本次课主要内容

哈密尔顿图

(一)、哈密尔顿图的概念

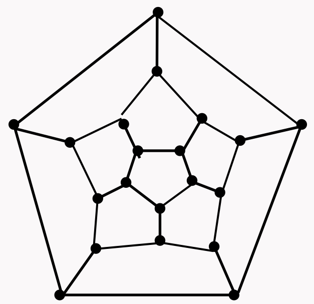
(二)、性质与判定

(三)、TSP问题

(一)、哈密尔顿图的概念

1、背景

1857年， 哈密尔顿发明了一个游戏(Icosian Game).它是由一个木制的正十二面体构成，在它的每个棱角处标有当时很有名的城市。游戏目的是“环球旅行”。为了容易记住被旅游过的城市 ，在每个棱角上放上一个钉子，再用一根线绕在那些旅游过的城市上(钉子),由此可以获得旅程的直观表示。



十二面体

哈密尔顿把该游戏以25英镑的价格买给了J. Jacques and Sons公司（该公司如今以制造国际象棋设备而著名），1859年获得专利权。但商业运作失败了。

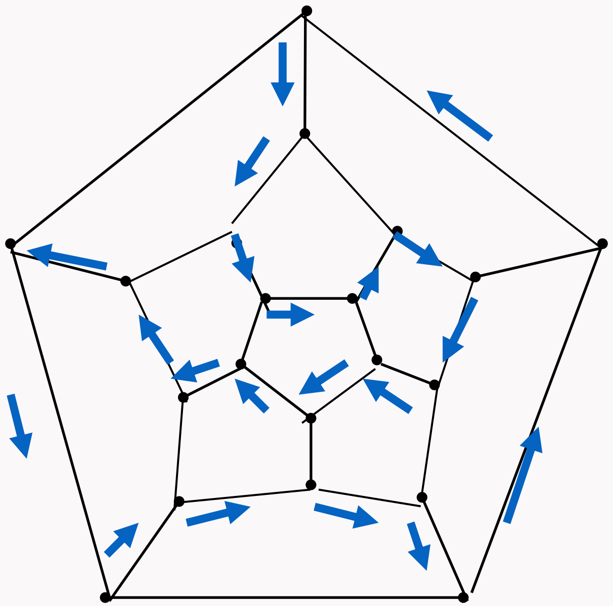
该游戏促使人们思考点线连接的图的结构特征。这就是图论历史上著名的哈密尔顿问题。

哈密尔顿(1805---1865),爱尔兰数学家。个人生活很不幸，但兴趣广泛：诗歌、光学、天文学和数学无所不能。他的主要贡献是在代数领域，发现了四元数(第一个非交换代数)，他认为数学是最美丽的花朵。

2、哈密尔顿图与哈密尔顿路

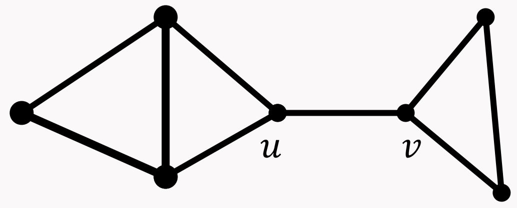
定义1 如果经过图G的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称H图。所经过的闭途径是G的一个生成圈，称为G的哈密尔顿圈。

例1、正十二面体是H图。



十二面体

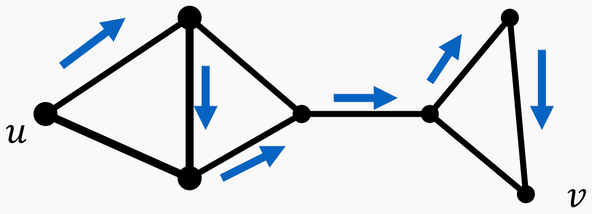
例2 下图G是非H图。



图G

证明：因为在G中，边uv是割边，所以它不在G的任意圈上，于是u与v不能在G的同一个圈上。故G不存在包括所有顶点的圈，即G是非H图。

定义2 如果存在经过G的每个顶点恰好一次的路，称该路为G的哈密尔顿路，简称H路。



图G

(二)、性质与判定

1、性质

定理1（**必要条件**）若G为H图，则对$V(G)$的任一非空顶点子集S, 有：

$$\omega(G-S) \leq |S|.$$

证明：G是H图，设C是G的H圈。则对$V(G)$的任意非空子集S, 容易知道:

