1 图的基本概念

1.1 图的基本定义

3 个顶点的非同构的所有简单图有 4 个，4 个顶点的非同构的所有简单图有 11 个.

Theorem 1. *若 n 阶图 G 是自补的 (即 $G \cong \overline{G}$)，则*

$$n = 0, 1(\mathrm{mod} 4).$$

例：存在 18 阶自补图（错误，因为 18 除以 4 的余数是 2）

k 正则图: 每个点的度均为 k 的简单图

(1) 在任何图中，奇点个数为偶数.

(2) 正则图的阶数和度数不同时为奇数.

Theorem 2 (握手定理)**.** *对任意的有 m 条边的图 $G = (V, E)$，有*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m.$$

Definition 1. 一个图 G 的各个点的度 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的**度序列**.

Theorem 3. *非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是图的**度序列**的充分必要条件是：$\sum d_i$ 为偶数.*

Definition 2. 对于一个非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，若存在一个简单图 G，以它为度序列，则称这个数组是可图的. 可图的序列简称为可图序列或**图序列**.

Example 1. 试判断非负整数组

$$I = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$$

是否可图?

Solution. 7 阶图，最大度为 5，而且度数之和为偶数，根据定理可得下列非负整数组

$$\begin{aligned}
\Pi_1 = (&\quad 4, 2, 2, 1, 1, 2) \\
\Pi_1 = (&\quad 4, 2, 2, 2, 1, 1) \\
\Pi_2 = (&\qquad 1, 1, 1, 0, 1)
\end{aligned}$$

显然 Π_2 是可图序列，因此 $\Pi = (5, 5, 3, 3, 2, 2, 2)$ 是可图的.

Theorem 4 (以前考过证明)**.** *一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同.*

Solution. 因为图 G 为简单图，所以 $\Delta(G) \leq n - 1$.

- 情形 1：若 G 没有孤立点，则

$$1 \leq d(v) \leq n - 1, \forall v \in V(G)$$

因为顶点个数为 n，所以必有两个顶点度数相同.

- 情形 2：若 G 仅有一个孤立点，设 G_1 表示 G 去掉孤立点后的部分，则

$$1 \le d(v) \le n-2, \forall v \in V(G_1)$$

  同理，在 G_1 中必有两顶点度数相同.

- 情形 3：若 G 有两个以上的孤立点，则定理显然成立.

Definition 3. 设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 $d_1, d_2, \cdots, d_s$. 又设度为 d_i 的点有 b_i 个 ($\sum b_i = n$)，则称 $(b_1, b_2, \cdots, b_s)$ 为 G 的频序列.

Theorem 5 (以前考过证明). 一个 n 阶图 G 和它的补图有相同的频序列.

证明. 由补图的定义知，点 v 在图 G 及其补图中的度数之和为 $n-1$，即

$$d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) = n-1$$

因此，若 G 中有 b_i 个度为 d_i 的点，则这 b_i 个点在 G 的补图中的度变为 $n-1-d_i$.

故 G 与其补图有相同的频序列.

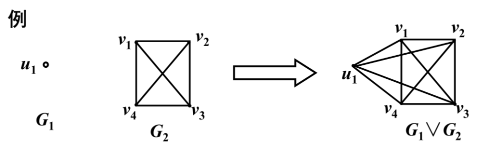
□

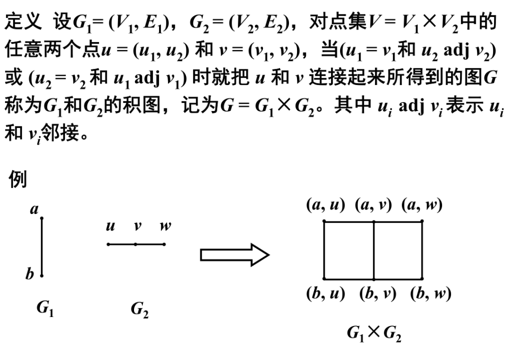
1.2 图的运算

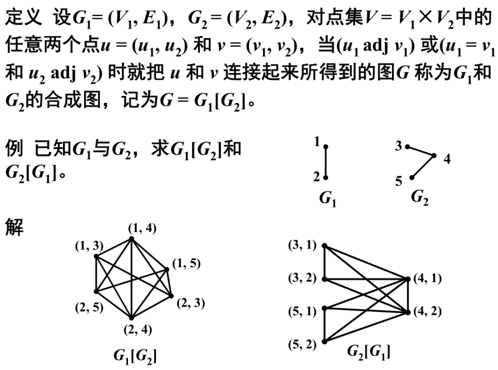
Theorem 6. 具有 m 条边的简单标号图的生成子图的个数为 2^m.

差图 $G_1 - G_2$ ：在 G_1 中去掉 G_2 中的**边**组成的图.
对称差 $G_1 \triangle G_2$：$G_1 \triangle G_2 = (G_1 - G_2) \cup (G_2 - G_1)$.

Definition 4. 在不相交的 G_1 和 G_2 的并图 $G_1 + G_2$ 中，把 G_1 的每个顶点和 G_2 的每个顶点连接起来所得到的图称为 G_1 和 G_2 的联图，记为 $G_1 \vee G_2$.




定义 设$G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$，对点集$V = V_1 \times V_2$中的任意两个点$u = (u_1, u_2)$ 和 $v = (v_1, v_2)$，当($u_1 = v_1$和 u_2 adj v_2) 或 ($u_2 = v_2$ 和 u_1 adj v_1) 时就把 u 和 v 连接起来所得到的图G称为G_1和G_2的积图，记为$G = G_1 \times G_2$。其中 u_i adj v_i 表示 u_i 和 v_i邻接。


定义 设$G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$，对点集$V = V_1 \times V_2$中的任意两个点$u = (u_1, u_2)$ 和 $v = (v_1, v_2)$，当(u_1 adj v_1) 或($u_1 = v_1$ 和 u_2 adj v_2) 时就把 u 和 v 连接起来所得到的图G 称为G_1和G_2的合成图，记为$G = G_1[G_2]$。

例 已知G_1与G_2，求$G_1[G_2]$和$G_2[G_1]$。

若 G_1 的点数和边数为 n_1, m_1，G_2 的点数和边数为 n_2, m_2，经过联、积、合成三种运算，图的点数和边数为 (考过填空题，不止一次，考联图、积图的点数和边数是多少)

超立方体 Q_n 是具有 2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边的 n 正则二部图.

运算	点数	边数
$G_1 \vee G_2$	n_1+n_2	$m_1+m_2+n_1n_2$
$G_1 \times G_2$	n_1n_2	$n_1m_2+n_2m_1$
$G_1[G_2]$	n_1n_2	$n_1m_2+n_2^2m_1$
$G_2[G_1]$	n_1n_2	$n_2m_1+n_1^2m_2$

1.3 路和连通性

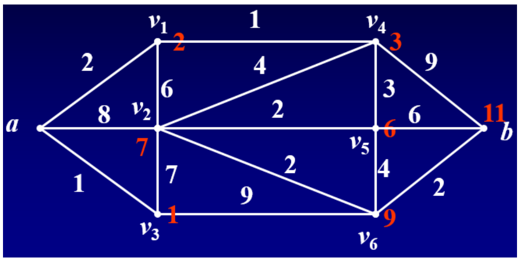
Theorem 7. 设图 G 为 n 阶图，若 G 中任意两个不相邻顶点 u 与 v 满足 $d(u)+d(v)\geq n-1$，则 G 是连通图.

Theorem 8 (偶图判定定理)**.** 一个图是偶图当且当它不包含奇圈.

1.4 最短路及其算法 (填空题)

Example 2. 如图所示，求点 a 到点 b 的最短距离. *(以前考过大题，2005 年)*

Solution. 红色表示依次选取的标号



1. $A_1=\{a\}$, $\quad t(a)=0$, $\quad T_1=\emptyset$
2. $b_1^{(1)}=v_3$
3. $m_1=1$, $\quad a_2=v_3$, $\quad t(v_3)=t(a)+l(av_3)=1(\text{最小}), T_2=\{av_3\}$
4. $m_2=1$, $\quad a_3=v_1$, $\quad t(v_1)=t(a)+l(av_1)=2(\text{最小}), T_3=\{av_3, av_1\}$
5. $A_3=\{a,v_3,v_1\}$, $\quad b_1^{(3)}=v_2, b_2^{(3)}=v_2$, $\quad b_3^{(3)}=v_4$
6. $m_3=3, a_4=v_4, t(v_4)=t(v_1)+l(v_1v_4)=3(\text{最小}), T_4=\{av_3,av_1,v_1v_4\}$
7. $A_4=\{a,v_3,v_1,v_4\}, b_1^{(4)}=v_2, b_2^{(4)}=v_2, b_3^{(4)}=v_2, b_4^{(4)}=v_5$
8. $m_4=4, a_5=v_5, t(v_5)=t(v_4)+l(v_4v_5)=6(\text{最小}), T_5=\{av_3,av_1,v_1v_4,v_4v_5\}$
9. $A_5=\{a,v_3,v_1,v_4,v_5\}, b_1(5)=v_2, b_2(5)=v_2, b_3(5)=v_2, b_4(5)=v_2, b_5(5)=v_2$
10. $m_5=4, a_6=v_2, t(v_2)=t(v_4)+l(v_4v_2)=7(\text{最小}), T_6=\{av_3,av_1,v_1v_4,v_4v_5,v_4v_2\}$
11. $A_6=\{a,v_3,v_1,v_4,v_5,v_2\}, b_2^{(6)}=v_6, b_4^{(6)}=b, b_5^{(6)}=v_6, b_6^{(6)}=v_6$
12. $m_6=6, a_7=v_6, t(v_6)=t(v_2)+l(v_2v_6)=9(\text{最小}), T_7=\{av_3,av_1,v_1v_4,v_4v_5,v_4v_2,v_2v_6\}$

13. $A_7=\{a,v_3,v_1,v_4,v_5,v_2,v_6\}, b_4(7)=b, b_5^{(7)}=b, b_7^{(7)}=b$

14. $m_7=7, a_8=b, t(b)=t(v_6)+l(v_6b)=11(\text{最小}), T_8=\{av_3,av_1,v_1v_4,v_4v_5,v_4v_2,v_2v_6,v_6b\}$

于是知 a 与 b 的距离 $d(a,b)=t(b)=11$，最短路为 $a\to v_1\to v_4\to v_2\to v_6\to b$.

1.5 图的代数表示及特征

Definition 5 (邻接矩阵). G 的邻接矩阵是一个 $n\times n$ 矩阵 $A(G)=[a_{ij}]$，其中若 v_i 邻接 v_j，则 a_{ij} =*1*；否则 $a_{ij}=0$.

注：若 a_{ij} 取为连接 v_i 与 v_j 的边的数目，则称 A 为推广的邻接矩阵.

Theorem 9 (以前考过填空题). 令 G 是一个有推广邻接矩阵 A 的 p 阶标定图，则 A^n 的 i 行 j 列元素 $a_{ij}^{(n)}$ 等于由 v_i 到 v_j 的长度为 n 的通道的数目.

推论：A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数，A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍.

Definition 6 (关联矩阵). 关联矩阵 $B(G)=[b_{ij}]$ 是一个 $n\times m$ 矩阵，当点 v_i 与边 e_j 关联时 $b_{ij}=1$，否则 $b_{ij}=0$.

Example 3. v_i 到 v_j 长度为 k 的通道的数目是 $a_{ij}^{(k)}$.

Example 4. 给你一个 A^2，长度为 2 的途径有 $\sum_{i,j}a_{ij}^{(2)}$.

Example 5. 给你一个 A^2，问 A 有多少条边，结果：主对角线元素之和除以 2.

设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且

$$A^2=\begin{pmatrix}3&1&1&2&0\\1&2&1&1&1\\1&1&3&0&2\\2&1&0&2&0\\0&1&2&0&2\end{pmatrix}$$

则图 G 的边数为 6（主对角线元素除以 2）

矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.

$$\operatorname{Spec}(K_n)=\begin{pmatrix}-1&n-1\\n-1&1\end{pmatrix}$$

完全图 K_n 的特征值有 $-1(n-1$ 重$)$ 和 $n-1(1$ 重$)$，所以 K_n 的最大特征值为 $n-1$(考过填空题).

1.6 极图

完全 l 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_l}$ 的点数：$\sum_{i=1}^{l} n_i$，边数 $\sum_{1\le i<j\le l} n_i n_j$(考过填空题).

n 阶完全 l 几乎等部图记为：$T_{l,n}$

Theorem 10. n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数 $m=n_1n_2$，且 $m\le\lfloor n^2/4\rfloor$.

证明. $m=n_1n_2$ 显然. 下面证明第二结论：

$$m\left(K_{n_1,n_2}\right)=m\left(K_{n-n_2,n_2}\right)=\left(n-n_2\right)n_2=\frac{n^2}{4}-\left(\frac{n}{2}-n_2\right)^2\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$$

□

注：具有 m 条边的 n 阶简单偶图，则 $m\le\lfloor n^2/4\rfloor$.

Theorem 11. n 阶 l 部图 G 有最多边数的充要条件是 $G\cong T_{l,n}$.

Theorem 12 (Turan 定理)**.** 若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 K_{l+1}，则边数

$$m(G)\le m\left(T_{l,n}\right)$$

此外，仅当 $G\cong T_{l,n}$，$m(G)=m\left(T_{l,n}\right)$

Example 6. n 阶简单图 G，$K_3\nsubseteq G$，则 G 最多有 $n^2/4$ 条边.

Example 7. 9 阶简单图 G，$K_4\nsubseteq G$，则 G 最多有 27 条边.

Theorem 13. $K_{l+1}\nsubseteq G$，则 $m(T_{l,n})=C_l^2\left(\frac{n}{l}\right)^2$.

2 树

2.1 树的概念与性质

Definition 7. 不含圈的图称为无圈图，**连通**的无圈图称为树.

非同构的 4 阶、5 阶、6 阶树的个数分别为 2、3、6.

由 k 颗树组成的森林满足 $m=n-k$，其中 n 为 G 的顶点数，m 为 G 的边数.

Theorem 14 (以前考过证明)**.** 每棵非平凡树至少有两片树叶.

证明. 设 $d_1\le d_2\le\cdots\le d_n$ 是树 T 的度序列，因为 T 是连通的，所以树 T 的最小度 $\delta(T)=d_1\ge 1$. 如果树 T 中至多有一片树叶，那么

$$2n-2=2m(T)=\sum_{i=1}^{n} d_i\ge 1+2(n-1),$$

出现矛盾. □

Example 8. G 是树且 $\Delta\ge k$，则 G 至少有 k 片叶子.

Solution. 若不然，设 G 有 n 个顶点，m 条边且至多 $k-1$ 片叶子．由于 $\Delta \geq k$，于是由握手定理得

$$2m = \sum d(v) \geq 1 \cdot (k-1) + 2 \cdot (n-k) + k \cdot 1 = 2n-1 > 2n-2$$

所以，$m > n-1$，与 G 是树矛盾！

Theorem 15. 设 G 是具有 n 个点 m 条边的图，则下列命题等价：

1. G 是树．
2. G 无环且任意两个不同点之间存在**唯一**的路．
3. G 连通，删去任一边便不连通．
4. G **连通**，且 $n = m+1$．
5. G **无圈**，且 $n = m+1$．
6. G **无圈**，添加任何一条边可得**唯一**的圈．

Example 9. 设 T 为具有 12 条边的树，其顶点度的取值为 1,2,5．如果 T 恰有 3 个度为 2 的顶点，那么 T 有多少片树叶？

Solution. 设 T 有 x 片树叶．根据树的点数与边数的关系知，由握手定理

$$1 \times x + 2 \times 3 + 5 \times (13 - 3 - x) = 2 \times 12$$

得 $x = 8$，即 T 有 8 片树叶．

Example 10. 设树 T 中度数为 i 的顶点的个数为 $n_i (1 \leq i \leq k)$，则 $\sum_1^k i n_i = 2(\sum_1^k n_i - 1)$．

$$n_1 = 2 + n_3 + 2n_4 + \cdots + (k-2)n_k.$$

2.2 树的中心和形心 (考过填空写中心点)

离 v 最远的点的距离称为顶点 v 的离心率，最小的离心率称为半径，等于半径的点称为中心点．

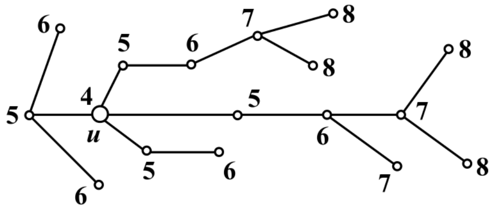


图 1: 半径是 4，中心点是 u

树 T 在点 u 处的一个分枝是指包含 u 作为一个叶子点的极大子树，树 T 在点 u 的分枝中边的最大数目称为点 u 的权，树 T 中权值最小的点称为它的一个形心点．

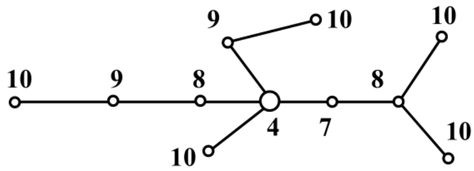


图 2: 权值为 4 的顶点为该树的形心.

