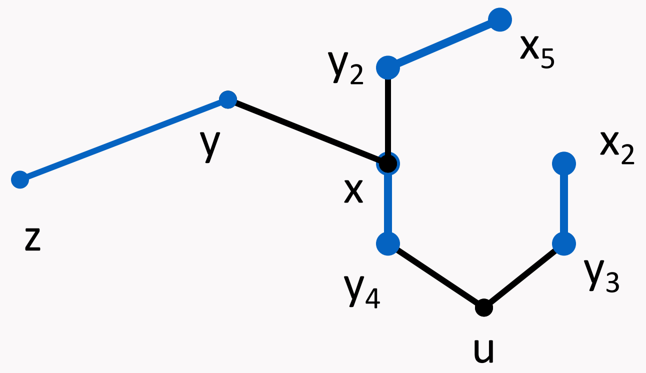
扎根u的M交错树H



扎根 u 的M交错树H

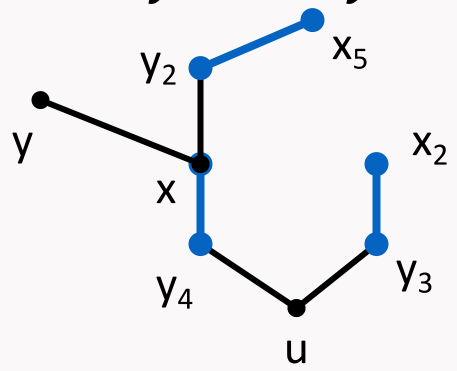
当然，y可能为M饱和点，也可能为M非饱和点。

若y为M饱和点，可设$yz \in M$, 则加上顶点y及z和边xy与yz生长H, 得到情形1；



扎根 u的M交错树H

若y为M非饱和点，加上顶点y和边xy生长H, 得到情形2.



扎根 u的M交错树H

后一情况下找到一条M可扩路，可以对匹配进行一次修改，过程的反复进行，最终判定G是否有完美匹配或者求出完美匹配。根据上面讨论，可以设计求偶图的完美匹配算法。

（4）、**偶图完美匹配算法——匈牙利算法。**

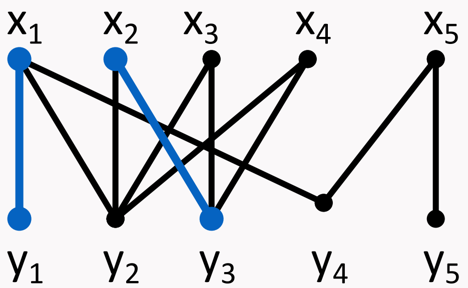
设M是初始匹配。 H是扎根于M非饱和点u的交错树。令：$S = V(H) \cap X,\ T = V(H) \cap Y$.

（a）若M饱和X所有顶点，停止。否则，设u为X中M非饱和顶点，置$S = \{u\},\ T = \Phi$;

（b）若$N(S) = T$，则G中不存在完美匹配。否则设 $y \in N(S) - T$.

（c）若y为M饱和点，且$yz \in M$, 置$S = S \cup \{z\},\ T = T \cup \{y\}$, 转(b)。否则，设$P$为$M$可扩路，置$M_1 = M \Delta E(P)$ ，转(a).

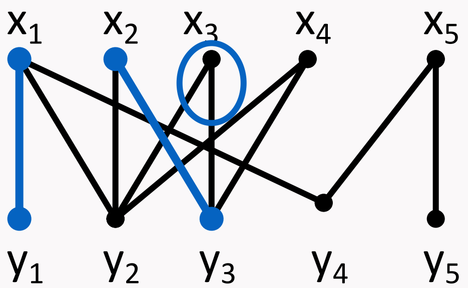
例1 讨论下图$G=(X,Y)$是否有完美匹配。



$G=(X,Y)$

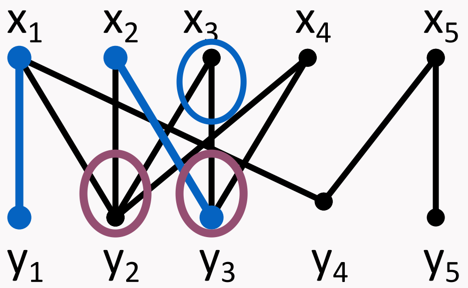
解：取初始匹配 $M=\{x_1y_2,\ x_2y_3\}$.

