中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

网络的容错性参数

(一)、连通度的概念与性质

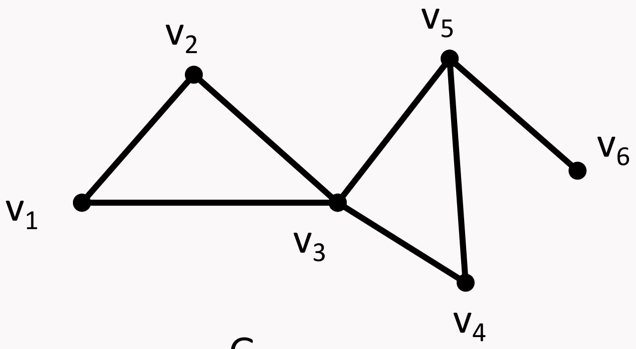
(二)、描述连通性的其它参数简介

(一)、连通度的概念与性质

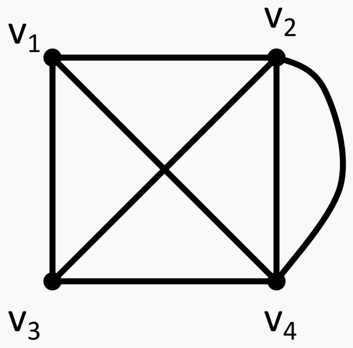
1、点连通度与边连通度的概念

定义1 给定连通图G，设$V' \subseteq G$，若$G-V'$不连通，称V'为G的一个<u>点割集</u>，含有k个顶点的点割集称为k<u>顶点割</u>。G中点数最少的顶点割称为<u>最小顶点割</u>。

例如：



G_1



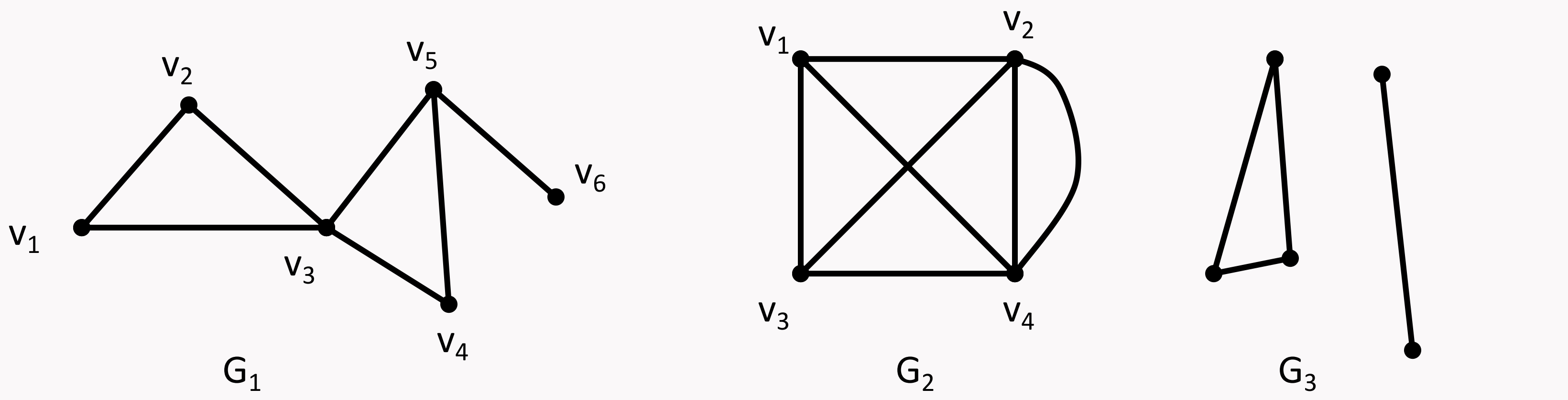
G_2

在G_1中：(v_3), (v_5, v_3), (v_5, v_4)等是点割集。

在G_2中没有点割集。

定义2 在G中，若存在顶点割，称G的最小顶点割的顶点数称为G的点连通度；否则称$n-1$为其点连通度. G的点连通度记为$\kappa(G)$, 简记为κ; 若G不连通，$\kappa(G)=0$.

