本次课程提纲：欧拉图

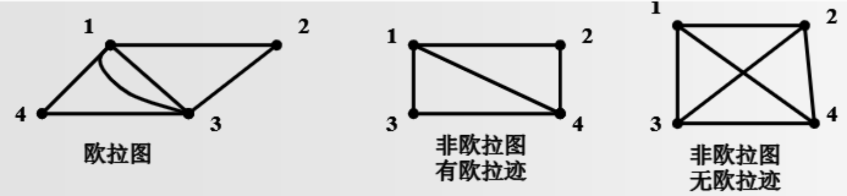
- 欧拉图
- Fleury 算法
- Hierholzer 算法
- 中国邮路问题

欧拉图

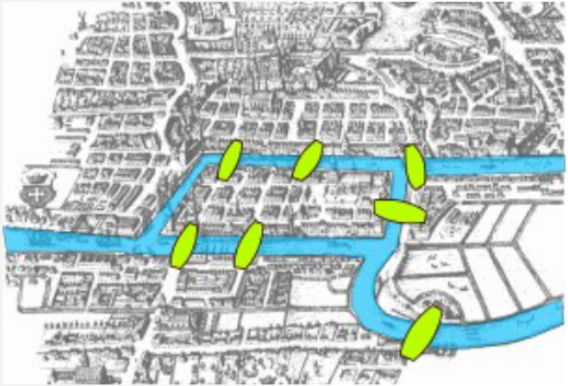
- 从某点出发，能否经过图的每条边一次且仅一次，回到出发点?
- 一笔画：笔不离纸, 一笔画成

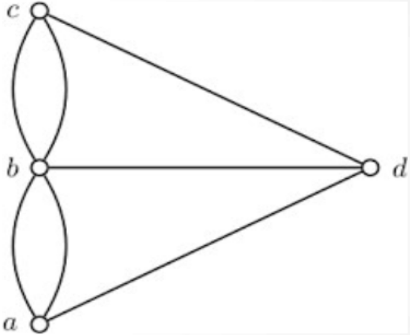
欧拉图

- 从某点出发，能否经过图的每条边一次且仅一次，回到出发点？
- 一笔画：笔不离纸, 一笔画成
- 对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图
- 欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路



欧拉图





欧拉图的性质

定理

下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的

- G 是欧拉图
- G 的顶点度数为偶数
- G 的边集合能划分为圈

证明

(1)->(2)

- 设 C 是欧拉图 G 的任一欧拉环游，v 是 G 中任意顶点
- v 在环游中每出现一次，意味在 G 中有两条不同边与 v 关联
- 所以，在 G 中与 v 关联的边数为偶数，即 v 的度数为偶数

欧拉图的性质

证明

(2)->(3)

- G 的顶点度数为偶数，故 G 中至少存在圈 C_1，从 G 中去掉 C_1 中边，得到的生成子图 G_1，若 G_1 没有边，则 (3) 成立
- 否则，G_1 的每个分支是度数为偶数的连通图，于是又可以抽取一个圈
- 反复这样抽取，$E(G)$ 最终划分为若干圈

(3)->(1)

- 设 C_1 是 G 的边划分中的一个圈。若 G 仅由此圈组成，显然是欧拉图
- 否则，由于 G 连通，所以，必然存在圈 C_2 和 C_1 有公共顶点
- $C_1 \cup C_2$ 是一条含有 C_1 与 C_2 的边的欧拉闭迹
- 如此拼接下去，得到包含 G 的所有边的一条欧拉闭迹