（a） $S=\{x_3\}$， $T=\Phi$；



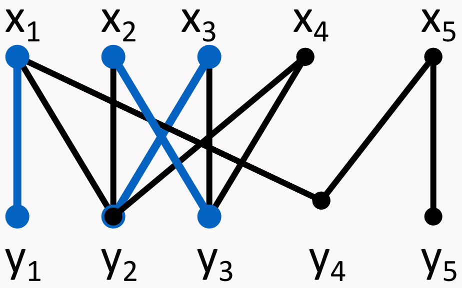
$G=(X,Y)$

(b) $N(S)=\{y_2,y_3\}$，$N(S)\neq T$，取$y_2\in N(S)-T$

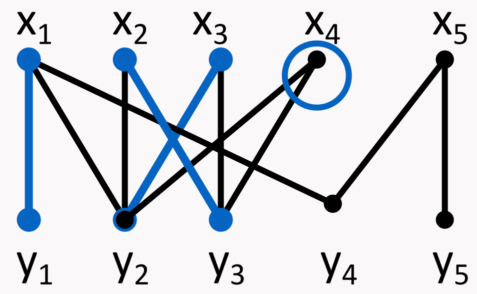


$G=(X,Y)$

(c) y_2为M非饱和点，加上y_2和边x_3y_2生长树H. 此时，置$M=M\Delta E(P)=\{x_1y_1,x_2y_3,x_3y_2\}$



$G=(X,Y)$

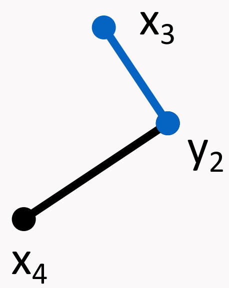


$G = (X, Y)$

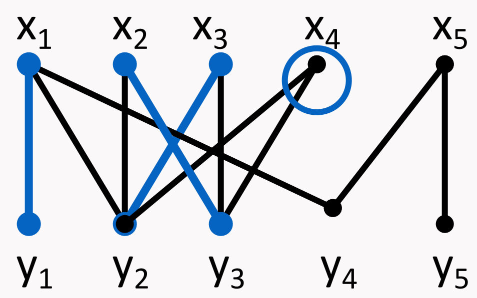
（a） $S = \{x_4\}, T = \Phi$；

（b） $N(S) = \{y_2, y_3\}$， $N(S) \neq T$， 取$y_2 \in N(S) - T$

（c） y_2为M饱和点， $y_2x_3 \in M$. 此时， 置$S = S \cup \{x_3\}, T = T \cup \{y_2\}$.



（b） $N(S) = \{y_2, y_3\} \neq T$, 取$y_3 \in N(S) - T$



$G=(X,Y)$

（b） $N(S)=\{y_2,y_3\}$， $N(S)\neq T$, 取$y_3\in N(S)-T$

（c） y_3为M饱和点， $x_2y_3\in M$. 此时， 置$S=S\cup\{x_2\}$, $T=T\cup\{y_3\}$.

（b） $N(S)=\{y_2,y_3\}=T$， 所以， G无完美匹配。

（5）、匈牙利算法复杂性分析

1）、最多循环$|X|$次可以找到完美匹配；

2）、初始匹配最多扩张$|X|$次可以找到完美匹配；

3）、每次生长树的生长至多$2|X|-1$次。

所以，算法复杂性为$O(|X|^3)$, 是好算法。

2、偶图中寻找最大匹配

问题：在一般偶图上求最大匹配M.

