




中山大學  
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

# 《图论及其应用》 2024

潘嵘

计算机学院



# 第二章 树

## 本章主要内容

- 一、树的概念与性质
- 二、生成树
- 三、最小生成树



# 本次课主要内容

(一)、树的概念与应用

(二)、树的性质

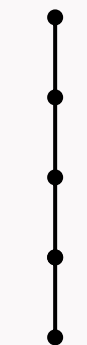
(三)、树的中心与形心

# (一)、树的概念与应用

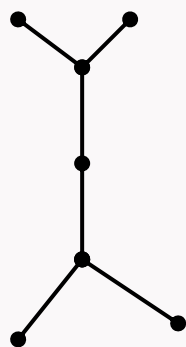
## 1、树的概念

定义1 不含圈的图称为无圈图，树是连通的无圈图。

例如：下面的图均是树



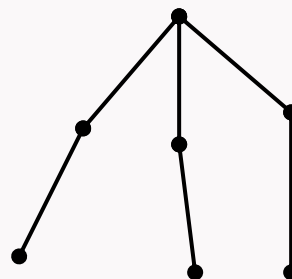
树 $T_1$



树 $T_2$



树 $T_3$



树 $T_4$

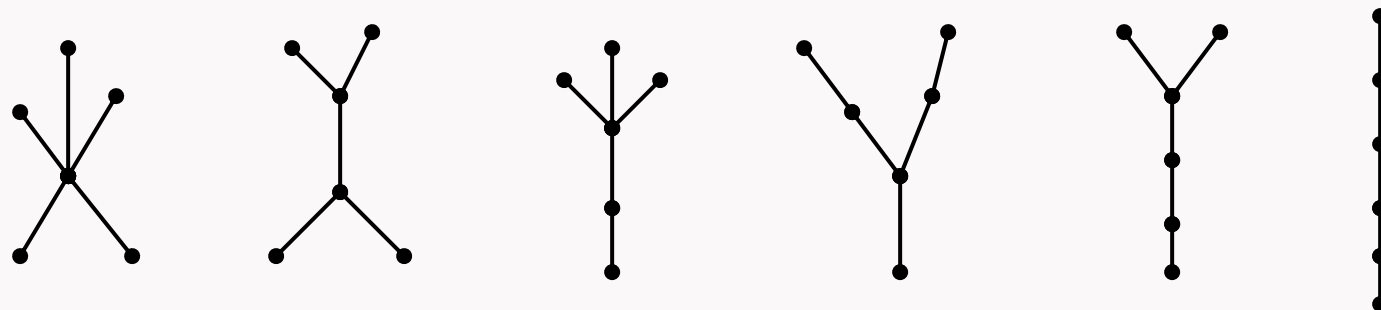
定义2 称无圈图 $G$ 为森林。

注：(1) 树与森林都是简单图；

(2) 树与森林都是偶图。

例1 画出所有不同构的6阶树。

解：按树中存在的最长路进行枚举。6阶树中能够存在的最长路最小值为2，最大值为5。

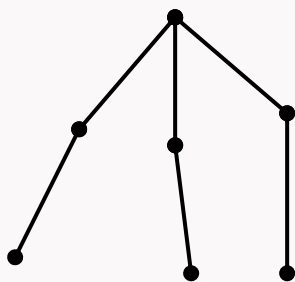


## 2、树的应用

树是图论中应用最为广泛的一类图。在理论上，由于树的简单结构，常常是图论理论研究的“试验田”。在实际问题中，许多实际问题的图论模型就是树。

### 例2 族谱图与树

要把一个家族的繁衍情况简洁直观表达出来，用点表示家族中成员，成员 $x$ 是成员 $y$ 的儿女，把点 $x$ 画在点 $y$ 的下方，并连线。如此得到的图，是一颗树，称为根树。示意如下：