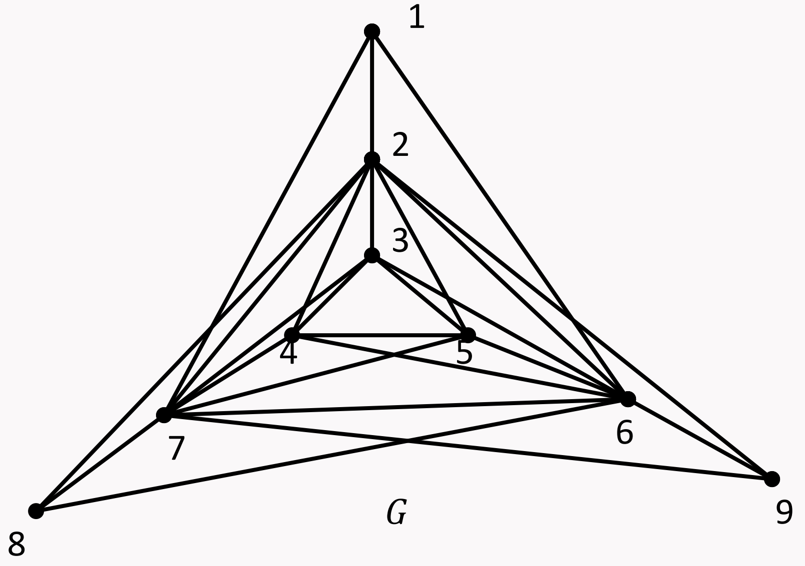
$$\omega(C-S) \leq |S|,$$

所以，有：

$$\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|.$$

注：不等式为G是H图的必要条件，即不等式不满足时，可断定对应图是非H图。

例3 求证下图是非H图。



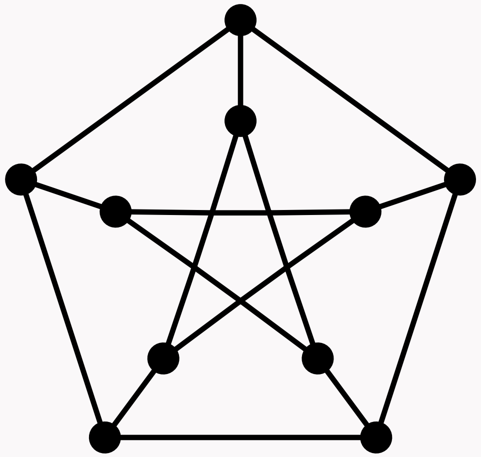
证明：取$S=\{2,7,6\}$, 则有：

$$\omega(G-S)=4>|S|=3,$$

所以由定理1知，G为非H图。

注意：*满足定理1不等式的图不一定是H图。*

例如：著名的彼德森图是非H图，但它满足定理1的不等式。



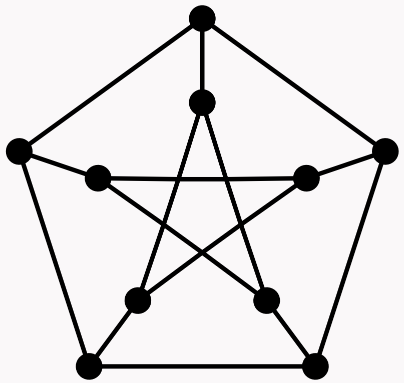
Peterson图

彼得森(1839----1910)，丹麦哥本哈根大学数学教授。家境贫寒，因此而辍过学。但19岁就出版了关于对数的专著。他作过中学教师，32岁获哥本哈根大学数学博士学位，然后一直在该大学作数学教授。

彼得森是一位出色的名教师。他讲课遇到推理困难时，总是说：“这是显而易见的”，并让学生自己查阅他的著作。同时，他是一位有经验的作家，论述问题很形象，讲究形式的优雅。

1891年，彼得森发表了一篇奠定他图论历史地位的长达28页的论文。这篇文章被公认是第一篇包含图论基本结论的文章。同时也是第一次在文章中使用“图”术语。

1898年，彼得森又发表了一篇只有3页的论文，在这篇文章中，为举反例构造了著名的彼得森图。



2、判定

　　图的H性判定是NP-困难问题。到目前为止，有关的定理有300多个，但没有一个是理想的。拓展H图的实用特征仍然被图论领域认为是重大而没有解决的问题。

　　图的哈密尔顿问题和四色问题被谓为挑战图论领域150年智力极限的总和。三位数学“诺奖”获得者ErdÖs、Whitney 、 Lovász 以及Dirac、Ore等在哈密尔顿问题上有过杰出贡献。

　　下面，介绍几个著名的定理。

定理2(充分条件）对于$n \geq 3$的简单图G, 如果G中有：

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2}.$$

那么G是H图。

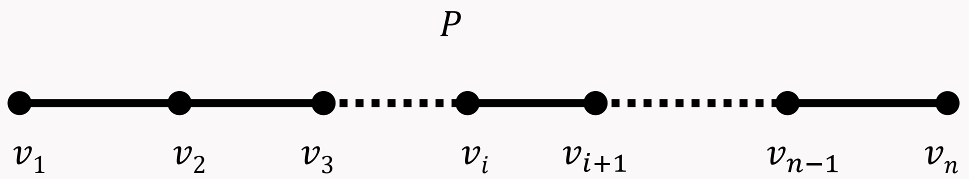
证明：若不然，设G是一个满足定理条件的极大非H简单图。显然G不能是完全图，否则，G是H图。

于是，可以在G中任意取两个不相邻顶点u与v. 考虑图$G+uv$, 由G的极大性，$G+uv$是H图。且$G+uv$的每一个H圈必然包含边uv.