分析：使用匈牙利算法求完美匹配时，当在扎根于M非饱和点u的交错树上有$|N(S)|<|S|$时，由Hall定理，算法停止。要求出最大匹配，应该继续检查$X-S$是否为空，如果不为空，则检查是否在其上有M非饱和点。一直到所有M非饱和点均没有M可扩路才停止。

偶图中寻找最大匹配算法：

设M是$G=(X,Y)$的初始匹配。

（1）置$S=\Phi$, $T=\Phi$;

（2）若$X-S$已经M饱和，停止；否则，设u是$X-S$中的一非饱和顶点，置$S=S\cup\{u\}$.

（3）若$N(S)=T$，转(5)；否则，设$y\in N(S)-T$.

（4）若y是M饱和的，设$yz\in M$，置$S=S\cup\{z\}, T=T\cup\{y\}$，转(3)；否则，存在$(u,y)$ 交错路是M可扩路P，置$M=M\Delta E(P)$，转(1).

（5）若$X-S=\Phi$，停止；否则转(2).

(二)、最优匹配算法

1 、问题

设 $G=(X,Y)$ 是边赋权完全偶图，且 $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$， $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$， $w_{ij}=w(x_iy_j)$. 在G中求出一个具有最大权值的完美匹配

由于$K_{n,n}$有$n!$个不同完美匹配，所以枚举计算量是$n!$.

在匈牙利算法的基础上，Kuhn（1955）与Munkres(1957)提出了上面问题的好算法。

2 、可行顶点标号与相等子图

定义2 设$G=(X,Y)$， 若对任意的$x\in X$，$y\in Y$， 有：

$$l(x)+l(y)\geq w(xy)$$

称l是**赋权完全偶图*G*的可行顶点标号**。

对于任意的赋权完全偶图G，均存在G的可行顶点标号。事实上，设：

$$\begin{cases} l(x)=\max\limits_{y\in Y} w(xy), 若x\in X, \\ l(y)=0, \qquad\qquad 若y\in Y. \end{cases}$$

则l是G的一个可行顶点标号。

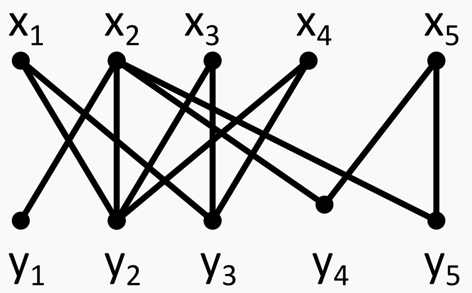
定义3 设l是赋权完全偶图$G=(X,Y)$的可行顶点标号，令：

$$E_l=\{xy\in E(G)|l(x)+l(y)=w(xy)\}$$

称$G_l=G[E_l]$ 为G 的**对应于$\boldsymbol{l}$ 的相等子图**。

例如，设如下矩阵是赋权完全偶图G 的权值矩阵并注明了一种可行顶点标号l 。

$$W=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}3&5&5&4&1\\2&2&0&2&2\\2&4&4&1&0\\0&1&1&0&0\\1&2&1&3&3\end{pmatrix}&\begin{array}{c}5\\2\\4\\1\\3\end{array}\\\begin{array}{ccccc}0&0&0&0&0\end{array}&\end{array}$$



$G_l=(X,Y)$

定理 设$\boldsymbol{l}$是赋权完全偶图$\boldsymbol{G=(X,Y)}$ 的可行顶点标号，若相等子图$\boldsymbol{G_l}$有完美匹配$\boldsymbol{M^*}$，则$\boldsymbol{M^*}$ 是$\boldsymbol{G}$的最优匹配。

证明：设M^* 是G_l的完美匹配，则：

$$w(M^*)=\sum_{e\in M*}w(e)=\sum_{v\in V(G)}l(v).$$

又设M 是G 的任一完美匹配，则：

$$w(M)=\sum_{e\in M}w(e)\leq\sum_{v\in V(G)}l(v),$$

所以，$w(M^*)\geq w(M)$. 即M^*是G 的最优匹配。

根据上面定理，如果找到一种恰当可行顶点标号，使得对应的相等子图有完美匹配M^*, 则求出了G的最优匹配。

Kuhn采用顶点标号修改策略，找到了求最优匹配好算法，介绍如下：

给一初始顶点标号l，在G_l中任选一个匹配M.