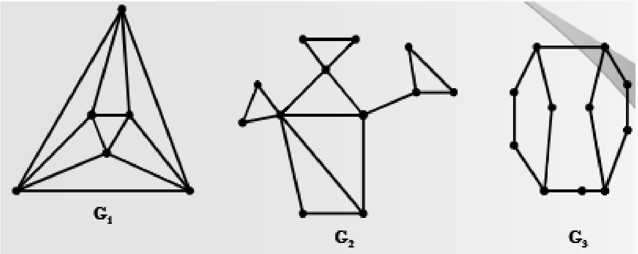
欧拉图的性质

推论

连通图是欧拉图当且仅当顶点度数为偶

推论

连通非欧拉图存在欧拉迹当且仅当只有两个顶点度数为奇数



G_1 是欧拉图；G_2 是非欧拉图，但存在欧拉迹；G_3 不存在欧拉迹

欧拉图的性质

习题

若 G 和 H 是欧拉图，则 $G \times H$ 是欧拉图

证明

首先证明对任意 $u \in V(G), v \in V(H)$： $d(u) + d(v) = d(u,v)$

- 设 z 是 u 的任意邻点， 一定有 (u,v) 的一个邻点 (z,v)， 反之亦然
- 同理， 对于 v 的任意邻点 w， 一定有 (u,v) 的一个邻点 (u,w), 反之亦然
- 即： (u,v) 在积图中邻点个数等于 u 在 G 中邻点个数与 v 在 H 中邻点个数之和
- G, H 是欧拉图， 故 $G \times H$ 顶点度数为偶数

欧拉图的性质

证明

其次证明：$G \times H$ 是连通的

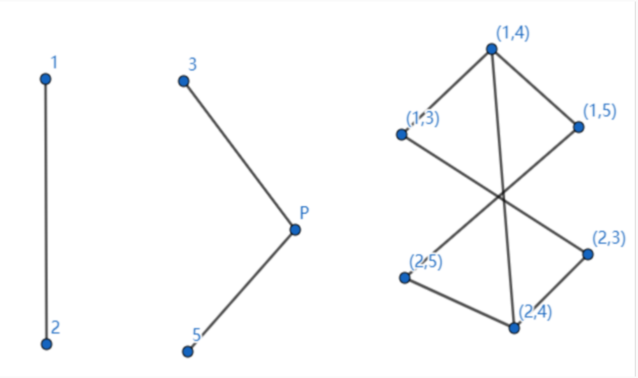
- 对任意 $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G \times H)$
- 由于 G, H 都是欧拉图，所以都连通
- 设最短的 $u_1 - u_2$，$v_1 - v_2$ 路分别为：$u_1 x_1 \cdots x_k u_2$，$v_1 y_1 \cdots y_m v_2$
- 由积图的定义：在积图中有路

$$(u_1, v_1)(x_1, v_1) \cdots (x_k, v_1)(u_2, v_1)(u_2, y_1) \cdots (u_2, y_m)(u_2, v_2)$$

- 故 $G \times H$ 连通，且个顶点度数为偶数，它是欧拉图

图的积运算

- 设 $G_1 = (V_1, E_1)$ 和 $G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个图
- 对点集 $V = V_1 \times V_2$ 中任意两点 $u = (u_1, u_2)$ 与 $v = (v_1, v_2)$
- 当 $(u_1 = v_1$ 且 u_2 与 v_2 相邻$)$ 或 $(u_2 = v_2$ 且 u_1 和 v_1 相邻$)$ 时，把 u 与 v 相连
- 如此得到的图称为 G_1 与 G_2 的积图, 记为：$G_1 \times G_2$



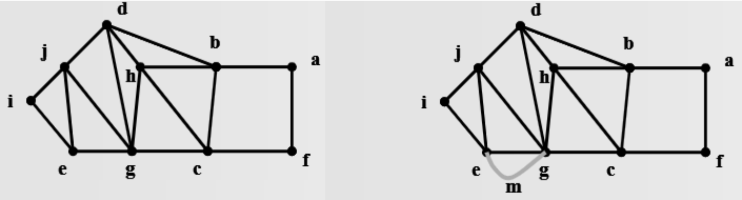
Fleury 算法

- 在欧拉图中求出一条具体欧拉环游
- 任意选择一个顶点 v_0，置 $w_0 = v_0$
- 假设迹 $w_i = v_0 e_1 v_1 \cdots e_i v_i$ 已经选定，按下述方法从 $E - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取边 e_{i+1}
    - e_{i+1} 与 v_i 相关联
    - 除非没有别的边可选择，否则 e_{i+1} 不能是 $G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 的割边
- 当以上操作不能执行时，算法停止
- 复杂度 $O(m^2)$