所以，在G中存在起点为u而终点为v的H路P.

不失一般性，设起点为u而终点为v的H路P为：

$$P = v_1 v_2 \cdots v_n, v_1 = u, v_n = v$$



令：

$$S = \{v_i | uv_{i+1} \in E(G)\},$$
$$T = \{v_j | v_j v \in E(G)\}.$$

对于S与T, 显然，$v_n \notin S \cup T$.

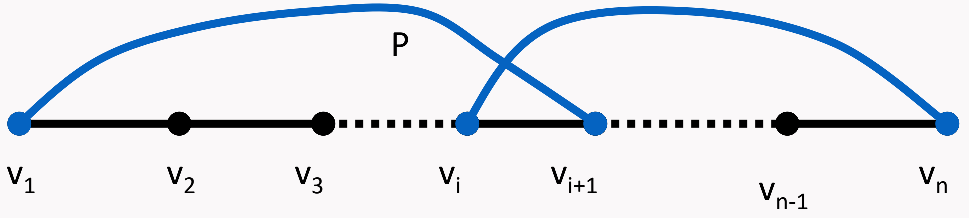
所以： $|S \cup T| < n$.

另一方面：可以证明：$S \cap T = \Phi$.

否则，设$v_i \in S \cap T$,

那么，由$v_i \in S$有$v_1 v_{i+1} \in E(G)$,

由$v_i \in T$有$v_n v_i \in E(G)$.



这样在G中有H圈，与假设矛盾！

于是：

$$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<n.$$

这与已知 $\delta(G)\geq\frac{n}{2}$ 矛盾！

注：该定理是数学家 Dirac在1952年得到的。该定理被认为是H问题的划时代奠基性成果。

Dirac曾经是丹麦奥尔胡斯大学知名教授，杰出的数学研究者。其父亲(继父)是在量子力学中做出卓越贡献的物理学家狄拉克，1933年获诺贝尔物理学奖。Dirac发表关于H问题论文39篇。他1952年的定理将永载史册！

1960年，美国耶鲁大学数学家奥勒（Ore）院士考察不相邻两点度和情况，弱化了Dirac条件 ，得到一个光耀千秋的结果。

Ore发表关于H问题论文59篇。

定理3（充分条件）对于$n \geq 3$的单图G,如果G中的任意两个不相邻顶点u与v,有：

$$d(u) + d(v) \geq n.$$

那么， G是H图。

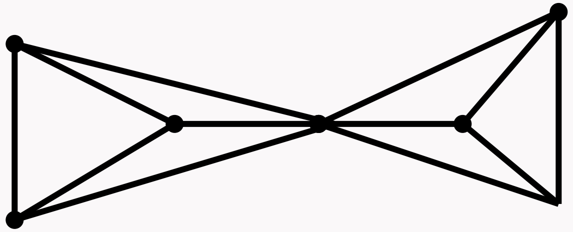
注：（1）该定理证明和定理2可以完全一致！

（2）该定理的条件是紧的。例如：设G是由K_{k+1}的一个顶点和另一个K_{k+1}的一个顶点重合得到的图，

那么对于G的任意两个不相邻顶点u与v,有：

$$d(u)+d(v)=2k=n-1.$$

但G是非H图。



$G=K_1+2(K_3)$

1976年，牛津大学的图论大师Bondy(帮迪)等在Ore定理基础上，得到图G和它的闭包间的同哈密尔顿性。

引理1 对于单图G，如果G中有两个不相邻顶点u与v，满足：

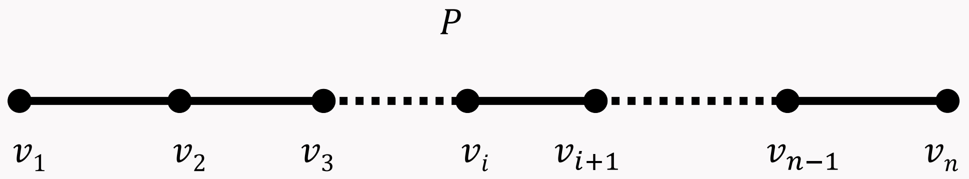
$$d(u)+d(v)\geq n,$$

那么G是H图当且仅当$G+uv$是H图。

证明：“必要性” 显然。

“充分性”

