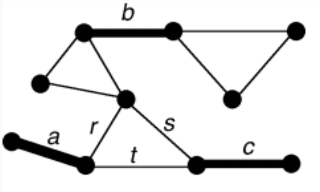
本次课程提纲：图的连通性

- 割边
- 割点
- 块及其性质

割边的定义

- 若 $w(G-e) > w(G)$，称 e 为 G 的一条割边
  - 割边又称为图的桥



割边的性质

定理

e 是图 G 的割边当且仅当 e 不在 G 的任何圈中

$\Longrightarrow$

- 若不然，设 e 在圈 C 中，令 $e = uv$
- 考虑 $P = C - e$，P 是一条连接 u, v 的路
- 下面证明 $G - e$ 连通
  - $\forall x, y \in V(G - e)$，由于 G 连通，所以存在连接 x, y 的路 Q
    - 若 $e \notin Q$，则 x 与 y 在 $G - e$ 里连通
    - 若 $e \in Q$，则可选择路 $x - uPv - y$，说明 x, y 在 $G - e$ 里也连通
- 但这与 e 是 G 的割边矛盾

割边的性质

$\Longleftarrow$

- 若不然，如果 e 不是 G 的割边，则 $G-e$ 连通
- 于是在 $G-e$ 中存在一条连接 x, y 的路
- 该路并上 e 得到 G 中一个包含边 e 的圈，矛盾

推论

e 为连通图 G 的一条边，若 e 含于 G 的某圈中，则 $G-e$ 连通

证明

- 若 $G-e$ 不连通，e 是割边
- 由上面定理，e 不在 G 的任意圈中，矛盾

割边的性质

习题

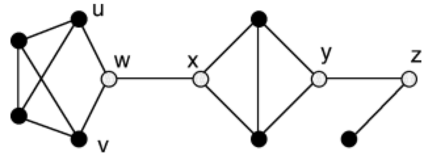
- 证明若 G 的每个顶点的度数均为偶数，则 G 没有割边
- 若 G 为 k 正则二部图 ($k \geq 2$)，则 G 无割边

证明

- 若不然，设 $e = uv$ 为 G 的割边
  - 则 $G - e$ 的含有顶点 u 或 v 的那个分支中点 u 或 v 的度数为奇，而其余点的度数为偶数，与握手定理推论相矛盾！
- 若不然，设 $e = uv$ 为 G 的割边
  - 取 $G - e$ 的其中一个分支 G_1，显然，G_1 中只有一个顶点的度数是 $k-1$，其余点度数为 k，并且 G_1 仍为偶图
  - 若 G_1 的两个顶点子集分别包含 m 与 n 个点，且包含 m 个顶点的子集包含度 $k-1$ 的那个点，有 $km - 1 = kn$
  - 但是因 $k \geq 2$，所以等式不能成立！

割点的定义

- 如 $E(G)$ 可划分为两个非空子集 E_1, E_2，使 $G(E_1)$ 和 $G(E_2)$ 以点 v 为公共顶点，称 v 为 G 的割点



割点的性质

定理

无环非平凡图 G，v 是 G 的割点，当且仅当 $w(G-v) > w(G)$

证明

- 充分性由割点定义立得，下证必要性
- 由于 G 无环，$G(E_1)$ 和 $G(E_2)$ 分别至少包含异于 v 的点
- $G-v$ 的分支数比 G 的分支数至少多 1

割点的性质

定理

v 是树 T 的割点，当且仅当 v 是分支点

证明

- $\Longrightarrow$：若不然，有 $d(v) = 1$，即 v 是树叶，显然不能是割点
- $\Longleftarrow$：设 v 是分支点，则 $d(v) > 1$
- 设 x, y 是 v 的邻点，由树的性质，只有唯一路连接 x, y
- 所以 $G - v$ 分离 x 与 y，即 v 为割点

割点的性质

定理

v 是无环连通图 G 的割点，当且仅当 $V(G-v)$ 可以划分为两个非空子集 V_1, V_2，$\forall x \in V_1, y \in V_2$，$v$ 在每一条连接 x 与 y 的路上

$\Longrightarrow$

- $G-v$ 至少有两个连通分支 V_1, V_2，构成 V 的划分
- $\forall x \in V_1, y \in V_2$，如 v 不在某一条连接 x 与 y 的路上，
- 该路也是连接 $G-v$ 中的 x 与 y 的路，与 x, y 处于 $G-v$ 的不同分支矛盾