例如：



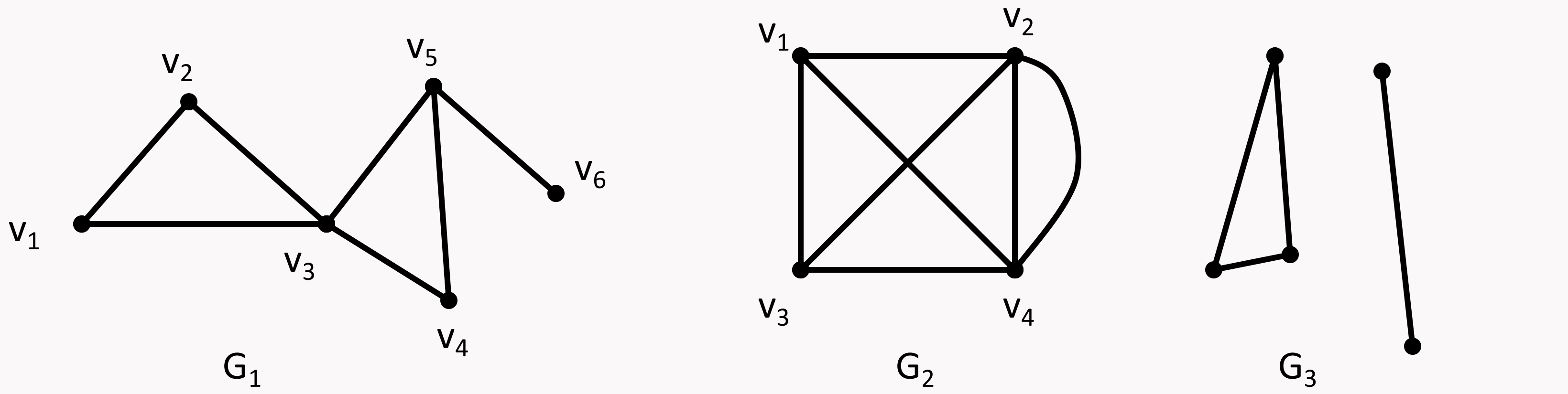
G_1的点连通度$\kappa(G_1)=1$;

G_2的点连通度为$\kappa(G_2)=3$;

G_3的点连通度为$\kappa(G_3)=0$.

定义3 在G中，最小边割集所含边数称为G的<u>边连通度</u>。边连通度记为$\lambda(G)$ 。若G不连通或G是平凡图，则定义$\lambda(G) = 0$.

例如：



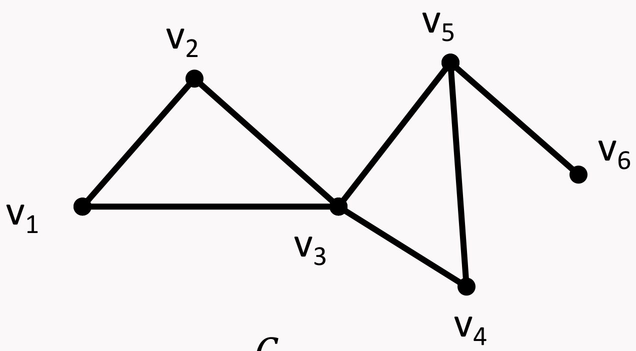
G_1的边连通度$\lambda(G_1) = 1$;

G_2的边连通度为$\lambda(G_2) = 3$;

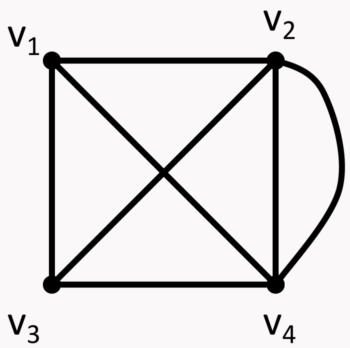
G_3的边连通度为$\lambda(G_3) = 0$.

