中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

图的边着色

(一)、相关概念

(二)、几类特殊图的边色数

(三)、边着色的应用

(一)、相关概念

现实生活中很多问题，可以模型为所谓的边着色问题来处理。例如排课表问题。

排课表问题：设有m位教师，n个班级，其中教师x_i要给班级y_j上p_{ij}节课。求如何在最少节次排完所有课。

建模：令$X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$，$Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$，$x_i$与$y_j$间连$p_{ij}$条边，得偶图$G = (X, Y)$.

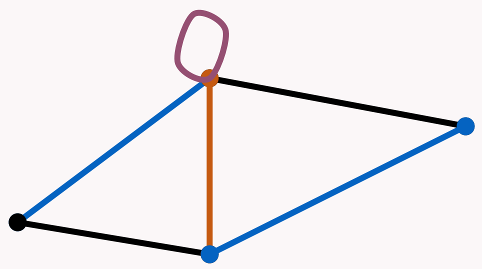
于是，问题转化为如何在G中将边集E划分为互不相交的p个匹配，且使得p最小。

如果每个匹配中的边用同一种颜色染色, 不同匹配中的边用不同颜色染色, 则问题转化为在G中给每条边染色，相邻边染不同色，至少需要的颜色数。

这就需要我们研究所谓的边着色问题。

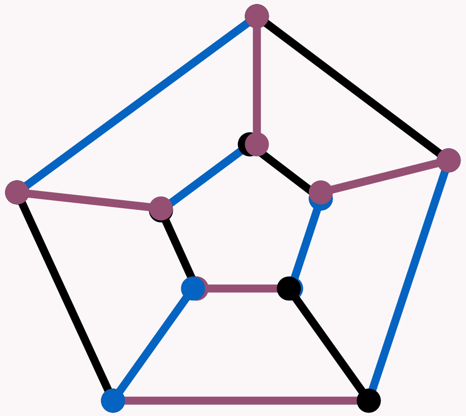
定义1 设G是图，对G的边进行染色，若相邻边染不同颜色，则称**对G进行正常边着色**；

如果能用k种颜色对图G进行正常边着色，称G**是k边可着色的**。



正常边着色

定义2 设G是图，对G进行正常边着色需要的最少颜色数，称为G**的边色数**，记为：$\chi'(G)$.



$\chi'(G) = 3$

注：对图的正常边着色，实际上是对G的边集合的一种划分，使得每个划分块是G的一个边独立集(无环时是匹配)； 图的边色数对应的是图的最小独立集划分数。

因此，图的边着色，本质上是对应实际问题中的“划分”问题或“分类”问题。

在对G正常边着色时，着相同颜色的边集称为该正常着色的一个色组。

(二)、几类特殊图的边色数

1、偶图的边色数

定理1 $\chi'(K_{m,n})=\Delta$

证明：设$X=\{x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}\}$，$Y=\{y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}\}$

又设$\Delta=n$. 设颜色集合为$\{0,1,2,\ldots,n-1\}$，π是$K_{m,n}$的一种n着色方案，满足：

$$\forall x_iy_j\in E\left(K_{m,n}\right),\pi\left(x_iy_j\right)=(i+j)(\operatorname{mod}n).$$

我们证明：上面的着色是正常边着色。

对$K_{m,n}$ 中任意的两条邻接边$x_i y_j$和$x_i y_k$．若

$$\pi(x_i y_j) = \pi(x_i y_k),$$

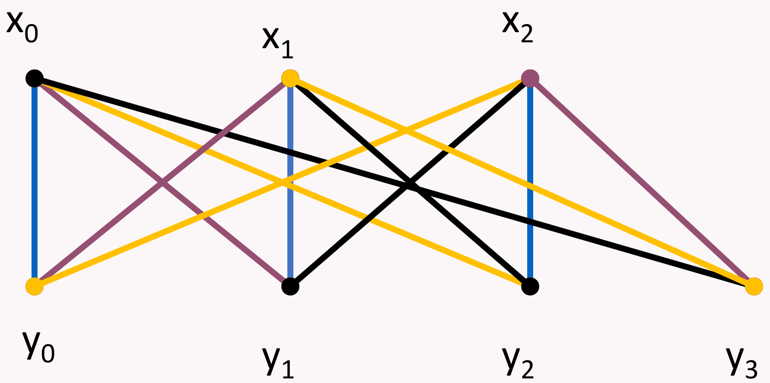
则：$i + j(mod\, n) = i + k(mod\, n)$，得到$j = k$，矛盾！

所以，上面着色是正常作色。于是有：

$$\chi'(K_{m,n}) \le n.$$

又显然$\chi'(K_{m,n}) \ge \Delta = n$，所以， $\chi'(K_{m,n}) = \Delta$.

