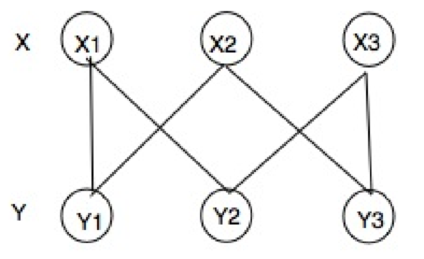
本次课程提纲：偶图的匹配

- 图的匹配
- Berge 定理
- 偶图的匹配与覆盖
- Tutte 定理

偶图回顾

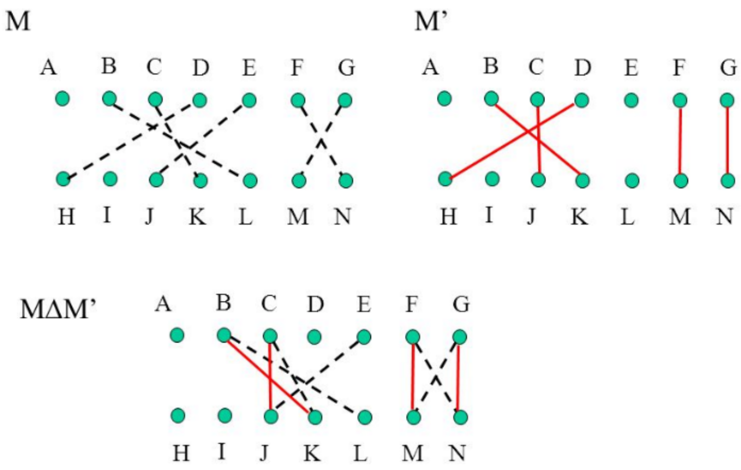
- 点集可分为两个非空子集 X 和 Y，每条边一端在 X 中，一端在 Y 中
- 偶图不能有环
- k 正则偶图：每个顶点度数均为 k



- k 正则偶图的两个顶点子集包含顶点个数相等
- 判定定理：G 是偶图当且仅当 G 不含奇圈

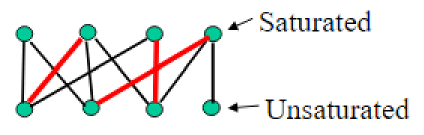
图的对称差（环和）运算

$$G_1 \Delta G_2 = G_1 \cup G_2 - G_1 \cap G_2$$



图的匹配

- M 是图 G 的边子集 (不含环)，若 M 中任意两条边没有共同顶点，则称 M 是 G 的一个匹配或对集或边独立集
- $v \in G$ 为 M 中某条边的端点，称它为 M 饱和点，否则为 M 非饱和点



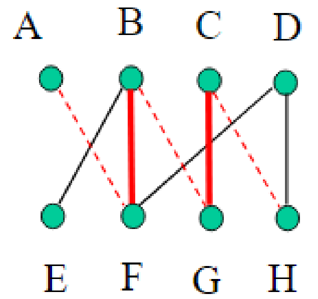
最大匹配

- 如果 M 是图 G 包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的最大匹配。
- 若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称完美匹配

- 一个图不一定存在完美匹配
- 一个图的完美匹配若存在，不一定唯一
- 一个图的最大匹配不一定唯一

交错路与可扩路

- M 是图 G 的匹配，G 中一条由 M 中的边和非 M 中的边交错形成的路，称为 M 交错路
- 若路的起点与终点是 M 非饱和点，称为 M 可扩路



Berge 定理

Berge 定理：最大匹配充要条件

G 的匹配 M 是最大匹配的充要条件是 G 不包含 M 可扩路

必要性证明

- 如包含可扩路 P，P 中 M 中的边比非 M 中的边少一条。
- 作新的匹配，由 P 中非 M 中边组成，比 M 多一条边

Berge 定理

充分性证明

- 若不然，设 M_1 是一个最大匹配，则 $|M_1| > |M|$
- 引理：$H = M_1 \Delta M$ 每个分支是由 M_1, M 中边交替组成的偶圈或路
  - M_1, M 是匹配，故每点在其中最多有一个邻边
  - H 中每点最多与两条边相邻，故是圈或路
  - 该圈或路的边交替属于 $M_1 - M$ 与 $M - M_1$
- 在每个偶圈中，M_1 与 M 中边数相等
- $|M_1| > |M|$，故至少有一条路，起点和终点都是 M 非饱和点
- 它是一条 M 可扩路

Berge 定理

- Berge 定理定理给我们提供了扩充 G 的匹配的思路
- Claude Berge (1926-2002)：法国著名数学家
- 他的《无限图理论及其应用》(1958) 是继哥尼之后的第二本图论专著
- Mathematician, combinatorist, sculptor, amateur anthropologist, world traveller, collector of Indonesian art, Oulipist, chess player and player of exotic game pieces, author of manuals, professor renowned for his 30-minute lectures, ...: such was Claude Berge.
- His residence at 10 rue Galvani in Paris' 17th arrondissement was like an unkept museum with his own sculpture competing for space with the many Chinese works of art that he so adored.