定义4 在G中，若$\kappa(G) \geq k$, 称G是k连通的；若$\lambda(G) \geq k$, 称G是k边连通的。

例如：



G_1



G_2

G_1是1连通的，1边连通的。但不是2连通的。

G_2是1连通的，2连通的，3连通的，同时也是1边连通的，2边连通的，3边连通的。但不是4连通的。

2、连通度的性质

定理1（惠特尼1932）对任意图G，有：

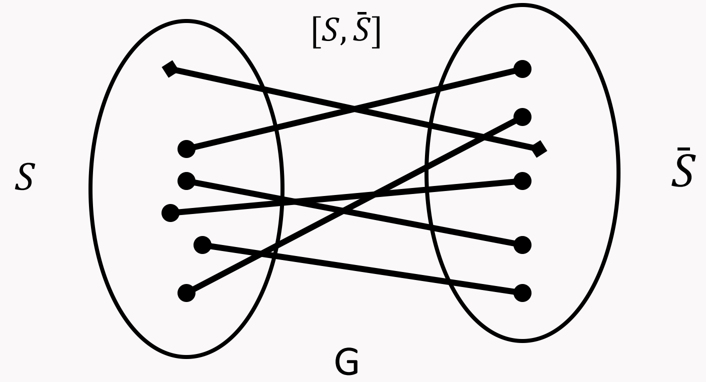
$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

证明：若G平凡或不连通，$\kappa(G) = \lambda(G) = 0$，显然成立；否则，$G$为非平凡连通图。

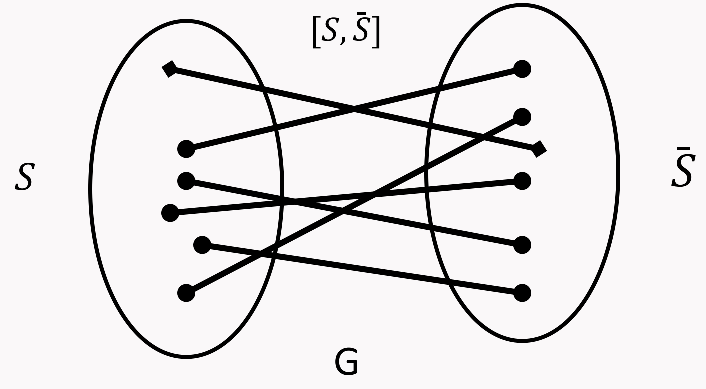
（1）先证明$\lambda(G) \le \delta(G)$：最小度顶点的关联集作成G的断集，所以：$\lambda(G) \le \delta(G)$.

（2）再证明$\kappa(G) \le \lambda(G)$

由定义，$\kappa(G) \le n-1$. 考虑最小边割集$[S,\bar{S}]$



情形1　S中点与$\bar{S}$中点均连接



则有：$|[S,\bar{S}]| = |S|\cdot|\bar{S}| \geq n-1 \geq \kappa(G)$

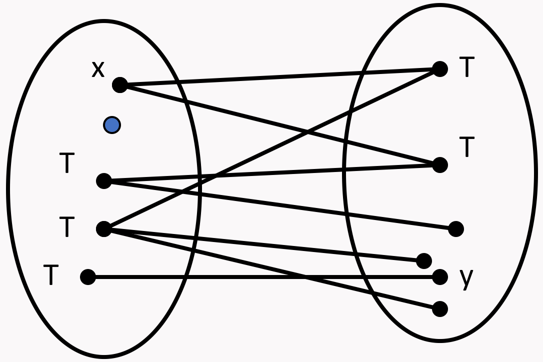
所以有：$\kappa(G) \leq \lambda(G)$.