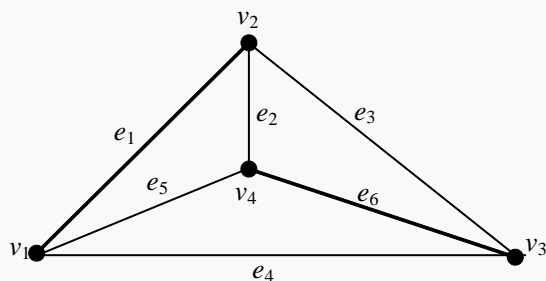


根树

实际上，根树是许多问题的模型，如社会结构，计算机数据结构，数学中的公式结构，分类枚举表示等。

### 例3 道路的铺设与树

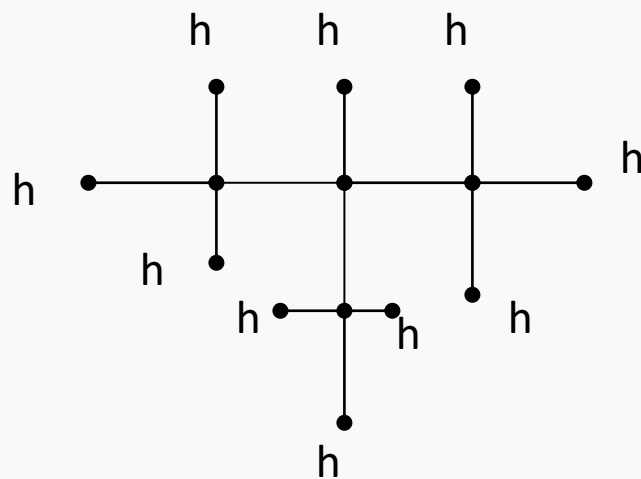
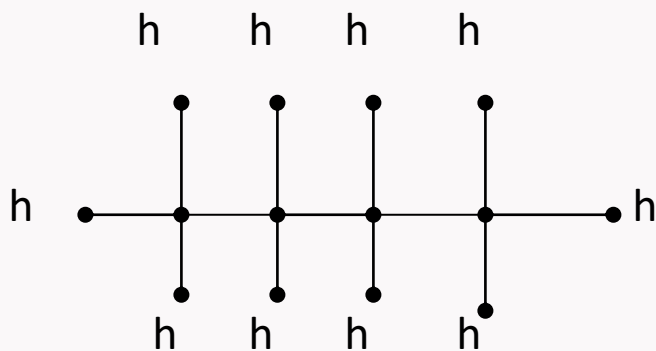
假设要在某地建造4个工厂，拟修筑道路连接这4处。经勘探，其道路可按下图的无向边铺设。现在每条边的长度已经测出并标记在图的对应边上，如果我们要求铺设的道路总长度最短，这样既能节省费用，又能缩短工期，如何铺设？




该问题归结于在图中求所谓的最小生成树问题。或称为赋权图中的最小连接问题。

#### 例4 化学中的分子结构与树

例如： $C_4H_{10}$ 的两种同分异构结构图模型为：








### 例5 电网络中独立回路与图的生成树

早在19世纪，图论还没有引起人们关注的时候，物理学家克希荷夫就已经注意到电路中的独立回路与该电路中的所谓生成树的关系。即：如果电路是 $(n, m)$ 图，则独立回路的个数为 $m - n + 1$ . 并且，生成树添上生成树外的 $G$ 的一条边，就可以得到一独立回路。

### 例6 通信网络中的组播树

在单播模型中，数据包通过网络沿着单一路径从源主机向目标主机传递，但在组播模型中，组播源向某一组地址传递数据包，而这一地址却代表一个主机组。为了向所有接收者传递数据，一般采用组播分布树描述IP组播在网络里经过的路径。组播分布树有四种基本类型：泛洪法、有源树、有核树和Steiner树。



