# 图论及其应用：第二次作业

**注意** 请回答任意六题，并将答案在北京时间六月十日午夜前发送至`2160853158@qq.com`，邮件题目中请注明姓名学号

**题一** 某医院急诊某夜有 169 名病人需要输血，假设每人需要 1 个单位的血量，对 $A, B, O, AB$ 四种血型的需求分别是 $39, 38, 42, 50$ 单位，医院共有 170 单位的储备，对应 $A, B, O, AB$ 分别为 $46, 34, 45, 45$ 单位。

- 请用最大流模型求解最多可以满足多少病人；
- 找出一个容量小于 169 的割，并向精通医学然而并不十分精通图论的医院工作人员用他们可以理解的方式解释为什么不能满足所有病人。

**题二** 已知图中任何两条边的权值不相等，证明以下两个结论成立：

- 任何割中的最短的边在所有的最小生成树中；
- 任何圈中的最长边不在任何一棵最小生成树中。

**题三** 给定任一有偶数条边且每个顶点度数为偶数的连通图 $G$，证明可以把每条边染成黑白两种颜色中的一种，对每个顶点，与之相连的黑边与白边一样多。

**题四** $G = (V, E)$ 为简单 Euler 图，证明或推翻以下推断：

- 若 $G$ 是偶图，则 $m = |E|$ 为偶数；
- 若 $n = |V|$ 是偶数，则 $m$ 也是偶数；
- $e$ 与 $f$ 为关联的两条边，他们必然连续出现在某条 Euler 回路里。

**题五** 给定每边长度均为 1 的连通偶图 $G$ 以及顶点 $v \in V(G)$，证明对 $G$ 中所有的边 $xy \in E(G)$，$v$ 到 $x$ 的最短路不可能和 $v$ 到 $y$ 的最短路一样长。

**题六** 证明 Peterson 图不是 H 图。

**题七** 对 $n \geq 4$，如果 $n$ 阶完全图 $K_n$ 可以被划分成边不交的长度为 4 的圈，证明 $n = 1 \bmod 8$。

**题八** 给定一棵树 $T$ 以及 $T$ 的 $k$ 棵子树 $T_1, T_2, \cdots, T_k$，已知这 $k$ 棵子树两两均有公共顶点，即对任意 $1 \leq i < j \leq k$ 有 $V(T_i) \cap V(T_j) \neq \emptyset$，证明 $V(T_1) \cap V(T_2) \cap \cdots \cap V(T_k) \neq \emptyset$。

**题九** $C$ 为简单图 $G$ 的一个点不重复的圈，已知有一条长度为 $k$ 的路 $P$ 连接 $C$ 上的两个顶点 $x$ 与 $y$，证明 $G$ 包含一条长度至少为 $\sqrt{2k}$ 的点不重复的圈。

**题十**　证明对于如下图，如果 $\phi = (\sqrt{5}-1)/2$，Ford-Fulkerson 最大流算法可能永远不会终止。