情形2　S中点与$\bar{S}$中点不都连接

在这种情形下，取$x \in S, y \in \bar{S}$，且x与y不邻接

令：

$$T = \{v|x\ adj\ v, 且v \in \bar{S}\} \cup \{u|u \neq x, u \in S, 且u在\bar{S}中有邻点\}$$

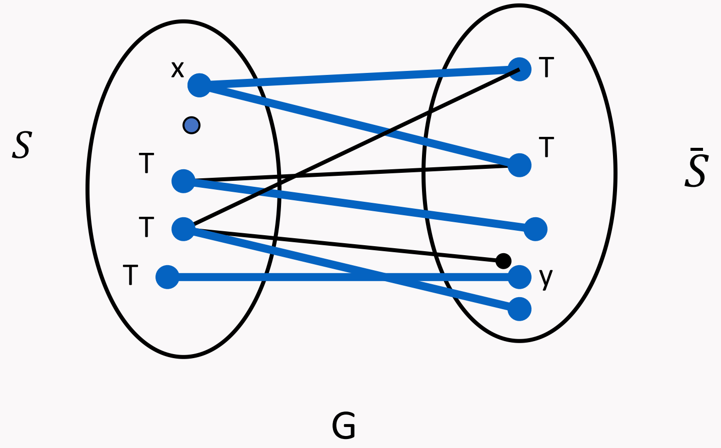
S  $\bar{S}$

G

于是，G中任意一条$(x,\ y)$路必然经过T中一些点，所以，T为G的一个点割集。

在G中取如下边集：

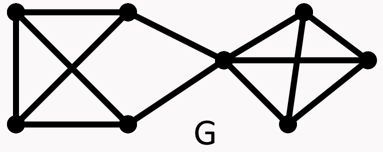
$$E_1 = \{xv|v \in \bar{S}\} \cup \{从T \cap S每个顶点取一条到\bar{S}的边\}$$



则：$|E_1| = |\mathrm{T}|$

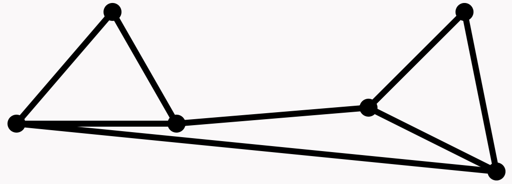
所以：$\lambda(G) = |[S,\bar{S}]| \geq |E_1| = |T| \geq \kappa(G)$

注：（1）定理中严格不等式能够成立。



$$\kappa(G) = 1,\ \lambda(G) = 2, \delta(G) = 3.$$

（2）定理中等式能够成立。



$$\kappa(G)=\lambda(G)=\delta(G)=2.$$

（3）哈拉里通过构图的方式已经证明：

对任意正整数a，b，c，都存在图G，使得：

$$\kappa(G)=a,\lambda(G)=b,\delta(G)=c.$$

（4）惠特尼(1907---1989）美国著名数学家。主要研究图论与拓扑学。先后分别在哈佛和普林斯顿高级研究院工作。他获过美国国家科学奖(1976),Wolf奖(1983),Steel奖(1985)。

惠特尼最初学习物理，在耶鲁大学获物理学士学位后，又专攻音乐，获音乐学士学位。他一生热爱音乐，有高度音乐才华，会弹奏钢琴，演奏小提琴、中提琴、双簧管等乐器，曾担任普林斯顿交响乐团首席小提琴手

1932年在他的数学博士论文中提出了上面定理。

值得一提的是，惠特尼创立了微分流形的拓扑学。在该领域，我国吴文俊等许多拓扑学家做出了贡献 。

定理2　设G是(n, m)连通图，则：

$$\kappa(G) \le \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

证明：由握手定理：$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) \ge n\delta(G) \ge n\kappa(G)$

所以：$\kappa(G) \le \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor$.