总之，树在图论研究和图论应用上都是十分典型的特殊图。

## (二)、树的性质

**定理1** 每棵非平凡树至少有两片树叶。

证明 设  $P = v_1v_2 \dots v_k$  是非平凡树  $T$  中一条最长路，则  $v_1$  与  $v_k$  在  $T$  中的邻接点只能有一个，否则，要么推出  $P$  不是最长路，要么推出  $T$  中存在圈，这都是矛盾！即说明  $v_1$  与  $v_k$  是树叶。

**定理2** 图  $G$  是树当且仅当  $G$  中任意两点都被唯一的路连接。

证明：“必要性”

若不然，设  $P_1$  与  $P_2$  是连接  $u$  与  $v$  的两条不同的路。



则由这两条路的全部或部分将构成一个圈，这与 $G$ 是树相矛盾。

“充分性”

首先，因 $G$ 的任意两点均由唯一路相连，所以 $G$ 是连通的。

其次，若 $G$ 中存在圈，则在圈中任取点 $u$ 与 $v$ ，可得到连接 $u$ 与 $v$ 的两条不同的路，与条件矛盾。

**定理3** 设 $T$ 是 $(n, m)$ 树，则：

$$m = n - 1.$$

证明：对 $n$ 作数学归纳。



当 $n = 1$ 时，等式显然成立；

设 $n = k$ 时等式成立。考虑 $n = k + 1$ 的树 $T$ 。

由定理1， $T$ 中至少有两片树叶，设 $u$ 是 $T$ 中树叶，考虑 $T_1 = T - u$ ，则 $T_1$ 为 $k$ 阶树，于是 $m(T_1) = k - 1$ ，得 $m(T) = k$ 。

这就证明了定理3。

例7 设 $T$ 为12条边的树，其顶点度为1, 2, 5。如果 $T$ 恰有3个度为2的顶点，那么 $T$ 有多少片树叶？

解：设 $T$ 有 $x$ 片树叶。

由 $m = n - 1$ 得 $n = 13$ 。于是由握手定理得：

$$1 \times x + 2 \times 3 + 5 \times (10 - x) = 2 \times 12.$$

得 $x = 8$ .

例8 设 $T$ 为 $(n, m)$ 树,  $T$ 中有 $n_i$ 个度为 $i$ 的点( $1 \leq i \leq k$ ),且有:  $\sum n_i = n$ .

证明:  $n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k - 2)n_k$ .

证明: 由 $m = n - 1$ 得:

$$m = (n_1 + n_2 + \cdots + n_k) - 1.$$

又由握手定理得:

$$2m = n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k.$$

由上面两等式得:

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k - 2)n_k.$$

推论1 具有 $k$ 个分支的森林有 $n - k$ 条边。

证明：设森林 $G$ 的 $k$ 个分支为 $T_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). 对每个分支，使用定理3得：

$$m(T_i) = n_i - 1, (n_i = |V(T_i)|).$$

所以：

$$m(G) = \sum_{i=1}^k m(T_i) = n - k.$$

定理4 每个 $n$ 阶连通图的边数至少为 $n - 1$ .

证明：如果 $n$ 阶连通图没有一度顶点，那么由握手定理有：

$$m(G) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq n.$$



如果 $G$ 有一度顶点。对顶点数作数学归纳。

当 $n = 1$ 时，结论显然

设当 $n = k$ 时，结论成立。

当 $n = k + 1$ 时，设 $u$ 是 $G$ 的一度顶点，则 $G - u$ 为具有 $k$ 个顶点的连通图。

若 $G - u$ 有一度顶点，则由归纳假设，其边数至少 $k - 1$ ，于是 $G$ 的边数至少有 $k$ 条；

若 $G - u$ 没有一度顶点，则由握手定理：

$$m(G - u) = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G-u)} d(v) \geq k.$$

所以， $G$ 至少有 $k + 1$ 条边。



而当 $G$ 是树时，边数恰为 $n - 1$ .