2.3 生成树

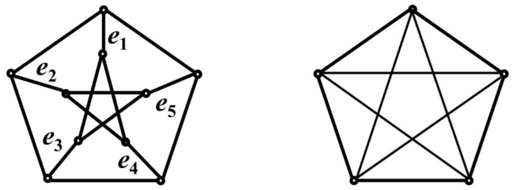


图 3: 收缩边 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5.

Theorem 16 (Cayley 定理，考过证明)**.** *若 e 是图 G 的边，则*

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G\cdot e)$$

证明. 由于 G 的每一颗不包含 e 的生成树也是 $G-e$ 的生成树，所以 $\tau(G-e)$ 就是 G 的不包含 e 的生成树的个数，$\tau(G\cdot e)$ 就是 G 的包含 e 的生成树的个数. □

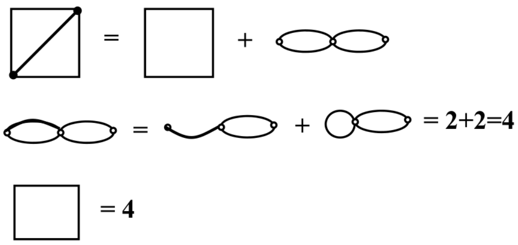


图 4: $\tau(G) = 4 + 4 = 8$.

Theorem 17 (考过填空题)**.**

$$\tau\left(K_n\right) = n^{n-2}, \tau\left(k_{m,n}\right) = n^{m-1}m^{n-1}. K_5 = 125, K_{3,3} = 81.$$

2.4 最小生成树 (填空题)

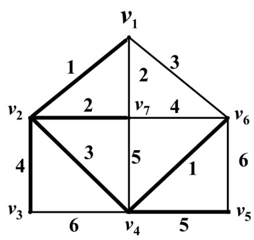


图 5: $W(T) = 1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 16$.

3 图的连通度

3.1 割边 (K_2)、割点 (自环，K_2，八字形) 和块 (阶数 ≥ 3)

若 G 连通，则**割边**是指删去后使 G 不连通的边.

Theorem 18. e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中.

Example 11 (考过证明题). *1.* 若 G 的每个顶点的度数均为偶数，则 G 没有割边；

2. 若 G 为 k 正则二部图 ($k \geq 2$)，则 G 无割边.

Solution. *1.* 若不然，设 $e = uv$ 为 G 的割边.

则 $G - e$ 的含有顶点 u(或 v) 的那个分支中点 u(或 v) 的度数必为奇数，而其余点的度数为偶数，与"度数为奇数的顶点的个数为偶数"相矛盾.

2. 若不然，设 $e = uv$ 为 G 的割边.

假设 G_1 为 $G - e$ 的包含顶点 u 的连通分支，显然 G_1 中除了点 u 的度数为 $k - 1$ 外，其余点的度数均为 k.

显然 G_1 仍为偶图，设其二部划分为 S 和 T 且 $|S| = s$，$|T| = t$.

不妨假设 S 包含顶点 u，则

$$ks - 1 = |E(G_1)| = kt$$

但是因 $k \geq 2$，所以等式不能成立！因此，e 一定不是割边.

若**无环**图 G 连通，则**割点**是指删去该点使 G 不连通的点.
注：割点有两类，一类是自环，一类是破坏连通性的点.

Example 12. 求证：无环非平凡连通图至少有两个点不是割点.

证明. 由于 G 是无环非平凡连通图，所以存在非平凡生成树. 非平凡生成树至少两片树叶，它们不能为生成树的割点. 显然，它们也不能为 G 的割点. □

注：非平凡树一定有割边，不一定有割点 (K_2).

Theorem 19. *1.* 没有割点 $\nRightarrow$ 没有割边（K_2）；

2. 有割边 $\nRightarrow$ 有割点（八字形的图）；

3. 阶数 ≥ 3 的无环连通图，有割边 $\Rightarrow$ 有割点.

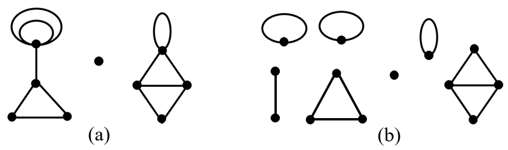
4. 阶数 ≥ 3 的无环连通图，有割点 $\nRightarrow$ 有割边.

3.2 块及其性质

没有割点的连通图称为块图，简称块.

1. 仅有一条边的块，要么是割边，要么是环；
2. 仅有一个点的块，要么是孤立点，要么是环；
3. 至少有两个点的块无环；
4. 至少有三个点的块无割边，无自环.

Example 13. 图 G 如图 *(a)* 所示，G 的所有块如图 *(b)* 所示.



Theorem 20. 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G **无环**并且任意**两点**都位于同一个圈上.

Theorem 21. 设图 G 的阶至少为 3，则 G 是块当且仅当 G **无孤立点**且任意**两边**都位于同一个圈上.

Theorem 22. 点 v 是图 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同的块.

注：两个不同块的公共顶点只能是割点，即块与块只能由割点相联结，因此可以通过割点搜寻块.

注：$(k \geq 3)$ 块没有割边，块有圈.

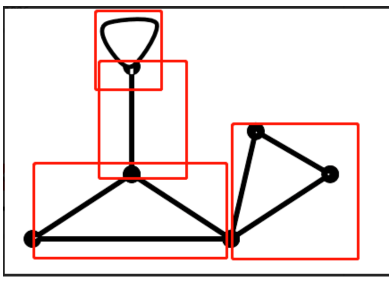


图 6: 它的块的数目是 4.

3.3 连通度

点连通度可描述为"使图不连通或成为平凡图，最少需要删去的点数".

$$(1)\kappa(K_n) = n-1, (2)\kappa(C_n) = 2 \text{ 其中} C_n \text{为} n \text{圈}, n \geq 3.$$

Theorem 23. 若一个图的连通度至少为 k，则称该图是 k 连通的.

注：k 连通：要想破坏连通性，至少要删去 k 个点.

注：K_2 连通、无割点，但连通度为 1.

边连通度可描述为“使图不连通或成为平凡图，最少需要删去的边数”.

$$(1)\lambda\left(K_n\right)=n-1,(2)\lambda\left(C_n\right)=2\ \text{其中}C_n\text{为}n\text{圈},n\geq 2.$$

Theorem 24. 若一个图的边连通度至少为 k，则称该图是 k 边连通的.

注：k 边连通：要想破坏连通性，至少要删去 k 条边.

注：k 连通一定是 k 边连通的.

Theorem 25. 对任意的图 G，有

$$\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$$

Theorem 26. 设 G 是具有 m 条边的 n 阶连通图，则

$$\kappa(G)\leq\lfloor 2m/n\rfloor.$$

Example 14. n 阶 k 连通图至少 $\lceil kn/2\rceil$ 有条边.

图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为 $\lceil 7n/2\rceil$.

Lemma 1. 设 G 是 n 阶简单图，若 $\delta(G)\geq\lfloor n/2\rfloor$，则 G 必连通，且 $\lambda(G)=\delta(G)$.

证明. 若 G 不连通，则 G 至少有两个连通分支，从而必有一个分支 H 满足 $|V(H)|\leq\lfloor n/2\rfloor$.

因 G 是简单图，从而

$$\Delta(H)\leq\lfloor n/2\rfloor-1<\lfloor n/2\rfloor$$

于是

$$\delta(G)\leq\delta(H)\leq\Delta(H)<\lfloor n/2\rfloor$$

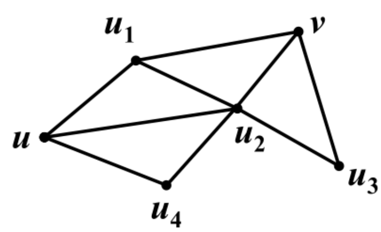
这与已知矛盾，所以 G 必连通. □

Menger 定理是图的连通性问题的核心定理之一，它揭示了图的连通度与不同顶点对间的不相交路的数目之间的关系.

Theorem 27.

1. 设 x 和 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离 x 和 y 的最少点数等于独立的 (x,y) 路的最大数目.

2. 设 x 和 y 是图 G 中的两个不同点，则 G 中分离 x 和 y 的最少边数等于边不重的 (x,y) 路的最大数目.



在该图中，独立的 (u,v) 路的最大条数是 2，分离点 u 与 v 的最小点集是 $\{u_1,u_2\}$，包含 2 个顶点.

在该图中，边不重的 (u,v) 路的最大条数是 3，分离点 u 与 v 的最小边集是 u_1v, u_2v, u_2u_3，包含 3 条边.

Theorem 28 (Menger 定理). *1. 一个非平凡图 G 是 $k(k\geq 2)$ 连通的当且仅当 G 的任意两个不同顶点间至少存在 k 条独立的路；*

2. 一个非平凡图 G 是 k $(k\geq 2)$ 边连通的当且仅当 G 的任意两个不同顶点间至少存在 k 条边不重的路.

注：由“任意两个不相邻的顶点之间存在 k 条独立的路”必能推出“任意两个相邻的顶点之间也存在 k 条独立的路”.

3.4 图的宽距离和宽直径 (不做要求)

4 Euler 图与 Hamilton 图

4.1 欧拉图

Definition 8. *经过 G 的每条边的 (闭) 迹被称为 Euler (闭) 迹，存在 Euler 闭迹的图称为 Euler 图，简称 E 图. Euler 闭迹又称为 Euler 回路.*

Theorem 29. *假定 G 是一个*连通*图，则下列命题等价：*

1. G 是欧拉图.

2. G 的每个点的度是偶数.

3. G 的边集能划分为边不重的圈的并.

Lemma 2. *连通图 G 有 Euler 迹当且仅当 G* 最多有两个奇点.

注:

1. 图 G 有欧拉迹当且仅当 G 能“一笔画”.

2. 若奇度点数为零，则一笔画与起点无关；若奇度点数为 2，则一笔画的起点与终点均为奇点.

Theorem 30. *下列陈述对于一个连通有向图 D 是等价的：*

1. D 是欧拉有向图；

2. D 的每个点的入度等于出度；

3. D 的弧集可划分为边不重的有向圈的并.

Euler 图没有割边，有可能有割点（八字形的图）.

Example 15 (以前考过). $K_{m,n}$（m,n 均为偶数），则欧拉环游中至少包含 mn 条边.

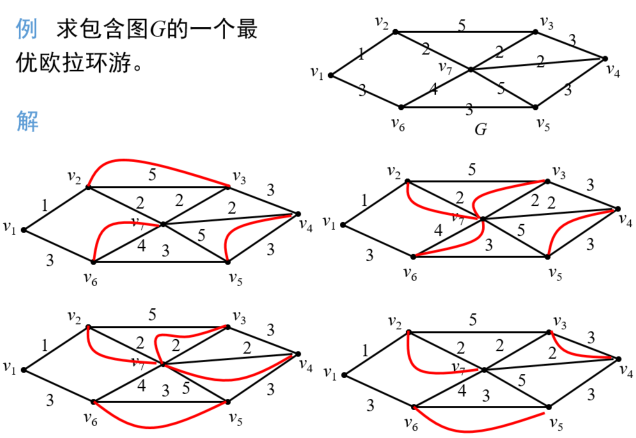
非 Euler 图求最优环游的方法

(1) 用每条边最多添一次的方法任意添一些重复边使图 G 成为一个欧拉多重图 G'.

(2) 考查 G' 的圈，若存在圈 C，其中重复边的总权值大于该圈权值的**一半**，则在圈 C 上交换重复边和不重复边得到一个新的欧拉多重图. 重复这个过程，直到得到一个图 G^*，使得图 G^* 中每个圈上重复边的总权值不大于该圈权值的一半.

(3) 用 Fleury 算法求 G^* 的 Euler 回路.

Example 16. 6 个奇度顶点，添加 3 条边.



Example 17. 设图 G 是具有 k 个奇度顶点，则在 G 中最少添加 $k/2$ 条边才能使 G 具有欧拉回路.

Example 18. 如果一个赋权图 G 中只有两个奇度顶点 u 与 v，设计一个求其最优欧拉环游的算法.

Solution. *1. 在 u 与 v 间求出一条最短路 P；(最短路算法)*

2. 在最短路 P 上，给每条边添加一条平行边得到 G 的欧拉多重图 G^*；

3. 在欧拉多重图 G^* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉回路.

Example 19. 下图中的最短欧拉环游的权值是 37.

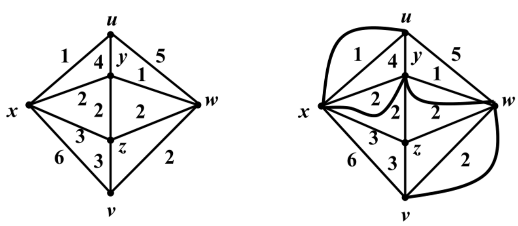


图 7: 最优欧拉环游：$xuywvzwyxuwvxzyx$.

4.2 哈密尔顿图

Definition 9. 经过图中每个点仅一次的路或圈称为 *Hamilton* 路或 *Hamilton* 圈,**存在 *Hamilton* 圈的图称为 *Hamilton* 图**，简称 H 图. *Hamilton* 路或圈也简称 H 路或 H 圈.

4.2.1 H 图的判断方法：一必要，四充分，一充要

Theorem 31 (必要条件)**.** 若 G 是 H 图，则对于 V 的每个非空真子集 S，均有

$$\omega(G-S) \leq |S|$$

注：上述定理只是必要条件，而非充分条件.

彼得森图不是 H 图.

Theorem 32 (Dirac，充分条件)**.** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中有：

$$\delta(G) \geq \frac{n}{2}$$

那么 G 是 H 图.

注：上述定理只是充分条件，而非必要条件，例如长度为 5 的圈.

Theorem 33 (Ore，充分条件)**.** 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：

$$d(u) + d(v) \geq n$$

那么 G 是 H 图.

注：上述定理只是充分条件，而非必要条件，例如长度为 5 的圈.

Definition 10. 在 n 阶简单图 G 中，若对不相邻的任何一对点 u 和 v 都有 $d(u)+d(v) < n$，则称 G 是闭图. G 的闭包是包含 G 的极小闭图.

Lemma 3. 若 G_1 和 G_2 是同一个点集 V 的两个闭图，则 $G = G_1 \cap G_2$ 是闭图.

Lemma 4. 任意图 G 的闭包是唯一的.

证明. 设 $\hat{G}_1$ 和 $\hat{G}_2$ 是 G 的闭包，则显然有 $G \subset \hat{G}_1, G \subset \hat{G}_2$.

因此，$G \subset \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2$，又因为 $\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2$ 是闭图，且

$$\hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 \subset \hat{G}_1, \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 \subset \hat{G}_2$$

故由闭包的定义知

$$\hat{G}_1 = \hat{G}_1 \cap \hat{G}_2 = \hat{G}_2$$

因此 G 的闭包是唯一的. □

注：一个图的闭包不一定是完全图.