若不然，设G是非H图，那么$G+uv$的每个H圈必然经过边uv, 于是G含有一条哈密尔顿(u,v)路。



与定理2的证明相同，可推出：

$$d(u)+d(v)<n.$$

这与条件矛盾！ ■

定义3 在n阶简单图中，若对$d(u)+d(v)\geq n$的任意一对顶点u与v,均有$u\ adj\ v$, 则称G是闭图。

引理2 若G_1和G_2是同一个点集V的两个闭图，则$G=G_1\cap G_2$是闭图。

证明：任取$u,v\in V(G_1\cap G_2)$，如果有：

$$d_G(u)+d_G(v)\geq n.$$

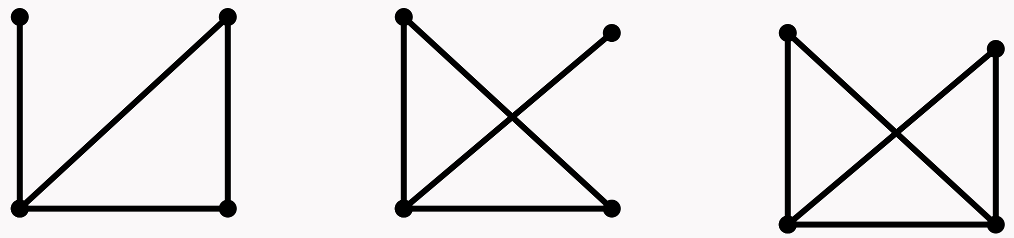
易知：

$$d_{G_1}(u)+d_{G_1}(v)\geq n, d_{G_2}(u)+d_{G_2}(v)\geq n.$$

因G_1与G_2都是闭图，所以u与v在G_1与G_2中都邻接，所以，在G中也邻接。故G是闭图。

注：G_1与G_2都是闭图，它们的并不一定是闭图。

例如：

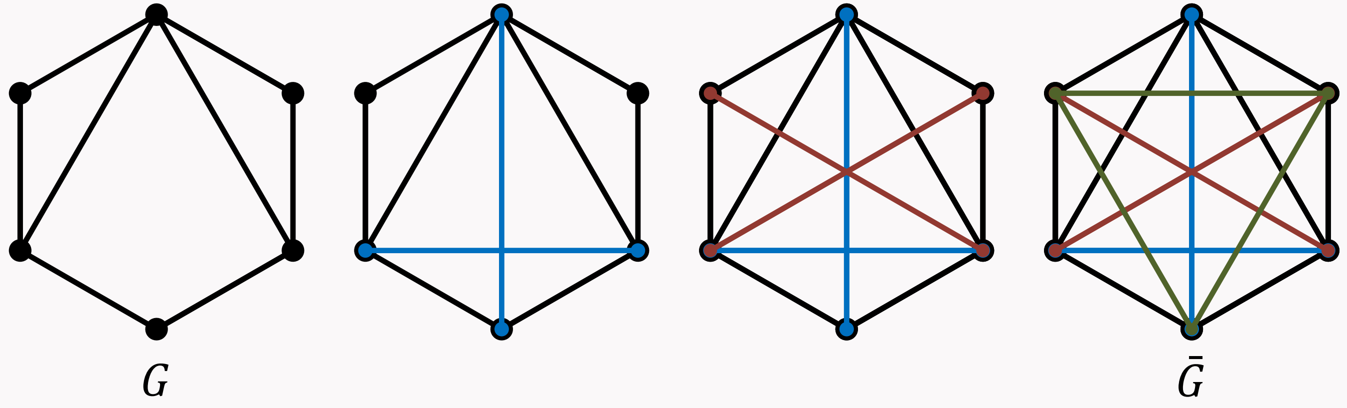


G_1　　G_2　　$G_1 \cup G_2$

尽管G_1与G_2是闭图，但其并不是闭图！

定义4 称$\bar{G}$是图G的闭包，如果它是包含G的极小闭图，即对$\forall H$，若有$G \subset H \subset \bar{G}$，则$H$不是闭图。

注：如果G本身是闭图，则其闭包是它本身；如果G不是闭图，则由定义可以通过在度和大于等于n的不相邻顶点对间加边来构造G的闭图。例如：



引理3　图G的闭包是唯一的。

证明：设$\bar{G}_1$和$\bar{G}_2$是图G的两个闭包，则：

$$G \subseteq \bar{G}_1, G \subseteq \bar{G}_2,$$

所以，有：

$$G \subseteq \bar{G}_1 \cap \bar{G}_2.$$

又由引理2知，$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2$是闭图，且$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 \subseteq \bar{G}_1$.

