



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》 2024

潘嵘

计算机学院



本次课主要内容

图的宽直径简介

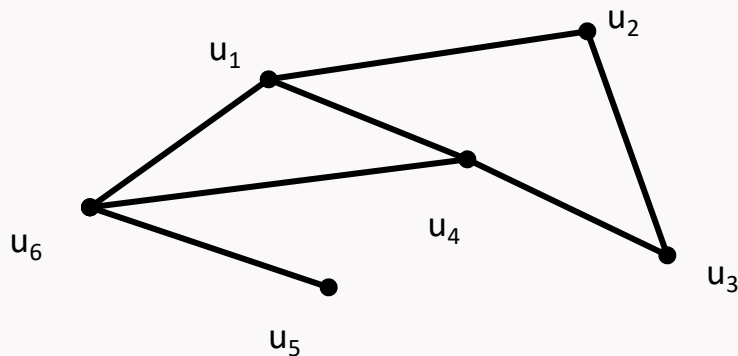
- (一)、敏格尔定理
- (二)、图的宽直径相关概念
- (三)、一些主要研究成果简介

(一)、敏格尔定理

敏格尔定理是图的连通性问题的核心定理之一，它描述了图的连通度与连通图中不同点对间的不相交路的数目之间的关系。

定义1 设 u 与 v 是图 G 的两个不同顶点， S 表示 G 的一个顶点子集或边子集，如果 u 与 v 不在 $G - S$ 的同一分支上，称 S 分离 u 和 v .

例如：



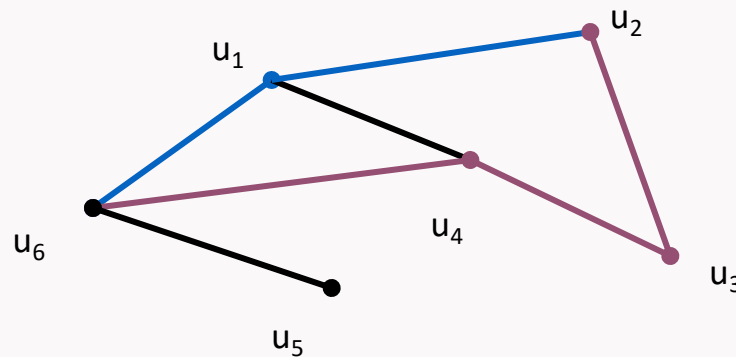
$\{u_1, u_4\}, \{u_1u_2, u_1u_4, u_4u_6\}$ 分离点 u_2 与 u_6 .

仅有起始点为
公点

定理1 (敏格尔1902---1985, Menger) (1) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点, 则 G 中分离点 x 与 y 的最少点数等于独立的 (x, y) 路的最大数目;

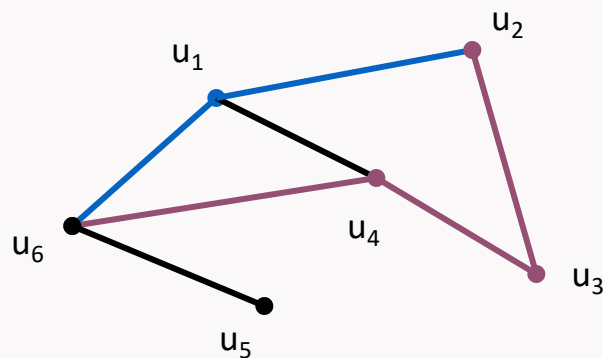
(2) 设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点, 则 G 中分离点 x 与 y 的最少边数等于 G 中边不重的 (x, y) 路的最大数目。

例如:




在该图中, 独立的 (u_6, u_2) 路最大条数是2, 分离点 u_6 与 u_2 的最小分离集是 $\{u_1, u_4\}$, 包含两个顶点。

又在该图中，边不重的 (u_6, u_2) 路最大条数是2，分离点 u_6 与 u_2 的最小分离集是 $\{u_6u_1, u_6u_4\}$ ，包含两条边。



该定理是图论中，也是通信理论中的最著名的定理之一，是由奥地利杰出数学家Menger在1927年发表的。


敏格尔(1902---1985)早年显示出数学物理天赋，1920年入维也纳大学学习物理，次年，由于参加德国物理学家Hans Hahn的“曲线概念的新意”讲座，把兴趣转向了数学。因为Hans提到当时没有满意的曲线概念定义，包括大数学家康托、约当，豪斯道夫等都尝试过，没有成功。