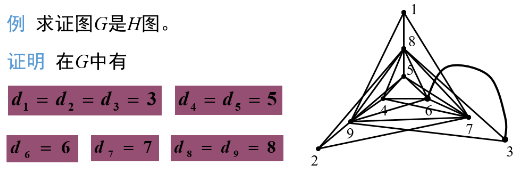
Theorem 34 (Bondy，充要条件)**.** 一个简单图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图.

Theorem 35 (充分条件)**.** 设 G 是 $n \geq 3$ 的简单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图.

注：上述定理反之不成立，即 H 图的闭包不一定是完全图，例如长度为 5 的圈，它的闭包就是它本身.

Theorem 36 (度序列判定法)**.** 设简单图 G 的度序列是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，这里，$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$，并且 $n \geq 3$. 若对任意的 $m < n/2$，或有 $d_m > m$，或有 $d_{n-m} \geq n - m$，则 G 是 H 图.

Example 20 (以前考过)**.** 求证该图为哈密尔顿图用度序列判定方法.

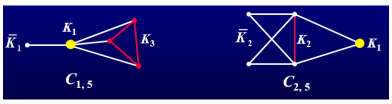


4.3 度极大的非 Hamilton 图

Definition 11. 图 G 称为度极大非 H 图，若它的度不弱于其它非 H 图.

Definition 12. 对于 $1 \leq m < n/2$，$C_{m,n}$ 图定义为：

$$C_{m,n} = K_m \vee \left(\overline{K}_m + K_{n-2m}\right).$$



Theorem 37. 对于 $1 \leq m < n/2$ 的 $C_{m,n}$ 图不是 H 图.

Example 21. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.

4.4 度极大非 H 图的特征

Theorem 38 (Chvatal，充分条件，考过证明)**.** 若 G 是 $n \geq 3$ 的非 H 简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.

证明. 设 G 是度序列为 $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 的非 H 简单图，且

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$$

由度序列判定法：存在 $m < n/2$，使得 $d_m \leq m$，且 $d_{n-m} < n - m$.

于是，G 的度序列必弱于如下序列：

$$(\overbrace{m, m, \cdots, m}^{m}, \overbrace{n-m-1, n-m-1, \cdots, n-m-1}^{n-2m}, \overbrace{n-1, n-1, \cdots, n-1}^{m})$$

而上面序列正好是图 $C_{m,n}$ 的度序列. □

1. 定理刻画了非 H 简单图的特征：$C_{m,n}$ 图族中每个图都是某个 n 阶非 H 简单图的极图.
2. 如果 n 阶简单图 G 度优于所有的 $C_{m,n}$ 图族，则 G 一定是 H 图.
3. 定理的条件是必要条件而非充分条件.

Example 22. 5 阶圈 C_5 的度序列是 $(2,2,2,2,2)$，它度弱于 $C_{2,5}$ 的度序列 $(2,2,2,4,4)$，但 C_5 是 H 图.

Theorem 39 (充分条件)**.** 设 G 是 n 阶简单图. 若 $n \geq 3$ 且

$$|E(G)| > \binom{n-1}{2} + 1$$

则 G 是 H 图；并且，具有 n 个顶点 $\binom{n-1}{2}+1$ 条边的非 H 图只有 $C_{1,n}$ 以及 $C_{2,5}$.

证明. (1) 若不然，由 Chvátal 定理知，G 度弱于某个 $C_{m,n}$，于是有

$$\begin{aligned}
&|E(G)| \leq |E(C_{m,n})| = \tfrac{1}{2}\left[m^2 + (n-2m)(n-m-1) + m(n-1)\right] \\
&= \binom{n-1}{2} + 1 - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - (m-1)(n-2m-1) \\
&\leq \binom{n-1}{2} + 1
\end{aligned}$$

这与条件矛盾！所以 G 是 H 图.

(2) 对于 $C_{1,n}$ 有：

$$|E(G)| = |E(C_{1,n})| = \binom{n-1}{2} + 1.$$

除此之外，只有当 $m=2$ 且 $n=5$ 时有：

$$|E(G)| = |E(C_{m,n})| = \binom{n-1}{2} + 1.$$

□

注：推论的条件是充分而非必要的. 例如长度为 5 的圈 C_5.
n 阶完全图中 H 圈的个数为 $(n-1)!$.

4.5 边交换技术 (后面有例题，以前考过)

可以通过如下方法求出最优圈的一个下界：

1. 在 G 中任意删掉一点 v 得图 G_1；
2. 在图 G_1 中求出一棵最小生成树 T；
3. 在 v 的关联边中选出两条权值最小者 e_1 与 e_2；若 H 是 G 的最优圈，则

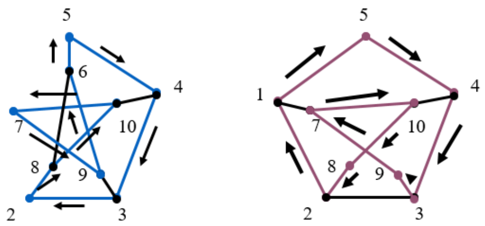
$$W(H) \geq W(T) + W(e_1) + W(e_2).$$

4.6 超哈密尔顿图

Definition 13. 若图 G 不是哈密尔顿图，但对于任意点 v，$G-v$ 都是哈密尔顿图，则称 G 是超哈密尔顿图.

Example 23. 证明彼得森图是超哈密尔顿图.

证明. 由对称性，只需考虑下面两种情形: (a)、G-1,(b)、G-6.



G-1　　G-6

(a) G-1 中有 H 圈：54328(10)7965

(b) G-6 中有 H 圈：54397(10)8215

由 (a) 与 (b)，G 是超 H 图. □

5 匹配与因子分解

5.1 匹配

Definition 14. 设 M 是图 G 的边子集，若任意的 $e \in M$，e 都不是环，且属于 M 的边互不相邻，则称 M 为 G 的一个匹配. 设 M 为 G 的一个匹配，对 $v \in V(G)$，若 v 是 M 中某边的一个端点，则称 v 为 M 饱和点，否则称为 M 非饱和点.

Definition 15. 如果 G 的每个顶点均为 M 饱和点，则称 M 为 G 的完美匹配.

Definition 16. 如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，则称 M 为 G 的最大匹配.

Remark 1. *1.* 完美匹配必是最大匹配，而最大匹配不一定是完美匹配；

2. 最大匹配必存在，但完美匹配不一定存在；

3. 图 G 存在完美匹配的一个必要条件是 G 的点数必然为偶数.

Theorem 40 (Berge)**.** 图 G 的匹配 M 是最大匹配当且仅当 G 不含 M 可扩路.

5.2 偶图的匹配与覆盖

Definition 17. 取图 G 的一个顶点子集 S，令

$$N(S)=\{v|\text{存在}u\in S\ \ \text{使得}u\text{ 与}v\text{ 相邻}\}$$

称 $N(S)$ 为 S 的邻集.

Theorem 41 (Hall，偶图匹配存在性判定定理). 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当

$$|N(S)| \geq |S|$$

对所有 $S \subseteq X$ 成立.

Remark 2. 若 G 是 k 正则偶图 $(k > 0)$，则 G 有完美匹配.

证明. G 是具有二分类 (X, Y) 的 k 正则偶图，由于 G 是 k 正则的，所以 $k|X| = |E(G)| = k|Y|$，所以 $|X| = |Y|$.

任取 X 的一个子集 S，令

$$E_1 = \{e | e \in E \text{ 并且} e \text{与} S \text{ 中的顶点关联}\},$$
$$E_2 = \{e | e \in E \text{ 并且} e \text{与} N(S) \text{ 中的顶点关联}\}.$$

因与 S 中的顶点关联的边必与 $N(S)$ 中的顶点关联，所以我们可以推出 $E_1 \subseteq E_2$.

因此，$k|N(S)| = |E_2| \geq |E_1| = k|S|$，由此可知 $|N(S)| \geq |S|$.

根据 Hall 定理，可知 G 有一个饱和 X 的每个顶点的匹配 M，由于 $|X| = |Y|$，所以 M 是完美匹配. □

Example 24.

1. 每个 n 方体都有完美匹配.
2. K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数分别是 $(2n-1)!!$，$n!$.
3. 非平凡树至多存在一个完美匹配 (后面有证明，以前考过).

5.3 点覆盖与 konig 定理

Definition 18. 图 G 的一个覆盖是指 $V(G)$ 的一个子集 K，使得 G 的每条边都至少有一个端点在 K 中.

Theorem 42. 设 M 是匹配，K 是覆盖，若 $|M| = |K|$，则 M 是最大匹配，且 K 是最小 *(点)* 覆盖. *(* $|M| \leq |M^*| \leq \tilde{K}| \leq |K|$，由于 $|M| = |K|$，所以结论得证. *)*

Theorem 43 (konig). 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数.

Example 25. $k_{m,n}(m < n)$ 最小覆盖中 m 个点（因为最大匹配有 m 条边）.

5.4 Tutte 定理与完美匹配

Theorem 44 (Tutte). 偶数阶图 G 有完美匹配当且仅当

$$o(G - S) \leq |S|$$

对所有 $S \subset V$ 成立，其中 $o(G - S)$ 表示 $G - S$ 中奇分支的个数.

Remark 3. 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配.

注：有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配 (有可能有，有可能没有).

彼得森图有完美匹配，3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.

5.5 因子分解

Definition 19. G 的一个因子分解是指将 G 分解为若干个边不重的因子之并.

Definition 20. k-因子指 k 正则的因子.

Example 26. *1.* 1-因子的边集构成一个完美匹配.

2. 2-因子的连通分支为一个圈.

Definition 21. k-因子分解：每个因子均为 k-因子的因子分解，此时称 G 本身是 k-可因子化的.

研究图的因子分解主要有三个方面：一是有没有，二是能不能进行分解 (因子分解的存在性)，三是如何分解 (分解算法).

5.6 1-因子分解

若 G 有一个 1-因子 (其边集为完美匹配)，则显然 G 的阶数是偶数. 所以，**奇数阶图不能有 1-因子**.

Theorem 45. 完全图 K_{2n} 是 1-可因子化的.

Theorem 46. k 正则偶图 $(k > 0)$ 是 1-可因子化的.

Theorem 47. 具有 *Hamilton* 圈的 3 正则图是 1-可因子化的.

Remark 4. *1.* 1-可因子分解的 3 正则图不一定有 *Hamilton* 圈.

2. 若 3 正则图有割边（有可能存在 1-因子），则不可 1-因子分解.

3. 无割边的 3 正则图可能也没有 1-因子分解 *(*$K_{3,3}$ 可 1-因子分解，彼得森图不可 1-因子分解*)*.

K_{2n} 的不同的 1-因子数目有 $(2n-1)!!$，K_4 有唯一的 1-因子分解.

5.7 2-因子分解 (偶度正则图)

2-可因子化的图的所有点的度一定是偶数，所以完全图 K_{2n} 不是 2-可因子化的（K_{2n} 有 2-因子）.

Theorem 48. 图 K_{2n+1} 是 n 个 H 圈的并.

Theorem 49. 完全图 K_{2n} 是一个 1-因子和 $n-1$ 个 H 圈的并.

Theorem 50. 每一个没有割边的 3 正则图是一个 1-因子和一个 2-因子的并.

Theorem 51. 一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则图.

Example 27. 证明：K_{6n-2} 可以 3-因子分解.

证明. K_{6n-2} 可以分解为 $6n-3$ 个 1-因子的并，而每 3 个 1-因子可合成 1 个 3-因子，故 K_{6n-2} 可以分解为 $2n-1$ 个 3-因子的并. □

Example 28 (考过证明). 若 n 为偶数且 $\delta(G) \geq n/2+1$，则 n 阶图 G 有 3-因子.

Solution. 因 $\delta(G) \geq n/2+1$，由 *Dirac* 定理得：n 阶图 G 有 H 圈 C. 又因 n 为偶数，所以 C 为偶圈.

于是由 C 可得到 G 的两个 1 因子，设其中一个为 F_1.

考虑 $G_1 = G - F_1$，则 $\delta(G) \geq n/2$. 于是 G_1 中有 H 圈 C_1.

作 $H = C_1 \cup F_1$. 显然 H 是 G 的一个 3-因子.

思考：若 G 为 n 阶简单图 (n 为偶数) 且 $\delta(G) \geq n/2+3$，则 G 中存在 5-因子.

5.8 最优匹配与匈牙利算法

匈牙利算法算法思想：先任取一个匹配 M，然后寻找 M 可扩路. 若不存在 M 可扩路，则 M 为最大匹配；若存在，则将可扩路中 M 与非 M 的边互换，得到一个比 M 多一条边的匹配 M'，再对 M' 重复上面过程.

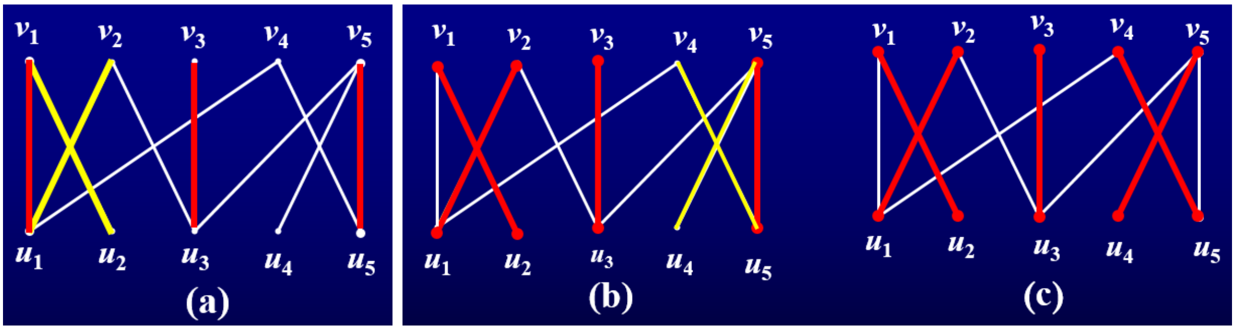


图 8: 求最大匹配的过程，存在 $z \in X$，有 $yz \in M$

具有最大权值的完美匹配，称为最优匹配.

Definition 22. 设 $G = (X, Y)$，若在顶点集上的实值函数 l 满足：对任意的 $x \in X$, $y \in Y$，均有：

$$l(x) + l(y) \geq w(xy)$$

称 l 是赋权完全偶图 G 的可行顶点标号.

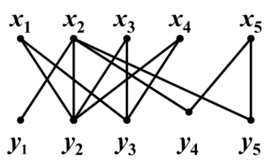
Definition 23. 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号，令：

$$E_l = \{xy \in E(G) | l(x) + l(y) = w(xy)\}$$

称以 E_l 为边集的 G 的生成子图为 G 的对应于 l 的相等子图，记为 G_l.

Example 29. 设如下矩阵是赋权完全偶图 G 的权值矩阵并注明了一种可行顶点标号 l.

$$\begin{array}{cc} W = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad\quad 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \end{array}$$



$G_l = (X, Y)$

Theorem 52 (以前考过证明)**.** 设 l 是赋权完全偶图 $G=(X,Y)$ 的可行顶点标号，若相等子图 G_l 有完美匹配 M^*，则 M^* 是 G 的最优匹配.

证明. 设 M^* 是 G_l 的完美匹配，则：

$$w\left(M^*\right)=\sum_{e\in M^*}w(e)=\sum_{v\in V(G)}l(v)$$

又设 M 是 G 的任一完美匹配，则：

$$w(M)=\sum_{e\in M}w(e)\leq\sum_{v\in V(G)}l(v)$$

所以，$w\left(M^*\right)\geq w(M)$，即 M^* 是 G 的最优匹配. □

6 平面图

6.1 平面图

Definition 24. 设 G 是一个平面图，G 将所嵌入的平面划分为若干个区域，每个区域的内部连同边界称为 G 的面，无界的区域称为外部面或无限面.

注：每个平面图有且仅有一个外部面.

Definition 25. 设 f 是 G 的一个面，构成 f 的边界的边数 *(*割边计算 2 次*)* 称为面 f 的次数，记为 $\deg(f)$.