（1）若X是M饱和的，则M是最优匹配。否则，令u是一个M非饱和点，置：$S = \{u\}, T = \emptyset$.

（2）若$N_{G_l}(S) \supset T$，转(3)。否则，计算：

$$\alpha_l = \min_{\substack{x \in S \\ y \notin T}} \{l(x) + l(y) - w(xy)\}.$$

$$\hat{l}=\begin{cases} l(v)-\alpha_l, v\in S \\ l(v)+\alpha_l, v\in T \\ l(v) \quad\quad ,\text{其它} \end{cases}$$

给出新的可行顶点标号，在新标号下重新开始。

（3） 在$N_{G_l}(S)\setminus T$中选择点y. 若y是M饱和的，$yz\in \mathrm{M}$, 则置$S=S\cup \{z\}$, $T=T\cup\{y\}$, 转(2)；

否则，设P是G_l中M可扩路，置$M=M\Delta E(P)$, 转(1).

注：该算法把匈牙利算法用于其中，主要是用来判定和求完美匹配。

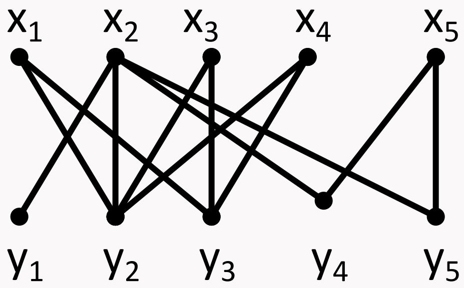
例2，设如下矩阵是赋权完全偶图G的权值矩阵，求出其最优匹配。

$$W=\begin{pmatrix}3&5&5&4&1\\2&2&0&2&2\\2&4&4&1&0\\0&1&1&0&0\\1&2&1&3&3\end{pmatrix}$$

解：给出初始可行顶点标号l为：

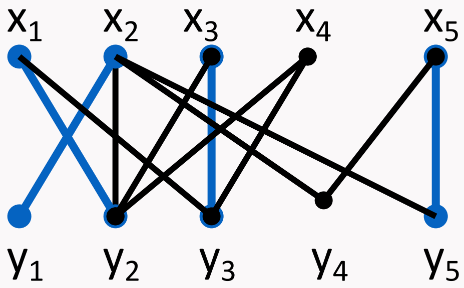
$$\begin{array}{cc} W=\begin{pmatrix}3&5&5&4&1\\2&2&0&2&2\\2&4&4&1&0\\0&1&1&0&0\\1&2&1&3&3\end{pmatrix} & \begin{array}{c}5\\2\\4\\1\\3\end{array} \\ \begin{array}{ccccc}0&0&0&0&0\end{array} & \end{array}$$