而且，认为不可能彻底解决。但是，尽管作为几乎没有数学背景的本科生，通过自己的努力，敏格尔还是解决了该问题。由此，他就转向曲线和维数理论的研究。敏格尔本科期间，身体很差，父母双亡。但在1924年在Hahn指导下完成了他的研究工作。1927年做了维也纳大学几何学首席教授，同年，发表了“ n -弧定理”，即敏格尔定理。

1930年，敏格尔来到匈牙利布达佩斯做访问，当时哥尼正在写一本书，要囊括图论中的所有知名定理。敏格尔向他推荐自己的定理，但哥尼最初不相信他，认为敏格尔定理一定不对，花了一个晚上找反例试图否定敏格尔定理，但没有成功，于是要了敏格尔的证明，终于把敏格尔定理加在了他的著作的最后一节。

敏格尔被认为是20世纪最杰出数学家之一。



哈恩（1879～1968）德国物理学家，化学家。最大的贡献是1938年和F. 斯特拉斯曼一起发现核裂变现象。哈恩获得1944年诺贝尔化学奖。

借助于敏格尔定理，数学家惠特尼在1932年的博士论文中给出了 k 连通图的一个美妙刻画。这就是人们熟知的所谓“惠特尼定理”

定理2（惠特尼1932）一个非平凡的图 G 是 k 连通($k \geq 2$)的，当且仅当 G 的任意两个顶点间至少存在 k 条内点不交的 (u, v) 路。

证明：（必要性）设 G 是 k 连通($k \geq 2$)的， u 与 v 是 G 的两个顶点。如果 u 与 v 不相邻， U 为 G 的最小 $u - v$ 分离集，那么有 $|U| \geq \kappa(G) \geq k$ ，于是由敏格尔定理，结论成立；



若 u 与 v 邻接, 其中 $e = uv$, 那么, 容易证明: $G - e$ 是 $(k - 1)$ 连通的。

设 W 是 $G - e$ 的最小 $u-v$ 分离集, 由敏格尔定理知, $G - e$ 至少包含 $k - 1$ 条内点不交的 $u-v$ 路, 即 G 至少包含 k 条内点不交的 $u-v$ 路。

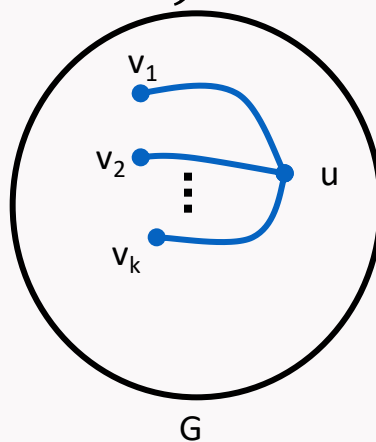
(充分性) 假设 G 中任意两个顶点间至少存在 k 条内部不交路。设 U 是 G 的最小顶点割, 即 $|U| = \kappa(G)$ 。令 x 与 y 是 $G - U$ 的处于不同分支的两个点。所以 U 是 x 与 y 的分离集, 由敏格尔定理: $|U| \geq k$, 即证明 G 是 k 连通的。

例1 设 G 是 k 连通图, S 是由 G 中任意 k 个顶点构成的集合。若图 H 是由 G 通过添加一个新点 w 以及连接 w 到 S 中所有顶点得到的新图, 求证: H 是 k 连通的。