Theorem 53. 设 G 是具有 m 条边的平面图，则

$$\sum_{f\in\Phi}\deg(f)=2m$$

Theorem 54 (Euler 公式)**.** 设 G 是具有 n 个点，m 条边，φ 个面的连通平面图，则有

$$n-m+\varphi=2.$$

Remark 5. 设 G 是具有 n 个点，m 条边，φ 个面，k 个连通分支的平面图，则

$$n-m+\varphi=k+1$$

6.2 平面图的判定

Remark 6 (判定方法)**.**

1. （必要条件）设 G 是具有 n 个点，m 条边，φ 个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，$\deg(f)\geq l\geq 3$，则

$$m\leq\frac{l}{l-2}(n-2)$$

2. 设 G 是具有 n 个点，m 条边的简单平面图且 $n\geq 3$，则

$$m\leq 3n-6$$

3. 若 G 是简单平面图，则 $\delta \leq 5$.

4. 一个连通平面图 G 是 2 连通的当且仅当 G 的每个面的边界是圈.

5. 若一个平面图是 2 连通的，则它的每条边恰在两个面的边界上.

- 第一个的证明

  一方面，

  $$2m = \sum_{f \in \varphi} \deg(f) \geq l\varphi \Rightarrow \varphi \leq \frac{2m}{l}$$

  另一方面，由欧拉公式得：

  $$\varphi = 2 - n + m$$

  整理得

  $$m \leq \frac{l}{l-2}(n-2).$$

- 第一个推论也可以叙述为：设 G 是具有 n 个点，m 条边的连通图，如果

  $$m > \frac{l}{l-2}(n-2)$$

  则 G 是非可平面图.

- 第三个的证明

  证明. 设 $n \geq 3$，若 $\delta \geq 6$，则

  $$6n \leq \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n - 6$$

  这与"$m \leq 3n$–6 "矛盾. □

$K_{3,3}$ 是非可平面图，K_5 是非可平面图.

Theorem 55. *存在且只存在 5 种正多面体：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体.*

6.3 特殊平面图及平面图的对偶图

Definition 26. 设 G 是简单可平面图，如果 G 是 $K_i(1 \leq i \leq 4)$，或者在 G 的任意两个不相邻的顶点间添加一条边后，得到的图均不是可平面图，则称 G 是极大可平面图. 极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图.

Lemma 5. *设 G 是极大平面图，则 G 必连通；若 G 的阶数至少等于 3，则 G 无割边.*

Theorem 56. *设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图的充分必要条件为 G 中各面的次数均为 3 且为简单图（三角形特征）.*

注：该定理可以简单记为"极大平面图的三角形特征"，即每个面的边界是三角形.

Lemma 6. 设 G 是一个有 n 个点，m 条边，φ 个面的极大平面图，且 $n \geq 3$，则

1. $m = 3n–6$；
2. $\varphi = 2n–4$.

注：推论表明对一个极大平面图 G，当其点数 n 给定时，G 的边数和面数也就确定了，从而 G 的结构框架也大体确定了.

Definition 27. 如果在不可平面图 G 中任意删去一条边所得的图为可平面图，则称 G 为极小不可平面图．例如 K_5 和 $K_{3,3}$.

6.3.1 极大外平面图及其性质

Definition 28. 若一个可平面图存在一个所有顶点均在同一个面的平面嵌入，则称该图为外可平面图.

Definition 29. 设 G 是简单外可平面图，若在 G 中任意不邻接顶点间添上一条边后，G 成为非外可平面图，则称 G 是极大外可平面图．极大外可平面图的外平面嵌入称为极大外平面图.

Theorem 57.

- 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点，且所有点均在外部面上的外平面图，则 G 是极大外平面图当且仅当其外部面的边界是圈，内部面是三角形.
- 设 G 是一个有 $n(n \geq 3)$ 个点，且所有点均在外部面上的极大外平面图，则 G 有 $n–2$ 个内部面.

Lemma 7. 设 G 是一个阶数为 $n(n \geq 4)$ 且所有点均在外部面上的极大外平面图，则 G 中存在两个度数均为 2 且不相邻的点.

Example 30. 设 G 是一个具有 n $(n \geq 4)$ 个点，m 条边的简单连通外平面图．若 G 不含三角形，则 $m \leq (3n–4)/2$.

Solution. 假设 G 的所有顶点在外部面的边界上，则由条件知：G 的外部面的次数至少为 n，内部面的次数至少为 4(G 不含三角形).

设 G 有 φ 个面，则

$$2m \geq 4(\varphi - 1) + n$$

由欧拉公式得，

$$\varphi = 2 - n + m$$

因此，根据上述两式得

$$m \leq \frac{3n-4}{2}.$$

Theorem 58. 每个至少有 7 个顶点的**外可平面图**的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者.

6.3.2 对偶图

Theorem 59. 平面图 G 的对偶图 G^* 也是平面图，并且还有:

1. G^* 的点数 $= G$ 的面数；
2. G^* 的边数 $= G$ 的边数；
3. G^* 的面数 $= G$ 的点数 (G 连通)；

Example 31. 设至少具有两个连通分支的平面图 G 的点数、边数、面数分别为 $n = 10, m = 10, \varphi = 3$，求对偶图 G^* 的面数 φ^*？

Solution. 根据对偶图的结论有

$$n^* = \varphi = 10, m^* = m = 10$$

又根据欧拉公式

$$n^* + m^* - \varphi^* = 2$$

求得 $\varphi^* = 9$.

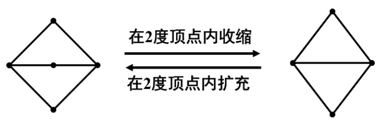
Theorem 60. 设 G^* 是平面图 G 的对偶图，则 G^* 必连通.

Theorem 61. 假定 G 是平面图，则 $(G^*)^* = G$ 当且仅当 G 是连通图.

> 注：注：无论 G 是否连通，G^* 总是连通的，因此 $(G^*)^*$ 不一定等于 G.
> **注：同构的平面图可以有不同构的对偶图.**

6.4 平面图的判定

可平面图 $\Rightarrow$ 不含 K_5 或 $K_{3,3}$，但是不含 K_5 或 $K_{3,3} \not\Rightarrow$ 可平面图.



Definition 30. 两个图 G_1 和 G_2，如果 $G_1 \cong G_2$，或者通过反复在 2 度顶点内扩充和收缩它们能变成同构的，则称 G_1 和 G_2 是同胚的或 G_1 和 G_2 在 2 度顶点内是同构的.

Theorem 62.
1. 图 G 是可平面的当且仅当它不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.
2. 图 G 是可平面图当且仅当其基础简单图是可平面图.
3. 图 G 是可平面图当且仅当它的每个块是可平面图.
4. 简单图 G 是可平面图当且仅当它不含可收缩到 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图.

Example 32. 若图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删去 1 条边就能使其成为可平面图.

Example 33. 彼得森图是不可平面图.

Theorem 63. 至少有 9 个点的简单**可平面图**的补图是不可平面的，而 9 是这个数目中最小的一个.

Example 34. 设 G 是一个 n 阶简单图且 $n \geq 11$，则 G 与 G 的补图中至少有一个是非可平面图.

Solution. 不妨假设 G 是可平面图，则

$$m(G) \leq 3n-6$$

由补图的定义知，

$$m(\overline{G})=m\left(K_{n}\right)-m(G) \geq \frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)$$

因此，

$$m(\overline{G})-(3n-6) \geq \frac{n(n-1)}{2}-2(3n-6)=\frac{1}{2}\left(n^{2}-13n+24\right)$$

令 $f(n)=n^{2}-13n+24$，显然当 $n \geq 11$ 时，$f(n)>0$.

因此，$n \geq 11$ 时，

$$m(\overline{G})>(3m-6)$$

所以，G 的补图不是可平面图.

Example 35 (考过证明). 证明：每个 5 连通的简单可平面图至少有 12 个顶点.

Solution. 设 G 是一个满足条件的 5 连通图，则 $\delta \geq \kappa \geq 5$，由握手定理知，

$$2m=\sum d(v) \geq 5n$$

又因为 G 是简单可平面图，故 $m \leq 3n-6$.

因此，$2.5n \leq m \leq 3n-6$，从而 $n \geq 12$.

Example 36. 若 G 是一个连通平面图且满足 $\delta \geq 3$，则 G 至少有一个面使得 $\deg(f) \leq 5$.

Solution. 若不然，则 $2m=\sum \deg(f) \geq 6\varphi$，由欧拉公式得，

$$\varphi=2-n+m \leq \frac{m}{3}$$

因此，$2m \leq 3n-6$，另一方面，由 $\delta \geq 3$ 知，$2m \geq 3n>3n-6$.

这样导出矛盾.

Example 37. 若平面图 G 是自对偶的 (即 $G \cong G^{*}$)，则 $m=2n–2$.

Solution. 假设 $G \cong G^{*}$ 的阶数为 n^{*}，则 $n^{*}=\varphi$，又因为 $G \cong G^{*}$，所以 $n^{*}=n$，从而 $\varphi=n$.

易知，自对偶图一定是连通图. 因此，对于图 G，欧拉公式成立.

故，$n–m+\varphi=n–m+n=2$. 因此，$m=2n–2$.

7 图的着色

边着色：边代表具体事件，点着色：边代表不能同时发生的事件.

7.1 图的边着色

在任何正常边着色中，与任一顶点关联的各边必须着不同色，由此推知：对无环图

$$\chi' \geq \Delta$$

Example 38. *1.* $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$.

2. 偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.

3. 超立方体 Q_n 的边色数为 n.

4. 若 G 是简单图，则 $\chi' = \Delta$ 或 $\chi' = \Delta + 1$.

5. 设 G 是非空的简单图. 若 G 中恰有一个度为 $\Delta(G)$ 的点，或 G 中恰有两个度为 $\Delta(G)$ 的点并且这两个点相邻，则 $\chi'(G) = \Delta(G)$.

6. n 阶简单图 G，若 $n = 2k+1$ 且边数 $m > k\Delta$，则 $\chi' = \Delta + 1$.

7. 设 G 是奇阶 Δ 正则简单图，则 $\chi' = \Delta + 1$.

8. n 为奇数，$\chi'(K_n) = (n-1)+1 = n$，$\chi'(C_n) = 2+1 = 3$

9. n 为偶数，$\chi'(K_n) = n-1$，$\chi'(C_n) = 2$

10. 彼得森图的边色数为 4.

注：Example 38第六点的证明如下：
因 G 是简单图，由边着色的定义可知，对 G 的任一正常边着色，着同色的边数最多为

$$\frac{n-1}{2} = \frac{(2k+1)-1}{2} = k$$

所以，若 $\chi' = \Delta$，则 G 的边数最多 $k\Delta$，于是，$m \leq k\Delta$，这与“$m > k\Delta$”矛盾，故 $\chi' = \Delta+1$.

7.2 顶点着色

Theorem 64. *1.* 对任意的无环图 G，均有 $\chi \leq \Delta + 1$.

2. 设 G 是简单连通图. 假定 G 既不是完全图又不是奇圈，则 $\chi \leq \Delta$.(完全图和奇圈的 $\chi = \Delta + 1$)

3. 彼得森图的点色数为 3.

4. G 是非空简单图，若 G 中度数最大的点互不相邻，则 $\chi \leq \Delta$.

5. 对任意的简单平面图，均有 $\chi \leq 5$.

7.3 与色数有关的几类图

Theorem 65. *设 G 是唯一 k 可着色图，$k \geq 2$，则*

1. $\delta \geq k-1$；
2. 每个唯一 $k(k \geq 2)$ 可着色图是 $(k-1)$ 连通的.

注：

1. 唯一 1 可着色图是空图；
2. 唯一 2 可着色图是连通的偶图；
3. 唯一 4 可着色可平面图都是极大可平面图.

7.4 完美图 (从没考过)

1. 完全图、偶图均为完美图.
2. 偶图的补图是完美图.
3. 长度至少为 5 的奇圈及其补图均不是完美图.
4. 图 G 是完美图当且仅当 G 的补图是完美图.

7.5 着色的计数与色多项式

所谓着色的计数，就是给定标定图 G 和颜色数 k，求出正常顶点着色的方式数，并用 $P_k(G)$ 表示.

1. 若 $k<\chi(G)$，则 $P_k(G)=0$，$\chi(G)=\min\{k|P_k(G)\geq 1\}$.
2. 若 G 为 n 阶空图，则 $P_k(G)=k^n$.
3. $P_k(K_n)=k(k-1)\ldots(k-n+1)$.
4. G 是具有 n 个点的树，则 $P_k(G)=k(k-1)^{n-1}$.

7.5.1 递推计数法 (掌握一种就行了)

记号 $G \cdot e$ 表示 G 中删去边 e 再重合 e 的端点后所得的图.

Theorem 66. *若 G 是简单图，则对 G 的任意边 e，有*

$$P_k(G)=P_k(G-e)-P_k(G\cdot e)$$

证明. 设 $e=uv$，$G-e$ 的所有 k 着色可分为两类.

一类为 u 与 v 着不同色的 k 着色，此类着色相当于 G 的着色，另一类为 u 与 v 着同色的 k 着色，此类着色相当于 $G\cdot e$ 表的着色，其数目有 $P_k(G\cdot e)$ 个.

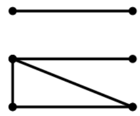
所以，$P_k(G-e)=P_k(G)+P_k(G\cdot e)$.

因此，$P_k(G)=P_k(G-e)-P_k(G\cdot e)$. □

7.5.2 理想子图法 (必须掌握)

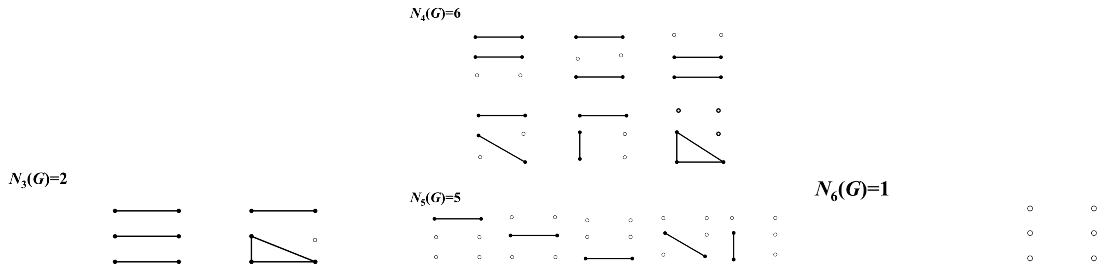
Definition 31. 设 H 是图 G 的生成子图. 若 H 的每个分支均为完全图，则称 H 是 G 的一个理想子图. 用 $N_r(G)$ 表示 G 的具有 r 个分支的理想子图的个数.

Example 39. 求图 G 的全部理想子图



G

Solution. 全部理想子图构造过程



Theorem 67. 对 n 阶简单图 G，有

$$P_k(G)=\sum_{i=1}^{n} N_i(\overline{G})[k]_i$$

其中 $[k]_i=k(k-1)\dots(k-i+1)$ ，即先划分色组再对每个色组着色.

Theorem 68. 设 G 是具有 n 个点 m 条边的图，则有

1. $N_n(G)=1$
2. $N_{n-1}(G)=m$

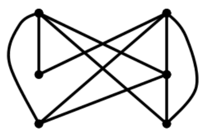
Definition 32. 设 G 是简单图，令 $N_i(G)=r_i$，称多项式

$$h(G,x)=\sum_{i=1}^{n} r_i x^i$$

为图 G 的伴随多项式.