根据闭包定义，有：$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \bar{G}_1$.

同理：$\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \bar{G}_2$.

所以，$\bar{G}_1 = \bar{G}_2$.

定理4(闭包定理）图G是H图当且仅当它的闭包是H图.

证明：“必要性”显然。

“充分性”：假设G的闭包是H图, 我们证明G是H图.

假设G的闭包和G相同，结论显然。

若不然，设$e_i\ (1 \leq i \leq k)$是为构造G的闭包而添加的所有边，由引理1，G是H图当且仅当$G+e_1$是H图，$G+e_1$是H图当且仅当$G+e_1+e_2$是H图, ⋯, 反复应用引理1，可以得到定理结论。

由于完全图一定是H图，所以由闭包定理有：

推论1：设G是$n \geq 3$的单图，若G的闭包是完全图，则G是H图。

由闭包定理也可以推出Dirac和Ore定理：

推论1：设G是$n \geq 3$的单图。

（1）若$\delta(G) \geq n/2$，则G是H图（ Dirac定理）；

（2）若对于G中任意不相邻顶点u与v，都有$d(u)+d(v) \geq n$，则G是H图.（ Ore定理）

在闭包定理的基础上，Chvátal和帮迪进一步得到图的H性的度序列判定法。

定理5(Chvátal——度序列判定法）设简单图G的度序列是$d(d_1, d_2, \ldots, d_n)$，这里，$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$，并且$n \geq 3$. 若对任意的$m < n/2$，或有$d_m > m$，或有$d_{n-m} \geq n-m$，则$G$是$H$图。

萨瓦达定理的证明方法：证G的闭包是完全图。

证明：如果G的闭包是K_n, 则G是H图。

否则，设u与v是G的闭包中不相邻接的且度和最大的两点，又假设：

$$d_{\bar{G}}(u) \leq d_{\bar{G}}(v).$$

由于$\bar{G}$是闭图，u与v是其中不邻接顶点，所以：

$$d_{\bar{G}}(u) + d_{\bar{G}}(v) < n.$$

于是，若取$m = d_{\bar{G}}(u)$, 则$m < \frac{n}{2}$.

对于这个m，由于：

$$d_{\bar{G}}(v) < n - d_{\bar{G}}(u) = n - m.$$

所以在G的闭包中至少有m个点与v不邻接。

由u与v的取法知：与v不邻接的m个点中，u的度数最大。这就意味着：G中至少有m个点的度数不大于m, 即：

$$d_m \le m.$$

另一方面，由m的选取，G的闭包中有$n-1-m$个点与u不相邻接。而这些点中，v的度最大。这意味着：在G的闭包中有$n-1-m$个与u不邻接的点的度数小于等于v的度数。

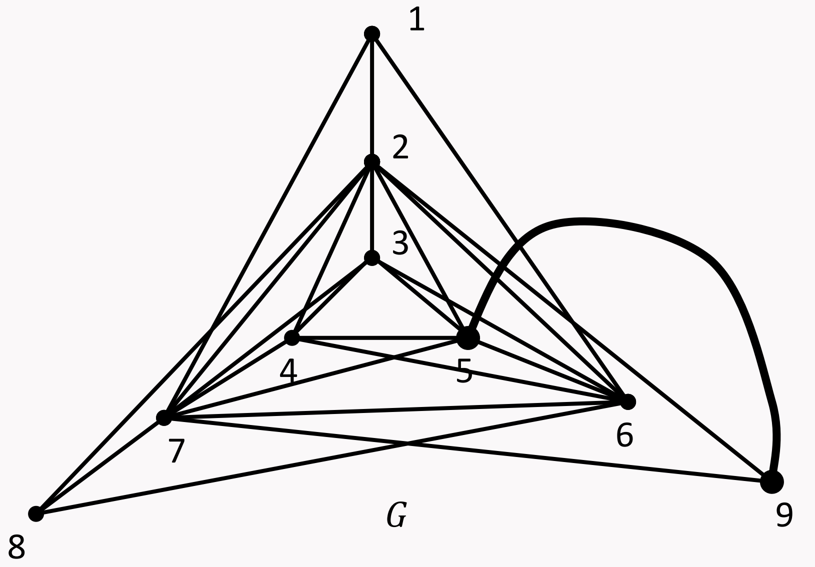
但是，由：

$$d_{\bar{G}}(v) < n - d_{\bar{G}}(u) = n - m.$$

以及u的度数不超过v的度数假设，G的闭包中至少有$n-m$个点的度不超过$n-m$, 从而在G中至少有$n-m$个点的度数严格小于$n-m$, 即：

$$d_{n-m} < n - m.$$

例4 求证下图是H图。



证明：在G中有：

$$d_1 = d_2 = d_3 = 3, d_4 = d_5 = 5,$$

$$d_6 = 6, d_7 = 7, d_8 = d_9 = 8$$

因$n = 9$, 所以，$m = 1,2,3,4$.

