1. 硬币称重

a. 由题意得，每次称重都有3种情况：左边重、右边重、平衡，也就是说每一次称重获得的信息为3，因为一共有k次，故总信息量为3^k。而对于n个硬币，每个硬币都有两种可能，要么更重，要么更轻，再加上所有硬币都为真币的情况，可能出现的情况为$2n+1$，故

$3^k \geq 2n+1$，那么 $n \leq \frac{3^k-1}{2}$

2. 证明 $H(X_1, X_2, \cdots X_n) \leq H(X_1) + H(X_2) + \cdots + H(X_n)$

为了将结论推广至N维，我们先从二元变量来分析，即我们需要推导 $H(X,Y) \leq H(X) + H(Y)$，而由于 $H(X,Y) = H(Y) + H(X|Y)$，所以我们要证明 $H(X|Y) \leq H(X)$

由于 $H(X) + H(Y|X) = H(X,Y)$，那么 $H(X) = H(X,Y) - H(Y|X)$，由于条件熵 $H(Y|X) \geq 0$，故 $H(X) \geq H(X,Y) - H(Y) = H(X|Y)$

那么，根据链式法则 $H(X_1, X_2, \cdots X_n) = H(X_1) + H(X_2|X_1) + H(X_3|X_2X_1) + \cdots$

所以同理可得，我们便证明了

3.

由题可得随机变量X，Y的分布律

X	0	1
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

a. $H(X) = \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\log_2 3$，$H(Y) = \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2}$

b. $H(X|Y) = \frac{2}{3}$ $H(Y|X) = \frac{2}{3}$

c. $H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}$

d. $H(Y) - H(Y|X) = \frac{1}{3}\log_2 3 + \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2} - \frac{2}{3}$

e. $I(X;Y) = \frac{2}{3}\log_2\frac{3}{2} + \frac{1}{3}\log_2\frac{3}{4}$

4.

a. 由于 X 在 $\{1,2,\cdots,8\}$ 上均匀分布，故 $H(X) = 8 \times \frac{1}{8}\log_2 8 = 3$

b. 由于 Y 为 $P_Y(y) = 2^{-y}$，故由几何级数的性质我们可得 $H(Y) = 2$

c. $H(X+Y, X-Y) = H(X,Y) = H(X) + H(Y) = 3+2 = 5$