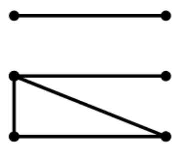
理想子图法：先求出 G 的**补图**的伴随多项式，再将多项式中的 x^i 换为 $[k]_i$ 便能得到简单图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

Example 40. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$



G

Solution. G 的补图为



补图的伴随多项式为

$$h(\overline{G},x)=\sum_{i=1}^{n}r_ix^i=2x^3+6x^4+5x^5+x^6=h(H_1,x)\times h(H_2,x)=(x+x^2)\times(2x^2+4x^3+x^4)$$

将 $x^i=[k]_i$ 代入伴随多项式中得到 $P_k(G)$:

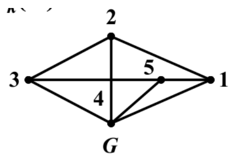
$$\begin{aligned}P_k(G)=&2[k]_3+6[k]_4+5[k]_5+[k]_6\\&=2k(k-1)(k-2)+6k(k-1)(k-2)(k-3)\\&+5k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\\&+k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)\end{aligned}$$

Theorem 69. 若 G 有 t 个分支 $H_1,H_2,\cdots,H_t$,且 H_i 的伴随多项式为 $h\left(H_i,x\right),i=1,2,\ldots,t$,则:

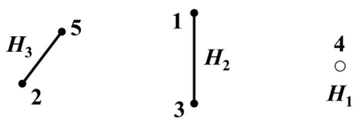
$$h(G,x)=\prod_{i=1}^{t}h\left(H_i,x\right).$$

注:该定理说明,在求 G 的补图的伴随多项式时,可以分别求出它的每个分支的伴随多项式,然后将它们作乘积.

Example 41. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$.



Solution. 画出 G 的补图,



求出补图中各个分支的伴随多项式

$$h\left(H_1,x\right)=x\quad h\left(H_2,x\right)=x+x^2\quad h\left(H_3,x\right)=x+x^2$$

求出补图的伴随多项式

$$h(\overline{G},x)=x\left(x+x^2\right)^2=x^3+2x^4+x^5$$

求出 G 的色多项式

$$\begin{aligned}P_k(G)=&k(k-1)(k-2)+2k(k-1)(k-2)(k-3)\\&+k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)\\&=k(k-1)(k-2)\left(k^2-5k+7\right).\end{aligned}$$

注：$P_k(G)$ 各项系数的符号正负相间．同构的图有相同的色多项式，但其逆不真．

8 Ramsey 定理

点独立数 + 点覆盖数 $=n$ ，边独立数 + 边覆盖数 $=n$
$R(1,n)=R(n,1)=1, R(2,n)=n, R(3,3)=6.$

9 有向图

出 (入) 度记为 $d^+(v)\,(d^-(v))$.

Theorem 70. 设 $D=(V,E)$ 是一个有向图，则有

$$\sum_{v\in V} d^+(v)=\sum_{v\in V} d^-(v)=|E|$$

1. 矩阵 $A(D)=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 D 的邻接矩阵，其中 $a_{i,j}$ 是以 v_i 作为始点，v_j 作为终点的边的数目，所有元素之和等于边数．

2. 矩阵 $M(D)=(m_{ij})_{n\times m}$ 为 D 的关联矩阵，关联矩阵每一列恰有一个“1”和一个“-1”，第 i 行的 1 的个数等于 $d^+(v_i)$，-1 的个数等于 $d^-(v_i)$.

Definition 33. 设 $D=(V,E)$ 为一个有向图，

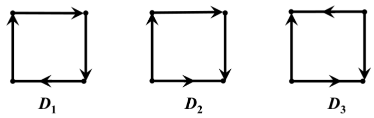
1. 若对 $\forall u,v\in V$，u 与 v 可互达，则称 D 是强连通的．

2. 若对 $\forall u,v\in V$，或 $u\to v$，或 $v\to u$，则称 D 是单向连通的．

3. 若 D 的基础图是连通的，则称 D 是弱连通的，简称连通．

注：强连通一定单向连通，单向连通一定弱连通．

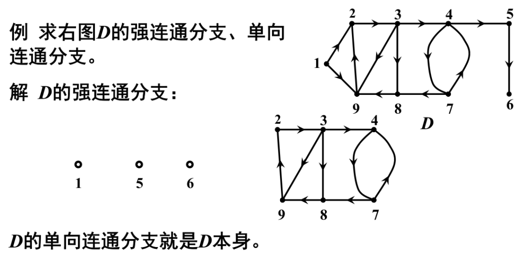
Example 42. 在下图中，D_1,D_2,D_3 为弱连通图；D_1,D_2 为单向连通图；D_1 为强连通图．



Theorem 71. 有向图 $D=(V,E)$ 是强连通的当且仅当 D 中存在含有所有顶点的有向闭途径．

Theorem 72. 设 D' 是有向图 $D=(V,E)$ 的一个子图．如果 D' 是强连通的 (单向连通的、弱连通的)，且 D 中不存在真包含 D' 的子图是强连通的 (单向连通的、弱连通的)，则称 D' 是 D 的一个强连通分支 (单向连通分支、弱连通分支)．

Example 43. 容易考填空题，求分支个数．



Theorem 73. 有向图 $D=(V,E)$ 的每个点位于且仅位于 D 的一个强 *(弱)* 连通分支中．

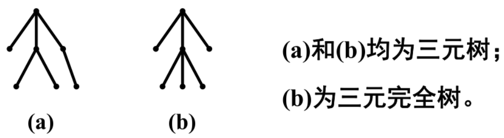
有向图 D 的某个顶点，可能会分属于 D 的若干个单向连通分支．因为单向连通关系不是等价关系．

Theorem 74. 若 G 是 2 边连通的，则 G 存在强连通定向图．

9.1 有向树、根树

Definition 34. 根树 T 中，若每个分支点至多有 m 个儿子，则称 T 为 m 元树；若每个分支点恰有 m 个儿子，则称 T 为 m 元完全树．

Example 44. 重点掌握 m 元完全树



Theorem 75. 设 m 元完全树 T 的树叶数为 t，分支点数为 i，则

$$(m-1)i=t-1.$$

证明. 由假设，T 有 $t+i$ 个顶点．再由树中点数与边数的关系知，T 有 $t+i-1$ 条边．

因 m 元完全树的每个分支点的出度均为 m，叶的出度为零，从而 T 的所有顶点的出度之和为 mi．再由有向图中所有顶点的出度之和等于边数可得

$$mi=t+i-1 \quad\Longrightarrow\quad (m-1)i=t-1$$

□

Example 45 (以前考过)**.** 二元完全树 *($m=2$)*，则分支点数为 $i=t-1$，边数之和为 $m(T)=2(t-1)$．另外，高度为 h 的二元完全树最少有 $h+1$ 片叶子．

9.2 最优树

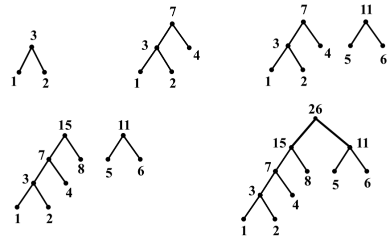
Definition 35. 设 T 是一棵有 t 片树叶的二元树，若对 T 的所有 t 片树叶赋以权值 *(实数)*$w_1,w_2,\cdots,w_t$，则称 T 为带权二元树；若带有权 w_i 的树叶的层数为 $l(w_i)$，则称

$$W(T)=\sum_{i=1}^{t} w_i l\left(w_i\right)$$

为 T 的权；$W(T)$ 最小的二元树称为最优树.

Example 46. 求带权 $1, 2, 4, 5, 6, 8$ 的最优二元树.

Solution. 求解过程如下



设求得的最优二元树为 T，则

$$W(T) = (1+2) \times 4 + 4 \times 3 + (5+6+8) \times 2 = 62.$$

10 图论及其应用复习

10.1 重要概念

1. 图、简单图、图的同构、度序列与图序列、补图与自补图、两个图的联图、两个图的积图、偶图

   (1) 图：一个图是一个序偶 $<V, E>$，记为 $G = (V, E)$，其中：V 是一个有限的非空集合，称为顶点集合，其元素称为顶点或点．用 $|V|$ 表示顶点数；E 是由 V 中的点组成的无序对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可以重复出现多次．用 $|E|$ 表示边数.

   (2) 简单图：无环无重边的图称为简单图.

   (3) 图的度序列:一个图 G 的各个点的度 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为 G 的度序列.

   注：度序列的判定问题是重点 (度数之和为偶数).

   (4) 图的图序列：一个非负数组如果是某简单图的度序列，称它为可图序列，简称图序列.

   注：图序列的判定问题是重点 (排成弱降).

   (5) 若简单图 G 与其补图同构，则称 G 为自补图 ($n/4$ 的余数是 0 或 1).

   (6) 联图和积图等的点数和边数

   (7) 偶图：所谓具有二分类 (X, Y) 的偶图（或二部图）是指一个图，它的点集可以分解为两个非空子集 X 和 Y，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中.

2. 树、森林、生成树、最短路算法、最小生成树、根树、m 元完全树

   (1) 树：不含圈的图称为无圈图，树是连通的无圈图.

(2) 最短路算法，掌握两个奇度顶点的最优环游方法.

(3) 最小生成树：在连通边赋权图 G 中求一棵总权值最小的生成树. 该生成树称为最小生成树.

注：要求熟练掌握最小生成树的求法. (破圈法)

(4) 根树：一棵非平凡的有向树 T，如果恰有一个顶点的入度为 0，而其余所有顶点的入度为 1，这样的有向树称为根树.

(5) m 元完全树：对于根树 T，若每个分支点至多 m 个儿子，称该根树为 m 元根树；若每个分支点恰有 m 个儿子，称它为 m 元完全树.

注：对于完全 m 元树，要弄清其结构. $(m-1)i=t-1.$，记住完全 2 元树的相关结论.

3. 途径 (闭途径)、迹 (闭迹)、路 (圈)、最短路、连通图、连通分支、点连通度与边连通度

注：上述概念分别在第 1、3 章.

4. 欧拉图、欧拉环游、欧拉迹、哈密尔顿圈、哈密尔顿图、哈密尔顿路、中国邮递员问题、最优 H 圈

(1) 欧拉图与欧拉环游：对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的闭迹，则称 G 为欧拉图，简称 G 为 E 图. 欧拉闭迹又称为欧拉环游，或欧拉回路.

欧拉图的判定一定要注意连通性.

(2) 欧拉迹：对于连通图 G，如果 G 中存在经过每条边的迹，则称该迹为 G 的一条欧拉迹 (只含两个奇度顶点).

(3) 哈密尔顿图与哈密尔顿圈：如果经过图 G 的每个顶点恰好一次后能够回到出发点，称这样的图为哈密尔顿图，简称 H 图. 所经过的闭途径是 G 的一个生成圈，称为 G 的哈密尔顿圈.

5. 匹配、最大匹配、完美匹配、最优匹配、因子分解

(1) 匹配：如果 M 是图 G 的边子集 (不含环)，且 M 中的任意两条边没有共同顶点，则称 M 是 G 的一个匹配或边独立集.

(2) 最大匹配与完美匹配：如果 M 是图 G 的包含边数最多的匹配，称 M 是 G 的一个最大匹配. 特别是，若最大匹配饱和了 G 的所有顶点，称它为 G 的一个完美匹配.

(3) 最优匹配：设 $G=(X,Y)$ 是边赋权完全偶图，G 中的一个权值最大的完美匹配称为 G 的最优匹配.

(4) 因子分解：所谓一个图 G 的因子分解，是指把图 G 分解为若干个边不重的因子之并.

注：要弄清楚因子分解和完美匹配之间的联系与区别.

6. 平面图、极大平面图、极大外平面图、平面图的对偶图

(1) 平面图：如果能把图 G 画在平面上，使得除顶点外，边与边之间没有交叉，称 G 可以嵌入平面，或称 G 是可平面图.

(2) 极大平面图：设 G 是简单可平面图，如果 G 是 K_i $(1 \leq i \leq 4)$，或者在 G 的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称 G 是极大可平面图. 极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图.

(3) 极大外平面图：若一个可平面图 G 存在一种平面嵌入，使得其所有顶点均在某个面的边界上，称该图为外可平面图. 外可平面图的一种外平面嵌入，称为外平面图.

(4) 平面图的对偶图的相关结论.

7. 边色数、点色数、色多项式

(1) 边色数：设 G 是图，对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为 $\chi'(G)$.

(2) 点色数：对图 G 正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图 G 的点色数，用 $\chi(G)$ 表示.

(3) 色多项式：对图进行正常顶点着色，其方式数 $P_k(G)$ 是 k 的多项式，称为图 G 的色多项式.

8. 强连通图、单向连通图、弱连通图

(1) 强连通图：若 D 的中任意两点是双向连通的，称 D 是强连通图.

(2) 弱连通图：若 D 的基础图是连通的，称 D 是弱连通图.

(3) 单向连通图：若 D 中任意两点是单向连通的，称 D 是单向连通图.

10.2 重要结论

1. 握手定理及其推论

- 定理 1：图 G 中所有顶点的度数和等于边数的 2 倍.
- 推论 1：在任何图中，奇点个数为偶数.
- 推论 2：正则图的阶数和度数不同时为奇数.

2. Turan 定理

- 若 G 是 n 阶简单图，并且不包含 K_{l+1}，则边数

$$m(G) \leq m\left(T_{l,n}\right)$$

此外，仅当 $G \cong T_{l,n}$，$m(G) = m\left(T_{l,n}\right)$

- $K_{l+1} \nsubseteq G$，则 $m(T_{l,n}) = C_l^2 \left(\dfrac{n}{l}\right)^2$.

3. 树的性质

定理 3：设 T 是 (n, m) 树，则 $m = n - 1$.

4. 最小生成树算法 (破圈法)

5. 偶图判定定理

定理 4：图 G 是偶图当且仅当 G 中没有奇圈.

6. Menger 定理

定理 5：(1)、设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离点 x 与 y 的最小点数等于独立的 (x,y) 路的最大数目；

(2) 、设 x 与 y 是图 G 中的两个不相邻点，则 G 中分离点 x 与 y 的最小边数等于 G 中边不重的 (x,y) 路的最大数目.

7. 欧拉图、欧拉迹的判定

定理 6：下列命题对于非平凡**连通**图 G 是等价的：

(1) G 是欧拉图；

(2) G 的顶点度数为偶数；

(3) G 的边集合能划分为圈.

推论：连通非欧拉图 G 存在欧拉迹当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数 (如何求最短环游).

8. H 图的判定

(1) 定理 7 (必要条件) ：若 G 为 H 图，则对 $V(G)$ 的任一非空顶点子集 S，成立：$\omega(G-S) \le |S|$.

(2) 定理 8 (充分条件)：对于 $n \ge 3$ 的简单图 G，如果 $\delta(G) \ge n/2$，则 G 是 H 图.

(3) 定理 9 (充分条件)：对于 $n \ge 3$ 的简单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有 $d(u)+d(v) \ge n$，则 G 是 H 图.

(4) (充分条件)：设 G 是 $n \ge 3$ 的简单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图.

(5) 定理 10 (闭包定理)：图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图.

(6) 定理 11 (度序列判定法) ：设简单图 G 的度序列是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，这里，$d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_n$，并且 $n \ge 3$. 若对任意的 $m < n/2$，或有 $d_m > m$，或有 $d_{n-m} \ge n-m$，则 G 是 H 图.

(7) 定理 12 (充分条件)：设 G 是 n 阶简单图. 若 $n \ge 3$ 且

$$|E(G)| > \begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1$$

则 G 是 H 图；并且，具有 n 个顶点 $\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1$ 条边的非 H 图只有 $C_{1,n}$ 以及 $C_{2,5}$.

9. 偶图匹配与因子分解

(1) 定理 13（Hull）：设 $G=(X,Y)$ 是偶图，则 G 存在饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是：

$$\text{对}\forall S\subseteq X,\text{有}|N(S)|\geq|S|.$$

(2) 推论: 若 G 是 $k(k>0)$ 正则偶图，则 G 存在完美匹配.

(3) 定理 14：在偶图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数.

(4) 定理 15：K_{2n} 可一因子分解，分解个数 $(2n-1)!!$.

(5) 定理 16：具有 H 圈的三正则图可一因子分解.

(6) 定理 17：K_{2n+1} 可 2 因子分解.

(7) 定理 18：K_{2n} 可分解为一个 1 因子和 $n-1$ 个 2 因子之和.