Claude Berge's work

Figure 1: 15 dwarfs; if the picture is cut according to the lines and if the two upper parts are switched, then the number of dwarfs is no longer 15!

偶图匹配存在性

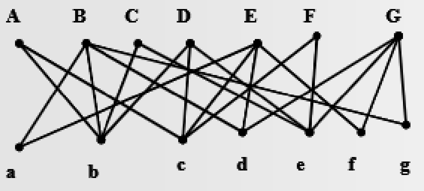
Hall 定理

设 $G=(X,Y)$ 是偶图，G 存在饱和 X 每个顶点的匹配的充要条件是：

$$\forall S \subseteq X, |N(S)| \geq |S|$$

习题

在下面偶图中，是否存在饱和 $X=\{A,B,C,D,E,F,G\}$ 的匹配



偶图匹配存在性

解答

- $|S| = 1$ 时，容易验证：$|N(S)| > |S|$
- $|S| = 2, 3$ 时，容易验证：$|N(S)| \geq |S|$
- $|S| = 4$ 时，取 $S = \{A, C, D, F\}$，有 $3 = |N(S)| < |S| = 4$
- 由 Hall 定理，不存在饱和 X 的匹配

Hall 定理证明：必要性

如果 G 有饱和 X 的匹配，由匹配的定义，X 的每个顶点在 Y 中至少有一个不同的邻接点

偶图匹配存在性

Hall 定理证明：充分性

如果 G 是满足条件的偶图，但不存在饱和 X 的匹配

- 令 M^* 是 G 的最大匹配，u 为 X 中不在 M 中的顶点
- 令 Z 是通过 M^* 与 u 相连形成的所有 M^* 交错路上的点集
- 因 M^* 是最大匹配，所以 u 是所有交错路上唯一的一个未饱和点
- 令 $S = X \cap Z, T = Z \cap Y$
- 显然，$S - \{u\}$ 中点与 T 中点在 M^* 下配对
- 故 $|T| = |S| - 1 < |S|$，即 $|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$，与条件矛盾

偶图匹配存在性

- 存在饱和 X 的匹配，也常说成存在 X 到 Y 的匹配
- Hall 定理也可表述为：对偶图 $G = (X, Y)$，如果存在 X 的子集 S，满足 $|N(S)| < |S|$，那么不存在 X 到 Y 的匹配
- Hall 定理也称为婚姻定理：r 个女人和 $s \geq r$ 个男人中，可能出现 r 对婚姻的充要条件是，任意 k 个女人共认识至少 k 个男人
- Hall 定理是偶图最大匹配算法匈牙利算法的理论基础

偶图匹配存在性

推论

k 正则偶图存在完美匹配

证明

- 由正则图定义，$|X| = |Y|$
- 对任意 $S \subseteq X$, 设 E_1, E_2 是与 S 与 $N(S)$ 关联的边集，显然有 $E_1 \subseteq E_2$，即 $|E_1| = k|S| \leq |E_2| = k|N(S)|$
- 由 Hall 定理，存在 X 到 Y 的匹配
- 因为 $|X| = |Y|$，故存在完美匹配

偶图匹配存在性

习题

证明每个 $k \geq 2$ 方体都有完美匹配

解答

- k 方体有 2^k 个顶点，每个顶点可以用 k 比特二进制码表示，两个顶点相邻当且仅当其二进制码只有一位不同
- 做如下图的划分：把坐标之和为偶数的顶点归入 X，否则归入 Y
- 显然，X, Y 中顶点互不邻接，所以 k 方体是偶图
- 因为 k 方体每个顶点度数为 k，故为 k 正则偶图
- 由推论，存在完美匹配

偶图匹配存在性

解答

- 证明二：直接在 k 方体中找出完美匹配
- 设 k 方体顶点二进制码为 $(x_1, \cdots, x_k)$，取 $(x_1, \cdots, x_{k-1}, 0)$ 和 $(x_1, \cdots, x_{k-1}, 1)$ 间的全体边所成之集，记为 M
- 显然，M 中的边均不相邻接，所以构成匹配
- 由 $|M| = 2^{k-1}$，所以是完美匹配

偶图匹配存在性

习题

求 K_{2n} 中完美匹配个数

解答：用归纳法

- K_{2n} 的任意一个顶点有 $2n-1$ 种不同的方法被匹配
- 所以 K_{2n} 的完美匹配个数等于 $(2n-1)$ 乘以 K_{2n-2} 的完美匹配个数
- 可以归纳出 K_{2n} 的完美匹配个数为 $(2n-1)(2n-3)\cdots 1$