$\Longleftarrow$

- 若 v 不是 G 的割点，那么 $G-v$ 连通
- $G-v$ 中存在 x, y 路，也是 G 中一条没有经过 v 的 x, y 路，矛盾

割点的性质

习题

求证：无环非平凡连通图至少有两个非割点

证明

- 由于 G 是无环非平凡连通图，所以存在非平凡生成树
- 非平凡生成树至少两片树叶，它不能为树割点，所以，也不能为 G 之割点

割点的性质

习题

求证：恰有两个非割点的连通单图是一条路

证明

- 设 T 是 G 生成树
- 由于 G 有 $n-2$ 个割点，所以，T 有 $n-2$ 个割点，
- 即 T 只有两片树叶，所以 T 是一条路
- 这说明，G 的任意生成树为路
- 一个单图的任意生成树为路，则该图为圈或路
- 若为圈，则 G 没有割点，矛盾，所以，G 为路

割点的性质

习题

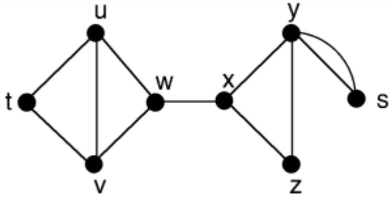
求证：若 v 是单图 G 的割点，则它不是 G 的补图的割点

证明

- 任取异于 v 的 x, y
  - 若 x, y 在 $G - v$ 的相同分支中，令 u 是与 x, y 处于不同分支的点，通过 u 可说明，x 与 y 在 G 的补图中连通
  - 若 x, y 在 $G - v$ 的不同分支中，则它们在 G 的补图中邻接
  - 所以，若 v 是 G 之割点，则 v 不是其补图之割点

块的定义

- 没有割点的连通图称为块图，简称块
- 满足如下性质的 G 的子图 B 称为 G 的块
  - 它本身是块
  - 没有真包含 B 的 G 的块存在



A graph with four blocks
$\{t, u, w, v\}$, $\{w, x\}$, $\{x, y, z\}$, and $\{y, s\}$

块的性质

定理

若简单图 G 满足 $|V(G)| \geq 3$，则 G 是块的充要条件为其中任意两顶点位于同一圈上

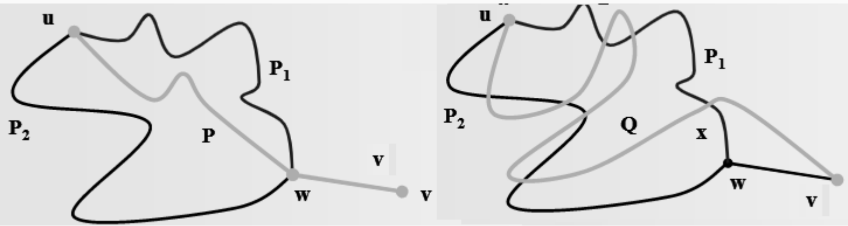
$\Longrightarrow$

- 对任意 $u, v \in V(G)$，对 $d(u, v)$ 作归纳
- $d(u, v) = 1$ 时，由于 $|V(G)| \geq 3$，uv 不能为割边，否则，u 或 v 为割点，矛盾，由割边性质，u, v 必然在某圈中
- 设当 $d(u, v) < k$ 时结论成立。考察 $d(u, v) = k$

块的性质

$\Longrightarrow$

- 设 P 是一条最短 $u-v$ 路，w 是 v 前面一点，则 $d(u,w)=k-1$
- 由归纳假设，u,w 在同一圈 $C=P_1\cup P_2$ 上
- 考虑 $G-w$: 由于 G 是块，所以 $G-w$ 连通，设 Q 是 $G-w$ 中的 $u-v$ 路，设它与 C 的最后一个交点为 x
- 则 $u-P_1-x-v-w-P_2$ 为包含 u,v 的圈



块的性质

$\Longleftarrow$

- 若 G 不是块，则 G 中有割点 v，$G - v$ 至少两个分支
- 设 x, y 是 $G - v$ 的两个不同分支中的点，x, y 在 G 中不能位于同一圈上，矛盾

块的性质

定理

v 是 G 的割点当且仅当 v 至少属于 G 的两个不同块

$\Longrightarrow$

- 由割点定义：$E(G)$ 可以划分为两个边子集 E_1, E_2，有唯一公共顶点 v
- 设 B_1, B_2 分别是 $G(E_1), G(E_2)$ 中包含 v 的块，它们也是 G 的块。因此 v 至少属于 G 的两个不同块

$\Longleftarrow$

- 设包含 v 的两个块是 B_1, B_2，两个块分别至少有两个顶点
- 假如 v 不是割点，在 B_1, B_2 中分别找异于 v 的点 x, y, 则在 $G - v$ 中有连接 x, y 的路 P
- 显然：$B_1 \cup B_2 \cup P$ 无割点。这与 B_1, B_2 是块矛盾！

课后练习与思考题

- 请设计求一个图的块的算法