(8) $2k$ 正则偶图可 2 因子分解.

(9) 定理 19：每个没有割边的 3 正则图是一个 1 因子和 1 个 2 因子之和.

10. 平面图及其对偶图

(1) 定理 20：设 G 是平面图，则次数之和等于 2 倍的边数.

(2) 定理 21 (欧拉公式)：设 $G=(n,m)$ 是连通平面图，φ 是 G 的面数，则 $n-m+\varphi=2$.

(3) 推论 1：设 G 是具有 n 个点 m 条边 φ 个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，有 $\mathrm{def}(f)\geq l\geq 3$，则：

$$m\leq\frac{l}{l-2}(n-2).$$

(4) 推论 2：设 $G=(n,m)$ 是简单平面图，则 $m\leq 3n-6$.

(5) 推论 3：设 G 是简单平面图，则 $\delta(G)\leq 5$.

(6) 平面图 G 的对偶图必然连通.

(7) 设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为简单图 (三角形特征).

11. 着色问题

(1) 定理 24：完全二部图的边色数等于顶点度数的最大值.

(2) 定理 25：二部图的边色数等于顶点度数的最大值.

(3) 定理 26：若 G 是简单图，则边色数要么为最大度，要么等于最大度 $+1$.

(4) 定理 27：设 G 是简单图且 $\Delta(G)>0$. 若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则边色数等于最大度.

(5) 设 G 是简单图. 若点数 $n=2k+1$ 且边数 $m>k\Delta$，则边色数等于最大度 $+1$.

(6) 定理 29：设 G 是奇数阶 Δ 正则简单图，若 $\Delta>0$，则边色数等于最大度 $+1$.

(7) 定理 30 ：对任意的图 G，$\chi(G)\leq\Delta(G)+1$.

(8) 定理 31：若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈又不是完全图，则 $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

(9) 定理 32：设 G 为简单图，则对任意 $e \in E(G)$，有 $P_k(G) = P_k(G-e) - P_k(G \cdot e)$(递推计数法)

(10) 理想子图计数方法 (先画补图)

12. 根树问题

定理 32：在 m 完全元树 T 中，若树叶数为 t，分支点数为 i，则 $(m-1)i = t-1$.

11 特殊图的结论

11.1 偶图

(1) 一个图是偶图当且当它不包含**奇圈**.

(2) n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数 $m = n_1 n_2$，且 $m \leq \lfloor n^2/4 \rfloor$

(3) 设 G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配当且仅当

$$|N(S)| \geq |S|$$

对所有 $S \subseteq X$ 成立.

(4) 若 G 是 k 正则偶图 $(k > 0)$，则 G 有完美匹配.

(5) 在偶图中，最大匹配中的边数等于最小覆盖中的点数.

(6) k 正则偶图 $(k > 0)$ 是 1-可因子化的.

(7) 设 l 是赋权完全偶图 $G = (X, Y)$ 的可行顶点标号，若相等子图 G_l 有完美匹配 M^*，则 M^* 是 G 的最优匹配.

(8) 偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.

(9) 偶图及其补图均为完美图.

(10) k 正则二部图 $(k \geq 2)$ 无割边.

(11) 图 $K_{m,n}(m \leq n)$ 的最小覆盖包含的点数为 m.

11.2 彼得森图

(1) 彼得森图不是 H 图.

(2) 彼得森图有完美匹配.

(3) 彼得森图不可 1-因子分解

(4) 彼得森图是不可平面图.

(5) 彼得森图的边色数为 4，点色数为 3.

(6) 彼得森图的点连通度和边连通度分别为 3 和 3.

12 重点知识梳理 (考查选择填空)

12.1 图的基本概念

1. 3 个顶点的非同构的所有简单图有 4 个，4 个顶点的非同构的所有简单图有 11 个.
2. 具有 m 条边的简单标号图的生成子图的个数为 2^m.
3. 图 $G_1=(n_1,m_1)$ 与图 $G_2=(n_2,m_2)$ 的积图 $G_1\times G_2$ 的点数为$\underline{n_1n_2}$,边数为 $\underline{n_1m_2+n_2m_1}$
4. 图 $G_1=(n_1,m_1)$ 与图 $G_2=(n_2,m_2)$ 的联图 $G_1\vee G_2$ 的点数为$\underline{n_1+n_2}$,边数为 $\underline{m_1+m_2+n_1n_2}$
5. 超立方体 Q_n 是具有 2^n 个顶点，$n2^{n-1}$ 条边的 n 正则二部图.
6. A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数，A^3 的元素 $a_{ii}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍.
7. v_i 到 v_j 长度为 k 的通道的数目是 $a_{ij}^{(k)}$.
8. 矩阵 A 的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.
9. K_n 的最大特征值为 $n-1$.
10. 完全 l 部图 $K_{n_1,n_2,\cdots,n_l}$ 的点数：$\sum_{i=1}^{l}n_i$，边数 $\sum_{1\le i<j\le l}n_in_j$.
11. n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数 $m=n_1n_2$，且 $m\le\lfloor n^2/4\rfloor$.
12. 具有 m 条边的 n 阶简单偶图，则 $m\le\lfloor n^2/4\rfloor$.
13. $K_{l+1}\not\subseteq G$，则 $m(T_{l,n})=C_l^2\left(\frac{n}{l}\right)^2$.

12.2 树

1. 非同构的 4 阶、5 阶、6 阶树的个数分别为 2、3、6.
2. 由 k 颗树组成的森林满足 $m=n-k$.
3. $\tau(K_n)=n^{n-2},\tau(k_{m,n})=n^{m-1}m^{n-1}.K_5=125,K_{3,3}=81$.

12.3 图的连通度

1. 阶数 ≥ 3 的无环连通图，有割边 $\Rightarrow$ 有割点.
2. $(n\ge 3)$ 块没有割边，块有圈.
3. $(1)\kappa(K_n)=n-1,(2)\kappa(C_n)=2$ 其中C_n为n圈$,n\ge 3$.

4. $(1)\lambda(K_n)=n-1,(2)\lambda(C_n)=2$ 其中C_n为n圈$,n\geq 2.$

5. k 连通一定是 k 边连通的.

6. $\kappa(G)\leq\lambda(G)\leq\delta(G)$.

7. $\kappa(G)\leq\lfloor 2m/n\rfloor$.

8. 图 G 的顶点数为 n 且 7 连通，则其边数至少为 $\lceil 7n/2\rceil$.

12.4 Euler 图与 H 图

1. Euler 图没有割边，有可能有割点（八字形的图）

2. $K_{m,n}$（m,n 均为偶数），则欧拉环游中至少包含 mn 条边.

3. 一必要 $(\omega(G-S)\leq|S|)$，三充分 $(\delta(G)\geq\frac{n}{2}$，$d(u)+d(v)\geq n$，闭包是完全图)，一充要 (闭包是 H 图).

4. 若对任意的 $m<n/2$，或有 $d_m>m$，或有 $d_{n-m}\geq n-m$，则 G 是 H 图.

5. (充分条件：)$|E(G)|>\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}+1$，则 G 是 H 图.

6. 具有 5 个点的度极大非哈密尔顿图族为 $C_{1,5}$ 和 $C_{2,5}$.

7. (充分条件：) 若 G 是 $n\geq 3$ 的非 H 简单图，则 G 度弱于某个 $C_{m,n}$ 图.

8. n 阶完全图中 H 圈的个数为 $(n-1)!$.

12.5 匹配与因子分解

1. K_{2n} 和 $K_{n,n}$ 中不同的完美匹配的个数分别是 $(2n-1)!!$，$n!$.

2. 每个没有割边的 3 正则图都有完美匹配.

3. 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配.

4. 彼得森图有完美匹配，3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.

5. 奇数阶图不能有 1-因子.

6. 具有 Hamilton 圈的 3 正则图是 1-可因子化的.

7. 1-可因子分解的 3 正则图不一定有 Hamilton 圈.

8. 若 3 正则图有割边，则不可 1-因子分解.

9. 无割边的 3 正则图可能也没有 1-因子分解.

10. K_{2n} 的不同的 1-因子数目有 $(2n-1)!!$.

11. 一个连通图是 2-可因子化的当且仅当它是偶数度正则图.

12.6 平面图

1. $\sum \deg(f) = 2m$.
2. 简单平面图满足 $m \leq 3n-6$.
3. 设 G 是极大平面图，则 G 必连通；若 G 的阶数至少等于 3，则 G 无割边.
4. 极大平面图：三角形特征.
5. 极大平面图满足：
   (a) $m = 3n–6$；
   (b) $\varphi = 2n–4$.
6. 极大外平面图当且仅当其外部面的边界是圈，内部面是三角形.
7. 极大外平面图有 n–2 个内部面.
8. 每个至少有 7 个顶点的**外可平面图**的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者.
9. 至少有 9 个点的简单**可平面图**的补图是不可平面的，而 9 是这个数目中最小的一个.
10. (a) G^* 的点数 $=$ G 的面数；
    (b) G^* 的边数 $=$ G 的边数；
    (c) G^* 的面数 $=$ G 的点数 (G 连通)；
11. 同构的平面图可以有不同构的对偶图.
12. 图 G 是可平面的当且仅当它不含与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同胚的子图.

12.7 图的着色

1. $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$，偶图的边色数 $\chi' = \Delta$.
2. n 阶简单图 G，若 $n = 2k+1$ 且边数 $m > k\Delta$，则 $\chi' = \Delta + 1$.
3. 设 G 是奇阶 χ 正则简单图，则 $\chi' = \Delta + 1$.
4. n 为奇数，$\chi'(K_n) = (n-1)+1 = n$，$\chi'(C_n) = 2+1 = 3$
5. n 为偶数，$\chi'(K_n) = n-1$，$\chi'(C_n) = 2$
6. 完全图和奇圈的 $\chi = \Delta + 1$.
7. 彼得森图的点色数为 3，边色数是 4.
8. G 是具有 n 个点的树，则 $P_k(G) = k(k-1)^{n-1}$.
9. $P_k(G) = \sum_{i=1}^{n} N_i(\overline{G})[k]_i$.

10. $h(G,x)=\prod_{i=1}^{t} h\left(H_i,x\right)$.

11. 同构的图有相同的色多项式，但其逆不真.

12.8 容易犯错的

1. 关于序列 $(7,5,4,3,3,3,2)$ 只能是非简单图的度序列.

2. 邻接矩阵的所有特征值的平方和等于该图边数的 2 倍.

3. 连通图一定是树 (错)，无圈的连通图一定是树 (对)；无回路但添加一条边后有回路的图是树 (错)，无回路但添加一条边后有唯一回路的图是树 (对).

4. k 连通一定是 k 边连通的．若图 G 是 k 连通的，则 $\kappa(G)\geq k$.

5. 顶点度数为偶数的图一定是欧拉图 (错)，顶点度数为偶数的连通图一定是欧拉图 (对). 且欧拉图一定没有割边（圈），但有可能有割点.

6. 哈密尔顿图一定没有割边，但有可能有割点.

7. 一个图的闭包不一定是完全图，比如长度为 5 的圈.

8. 无割边的 3 正则偶图一定存在完美匹配，3 正则哈密尔顿图存在完美匹配.

9. 无割边的 3 正则图可以 1-因子分解 (错)．$k_{3,3}$ 可以，彼得森图不可以.

10. 有割边的 3 正则图不一定就没有完美匹配，但一定不可 1 因子分解.

11. 完全图 K_{2n} 是 n 个哈密尔顿圈的并 (错)，实际上 K_{2n} 每个点的度数为 $2n-1$，没有 2-因子，自然不可以 2-因子分解.

12. 若 (n,m) 图 G 是极大平面图且 $n\geq 3$，则 $m=3n-6$，若 (n,m) 图 G 是极大外平面图且 $n\geq 3$，则 $m=2n-3(n-m+n-2+1=2)$.

13. 阶数至少为 3 的极大外平面图的每个面均是三角形 (错)，因为它的外部面是多边形，内部面才是三角形.

14. 阶数至少为 3 的极大外平面图一定是哈密尔顿图 (对).

15. G 的点数等于 G^* 的面数 (错)，当 G 连通时才成立.

16. $G\cong(G^*)^*$(错)，当 G 连通时才成立.

17. 若 $G_1\cong G_2$, 则 $G_1^*\cong G_2^*$(错)，同构的图可以有不同构的对偶图.

18. 超立方体 Q_6 的点色数和边色数分别为 2 和 6.

19. 已知树 T 的阶数为 n，则其多项式为 $k(k-1)^{n-1}$.

20. 高度为 h 的完全二元树至少有 $h+1$ 片叶子.

21. 每个至少有 7 个顶点的**外可平面图**的补图不是外可平面图，且 7 是这个数目的最小者.

22. 至少有 9 个点的**简单可平面图**的补图是不可平面的，而 9 是这个数目中最小的一个.

23. 完全图：点色数为 n，边色数为 $n-1$(n 为偶数)，n(n 为奇数)，点连通度和边连通度均为 $n-1$.

24. 在有向图中，顶点的出度之和等于入度之和等于边数；在有向图的邻接矩阵中，所有元素之和等于边数．在无环的有向图的关联矩阵中，各列元素之和均等于 0.

25. 有向强连通图中顶点间的强连通关系是等价关系，而单向连通不是等价关系；有向图 D 中任意一顶点只能处于 D 的某一个强连通分支中，有向图 D 中顶点 v 可能处于 D 的不同的单向连通分支中.

13　一些往年考题

13.1　填空题

1. 已知图 G 有 10 条边，4 个度数为 3 的顶点，其余顶点的度数均小于 2，则 G 中至少有 $\underline{8}$ 个顶点.

2. m 条边的简单图 G 中所有不同的生成子图 (包括 G 和空图) 的个数为 $\underline{2^m}$.

3. 4 个顶点的非同构的简单图有 $\underline{11}$ 个.

4. 不同构的 3 阶单图共有 $\underline{4}$ 个.

5. 设 n 阶图 G 是具 k 个分支的森林，则其边数 $m(G) = \underline{n-k}$.

6. n 阶树 ($n \geq 3$) 的点连通度为 $\underline{1}$；边连通度为 $\underline{1}$；点色数为 $\underline{2}$；若其最大度为 Δ ，则边色数为 $\underline{\Delta}$.

7. 图 G_1 的最小生成树各边权值之和为 $\underline{28}$.

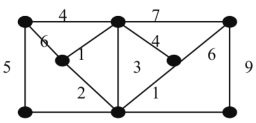


图 G_1

8. 若 W 是图 G 中一条包含所有边的闭通道，则 W 在这样的闭通道中具有最短长度的充要条件是：

   (1) 每一条边最多重复经过 $\underline{1}$ 次；

   (2) 在 G 的每一个圈上，重复经过的边的数目不超过圈的长度的 $\underline{\text{一半}}$.

9. 5 阶度极大非哈密尔顿图族有 $\underline{C_1^5}$ 和 $\underline{C_2^5}$.

10. 6 阶度极大非哈密尔顿图族是 $\underline{C_{1,6}}$.

11. 完全图 K_4 的生成树的数目为 $\underline{16}$；阶为 6 的不同构的树有 $\underline{6}$ 棵.

12. 具有 5 个结点的自补图的个数有 $\underline{2}$ 个.

13. 在有 6 个点，12 条边的简单连通平面图中，每个面均由 $\underline{3}$ 条边组成.（提示：符合外平面图的边数和面数条件，就有三角形特征.）

14. 彼德森图的点色数为 $\underline{3}$；边色数为 $\underline{4}$；点独立数为 $\underline{3}$.

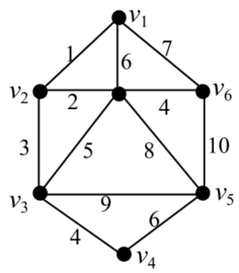
15. 存在好算法的是 $\underline{\text{最优匹配问题}}$.

16. 无向完全图 K_n (n 为奇数)，共有 $\underline{(n-1)!}$ 条没有公共边的哈密尔顿圈.

17. 完全图 K_{2n} 能够分解为 $\underline{(2n-1)}$ 个边不相交的 1 因子之并.