所以 $n$ 阶连通图 $G$ 至少有 $n - 1$ 条边。

所以，树也被称为最小连通图。

**定理5** 任意树 $T$ 的两个不邻接顶点之间添加一条边后，可以得到唯一圈。


证明：设 $u$ 与 $v$ 是树 $T$ 的任意两个不邻接顶点，由定理2知：有唯一路 $P$ 连接 $u$ 与 $v$ . 于是 $P \cup \{uv\}$ 是一圈。

显然，由 $P$ 的唯一性也就决定了 $P \cup \{uv\}$ 的唯一性。

**例9** 设 $G$ 是树且 $\Delta \geq k$ , 则 $G$ 至少有 $k$ 个一度顶点。

证明：若不然，设 $G$ 有 $n$ 个顶点，至多 $k - 1$ 个一度顶点，由于 $\Delta \geq k$ ，于是，由握手定理得：




$$2m(G) = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq k - 1 + k + 2(n - k) = 2n - 1 > 2n - 2$$

所以，有：  $m(G) > n - 1$ , 与  $G$  是树矛盾！


例10 设  $G$  是森林且恰有  $2k$  个奇数顶点，则在  $G$  中有  $k$  条边不重合的路  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , 使得：

$$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \dots \cup E(P_k).$$

证明：对  $k$  作数学归纳。

当  $k = 1$  时，  $G$  只有两个奇数度顶点，此时，容易证明，  $G$  是一条路；

设当  $k = t$  时，结论成立。令  $k = t + 1$



在 $G$ 中一个分支中取两个一度顶点 $u$ 与 $v$ ，令 $P$ 是连接该两个顶点的唯一一路，则 $G - P$ 是有 $2t$ 个奇数顶点的森林，由归纳假设，它可以分解为 $t$ 条边不重合的路之并，所以 $G$ 可以分解为 $t + 1$ 条边不重合的路之并。

注：对图作某种形式的分解，是图论的一个研究对象，它在网络结构分析中具有重要作用。

例11 设 $T$ 是 $k$ 阶树。若图 $G$ 满足 $\delta \geq k - 1$ ，则 $T$ 同构于 $G$ 的某个子图。

证明：对 $k$ 作数学归纳。

当 $k = 1$ 时，结论显然。

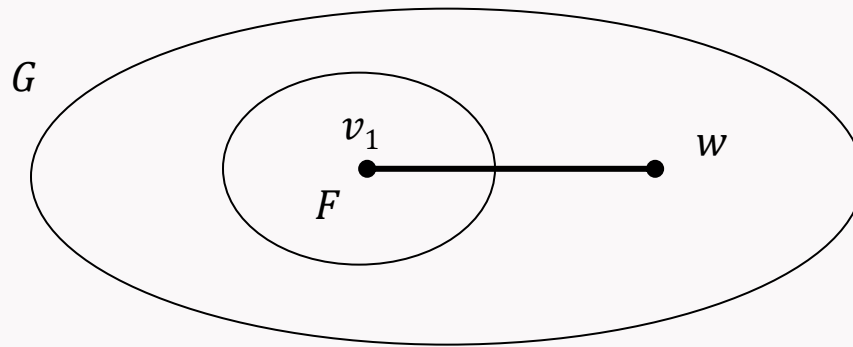
假设对 $k - 1$  ( $k \geq 3$ ) 的每颗树 $T_1$ ，以及最小度至少为 $k - 2$ 的每个图 $H$ ， $T_1$ 同构于 $H$ 的某个子图 $F$ 。现在设 $T$ 是 $k$ 阶树，且

$G$ 满足 $\delta(G) \geq k - 1$ 的图。我们证明 $T$ 同构于 $G$ 的某个子图。


设 $u$ 是 $T$ 的树叶， $v$ 是 $u$ 的邻接顶点。则 $T - u$ 是 $k - 1$ 阶树。

由于 $\delta(G) \geq k - 1 > k - 2$ , 由归纳假设,  $T - u$ 同构于 $G$ 的某个子图 $F$ .