例1 用最少的颜色数对$k_{3,4}$正常边着色。



定义3 设π是G的一种正常边着色，若点u关联的边的着色没有用到色i，则称**点u缺i色**。

定理2（哥尼，1916）若G是偶图，则$\chi'(G)=\Delta.$

证明：我们对G的边数m作数学归纳。

当$m=1$时，$\Delta=1$，有$\chi'(G)=\Delta=1.$

设对于小于m条边的偶图来说命题成立。

设G是具有m条边的偶图。

取$uv \in G$，考虑$G_1 = G - uv$，由归纳假设有：

$$\chi'(G_1) = \Delta(G_1) \leq \Delta(G).$$

这说明，G_1存在一种$\Delta(G)$边着色方案π．对于该着色方案，因为uv未着色，所以点u与v均至少缺少一种色。

情形1 如果u与v均缺同一种色i，则在$G_1 + uv$中给uv着色i，而G_1其它边，按π方案着色。这样得到G的Δ着色方案，所以：

$$\chi'(G) = \Delta.$$

情形2 如果u缺色i，而v缺色j，但不缺色i.

设$H(i,j)$表示G_1中由i色边与j色边导出的子图。显然，该图每个分支是i色边和j色边交替出现的路或圈。

对于$H(i,j)$中含点v的分支来说，因v缺色j，但不缺色i，所以，在$H(i,j)$中，点v的度数为1。这说明，$H(i,j)$中含v的分支是一条路P.

进一步地，我们可以说明，上面的路P不含点u.

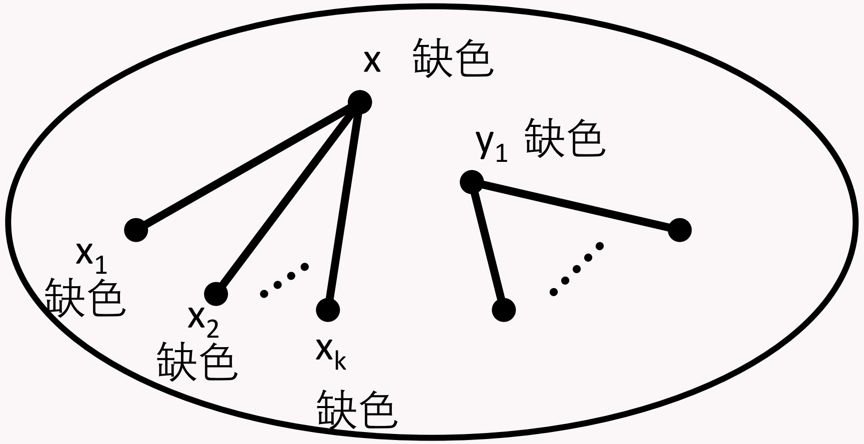
因为，如果P含有点u，那么P必然是一条长度为偶数的路，这样，$P+uv$是G中的奇圈，这与G是偶图矛盾！

既然P不含点u，所以我们可以交换P中着色，而不破坏G_1的正常边着色。但交换着色后，u与v均缺色i，于是由情形1，可以得到G的Δ正常边着色，即证明：

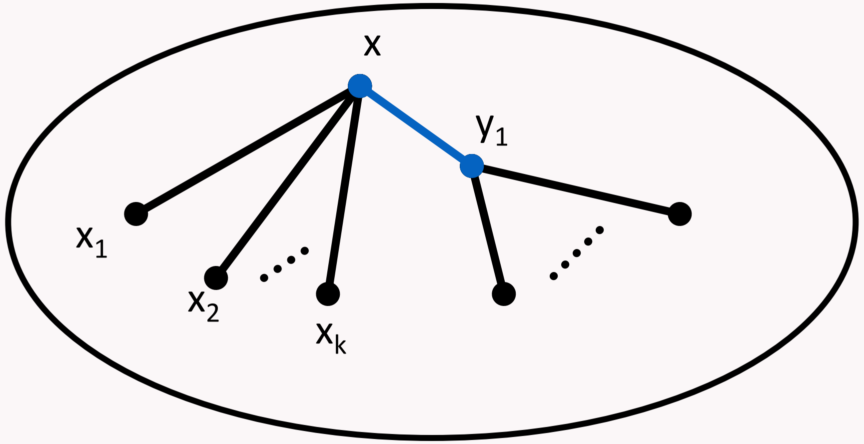
$$\chi'(G)=\Delta.$$

2、一般简单图的边色数

引理： 设G是简单图，x与y_1是G中不相邻的两个顶点，π是G的一个正常k边着色。若对该着色π，x, y_1以及与x相邻点均至少缺少一种颜色，则$G+xy_1$是k边可着色的。