18. 完全图 K_{2n} 有 $\underline{(2n-1)!!}$ 个不同的 1 因子.

19. 下边赋权图中，最小生成树的权值之和为 $\underline{20}$.



20. 若 n 阶单图 G 的最大度是 Δ，则其补图的最小度 $\delta(\overline{G}) = \underline{n-1-\Delta}$.

21. 若 n 阶单图 G 的最小度是 δ，则其补图的最大度 $\Delta(\overline{G}) = \underline{n-1-\delta}$.

22. 若图 $G_1 = (n_1, m_1), G_2 = (n_2, m_2)$，则它们的联图 $G = G_1 \vee G_2$ 的顶点数 $= \underline{n_1 + n_2}$，边数 $= \underline{m_1 + m_2 + n_1 n_2}$.

23. G 是一个完全 l 部图，n_i 是第 i 部的的顶点数 $(i = 1, 2, 3, \cdots, l)$，则它的边数为 $\underline{\sum_{1 \le i < j \le l} n_i n_j}$.

24. 若 $G = K_n$，则 G 的谱 $\mathrm{spec(G)} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & n-1 \\ n-1 & 1 \end{pmatrix}}$.

25. 5 个顶点的不同构的树的棵数为 $\underline{3}$.

26. G 为具有二分类 (X, Y) 的偶图，则 G 包含饱和 X 的每个顶点的匹配的充分必要条件是 $\underline{|N(S) \ge |S| \text{ 对所有的 } S \subseteq X \text{ 都成立}}$.

27. n 方体的点色数为 $\underline{2}$，边色数为 $\underline{n}$.

28. 设 $G = K_{n,n}$，则其最大特征值为 $\underline{n}$.

29. $n(n \geq 3)$ 阶极大外平面图内部面个数为 $\underline{n-2}$；3 阶以上的极大平面图的边数 m 和顶点数 n 的关系为 $\underline{m=3n-6}$.

30. 若自补图 G 的顶点数是 n ，则 G 的边数 $m(G)=\underline{\frac{n(n-1)}{4}}$.

31. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是图 G 的推广的邻接矩阵, 则 $A^k=\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{n\times n}$ (k 是正整数) 的 $a_{ij}^{(k)}$ 表示的意义为 $\underline{\text{由 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 的长度为 } k \text{ 的通道数目}}$.

32. 设 8 阶图 G 中没有三角形，则 G 能够含有的最多边数为 $\underline{16}$.

33. 三角形图的生成树的棵数为 $\underline{3}$.

34. 图 G 是 k 连通的，则 G 中任意点对间至少有 $\underline{k}$ 条内点不交路.

35. $n(n\geq 3)$ 阶极大平面图的边数等于 $\underline{3n-6}$；$n(n\geq 3)$ 阶极大外平面图的顶点都在外部面边界上时，其内部面共有 $\underline{\ n-2\ }$ 个.

36. 完全 m 元根树有 t 片树叶，i 个分支点，则其总度数为 $\underline{mi}$. (或者 $2(i+t-1)$)

37. 图 $G_1=(n_1,m_1)$ 与图 $G_2=(n_2,m_2)$ 的积图 $G_1\times G_2$ 的边数为 $\underline{n_1m_2+n_2m_1}$.

38. 设简单图 G 的邻接矩阵为 A，且 $A^2=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则图 G 的边数为 $\underline{6}$.

39. 设 G 是 n 阶简单图，且不含完全子图 K_3，则其边数一定不会超过 $\underline{\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor}$.

40. 由 3 个连通分支 K_1,K_2,K_4 组成的平面图，则其共有 $\underline{4}$ 个面.

41. 设图 G 与 K_5 同胚，则至少从 G 中删掉 $\underline{1}$ 条边，才可能使其成为可平面图.

42. 奇圈的边色数为 $\underline{3}$.

43. n 阶简单 k 正则图 G 的补图的边数为 $\underline{n(n-1-k)/2}$.

44. 4 个顶点的不同构树的个数为 $\underline{2}$.

45. $2n$ 阶完全图共有 $\underline{(2n-1)!!}$ 个不同的完美匹配.

46. n 完全图的不同定向方式有 $\underline{2^{n(n-1)/2}}$ 种.

47. 图 3 中块的个数为 $\underline{4}$.

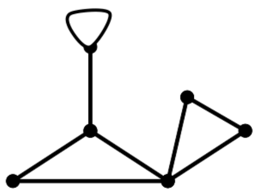


图 3

48. 图 4 中强连通分支的个数为 $\underline{3}$.

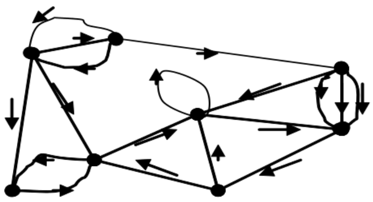


图 4

13.2 选择题

1. 下列说法中不正确的是 (C)

   (A) 每个连通图至少包含一棵生成树；

   (B) k 正则偶图 $(k > 0)$ 一定存在完美匹配；

   (C) 平面图 $G \cong (G^*)$，其中 G^* 表示 G 的对偶图；

   (D) 完全图 K_{2n} 可一因子分解.

2. 关于平面图 G 和其几何对偶图 G^* 的关系，下列说法中不正确的是 (C)

   (A) 平面图 G 的面数等于其对偶图的顶点数；

   (B) 平面图 G 的边数等于其对偶图的边数；

   (C) 平面图 $G \cong (G^*)$，其中 G^* 表示 G 的对偶图；

   (D) 平面图的对偶图是连通平面图.

3. 下列无向图 $G = (n, m)$ 一定是树的是 (D)

   (A) 连通图；

   (B) 无回路但添加一条边后有回路的图；（缺少唯一）

   (C) 每对结点间都有路的图；（缺少唯一）

   (D) 连通且 $m = n - 1$.

4. 下列说法正确的是 (A)

   (A) 非平凡树和 $n(n \geq 2)$ 方体都是偶图；

   (B) 任何一个 3 正则图都可 1-因子分解；(3 正则偶图都可 1-因子分解)

   (C) 可 1-因子分解的 3 正则图中一定存在哈密尔顿圈；(存在 H 圈的 3 正则图可 1-因子分解，反之不成立)

   (D) 平面图 G 的对偶图的对偶图与 G 是同构的. (连通平面图才行)

5. 对于有向图，下列说法不正确的是 (D)

   (A) 有向图 D 中任意一顶点 v 只能处于 D 的某一个强连通分支中；

13.3 证明题

Example 47. 设 G 与其补图 $\overline{G}$ 的边数分别为 m_1, m_2，求 G 的阶数.

Solution. 设 G 的阶数为 n ，

$$m_1 + m_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

所以 $n^2 - n - 2m_1 - 2m_2 = 0$，得 $n = \frac{1+\sqrt{1+8(m_1+m_2)}}{2}$.

Example 48. 证明：

(1) 若 G 恰有两个奇度点 u 与 v，则 u 与 v 必连通；

(2) 一棵树至多只有一个完美匹配 *(10 分)*.

Solution. *(1)* 因为任意一个图的奇度点个数必然为偶数个，若 G 恰有两个奇度点 u 与 v，且它们不连通，那么就会得出一个连通图只有一个奇度点的矛盾结论. 所以若 G 恰有两个奇度点 u 与 v，则 u 与 v 必连通.

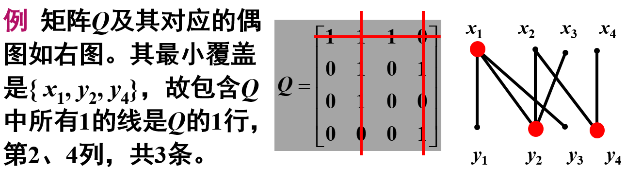
(2) 若树有两个相异的完美匹配 M_1, M_2，则 $M_1 \Delta M_2 \neq \Phi$ 且 $T[M_1 \Delta M_2]$ 中的每个顶点的度数为 2，则 T 中包含圈，这与 T 是树矛盾！

Example 49. 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线，利用哥尼定理证明：布尔矩阵中，包含了所有“1”的最少数目，等于具有性质“任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目”.（注：哥尼定理：在偶图中，最大匹配包含的边数等于最小点覆盖包含的顶点数）

Solution. 设布尔阵是 n 行 m 列矩阵，把它模型为一个偶图如下：每行每列分别用一个点表示，X 表示行点集合，Y 表示列点集合，两点连线．当且仅当该行该列元为 1.

于是，包含了所有“1”的线的最少数目对应偶图中的最小点覆盖数．而具有性质“任意两个 1 都不在同一条线上的 1 的最大数目”对应偶图的最大匹配包含的边数．由哥尼定理，命题得到证明.

注：



Example 50. 求证：在简单连通平面图 G 中，至少存在一个度数小于或等于 5 的顶点 *(10 分)*.

证明. 若不然，$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \geq 6n > 6n - 12 \Rightarrow m > 3n - 6$，这与 G 是简单连通平面图矛盾. □

Example 51. 设图 G 有 10 个 4 度顶点和 8 个 5 度顶点，其余顶点度数均为 7．求 7 度顶点的最大数量，使得 G 保持其可平面性 *(10 分)*

Solution. 分两种情况讨论：

(1) 若 G 是非简单图，则容易知道，满足条件的 7 度顶点数可以为无穷多；

(2) 若 G 是简单图，设 7 度顶点的最大数量为 x，由握手定理得

$$10 \times 4 + 8 \times 5 + 7 \times x = 2m$$

保持可平面性满足 $m \leq 3n-6$，解得 $x \leq 16$.

Example 52. 设 G 是具有 n 个顶点，m 条边，$p(\ p \geq 2)$ 个连通分支的平面图，G 的每个面至少由 $k(k \geq 3)$ 条边所围成，则

$$m \leq \frac{k(n-p-1)}{k-2}.$$

Solution. 根据连通性得

$$n - m + \phi = p + 1$$

根据握手定理得

$$2m \geq \phi k$$

整理的

$$m \leq n - p - 1 + \frac{2m}{k}$$

化简即得

$$m \leq \frac{k(n-p-1)}{k-2}.$$

Example 53. 求证：在 n 阶简单平面图 G 中有 $\phi \leq 2n-4$ ，这里 ϕ 是 G 的面数.

Solution. 对于 n 个点 m 条边的简单连通图有 $m \leq 3n-6$，又根据欧拉公式 $n-m+\phi = 2$，可以推得 $\phi \leq 2n-4$.

Example 54. 求证：设 G 是 n 阶的具有 m 条边的简单连通平面图，则：

$$m \leq 3n-6.$$

Solution. 由于 G 是 n 阶的具有 m 条边的简单连通平面图,所以每个面 f 的次数 $\deg(f) \geq 3$. 由 $\sum_{f\in\Phi} \deg(f) = 2m$ 得到：$\phi \leq \frac{2}{3}m$.

由连通平面图的欧拉公式：$n - m + \phi = 2$，将 $\phi \leq \frac{2}{3}m$ 代入欧拉公式得到 $m \leq 3n-6$.

Example 55. 设 G 是至少有三个面的简单平面图．证明：G 的对偶图 G^* 中至少存在三个度数小于 6 的点.

Solution. 由题意知，G^* 是简单平面图，则每个面 f 的次数 $\deg(f) \geq 3$，由握手定理得

$$2m \geq 3f$$

整理得 $f \leq 2m/3$.

假设只存在两个度数小于 6 的点，那么由握手定理得

$$2m \geq 2 + 6(n-2)$$

整理得 $n \leq m/3 + 5/3$.

根据欧拉公式有

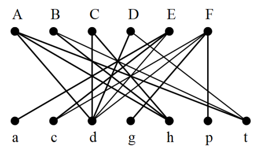
$$2 = n - m + f \leq m/3 + 5/3 - m + 2m/3 = 5/3$$

矛盾，故结论得证！

13.4 匹配问题

Example 56. 由于在考试中获得好成绩，6 名学生 A,B,C,D,E,F 将获得下列书籍的奖励，分别是：代数学 *(a)*，微积分 *(c)*，微分方程 *(d)*，几何学 *(g)*，数学史 *(h)*，规划学 *(p)*，拓扑学 *(t)*．每门科目只有 1 本书，而每名学生对书的喜好是：$A:d,h,t; B:h,t; C:d,h; D:d,t; E:a,c,d; F:c,d,p,g$ ．每名学生是否都可以得到他喜欢的书？为什么？*(*用图论方法求解*)*

Solution. 由题意，得模型图：



问题转化为是否存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配存在．

取顶点子集合 $S=\{A,B,C,D\}$，因 $N(S)=\{d,h,t\}$，所以 $|N(S)|<|S|$，由霍尔定理知：不存在饱和 A,B,C,D,E,F 的匹配．

故每名学生不能都得到他喜欢的书．

Example 57. 今有 a,b,c,d,e,f,g 七个人围圆桌开会，已知：a 会讲英语，b 会讲英语和汉语，c 会讲英语、意大利语和俄语，d 会讲日语和汉语，e 会讲德语和意大利语，f 会讲法语、日语和俄语，g 会讲法语与德语．给出一种排座方法，使每个人能够和他身边的人交流（用图论方法求解）．

Solution. 以 7 个人 a,b,c,d,e,f,g 作为图的顶点，如果两个人说同一种语言，则对应两个顶点之间有边．如此得到无向图 G，寻找 G 的一条哈密顿回路，从任意一个顶点出发，确定回路．比如 $abdfgeca$，按照这个顺序排座，每个人都能和他身边的人交谈．

注：此题将人和语言转换为二部图来做是错误的．

13.5 边着色问题

Example 58. *(10* 分*)* 来自亚特兰大，波士顿，芝加哥，丹佛，路易维尔，迈阿密，以及纳什维尔的 7 支垒球队受邀请参加比赛，其中每支队都被安排与一些其它队比赛 *(*安排如下所示*)*．每支队同一天最多进行一场比赛．建立一个具有最少天数的比赛时间表．

亚特兰大： 波士顿，芝加哥，迈阿密，纳什维尔

波士顿： 亚特兰大，芝加哥，纳什维尔

芝加哥： 亚特兰大，波士顿，丹佛，路易维尔

丹佛： 芝加哥，路易维尔，迈阿密，纳什维尔

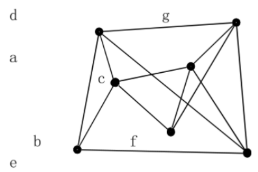
路易维尔： 芝加哥，丹佛，迈阿密

迈阿密： 亚特兰大，丹佛，路易维尔，纳什维尔

纳什维尔： 亚特兰大，波士顿，丹佛，迈阿密

Solution. 建立图论模型，a,b,c,d,e,f,g 分别代表亚特兰大，波士顿，芝加哥，丹佛，路易维尔，迈阿密，以及纳什维尔 7 支垒球队，得模型如下

$$\begin{array}{lll} a \to b,c,f,g & b \to a,c,g \\ c \to a,b,d,e & d \to c,e,f,g \\ e \to c,d,f & f \to a,d,e,g & g \to a,b,d,f \end{array}$$

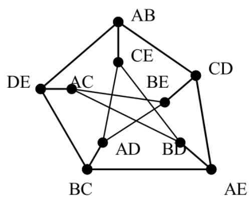


由于 $n = 2\times 3+1$，即 $k=3$，而最大度 $\Delta = 4$，$m = 13 > k\Delta = 12$，所以边色数 $\chi' = \Delta + 1 = 5$，完成比赛至少需要 5 天.

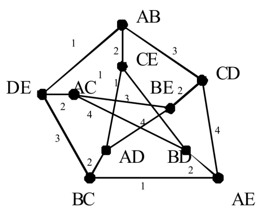
Example 59. 5 个人 A,B,C,D,E 被邀请参加桥牌比赛. 桥牌比赛规则是每一场比赛由两个 2 人组进行对决. 要求每个 2 人组 $\{X,Y\}$ 都要与其它 2 人组 $\{W,Z\}$ *(*$\{W,Z\}\notin\{X,Y\}$*)* 进行对决. 若每个人都要与其他任意一个人组成一个 2 人组，且每个组在同一天不能有多余一次的比赛，则最少安排多少天比赛 (每一天可以有多场比赛)? 请给出相应的一个时间安排表. *(*用图论方法求解*)*

Solution. *(1)* 建模:5 个人能够组成 10 个 2 人组:$AB,AC,AD,AE,BD,BC,BE,CD,CE,DE$.