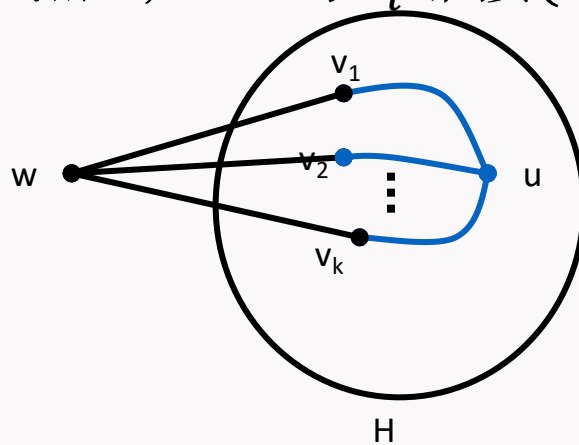
证明: 首先, 分离 G 中两个不相邻顶点至少要 k 个点, 其次, 分离 w 与 G 中不在 S 中顶点需要 k 个顶点。因此 H 是 k 连通的。




例2 设 G 是 k 连通图, u, v_1, v_2, \dots, v_k 为 G 中 $k + 1$ 个不同顶点。求证: G 中有 k 条内点不交路 (u, v_i) ($1 \leq i \leq k$)



证明: 在 G 外添加一点 w , 让 w 与 v_i 邻接($1 \leq i \leq k$)得 H .





由例1, H 是 k 连通的, 于是由定理2, u 与 w 间存在 k 条内点不交的 $u - w$ 路, 所以, G 中有 k 条内点不交路 (u, v_i) ($1 \leq i \leq k$).

对于边连通度, 有类似定理:

定理3 (惠特尼1932) 一个非平凡的图 G 是 k ($k \geq 2$)边连通的, 当且仅当 G 的任意两个顶点间至少存在 k 条边不重的 (u, v) 路。

推论 对于一个阶至少为3的无环图 G , 下面三个命题等价。

- (1) G 是2连通的;
- (2) G 中任意两点位于同一个圈上;
- (3) G 无孤立点, 且任意两条边在同一个圈上。

证明：(1) \rightarrow (2)

G 是2连通的, 则 G 的任意两个顶点间存在两条内点不交路 P_1 与 P_2 , 显然这两条路构成包含该两个顶点的圈。

(2) \rightarrow (3)

G 无孤立点显然。设 e_1 与 e_2 是 G 的任意两条边, 在 e_1 与 e_2 上分别添加两点 u 与 v 得图 H , 则 H 是2连通的, 由(1) \rightarrow (2), H 的任意两个顶点在同一个圈上, 即 u 与 v 在同一个圈上, 也即 e_1 与 e_2 在同一个圈上。

(3) \rightarrow (1)

设 u 与 v 是无环图 G 的任意两个不相邻顶点, 由于 G 无孤立点, 所以可设 e_1, e_2 分别与 u, v 相关联。由(3), e_1, e_2 在同一个圈上, 所以 u 与 v 在同一个圈上, 因此分离 u 与 v 至少要去掉两个顶点, 即证明 G 是2连通的。



(二)、图的宽直径相关概念

1、问题背景

分析评价互联网络的性能有多个指标，如网络的开销(通信与材料开销)，网络的容错性(连通性)，网络中信息传递的传输延迟等。

所谓传输延迟，又称为时间延迟，是指信息从源传到目的地所需要的时间。

如何度量网络的传输延迟？

信息从源到目的地需要经过若干中间站存储和转发。因此，信息传输延迟可以用图的顶点间距离来度量。当然，每条边的长度可以定义为1.



于是, 网络的最大通信延迟可以通过图的直径来度量. 图的直径定义为

$$d(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}.$$

例如: $d(P_n) = n - 1$; $d(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$; $d(K_n) = 1$.

在信息的单路径传输中, 分析通信延迟, 只需要考虑网络的直径即可。图论工作者、计算机、通信领域研究者通过研究, 已经确定了若干典型网络的直径和一些图的直径的界。

定理1 设 G 是强连通有向图. 如果它的阶 $n \geq 2$ 且最大度为 Δ , 则:

$$d(G) \begin{cases} = n - 1, & \text{若 } \Delta = 1 \\ \geq \lceil \log_{\Delta}(n(\Delta - 1) + 1) \rceil - 1, & \text{若 } \Delta \geq 2 \end{cases}$$