正常k边着色图G



正常k边着色图G_1

定理3（维津Vizing定理，1964）若G是单图，则：

$$\chi'(G) = \Delta \text{ 或 } \chi'(G) = \Delta+1.$$

证明：只需要证明$\chi'(G) \leq \Delta+1$即可。

对G的边数m作数学归纳证明。

当$m = 1$时，$\Delta=1$， $\chi'(G)=1 < \Delta+1.$

设当边数少于m时，结论成立。下面考虑边数为$m \geq 2$的单图$G.$

设$xy \in E(G)$，令$G_1 = G - xy$. 由归纳假设有：

$$\chi'(G_1) \leq \Delta(G_1)+1 \leq \Delta(G)+1.$$

于是，存在G_1的$\Delta(G)+1$正常边作色π. 显然G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色。根据引理知G_1+xy是$\Delta(G)+1$ 可着色的。即证明：

$$\chi'(G)\leq\Delta(G)+1.$$

注：(1）根据维津定理，单图可以按边色数分成两类图，一是色数等于$\Delta(G)$的单图，二是色数等于$\Delta(G)+1$的单图。

(2）维津(Vizing)：1937年出生于乌克兰的基辅。1954年开始在托木斯克大学学习数学，1959年大学毕业保送到莫斯科斯特克罗夫研究所攻读博士学位，研究函数逼近论。但这不是他的兴趣所在，因此没有获得学位。1966年在季科夫的指导下获得博士学位。和大多数数学家一样，维津在音乐方面具有一定才能。

维津在攻读博士学位期间，发现并证明了上面的维津定理。他当时把论文投向一家非常著名的杂志，但由于审稿人认为问题本身没有意义而遭到拒绝。后来在另外一家地方杂志发表时，定理早已出名。

维津认为：一名数学家应该不断研究与发现新结果，然后让时间来检验其重要性。

3、三类特殊简单图的边色数

定理4 设G是单图且$\Delta(G) > 0$. 若G中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则：

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

证明:

（1）若单图G恰有一个最大度点u, 取u的一个邻点v, 作$G_1 = G - uv$.

那么，$\Delta(G_1) = \Delta(G) - 1$. 由维津定理：

$$\chi'(G_1) \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G).$$

于是G_1是可$\Delta(G)$正常边着色的，因为G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理： $G_1 + uv = G$是可$\Delta(G)$正常边着色的，即：

$$\chi'(G) = \Delta(G).$$

（2）若单图G恰有2个邻接的最大度点u与v. 设$G_1 = G - uv$.

那么，$\Delta(G_1) = \Delta(G) - 1$. 由维津定理：

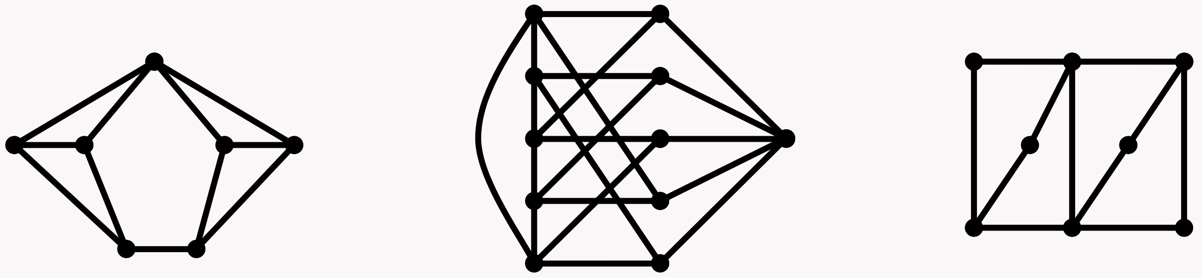
$$\chi'(G_1) \leq \Delta(G) - 1 + 1 = \Delta(G).$$

于是G_1是可$\Delta(G)$正常边着色的，因为G_1的每个顶点都至少缺少一种颜色，所以由引理： $G_1+uv=G$是可$\Delta(G)$ 正常边着色的，即：

$$\chi'(G)=\Delta(G).$$

■

例2 确定下图的边色数。



G_1 G_2 G_3

解：由定理4知道：

$$\chi'(G_1)=4,\quad \chi'(G_2)=5,\quad \chi'(G_3)=4.$$

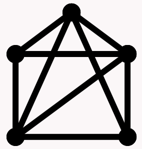
定理5 设G是单图。若点数$n=2k+1$且边数$m>k\Delta$, 则：

$$\chi'(G)=\Delta(G)+1.$$

证明：若不然，由维津定理， $\chi'(G)=\Delta(G)$.

