1. $H(X)=-\sum p(1-p)^{m-1}\log p(1-p)^{m-1}=-\sum p(1-p)^{m-1}[\log p+(m-1)\overset{\log(1-p)}{\cancel{\log(p-1)}}]$

$$=-[\underbrace{p\log p\sum(1-p)^{m-1}}_{①}+\underbrace{p\log(\overset{1-p}{\cancel{p-1}})\sum(1-p)^{m-1}(m-1)}_{②}]$$

对①式,我们由等比数列求和可得 ①式为 $\log p$

对②式,我们利用等比数列的求导可得 ②式为 $\dfrac{\log(\overset{1-p}{\cancel{p-1}})}{p}$

故综上 $H(X)=-[\log p+\frac{1}{p}\log(\overset{1-p}{\cancel{p-1}})]$

① 先求和再求导(等比数列,

② $p\log(1-p)\sum(1-p)^{m-1}(m-1)=\log(1-p)\sum(1-p)^{m-1}(m-1)p$

2、随机变量 X 的熵H(X)可能趋于无穷,当随机变量的取值趋于无限,或在某个值上的概率非常大时,其熵是可以趋于无穷的。(例:对于正态分布而言,$H(X)=\frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$ 如果σ↑,那么熵↑;如果$\alpha\to\infty$,那么H(X)也趋向无穷大)

3. $H(f(X))\leqslant H(X)$

① 如果f函数为可逆的话,那么我们能将 f(X) 还原成X,这样并没有信息量的损失 因此,$H(f(X))=H(X)$

② 如果f函数为不可逆的话,那么意味着该函数会合并一部分X映射到f(X),这样通过f(X)无法还原出X,那么便导致了信息的损失,故 $H(f(X))\leqslant H(X)$

随机装箱

由于$E(X)=\frac{1}{p}$,但是我们得求出E(X-1))

1. $\frac{1}{2^{nR}}\times\frac{1}{2^{nR}}=\frac{1}{2^{2nR}}$

2、由于0号球肯定会放在一个箱子内,那么1号球放在0号球箱子的概率为 $\frac{1}{2^{nR}}$

故最终结果为 $1\times\frac{1}{2^{nR}}=\frac{1}{2^{nR}}$

而对于几何分布$P(m)=p(1-p)^{m-1}$

其均值为 $\sum_{m=1}^{\infty}mp(1-p)^{m-1}$,所以上述变为 $\log(1-p)\underline{E(m-1)}$

求几何分布的均值