定理2 设 G 是连通无向图. 如果它的阶 $n \geq 3$ 且最大度为 $\Delta \geq 2$, 则:


$$d(G) \geq \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor, & \text{若 } \Delta = 2 \\ \left\lceil \log_{(\Delta-1)} \frac{n(\Delta-2)+2}{\Delta} \right\rceil, & \text{若 } \Delta \geq 3 \end{cases}.$$

定理3 设 G 是连通无向图. 如果它的阶 n , 且最小度为 δ , 则:

$$d(G) \leq \frac{3n}{\delta+1}.$$

定理4 设 G 是连通无向图. 如果它的阶 n , 直径为 k , 则:

$$|E(G)| \leq k + \frac{1}{2}(n-k+4)(n-k+1).$$



定理5 n 级超立方体网络的直径为 n .

直径虽然能够刻画网络的通信延迟，但毕竟是在最坏情形下的通信延迟，而网络中大距离点对并不多，所以用直径对信息传输延迟进行描述，还有点不精细。于是，有如下平均距离的概念：

设 G 是 n 阶图($n \geq 2$), G 的平均距离 $\mu(G)$ 定义为：

$$\mu(G) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{u,v \in V(G)} d(u, v).$$

例：计算 n 点圈 C_n 的平均距离。

解：首先计算 n 点圈 C_n 中任意一点 u 到其余各点的距离之和： $1 + 2 +$

$$\cdots + (n - 1) = \frac{1}{2}n(n - 1);$$



n 点圈 C_n 中所有点对的距离之和: $\frac{1}{2}n^2(n-1)$;

所以, n 点圈 C_n 的平均距离为: $\mu(G) = \frac{1}{2}n$.

平均距离是网络信息平均传输延迟的度量。跟直径研究一样, 平均距离问题也吸引很多学者的研究, 有很多研究结果。例如:

定理6 如果 G 是 n 阶连通的无向图, 则:

$$\mu(G) \leq \frac{n}{\delta + 1} + 2.$$

定理7 如果 G 是 (n, m) 图, 则:


(1) 如果 G 是无向图, 则:

$$\sigma(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) \geq 2n(n-1) - 2m;$$

(2) 如果 G 是有向图, 则:

$$\sigma(G) = \sum_{u,v \in V(G)} d(u,v) \geq 2n(n-1) - m.$$


求平均距离的一个值得研究的方向是求平均距离算法复杂性。求平均距离的最著名的Fredman算法时间复杂性是 $O(v^2 + vm)$;求直径最著名算法是Floyd算法, 时间复杂性是 $O(vm)$. 确定平均距离问题是否比确定所有距离容易? 这还是一个没有完结的挑战性问题。



信息的单路径传输延迟用直径或平均距离刻画。但是，如果要一次传输的信息量较大，远远超出链路带宽，就需要所谓的分包传送。

所谓的分包传送，就是按照带宽要求，把信息在起点进行分割打包，每个信息小包按照若干内点不交路从起点传到终点。基于此，上世纪90年代初，D. Frank等图论学者和一些计算机专家从图论角度对信息分包传送的若干问题展开研究。研究的典型问题是：

- (1) 分包传送的通信延迟度量；
- (2) 分包传送的路由选择，即网络中平行寻径算法；
- (3) 互联网络的设计与网络结构分析问题；
- (4) 基于分包传送下互联网络的容错分析。

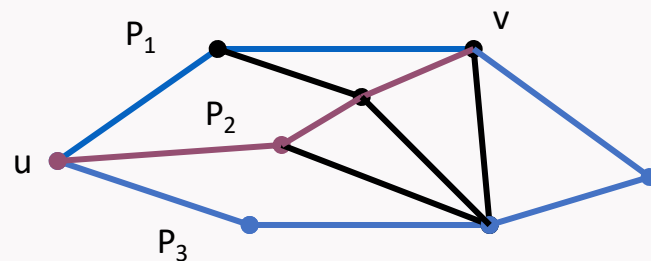


为了描述通信延迟，D. Frank等拓展了图的普通距离和普通直径的概念，提出了用宽距离来描述点对间信息传递的通信延迟，而用所谓的宽直径来描述网络的最大通信延迟。由此而形成的组合网络理论研究成为最近10多年来图论和通信网络相结合的热点研究问题。

国内，中国科技大学以徐俊明为代表的研究团队取得了很多重要成果，在该领域处于世界领先水平，出版了专著《组合网络理论》，科学出版社，2007年。

2、宽直径相关概念

定义1 设 $x, y \in V(G)$, $C_w(x, y)$ 表示 G 中 w 条内点不交路的路族， w 称为路族的宽度， $C_w(x, y)$ 中最长路的路长成为该路族的长度，记为： $l(C_w(x, y))$.