哈拉里通过构图的方式证明了定理2的界是紧的。即存在一个$(n,\ m)$图G, 使得：

$$\kappa(G) = \left\lfloor \frac{2m}{n} \right\rfloor.$$

哈拉里图

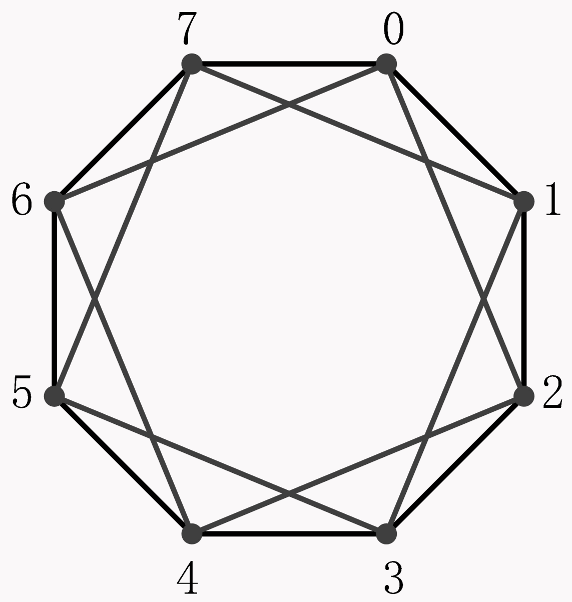
1962年，数学家哈拉里构造了连通度是k, 边数为$m = \left\lceil \frac{nk}{2} \right\rceil$的图$H_{k,n}$, 称为哈拉里图。

（1）$H_{2r,n}$

$$V(H) = \{0,1,2,\cdots,n-1\},$$

$$E(H) = \left\{ij \,\middle|\, |i-j| \le r(\text{取模}n\text{的加法})\right\}.$$

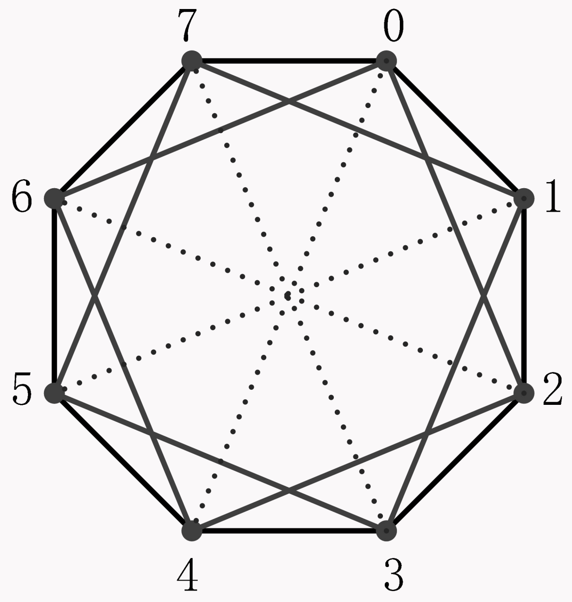
作$H_{4,8}$



（2） $H_{2r+1,n}$（n为偶数）

先作$H_{2r,n}$，然后对$1 \leq i \leq n/2$，i与$i+n/2$连线。

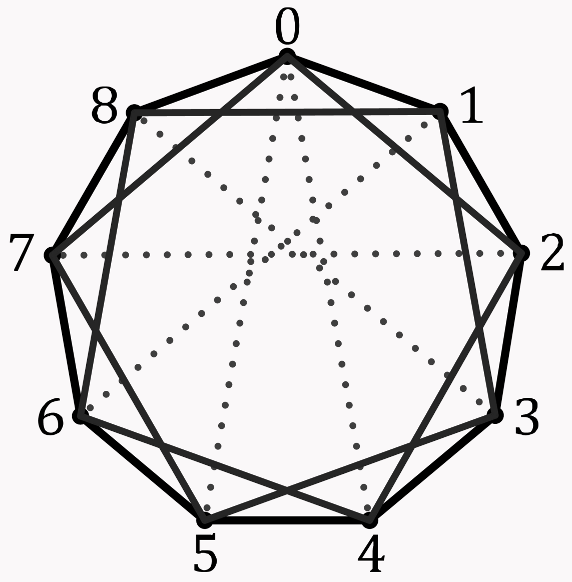
作$H_{5,8}$



（3）$H_{2r+1,n}$（n为奇数）

先作$H_{2r,n}$, 然后对$1 \leq i \leq (n-1)/2$, i与$i+(n+1)/2$连线。同时，0分别与$(n-1)/2$和$(n+1)/2$连线。