对应的相等子图G_l为：



$G_l = (X, Y)$

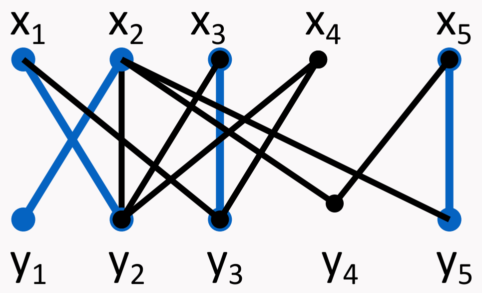
给出初始匹配M为：



$G_l = (X, Y)$

(1) $u = x_4$为M非饱和顶点。置：

$$S = \{x_4\}, T = \Phi.$$



$G_l = (X, Y)$

(2) $N_{G_l}(S) = \{y_2, y_3\} \supset T$

(3) 取： $y_2 \in N_{G_l}(S) - T$

y_2为饱和顶点， $y_2x_1 \in M$， 于是：$S = \{x_1, x_4\}, T = \{y_2\}$

（2） $N_{G_l}(S) = \{y_2, y_3\} \supset T$

（3） 取：$y_3 \in N_{G_l}(S) - T$

y_3为饱和顶点，$y_3x_3 \in M$，于是：$S = \{x_1, x_3, x_4\}, T = \{y_2, y_3\}$

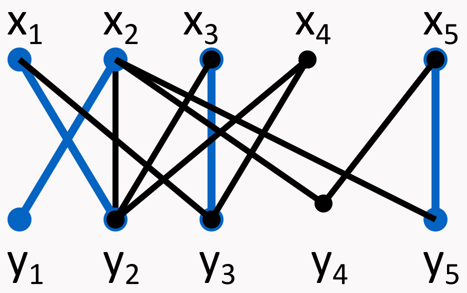
(2) $N_{G_l}(S) = \{y_2, y_3\} = T$

于是修改标号：

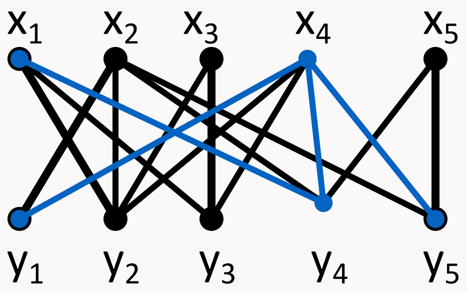
$$\alpha_l = \min_{\substack{x\in S\\ y\notin T}}\{l(x) + l(y) - w(xy)\} = 1$$

$$\hat{l} = \begin{cases} l(v) - \alpha_l, v \in S \\ l(v) + \alpha_l, v \in T \\ \quad l(v), 其它 \end{cases}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ \end{matrix}$$

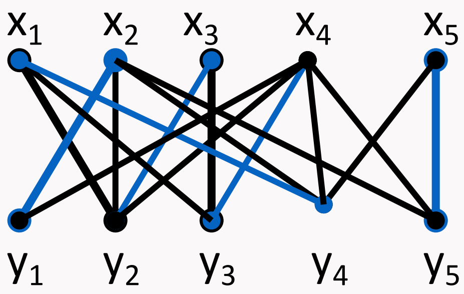


$G_l = (X, Y)$



$G_l = (X, Y)$

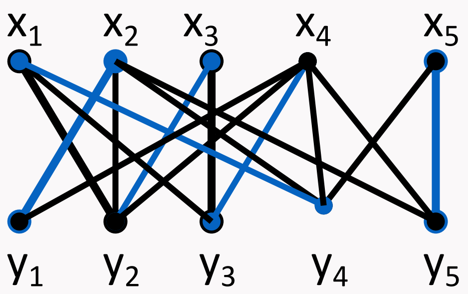
继续使用算法后得：



$G_l = (X, Y)$

最优匹配权值为14.

继续使用算法后得:



$G_l = (X, Y)$

最优匹配权值为14.

例3 证明: K_{6n-2}有一个3因子分解。

证明: $K_{6n-2} = K_{2(3n-1)}$, 所以, 可以分解为$6n-3$个边不重的1因子之和。而任意3个1因子可以并成一个3因子。所以, 共可以并成$2n-1$个3因子。即K_{6n-2}可以分解为$2n-1$个3因子的和。

例4 证明：对$n\ge 1$, K_{4n+1}有一个4因子分解。

证明：$K_{4n+1}= K_{2(2n)+1}$，所以，可以分解为2n个边不重的2因子之和。而任意2个2因子可以并成一个4因子。所以，共可以并成n个4因子。即K_{4n+1}可以分解为n个4因子的和。