图G

在上图中， G 的一个宽度为3的 u, v 间的路族为：

$$C_3(u, v) = \{P_1, P_2, P_3\}.$$

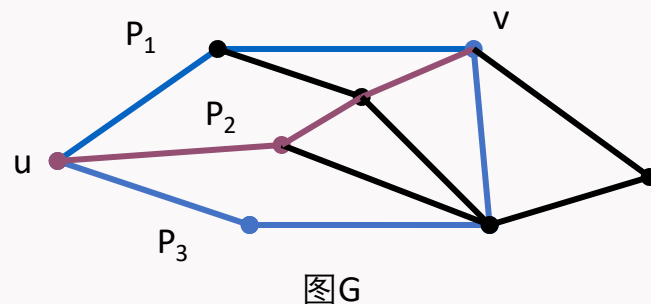
该路族的长度为：

$$l(C_3(u, v)) = l(P_3) = 4.$$

注：路族也称为容器。

定义2 设 $x, y \in V(G)$, 定义 x 与 y 间所有宽度为 w 的路族长度的最小值 $d_w(x, y)$ 为 x 与 y 间 w 宽距离，即：

$$d_w(x, y) = \min\{l(C_w(u, v)) : \forall C_w(u, v)\}.$$



在上图中， G 的一个宽度为3的 u, v 间的距离为：

$$d_3(u, v) = \min\{l(C_3(u, v)) : \forall C_3(u, v)\} = 3.$$

注： x 与 y 间长度等于 w 宽距离的路族称为 x 与 y 间最优路族。所以，求 w 宽距离，就是要找到最优路族。

定义3 设 G 是 w 连通的， G 的所有点对间的 w 宽距离的最大值，称为 G 的 w 宽直径，记为 $d_w(G)$. 即：

$$d_w(G) = \max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}.$$



例3 求 n 点圈 C_n 和 n 阶完全图 K_n 的宽直径。


分析：对于 C_n 来说，连通度为2，因此，可以求它的1直径和2直径；而对于 K_n 来说，连通度是 $n - 1$ ，所以，可以考虑它的1到 $n - 1$ 直径。

解：(1) n 点圈 C_n 的宽直径。

显然： $d_1(C_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

因为 C_n 中任意点对间只有一个唯一的宽度为2的路族，点对间的2距离就是该点对的唯一路族的长度。当 x 与 y 邻接时，路族的长度最长，为 $n - 1$ ，所以，由宽直径定义得：

$$d_2(C_n) = n - 1.$$



(2) K_n 的宽直径。

显然： $d_1(K_n) = 1$.

对于任意的 w ($2 \leq w \leq n - 1$), 点对间的最优路族长为2. 所以, 有:

$$d_w(K_n) = 2 \quad (2 \leq w \leq n - 1).$$

注：从定义看出：对一般图来说，计算 w 宽直径是一件很困难的工作。对宽直径的研究，主要是两方面：一是对一般图而言，研究 w 宽直径的界；二是根据各种互联网络的结构特征，确定其宽直径。当然，研究宽直径与图的其它不变量之间的关系也是一个很有意义的方向。