$$d_5 = 9 - 4 = 5, d_6 = 9 - 3 = 6,$$

$$d_7 = 9 - 2 = 7, d_8 = 9 - 1 = 8$$

所以，由度序列判定法，G是H图。

注：哈密尔顿图研究简介

哈密尔顿问题的研究一直是图论热点。研究历史大致情况如下：

(1) 1952年Dirac定理是研究的奠基性结果；

(2) 1962年Ore定理是Dirac定理的重要推进；

(3) 1976年帮迪的闭包定理是Ore定理的重要推进；

(4) 1985年时任剑桥大学兼伦敦大学教授的Nicos在弱化Ore定理条件基础上推进了Ore定理；

（5）1996年GSU计算机系五个特聘教授之一的Chen和SCI杂志《图论杂志》编委Egawa及SCI杂志《图论与组合》主编Saito等再进一步推进Ore定理。

（6） 2007 年， 赖 虹 建 教 授 统 一 上 面 全 部 结 果（见 美 国 Appl. Math. Lett.），似已是珠峰之极.

值得一提的是，福州大学的 范更华教授对H问题的研究也取得重要成就，他得出“范定理”：

范定理：若图中每对距离为2的点中有一点的度数至少是图的点数的一半，则该图存在哈密尔顿圈。

该成果获得中国2005年度国家自然科学二等奖。

(三)、TSP问题

TSP问题即旅行售货员问题，是应用图论中典型问题之一。问题提法为：一售货员要到若干城市去售货，每座城市只经历一次，问如何安排行走路线，使其行走的总路程最短。

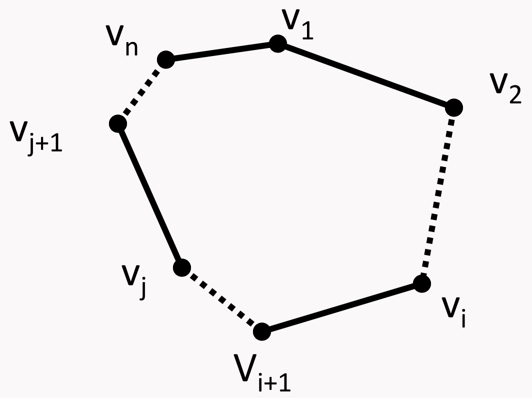
在赋权图中求最小H圈是NP—难问题。理论上也已经证明：不存在多项式时间近似算法，使相对误差小于或等于某个固定的常数ε, 即便是$\varepsilon = 1000$也是如此。

已经使用过的近似算法很多，如遗传算法、最邻近算法、最近插值法、贪婪算法和边交换技术等。

下面介绍边交换技术。

1、边交换技术

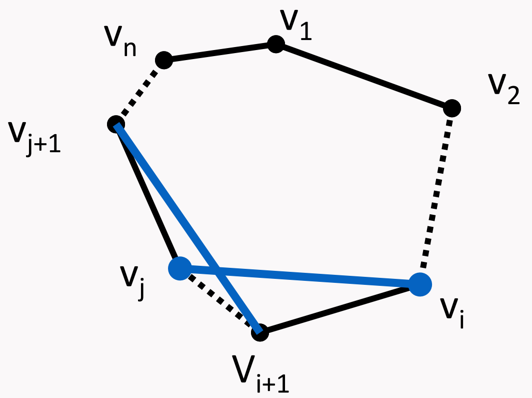
（1）在赋权完全图中取一个初始H圈$C = v_1v_2, \dots, v_nv_1$.