Fleury 算法

习题

请找出从 e 进入，经过每条边恰好一次，最后从 g 处离开的路线



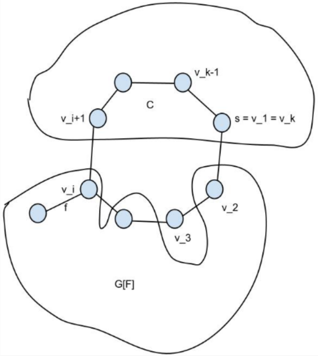
解答

- 图中只有两个奇度顶点 e, g，因此存在 e 到 f 的欧拉迹。
- 在 e, g 间添加一条平行边 m
- 用 Fleury 算法求出欧拉环游为：$emgcfabchbdhgdjiejge$
- 解为：$egjeijdghdbhcbafcg$

Fleury 算法正确性证明

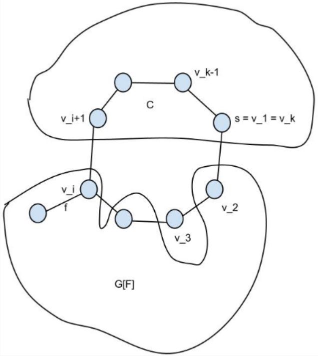
记 C 为算法的输出

- C 是边不重的圈，起点和终点都是 v_0
- 假设 C 不是 Euler 环游，记 $F \triangleq E(G) - E(C)$，考察 $G(F)$
- $v_0 \notin G(F)$，否则算法不会终止



Fleury 算法正确性证明

- 设 v_i 是 C 中最后一个在 $G(F)$ 中的顶点
- v_i 必然和 $G(F)$ 中的一条边相邻，记为 f，否则 $v_i \notin G(F)$
- 由于 $v_{i+1}, \cdots, v_n \notin G(F)$，$v_i v_{i+1}$ 在算法执行时为割边
- f 是 $G(F)$ 的割边，但是 $G(F)$ 是 Euler 图（节点度数为偶数），矛盾



习题

证明：若 G 有 $2k$ 个奇数顶点，则存在 k 条边不重的迹 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$，使得 $E(G) = E(Q_1) \cup \cdots \cup E(Q_k)$

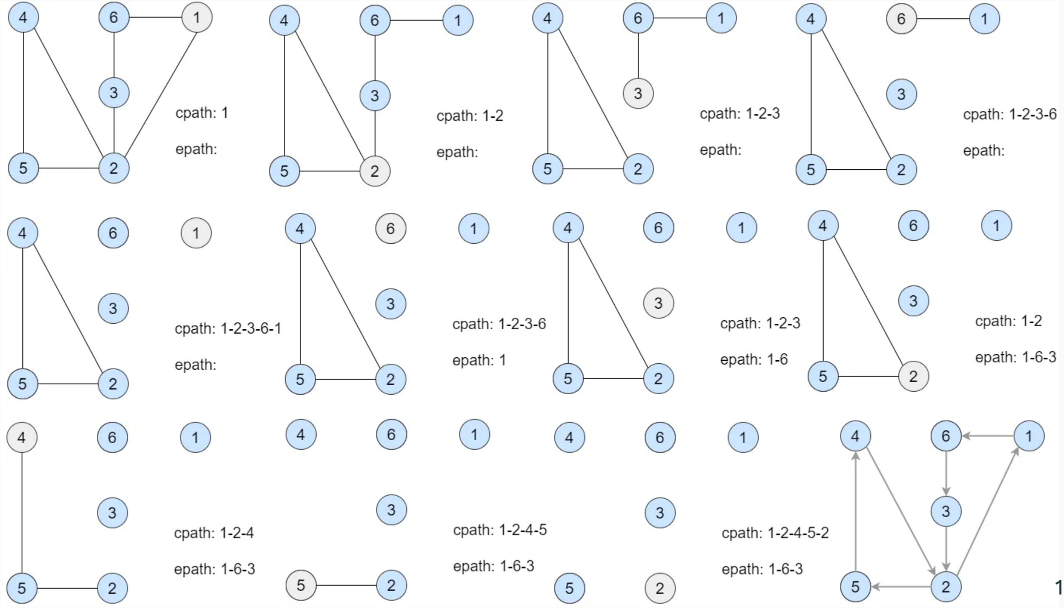
证明

- 考察 $G = (n, m)$ 是连通图的情况。令 $v_l, v_2, \cdots, v_k, v_{k+1}, \cdots, v_{2k}$ 是的所有奇度点
- 在 v_i 与 v_{i+k} 间连新边 e_i 得图 G^*，$1 \leq i \leq k$，G^* 是欧拉图
- 由 Fleury 算法得欧拉环游 C，在 C 中删去 e_i，得 k 条边不重的迹 Q_i：$E(G) = E(Q_1) \cup \cdots \cup E(Q_k)$