作$H_{5,9}$



定理2 **设G是$(n,\ m)$单图，若$\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, 则$G$连通。**

证明：若G不连通，则G至少有两个连通分支，于是，至少有一个分支H, 使得：$\delta(H) \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, 这与条件矛盾。

定理3　**设$\boldsymbol{G}$是$\boldsymbol{n}$阶简单图，若对任意正整数$\boldsymbol{k<n}$, 有：**

$$\boldsymbol{\delta(G)\geq\frac{n+k-2}{2}},$$

则$\boldsymbol{G}$是$\boldsymbol{k}$连通的。

证明：任意删去$k-1$个顶点，记所得之图为H, 则：

$$\delta(H)\geq\delta(G)-(k-1)\geq\frac{n+k-2}{2}-k+1=\frac{n-k}{2}.$$

由于$\delta(H)$是整数，故：

$$\delta(H)\geq\left\lceil\frac{n-k}{2}\right\rceil=\left\lfloor\frac{n-k+1}{2}\right\rfloor.$$

由定理2，H连通，所以，G是k连通的。

定理4 **设$\boldsymbol{G}$是$\boldsymbol{n}$阶简单图，若**

$$\boldsymbol{\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor},$$

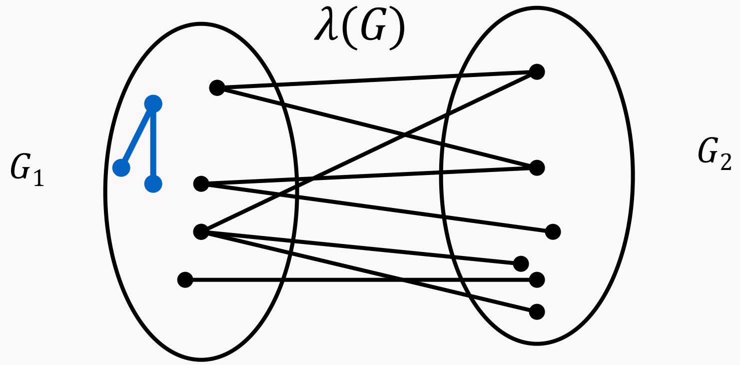
则有：$\boldsymbol{\lambda(G) = \delta(G)}$.

证明：若不然，根据定理1，$\lambda(G) < \delta(G)$.

设G的边割集为M，且$|M| = \lambda(G) < \delta(G)$.

设图$G - M$中G_1分支中与M相关联的顶点数为P, 显然有

$$P \leq \lambda(G).$$



我们对G_1中顶点数作估计：

由握手定理：$2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - |M| = P\delta(G) - \lambda(G)$. 又$\lambda(G) < \delta(G)$,

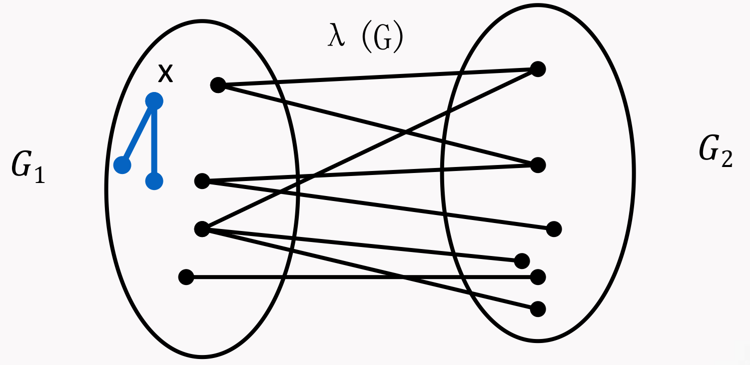
所以：$2|E(G_1)| \geq P\delta(G) - \lambda(G) > \lambda(G)(P-1) \geq P(P-1) = 2|E(K_P)|$.