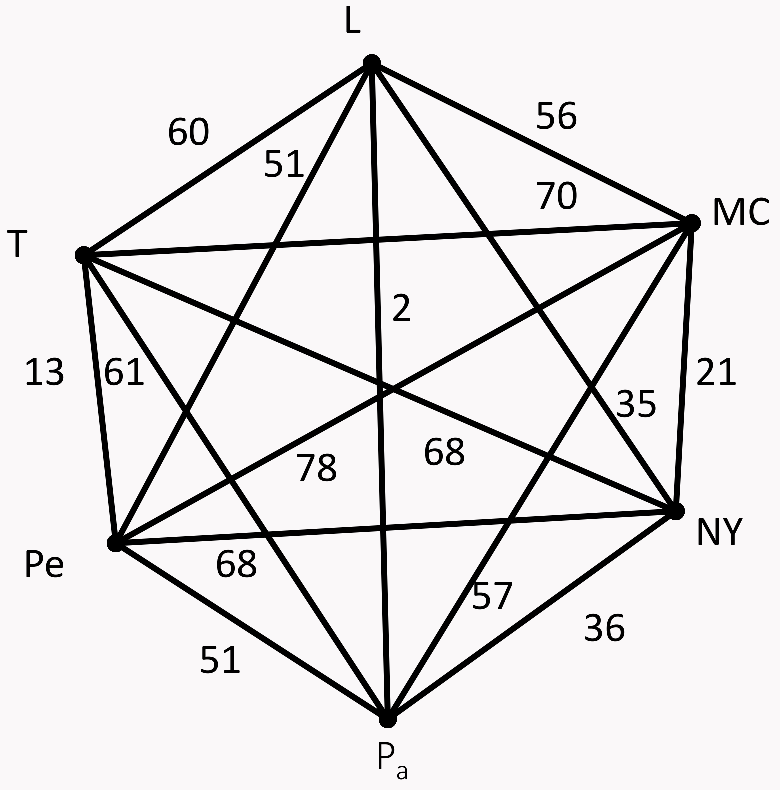
初始H圈C

(2)如果存在下图中蓝色边，

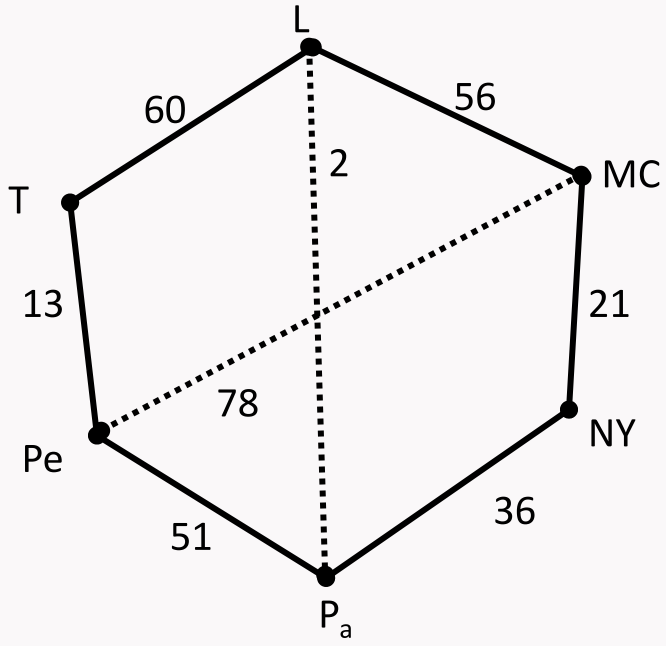
且 $w(v_iv_{i+1}) + w(v_jv_{j+1}) \geq w(v_iv_j) + w(v_{i+1}v_{j+1})$，则把 C 修改为： $C_1 = v_1v_2, \dots, v_iv_j, \dots v_{i+1}v_{j+1}, \dots, v_nv_1$.