设π是G的$\Delta(G)$ 正常边着色方案，对于G的每个色组来说，包含的边数至多$(n-1)/2=k$. 这样：$m(G)\leq\Delta k$, 与条件矛盾。

例3 确定下图的边色数。



G

解：由定理5： $\chi'(G)=\Delta(G)+1=5.$

定理6 设G是奇数阶Δ正则单图, 若$\Delta > 0$，则：

$$\chi'(G) = \Delta(G) + 1.$$

证明：设$n = 2k + 1$．因G是Δ正则单图，且$\Delta > 0$，所以：

$$m(G) = \frac{n\Delta}{2} = \frac{(2k+1)\Delta}{2} > k\Delta.$$

由定理5： $\chi'(G) = \Delta(G) + 1.$

例4 设$n = 2k + 1, k > 0$．求$\chi'(C_n)$，$\chi'(K_n)$.

解：由定理6知：

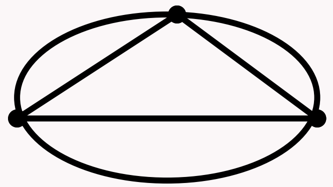
$$\chi'(C_n) = 2 + 1 = 3,$$

$$\chi'(K_n) = (n - 1) + 1 = n.$$

定理7 （Vizing定理）设无环图G中边的最大重数为μ，则

$$\chi'(G) \leq \Delta + \mu.$$

例8　下图是一个边色数达到$\Delta + \mu$的图，其中$\Delta = 4, \mu = 2$.



(三)、边着色的应用

边着色对应的实际问题就是图的匹配分解问题。边色数对应的是最小匹配分解问题。所以，生活中的许多问题都可模型为边着色问题来解决。

例1（排课表问题）在一个学校中, 有7个教师12个班级。在每周5天教学日条件下, 教课的要求由如下矩阵给出:

$$
P = \begin{array}{l}
\quad \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{matrix} \\
\begin{pmatrix}
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix}
\end{array}
$$

其中， p_{ij}表示x_i必须教y_j班的节数。求：

（1）一天分成几节课，才能满足所提出的要求？

（2）若安排出每天8节课的时间表，需要多少间教室？

解：问题可模型为一个偶图

一节课对应边正常着色的一个色组。由于G是偶图，所以边色数为G的最大度35。这样，最少总课时为35节课。平均每天要安排7节课。

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{array} \\
P = & \begin{pmatrix}
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array}
\end{array}
$$

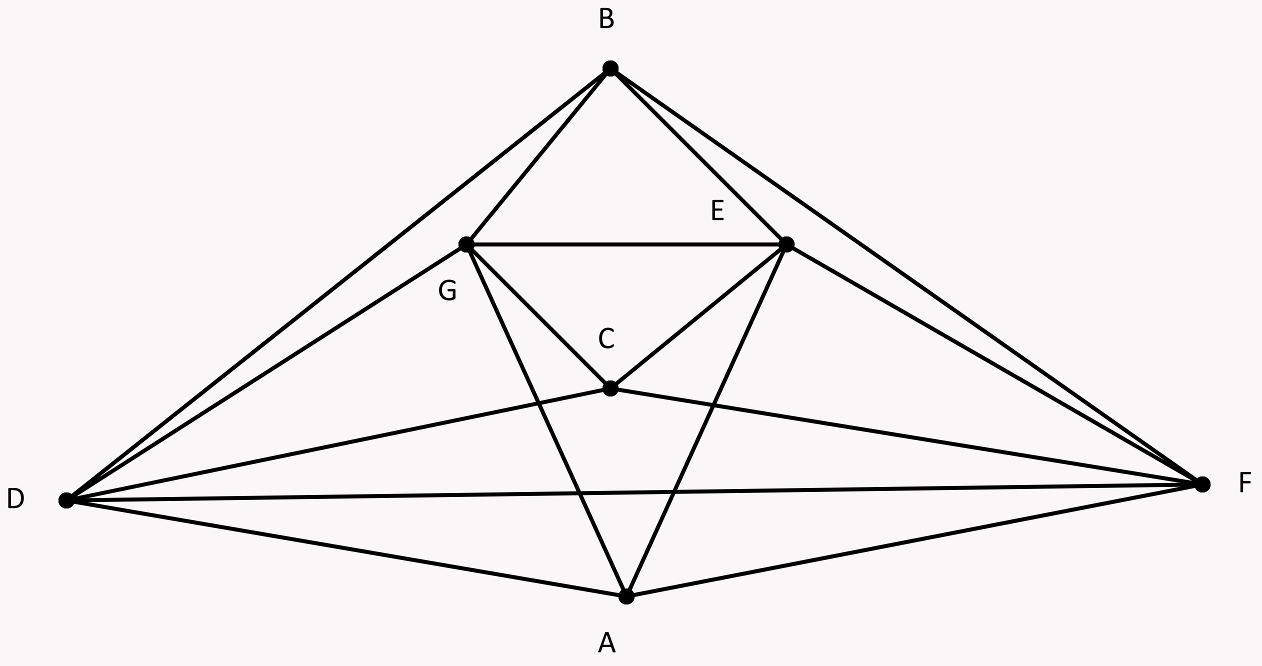
如果每天安排8节课，因为G的总边数为240，所以需要的教室数为$240/40 = 6$.