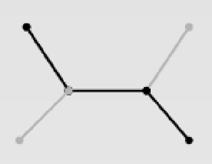
偶图匹配存在性

习题

证明树至多存在一个完美匹配

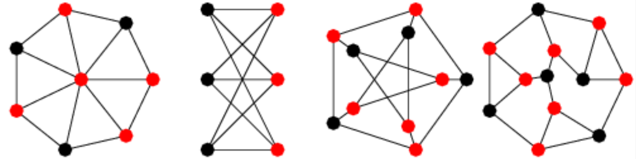
证明

- 若不然，设 M_1, M_2 是树 T 的两个不同的完美匹配，那么 $M_1 \Delta M_2 \neq \emptyset$
- 容易知道，$M_1 \Delta M_2$ 每个非空部分顶点度数为 2，即存在圈
- 于是推出 T 中有圈，与 T 是树矛盾



图的点覆盖

- 对图 G 的顶点子集 K，如果 G 的每条边都至少有一个点在 K 中，称 K 为 G 的一个点覆盖
- 顶点数最少的 K 称为最小点覆盖，$|K|$ 称为 G 的覆盖数



图的点覆盖

最大匹配与最小覆盖

设 M 是 G 的匹配，K 是 G 的覆盖，若 $|M| = |K|$，则 M 是最大匹配，G 是最小覆盖

证明

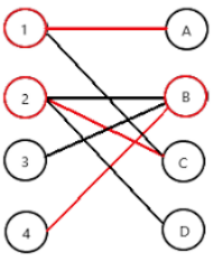
设 M^* 与 K^* 分别是 G 的最大匹配和最小覆盖

- 由匹配和覆盖定义有：$|M^*| \leq |K^*|$
- $|M| \leq |M^*| \leq |K^*| \leq |K|$
- $|M| = |K|$ 时，$|M| = |M^*| = |K^*| = |K|$

偶图的点覆盖与偶图匹配间的关系

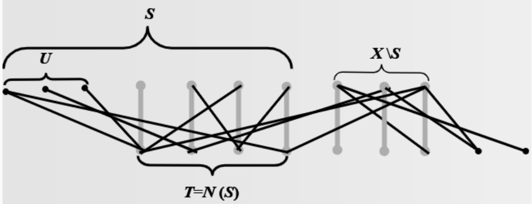
Konig 定理

偶图中最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数



Konig 定理证明

- 设 $G = (X, Y)$，M^* 是 G 的最大匹配
- U 表示 X 中 M^* 非饱和点集，Z 表示由 M^* 交错路连到 U 的顶点的所有路上的点的集合，令 $S = Z \cap X, T = Z \cap Y$
- 由 M^* 的最大性，T 中点是 M^* 饱和的，且 $N(S) = T$
- 令 $K^* = (X - S) \cup T$，下面证明：$K^* = (X - S) \cup T$ 是 G 的覆盖
  - 若不然，存在 G 的一条边，一个端点在 S 中，另一个在 $Y - T$ 中，这与 $N(S) = T$ 矛盾
- 显然 $|K^*| = |M^*|$，故 K^* 是最小覆盖



Konig 定理应用

习题

矩阵的行或列称为线。证明：布尔矩阵中，包含了所有 1 的线的最少数目，等于任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目，如 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

证明

- 把矩阵建模为偶图：每行每列用一个点表示，X 表示行点集合，Y 表示列点集合，当某元素为 1，对应两点连线
- 包含了所有 1 的线的最少数目对应图的最小点覆盖数
- 任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目对应图的最大匹配的边数
- 由 Konig 定理，结论成立

Tutte 定理

Tutte 定理，1947

图 G 有完美匹配的充要条件为：对 V 的任意非空真子集 S，$G-S$ 的奇分支个数 $o(G-S) \leq |S|$

习题

证明一棵树 G 有完美匹配的充要条件是：$\forall v \in V(G) : o(G-v) = 1$

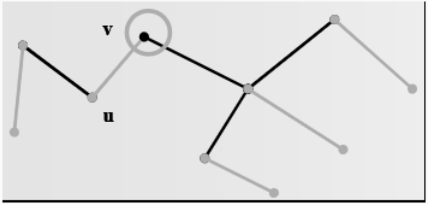
必要性证明

- 由 Tutte 定理：$o(G-v) \leq 1$
- 显然 G 为偶阶树，故 $o(G-v) \geq 1$

Tutte 定理

充分性证明

- 考察 $\forall v \in G$，设 G 中由 v 连到 $G-v$ 的奇分支的边为 vu
- 显然，由 u 连到 $G-u$ 的奇分支的边也是 uv
- 考察由任意 v 连到 $G-v$ 的奇分支的边集 M，M 是 G 的完美匹配



Tutte: the humble math prof who cracked top NAZI code

2001 – Officer in the Order of Canada

Tutte was made an Officer in the Order of Canada in 2001, shortly before he died in 2002.

1941 – Bletchley Block F

Enigma and Lorenz

> "We should never forget how lucky we were to have men like Professor Tutte in our darkest hour and the extent to which their work not only helped protect Britain itself but [saved] countless lives."
>
> — **DAVID CAMERON,** BRITISH PRIME MINISTER, IN A 2012 LETTER TO TUTTE'S REMAINING FAMILY IN NEWMARKET, ENGLAND