Hierholzer 算法

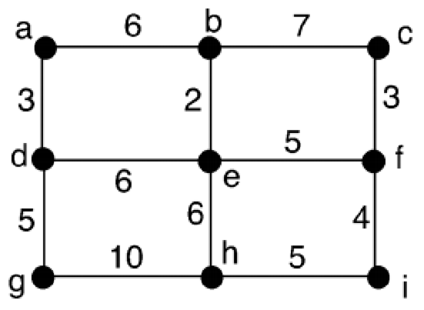
- 深度优先搜索，不断找圈，最后合并成 Euler 环游
- 数据结构：cpath，记录当前圈，epath，记录总体路径
- while cpath is not empty
  - u = cpath.TOP
  - If all edges of u are visited
    - pop u from cpath
    - push it to epath
  - Else
    - select any random edge (u, x)
    - push x to cpath and delete (u, x)
- 复杂度 $O(m)$

Hierholzer 算法



中国邮路问题

- 邮递员从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，其环游路程最短?
- 1962 年，中国数学家管梅谷提出
- 如果邮路图本身是欧拉图，用 Fleury 算法
- 如果是非欧拉图，如何重复行走街道才能使行走总路程最短?



中国邮路问题

定理

若 W 是包含图 G 每条边至少一次的闭途径，W 具有最小权值当且仅当：

- G 的每条边在 W 中最多重复一次
- 对 G 的每个圈，在 W 中重复的边的总权值不超过非重复边总权值

必要性证明

- 若 $e = uv$ 经过 $m \geq 3$ 次，删去 2 次，不改变 $d(u), d(v)$ 在 $G(W)$ 中奇偶性
- $G(W)$ 仍是 Euler 图，但是 Euler 回路变短了，性质 1 成立
- 设 C 是 G 中任意一个圈，如果 C 中重复边的总权值超过非重复边总权值，把平行边改为非平行边，而把非平行边改为平行边
- 得到的图仍然是包含 G 的欧拉图，但对应的欧拉环游长度减小了
- 对每个圈都作以上修改，得到的图仍然为包含 G 的欧拉图，满足条件 2

中国邮路问题

习题

图 G 只有两个奇度顶点 u, v，设计一个求其最优邮递员路径的算法

算法

- 在 u, v 间求出一条最短路 P^*
- 在 P^* 上，给每条边添加一条平行边得 G 的欧拉母图 G^*
- 在 G^* 中运行 Fleury 算法

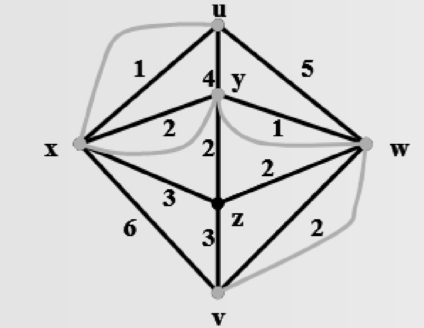
最优性定理

用上面方法求出的是最优最优邮递员路径

中国邮路问题

证明

- 对任意邮递员路径 E^*，考虑 $G(E^* - E)$, 显然它只有两个奇数顶点 u,v
- 它们在 $G(E^* - E)$ 的同一个连通分支中, 因此，存在 (u,v) 路 P
- 所以，$\sum_{e \in E^* - E} w(e) \geq w(P) \geq w(P^*)$，有 $\sum_{e \in E^*} w(e) \geq \sum_{e \in E} w(e) + w(P^*)$
- 故求出的欧拉环游是最优欧拉迹



课后练习与思考题

- 证明 Hierholzer 算法的正确性