设 $v_1$ 是与 $T$ 中 $v$ 相对应的 $F$ 中的点, 由于 $d_G(v_1) \geq k - 1$ , 所以 $v_1$ 在 $G$ 中一定有相异于 $F$ 中的邻点 $w$ , 作 $F \cup \{v_1 w\}$ , 则该子图和 $T$ 同构。



证明示意图



树的度序列问题:


在第一章中, 介绍了判定一个非增非负序列是否为简单图的度序列定理。下面介绍一个判定非增非负序列是否为树的度序列的简单方法。

**定理6** 设  $S = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$  是  $n$  个正整数序列, 它们满足:  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n, \sum d_i = 2(n-1)$ . 则存在一颗树  $T$ , 其度序列为  $S$ .

证明: 对  $n$  作数学归纳。

当  $n = 1$  和  $2$  时, 结论显然。

假设对  $n = k$  时结论成立。设  $n = k + 1$ ,



首先, 序列中至少一个数为1, 否则, 序列和大于 $2k$ , 与条件相矛盾!

所以,  $d_{k+1} = 1$ . 我们从序列中删掉 $d_1$ 和 $d_{k+1}$ , 增加数 $d^* = d_1 - 1$ 放在它应该在的位置。得到序列 $S_1$ . 该序列含 $k$ 个数, 序列和为 $2(k-1)$ , 由归纳假设, 存在树 $T_1$ , 它的度序列为 $S_1$ .

现在, 增加结点 $v$ , 把它和 $T_1$ 中点 $d^*$ 相连得到树 $T$ . 树 $T$ 为所求。

### (三)、树的中心与形心

#### 1、树的中心概念与性质



(1) 图的顶点的离心率

$$e(v) = \max\{d(u, v) | u \in V(G)\}.$$

(2) 图的半径


$$r(G) = \min\{e(v) | v \in V(G)\}.$$

(3) 图的直径：最大离心率。

(4) 图的中心点：离心率等于半径的点。

(5) 图的中心：中心点的集合。

定理7 每棵树的中心由一个点或两个相邻点组成。



对树 $T$ 的阶数 $n$ 作归纳证明。

当 $n = 1$ 或 $2$ 时，结论显然成立。

设对 $n < k$  ( $k \geq 3$ )的树结论成立。设 $T$ 是 $k$ 阶树。

容易知道：删掉 $T$ 的所有叶，得到的树 $T_1$ 的每个点的离心率比它们在 $T$ 中离心率减少1。又因 $T$ 的叶不能是中心点，所以 $T$ 的中心点在 $T_1$ 中。这样，若点 $u$ 的离心率在 $T$ 中最小，则在 $T_1$ 中依然最小，即说明 $T$ 的中心点是 $T_1$ 的中心点，反之亦然。

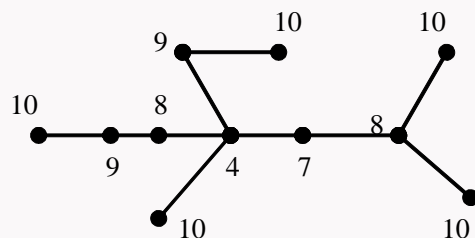
因为 $T_1$ 的阶数 $< k$ ，所以，由归纳假设， $T_1$ 的中心为一个点或两个相邻点组成，即证明 $T$ 的中心由一个点或两个相邻点组成。

确定图的中心有应用价值。

例如，确定社区医院的修建位置，就可以建模成求图的中心问题


## 2、树的形心概念与性质

设 $u$ 是树 $T$ 的任意一个顶点，树 $T$ 在顶点 $u$ 的分支是指包含 $u$ 作为一个叶点的极大子树，其分支数为顶点 $u$ 的度数；树 $T$ 在 $u$ 点的分支中边的最大数目称为点 $u$ 的权；树 $T$ 中权值最小的点称为它的一个形心点。全体形心点的集合称为树 $T$ 的形心。



定理8 每一棵树有一个由一个点或两个邻接的点组成的形心。





Thank You !