以每个 2 人组作为顶点，因要求每个 2 人组 $\{X,Y\}$ 都与其它 2 人组 $\{W,Z\}$ 比赛，所以，得到比赛状态图如下:



(2) 最少安排多少天比赛转化为求状态图的边色数 χ'. 因为彼得森图不可 1-因子分解，于是可推出 $\chi' \geq 4$，又可用 4 种色对其正常边着色 *(*见下图*)*，所以: $\chi' \leq 4$. 因此 $\chi' = 4$.



(3) 安排时间表:

第一天: $AB-DE$, $AE-BC$, $AC-BE$, $AD-CE$

第二天: $AB-CE$, $AC-DE$, $AE-BD$, $AD-BC$, $BE-CD$

第三天: $AB-CD$, $BC-DE$, $BD-CE$

第四天: $AC-BD$, $AD-BE$, $AE-CD$

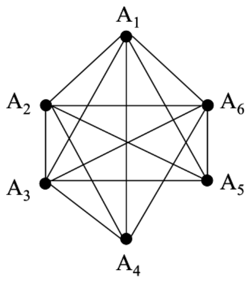
13.6 点着色问题

Example 60. 有 6 名博士生要进行论文答辩，答辩委员会成员分别是

$A_1=$ 张教授，李教授，王教授; A_2 $=$ 赵教授，李教授，刘教授; $A_3=$ 张教授，王教授，刘教授;
$A_4=$ 赵教授，王教授，刘教授; A_5 $=$ 张教授，李教授，孙教授; $A_6=$ 李教授，王教授，刘教授.

要使教授们参加答辩会不至于发生时间冲突，至少安排几次答辩时间段？请给出一种最少时间段下的安排.

Solution. 把每个博士生看成一个顶点，如果两个博士生有共同的答辩委员会成员，则在这两个博士对应的顶点间连一条线，如图 G:



因为一个教授不能同时参加两个博士生的答辩，所以该问题为求解图 G 的点色数.

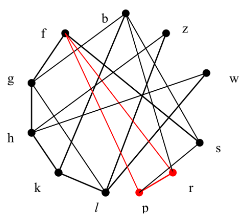
顶点 A_1, A_2, A_3, A_4, A_6 导出的子图为 K_5，所以 $\chi(G) \geq 5$.

又因为 A_5 的度数为 4，所以 $\chi(G) = 5$.

其中一种安排如下：$\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4, A_5\}, \{A_6\}$

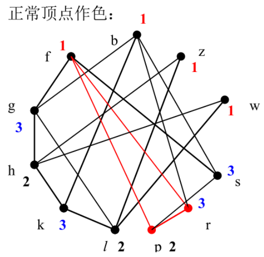
Example 61. 一家公司计划建造一个动物园，他们打算饲养下面这些动物：狒狒 *(b)*、狐狸 *(f)*、山羊 *(g)*、土狼 *(h)*、非洲大羚羊 *(k)*、狮子 *(l)*、豪猪 *(p)*、兔子 *(r)*、鼩鼱 *(s)*、羚羊 *(w)* 和斑马 *(z)*. 根据经验，动物的饮食习惯为：狒狒喜欢吃山羊、非洲大羚羊 *(*幼年*)*、兔子和鼩鼱；狐狸喜欢吃山羊、豪猪、兔子和鼩鼱；土狼喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马；狮子喜欢吃山羊、非洲大羚羊、羚羊和斑马；豪猪喜欢吃鼩鼱和兔子；而其余的则喜欢吃虫子、蚯蚓、草或其它植物. 公司将饲养这些动物，希望它们能自由活动但不能相互捕食. 求这些动物的一个分组，使得需要的围栏数最少. *(*要求用图论方法求解*)*

Solution. 将动物模型为点，两点连线当且仅当两动物相克 *(*有捕食关系*)*，根据题目描述，所作图形如下：



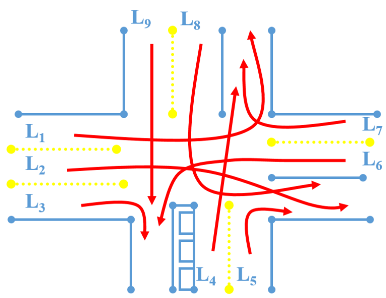
问题转化为求出图的点色数，并用点色数种颜色对其正常点作色.

下面求点色数：一方面，图中存在 K_3 ，所以 $\chi(G) \geq 3$，另一方面，我们用 3 种颜色实现了对图的正常顶点作色：

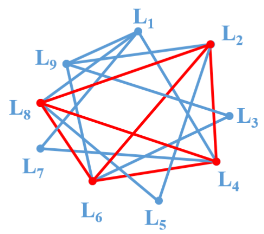


所以，至少需要 3 个围栏．给出的一种最少分组方法为：第一组：狒狒 (b)、狐狸 (f)、羚羊 (w) 和斑马 (z)；第二组：土狼 (h)、狮子 (l)、豪猪 (p)；第三组：山羊 (g)、非洲大羚羊 (k)、兔子 (r)、鼩鼱 (s)．

Example 62. 交通灯的相位设置问题：下图列出了繁华街道路口处的交通车道 $L_1, L_2, \cdots, L_9$．在此路口处安置了交通灯．当交通灯处于某个相位时，亮绿灯的车道上的车辆就可以安全通过路口．为了让所有的车辆最终都能够安全通过路口，对于交通灯来说，所需要的相位的最小数是多少？



Solution. 车道模型为顶点，两点连线当且仅当两个车道上的车不能同时安全地进入路口．

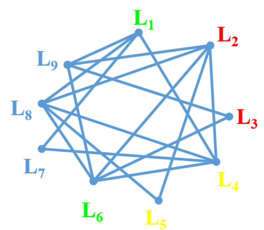


图G

问题转化为求 G 的点色数．

一方面，G 中含有 K_4，所以点色数至少为 4；

另一方面，用 4 种色实现了正常点着色．

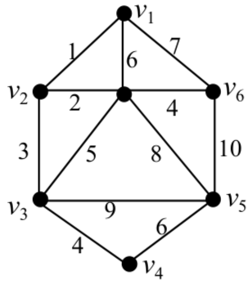


图G

所以，最小相位为 4．

13.7 欧拉环游，H 圈问题

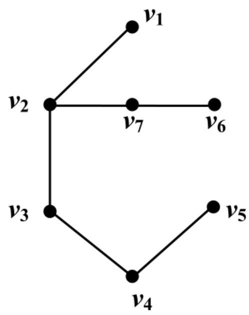
Example 63. 在下面边赋权图中求：*(1)*、每个顶点到点 v_1 的距离 *(*只需要把距离结果标在相应顶点处，不需要写出过程*)*; *(2)*、在该图中求出一棵最小生成树，并给出最小生成树权值 *(*不需要中间过程，用波浪线在图中标出即可*)*；*(3)*、构造一条最优欧拉环游.



Solution. *(1)*

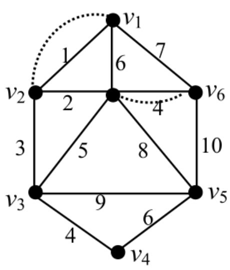
$$
\begin{aligned}
&d(v_1,v_1)=0, \quad d(v_1,v_2)=1, \quad d(v_1,v_3)=4, \quad d(v_1,v_4)=8 \\
&d(v_1,v_5)=11, \quad d(v_1,v_6)=7, \quad d(v_1,v_7)=3.
\end{aligned}
$$

(2) 最小生成树为：



最小生成树的权值为 20.

(3) 因为图中有 4 个度数为奇数的顶点：v_1, v_2, v_6, v_7，所以至少需添加 2 条边. 在 v_1 与 v_2，v_6 与 v_7 之间分别添加一条边，得到欧拉多重图



可以验证在上述欧拉多重图中，每个圈上新添加的边的总权值没有超过整个圈的权值的一半.

因此上述欧拉多重图的任何一个欧拉回路是原图的最优欧拉环游，其中一条为

$$v_1v_2v_3v_7v_5v_3v_4v_5v_6v_7v_2v_1v_7v_6v_1$$

Example 64. 在一个赋权完全图中找到一个具有最小权值的哈密尔顿圈，称这种圈为最优哈密尔顿圈. *(1)*、用边交换技术方法求出图 5 中基于初始圈 $LTP_eP_aN_yM_cL$ 的近似最优哈密尔顿圈；*(2)*、如何获取最优哈密尔顿圈权值的一个下界？以图 5 为例进行说明.

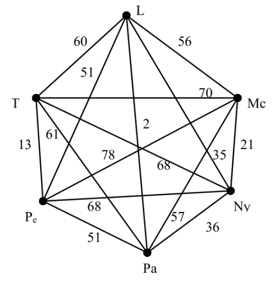
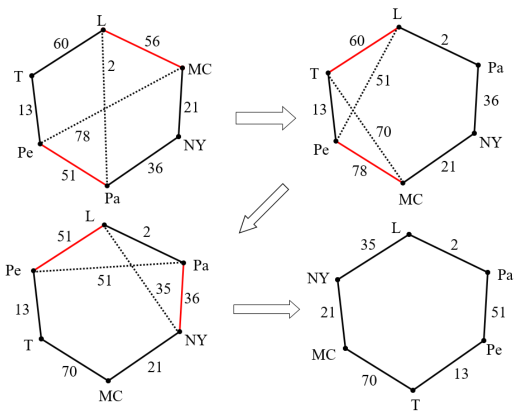


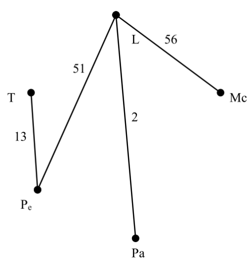
图 5

Solution. *(1)* 采用边交换技术求解，由此获得的一个近似最优解的权值为 192.



(2) 假设 C 是最优哈密尔顿圈，则对于赋权完全图中任意一点 v，$C-v$ 必然是 $G-v$ 的一条哈密尔顿路，因此它也是 $G-v$ 的一棵生成树. 由此，若 T 是 $G-v$ 的一棵最小生成树，同时 e,f 是 G 中与点 v 相关联的两条边，使得它们的权值之和尽可能小，则 $W(C) \geq W(T)+W(e)+W(f)$，即获得最优圈的一个下界.

例如，在图 5 中，取顶点 N_y，求出 $G-Ny$ 的一棵最小生成树为

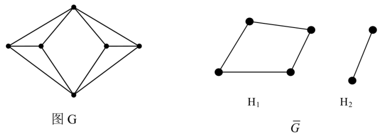


而与 N_y 点相关联的两条权值之和尽可能小的边是 LN_y 与 N_yM_c, 其权值之和为 35+21 = 56. 由此获取最优解的一个下界为 178.

13.8 色多项式

Example 65. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$ *(15 分)*.

Solution. 图 G 的补图如图 $\overline{G}$,



则

$$h\left(H_1, x\right)=r_1 x+r_2 x^2+r_3 x^3+r_4 x^4$$

其中，$r_1=N_1\left(H_1\right)=0, r_2=N_2\left(H_1\right)=2, r_3=N_3\left(H_1\right)=4, r_4=N_4\left(H_1\right)=1$,

$$h\left(H_2, x\right)=r_1 x+r_2 x^2$$

其中，$r_1=N_1\left(H_2\right)=1, r_2=N_2\left(H_2\right)=1$,

因此

$$P_k(G)=\left(x+x^2\right)\left(2 x^2+4 x^3+x^4\right)=[k]_6+5[k]_5+6[k]_4+2[k]_3 .$$

Example 66. 求图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

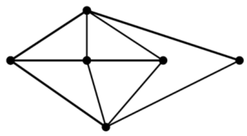
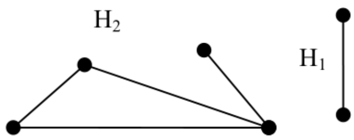


图 G

Solution. 该图的补图 $\overline{G}$ 如下图所示:



它有两个分支，对于 $h\left(H_1, x\right)=x+x^2$，对于 H_2 ： $N_4(H_2)=1, N_3(H_2)=4, N_2(H_2)=2, N_1(H_2)=0$,

$$h\left(H_2, x\right)=2 x^2+4 x^3+x^4$$

所以

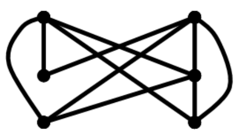
$$\begin{aligned} h(\overline{G}, x) & =\left(2 x^2+4 x^3+x^4\right)\left(x+x^2\right) \\ & =2 x^3+6 x^4+5 x^5+x^6 \end{aligned}$$

于是 G 的色多项式

$$\begin{aligned} P_k(G) & =2[k]_3+6[k]_4+5[k]_5+[k]_6 \\ & =k(k-1)(k-2)^2\left(k^2-5 k+8\right) \end{aligned}$$

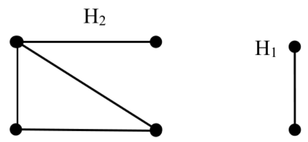
当 $k=3$ 时，$P_K(G) \neq 0$，所以 $\chi(G)=3$.

Example 67. 求下图的 k 色多项式



G

Solution. 它的补图 $\overline{G}$ 如下所示:



接下来的求解和 *Example 66*一样.

Example 68. 求下图 G 的色多项式 $P_k(G)$.

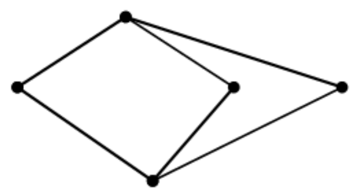
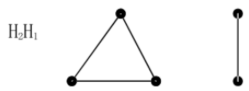


图 G

Solution. 该图的补图 $\overline{G}$ 如下图所示



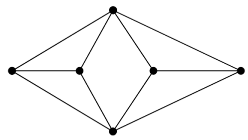
它有两个分支，对于 H_1，$h\left(H_1, x\right)=x+x^2$，对于 H_2，$N_3(G)=1, N_2(G)=3, N_1(G)=1$，$h\left(H_2, x\right)=x+3x^2+x^3$，所以

$$\begin{aligned} h(\overline{G}, x) &= \left(x+3x^2+x^3\right)\left(x+x^2\right) \\ &= x^2+4x^3+4x^4+x^5 \end{aligned}$$

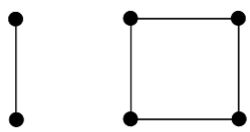
于是 G 的色多项式

$$P_k(G)=[k]_2+4[k]_3+4[k]_4+[k]_5$$

Example 69. 求下图 G 的色多项式 $P_k(G)$. 并求出点色数.



Solution. 图 G 的补图 $\overline{G}$ 为



$\overline{G}$ 具有两个连通分支，分别记为 G_1 和 G_2

G_1 的伴随多项式为 $h_1=x+x^2$

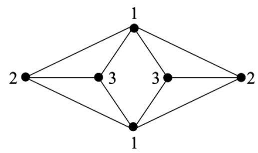
G_2 的伴随多项式为 $h_2 = 2x^2 + 4x^3 + x^4$

所以 $\overline{G}$ 的伴随多项式为 $h = h_1 \times h_2 = 2x^3 + 6x^4 + 5x^5 + x^6$ 因此 G 的色多项式为 $P_k(G) = 2[k]_3 + 6[k]_4 + 5[k]_5 + [k]_6$，其中 $[k]_i = k(k-1)\cdots(k-i+1)$. 整理得

$$P_k(G) = k(k-1)(k-2)^2\left(k^2-5k+8\right) = k^6 - 10k^5 + 41k^4 - 84k^3 + 84k^2 - 32k$$

因为图 G 中包含三角形，所以 $\chi(G) \geq 3$.

用 3 种颜色可以给出图 G 的一种正常点着色，如图：



所以 $\chi(G) = 3$.