这说明：G_1中至少有一个顶点x不与G_2中顶点邻接。

而$d_{G_1}(x) = d_G(x) \geq \delta(G)$，所以：$|V(G_1)| \geq \delta(G) + 1$.

同理，有：$|V(G_2)| \geq \delta(G) + 1$.

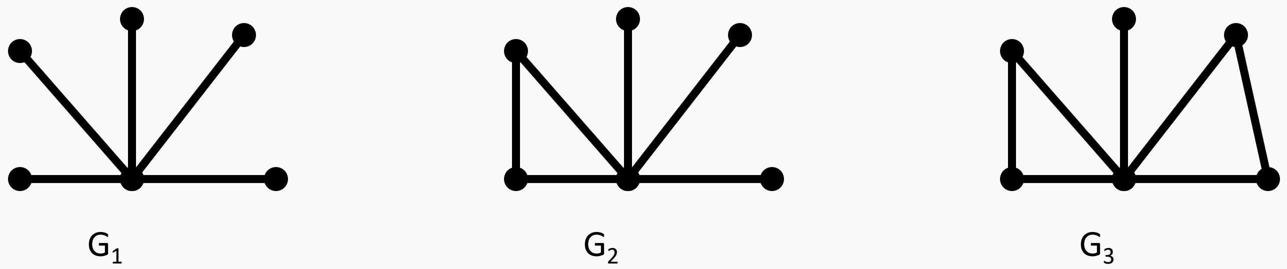
于是得$\delta(G) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，矛盾！



(二)、描述连通性的其它参数简介

1、图的坚韧度

点和边连通度对图的连通性刻画存在明显不足，例如，我们观察如下3个图：



容易知道：$\kappa(G_1)=\kappa(G_2)=\kappa(G_3)=1$

$$\lambda(G_1)=\lambda(G_2)=\lambda(G_3)=1$$

于是，从点、边连通度角度不能刻画上面3个图的连通性程度的区别

很明显：G_3连通性高于G_2，G_2高于G_1.

基于此，1996年，许进在电子学报发表文章，论述了用坚韧度来刻画图的连通程度比用连通度更精确。

定义1 用$C(G)$表示图G的全体点割集构成的集合，非平凡非完全图的**坚韧度**，记作$\tau(G)$, 定义为：

$$\tau(G) = \min\left\{\frac{|S|}{\omega(G-S)} \,\middle|\, S \in C(G)\right\}.$$

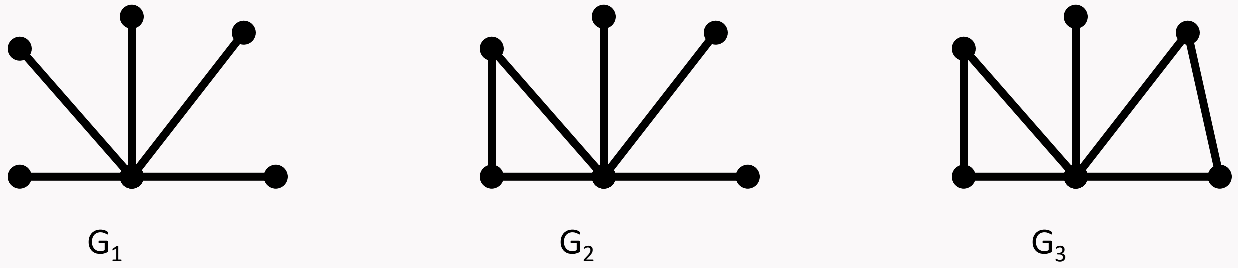
坚韧度的概念是图论学家Chvatal提出来研究图的哈密尔顿问题的一个图参数。

定义2 设G是一个非完全$n\ (n \geq 3)$阶连通图，$S^* \in C(G)$, 若S^*满足：$\tau(G) = \frac{|S^*|}{\omega(G-S^*)}$,称$S^*$是$G$的**坚韧集**。