例2（比赛安排问题）Alvin (A)曾邀请3对夫妇到他的避暑别墅住一个星期。他们是：Bob和Carrie ，David和Edith，Frank和Gena. 由于这6人都喜欢网球运动，所以他们决定进行网球比赛。6位客人的每一位都要和其配偶之外的每位客人比赛。另外，Alvin将分别和David， Edith， Frank， Gena进行一场比赛。若没有人在同一天进行2场比赛，则要在最少天数完成比赛，如何安排？

解：用点表示参赛人，两点连线当且仅当两人有比赛。这样得到比赛状态图。

问题对应于求状态图的一种最优边着色(用最少色数进行正常边着色)。

状态图为：

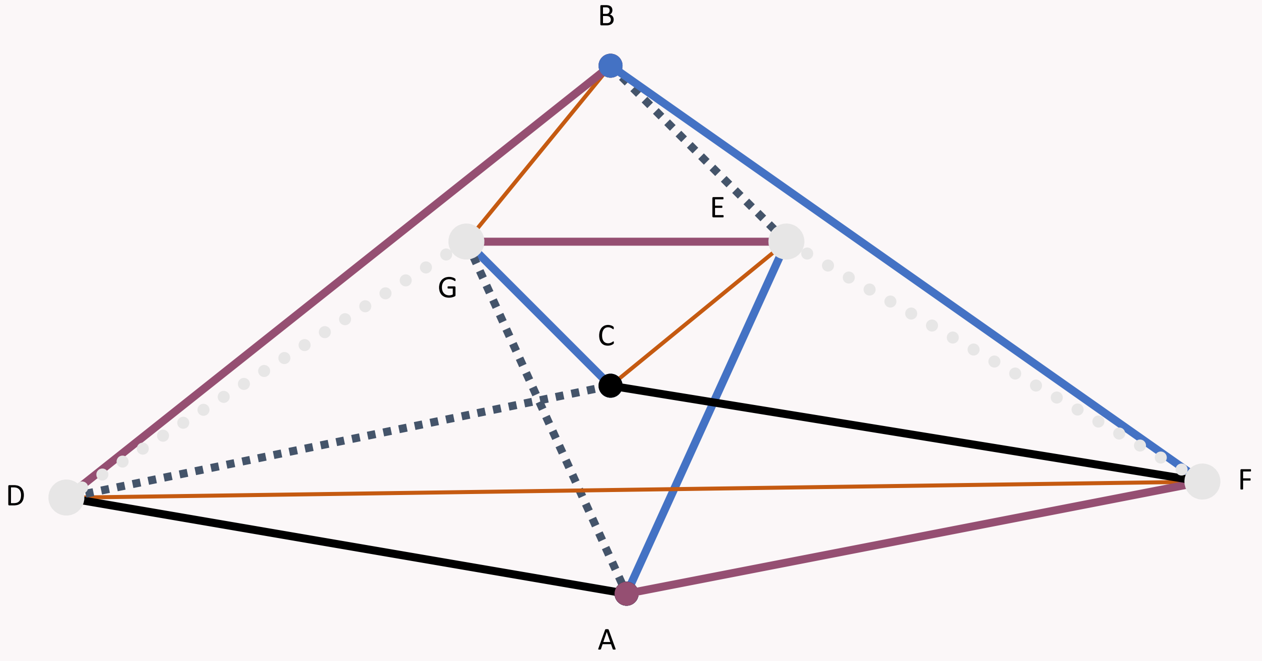


图G

由于$n = 2 \times 3 + 1$，所以$k = 3$．而$\Delta = 5, m = 16 > 3 \times 5 = k\Delta$，所以由定理5知：

$$\chi'(G) = \Delta + 1 = 6.$$

最优着色为：



图G

Thank You !