(三)、一些主要研究结果简介*

经过10多年的研究，组合网络理论取得了很多有意义结果，同时也有许多公开性问题等待人们继续研究。

1、一般图的 w 宽直径

定理1 对于任意连通图 G , 有:

$$d(G) = d_1(G) \leq d_2(G) \leq \cdots \leq d_w(G).$$

定理2 设 G 是 n 阶 w 连通图, $w \geq 2$. 则:

$$2 \leq d_w(G) \leq n - w + 1.$$

而且，上界和下界都能达到。

定理3 设 G 是 n 阶 w 连通图, $w \geq 2$, G 满足如下条件:

$$d_G(x) + d_G(y) \geq n + w - 1, \forall x, y \in V(G).$$

那么, $d_w(G) = 2$, 并且上面条件是紧的。

定理4 设 G 是 w 连通 w 正则图, $w \geq 2$, 那么:

$$d_w(G) \geq d(G) + 1.$$

定理5 设 G 是 n 阶 w 连通 w 正则无向图, $w \geq 3$, 那么:

$$d_w(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2}n \right\rfloor.$$

2、图运算与 w 宽直径

定理1 设 G_i 是 w_i 连通有向图, 且: $r_{w_i}(G_i) \leq d(G_i), 1 \leq i \leq m$. 如果
 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, 那么:

$$d_w(G) \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^m d(G_j) + 1; \sum_{j \neq i}^m d(G_j) + d_{w_i}(G_i); 1 \leq i \leq m \right\}.$$

注: 该结果是由徐俊明得到的。

定理2 (1) 设 G_i 是阶至少为3的 w_i 连通无向图, $1 \leq i \leq m$. 如果 $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_m$, 且 $w = w_1 + w_2 + \cdots + w_m$, 则:

$$d_w(G) \leq \max \left\{ \sum_{j \neq i}^m d(G_j) + d_{w_i}(G_i); 1 \leq i \leq m \right\};$$

(2) 设 G 是 $w \geq 2$ 连通无向图. 如果 $d_w(G) = d(G) + 1$, 则:

$$d_{1+w}(K_2 \times G) \leq d(G) + 2;$$

(3) 设 G_i 是 $w_i \geq 1$ 连通无向图, $i = 1, 2$. 如果 G_i 是 w_i 正则的, 且 $i = 1$ 或 2 , 则:

$$d_{w_1+w_2}(G_1 \times G_2) \leq d(G_i) + 2.$$

注: 该结果是由徐俊明得到的。

3、图参数与 w 宽直径

图论中, 对图参数进行研究时, 一个自然的研究是考察研究的参数与其它参数之间的关系。因为很多图参数的计算是NP完全问题, 如果建立了参数之间的联系, 可以间接计算。

定理1 设 G 是 w 连通无向图, $w \geq 2$, 且 $\alpha(G)$ 是 G 的独立数。则:


$$d_w(G) \leq 2\alpha(G).$$

4、 w 宽直径与容错直径

容错直径的概念是由Krishnamoorthy等在1987年提出的, 它是度量容错网络的最大通信延迟的量。即一个网络 G , 如果 F 是它的一个容错顶点集合, 则 $G - F$ 是连通的, 它有一个确定直径, 容错直径就是基于这样的背景提出的。

定义1 设 G 是 w 连通无向图, 则对 $V(G)$ 的任意子集 F , 如果有 $|F| < w$, 定义 G 的 $w - 1$ 容错直径 $D_w(G)$ 为:

$$D_w(G) = \max\{d(G - F) | \forall F \subset V(G), |F| < w\}.$$



从容错直径的定义可以看出，计算图的容错直径跟宽直径一样，非常困难，事实上，是NP完全问题。因此，对容错直径的研究，自然转移到对容错直径和宽直径之间的关系进行研究。

定理1 设 G 是 w 连通无向图， $w \geq 2$, 则有： $D_w(G) \leq d_w(G)$.

定理2 设 G 是直径为 d 的2连通图，则：

$$d_2(G) \leq \max \left\{ (d-1) \left(D_2 - \frac{1}{2}d - 1 \right) + 1, D_2 + 1 \right\}.$$




定理3 设 G 是2连通无向图，则有：

$$d_2(G) \leq \begin{cases} D_2 + 1, & \text{若 } d = 2 \\ (d - 1)(D_2 - 1), & \text{若 } d \geq 3 \end{cases}$$

定理4 设 G 是直径为2的2连通图，则： $d_2 = D_2 + 1$ 的充分必要条件为
 $d_2 = 3$ 或 $d_2 = 4$ ，且达到 d_2 值的任何两点必然邻接。

注：关于容错直径和宽直径的关系研究文章不是很多，主要是徐俊明发表的文章。



Thank You !