容易知道：坚韧集是那些顶点数尽可能少，但产生的分支数尽可能多的点割集，同时，坚韧集不唯一。

坚韧度与G的连通性有如何关系？

对于G_1与G_2，如果$|S_1^*| = |S_2^*|$，但$\omega(G_2 - S_2^*) < \omega(G_1 - S_1^*)$，那么$\tau(G_1) > \tau(G_2)$，这说明，坚韧度大的图连通性好。



容易算出：$\tau(G_1) = 0.2$，$\tau(G_2) = 0.25$，$\tau(G_3) = 0.33$，于是G_3比G_2的连通性好，G_2比G_1的连通性好。

许进通过上面分析得出:

设G_1与G_2是两个非平凡非完全的连通图，若$\tau(G_1) > \tau(G_2)$，则G_1的连通性比G_2好。因此，坚韧度可以作为网络容错性参数的度量。

许进还对坚韧度的界、取值范围以及坚韧度的计算问题作了一些探索

仿照点坚韧度，可以定义边坚韧度:

$$\tau_1(G) = min\left\{\frac{|X|}{\omega(G-X)}\,\middle|\,X \in CE(G)\right\}.$$

许进，男，1959年生，陕西乾县人．教授，博士生指导教师．理学、工学双博士。现任：华中科技大学特聘教授，华中科技大学分子生物计算机研究所所长；华中科技大学系统科学研究所所长；中国电路与系统学会委员；中国电子学会图论与系统优化专业委员会副理事长;湖北省运筹学会（筹委会）理事长。

2、图的核度

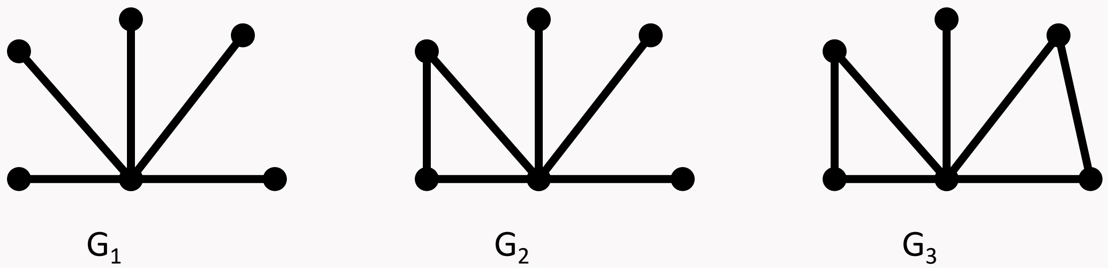
定义3 设G是一个非平凡连通图，则称：

$$h(G) = max\{\omega(G-S)-|S|\,|\,S\in C(G)\}.$$

为图的核度。若S^*满足：

$$h(G)=\omega(G-S*)-|S*|,$$

称S^*为图的核。



容易算出：$h(G_1) = 4$，$h(G_2) = 3$，$h(G_3) = 2$.

一般地，核度越小，连通程度越高。

图的核度的界如何？特殊图的核度问题，核度的计算问题等都是值得研究的问题。

我国欧阳克智教授等把核度称为图的断裂度，国外图论学者称它为图的离散数。许进把它引进系统科学中，称它为系统的核度。由此，他建立了系统的核度理论而受到系统科学界的高度重视。

如何准确刻画图的连通性程度，现在还是一个有待进一步研究的问题

关于这方面的研究文献很多，有兴趣可以查阅并作一些研究。

作业

1. 举例说明：若P为2-连通图G中一条给定的$(u,v)-$路，则图G中不一定有一条与P内部不相交的(u,v)-路。
2. 做出一个有9个顶点和23条边的5-连通图，但不同构与图$H_{5,9}$.
3. 对所有$v \geq 5$，找一个直径为2的5-连通图G，使得$m(G) = 2n(G) + 6$.

Thank You !