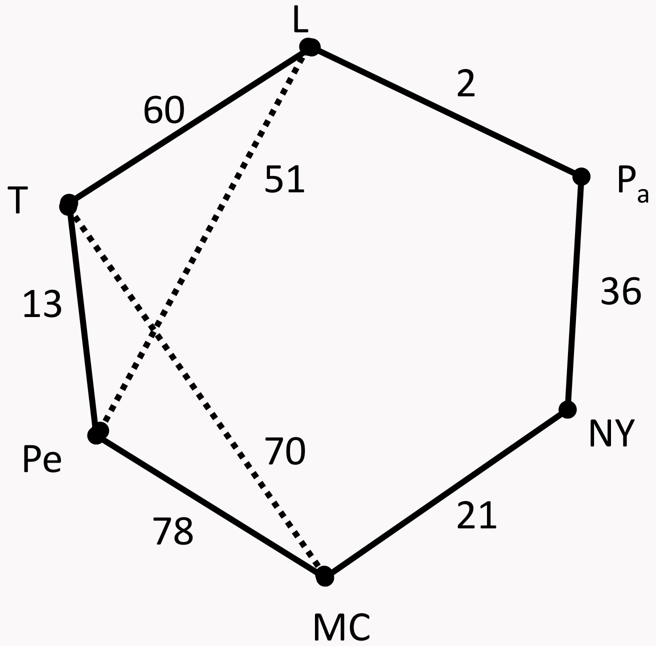
例5 采用边交换技术求下赋权完全图的一个最优H圈。



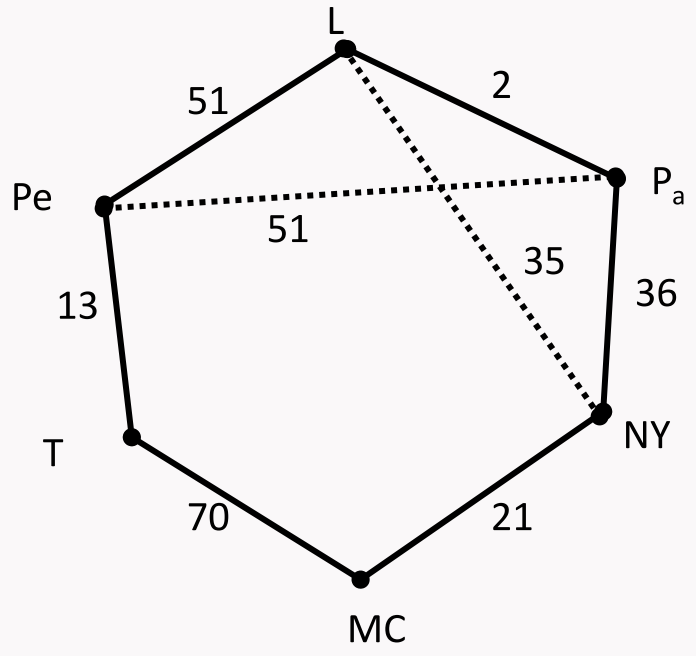
解：取初始圈为：


L
60
56
2
T
MC
13
21
78
Pe
NY
51
36
Pa

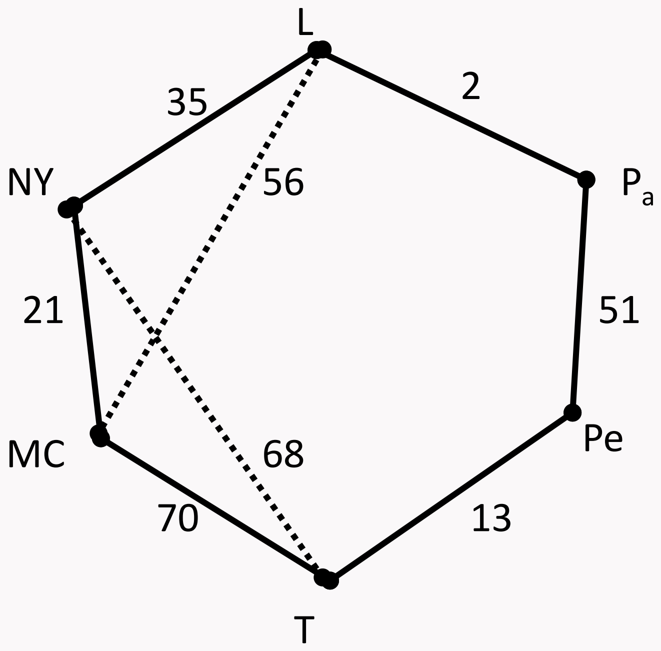
⇒


L
60
2
51
T
Pa
13
36
70
Pe
NY
78
21
MC

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$



于是，求出一个近似最优解为：$W(H) = 192.$

注：为了得到进一步的优解，可以从几个不同的初始圈开始，通过边交换技术得到几个近似最优解，然后从中选取一个近似解。

2、最优H圈的下界

可以通过如下方法求出最优H圈的一个下界：

（1）在G中删掉一点v(任意的)得图G_1;

（2）在图G_1中求出一棵最小生成树T;

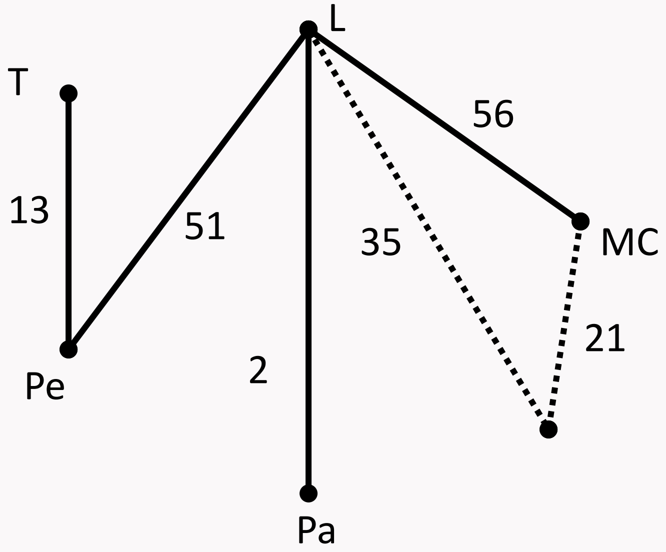
（3）在v的关联边中选出两条权值最小者e_1与e_2.

若H是G的最优圈，则：

$$W(H) \geq W(T) + W(e_1) + W(e_2).$$

例如，估计例5中最优H圈的下界

解：在G中删掉点NY, 求得$G-\mathrm{NY}$的一棵最优生成树为：



所以，$W(H) \geq 122+35+21=178.$

Thank You !