例5 设H是有限群，K是H的子群。证明：存在元素$h_1,h_2,\ldots,h_n \in H$，使得$h_1K, h_2K, \ldots, h_nK$都是K的左陪集。而$Kh_1, Kh_2, \ldots, Kh_n$都是K的右陪集。

注: (1)上面结论是群论学家Hall的一个结论。群论是近世代数的重要组成部分。在数学、计算机科学、理论物理学(量子场论)中都有重要应用。是数学领域里最引人关注的方向和主流研究方向之一。创立者伽罗瓦。

(2) 伽罗瓦 (1811 ---1832) 中学时受到数学老师里沙的影响而对数学产生极大兴趣。里沙对教学工作十分负责，且具有很高数学才能，但把精力耗在了学生身上，欣慰的是培养了好几位欧洲杰出数学家。中学时的伽罗瓦 在里沙帮助下创立了群论。群论是19世纪最突出的数学成就。

在法国历史上著名的1830年的“七月革命”中， 伽罗瓦两次入狱，成为坚强斗士。1832年5月， 21岁的他因为反动派设下的爱情圈套，被迫决斗至死。这是他犯下的草率的错误。

证明：由陪集的性质：H中的任意两个左(右)陪集,要么相等，要么没有共同元素。所以H可按某子群的左(右)陪集，划分为左(右)陪集族。如果K是H的子群，则aK或者Kb的元素个数等于K中元素个数。

设|K|=k。且假设子群K在群H中的指数为n。我们构造偶图G=(X, Y)如下：

X表示H关于K的左陪集族，Y表示H关于K的右陪集族。对于x ∈X, y ∈Y, x与y间连接 *l* 条边，当且仅当左陪集x和右陪集y有*l*个共同元素。

显然G是k正则偶图，于是存在完美匹配M。 |M|=n

在M中的边e_i的两端点的陪集中选取共同元素h_i, 则这些元素为所求。(1≦i≦n）。

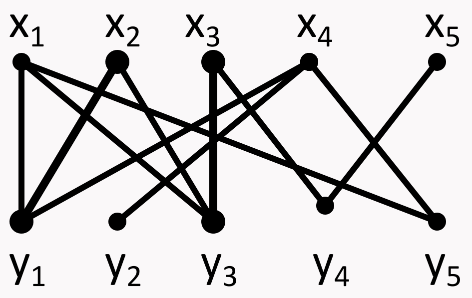
匹配在矩阵中的应用

1、矩阵与偶图

设A=(a_{ij})是n阶方阵。构造偶图G=(X, Y)如下：

X表示行集合，Y表示列集合。X中元素x_i与Y中元素y_j连线，当且仅当a_{ij}≠0

$$W=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array}\end{array}\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}$$



G_w=(X, Y)

2、下面研究detA和G_A=(X, Y)之间关系

$$A=(a_{ij})_{\nu\times\nu},\text{则}\det A=\sum_{j_1j_2\cdots j\nu}(-1)^{\pi(j_1j_2\ldots j_\nu)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{\nu j\nu}$$

对所有的$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{\nu j_\nu}=0 \Leftrightarrow G_A$中无完美匹配 $\Leftrightarrow \exists \mathrm{S}\subseteq \mathrm{X}$, 使得:
$|\mathrm{N}(S)|\le |S|-1 \Leftrightarrow$ 有一个$|S|\times(\nu-|S|+1)$阶零矩阵。

若|S|=n, 则在A中存在n行，这n行中至多有n-1列元非零，而其余的ν−n+1列中每个元素为零。即得到A中有一个 $n\times(\nu-n+1)$ 零子阵。

于是有如下定理:

设$A=(a_{ij})_{\nu\times\nu}$,则$\det A$展开式中每项为零 $\Leftrightarrow \exists n$,使得A中有一个$\mathrm{n}\times(\nu-\mathrm{n}+1)$阶零子阵。

作业

P117---118　习题4：　13

Thank You !