中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

《图论及其应用》2024

潘嵘

计算机学院

本次课主要内容

偶图的匹配问题

(一)、图的匹配与贝尔热定理

(二)、偶图的匹配与覆盖

(三)、托特定理

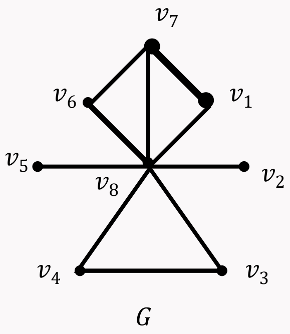
(一)、图的匹配与贝尔热定理

1、图的匹配相关概念

（1)、匹配 M--- 如果M是图G的边子集(不含环），且M中的任意两条边没有共同顶点，则称M是G的一个**匹配**或**对集**或**边独立集**。

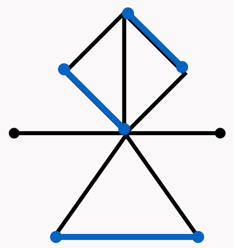
如果G中顶点v是G的匹配M中某条边的端点，称它为$\boldsymbol{M}$**饱和点**，否则为$\boldsymbol{M}$**非饱和点**。

$$\begin{aligned} M_1 &= \{v_6v_7\} \\ M_2 &= \{v_6v_7, v_1v_8\} \\ M_3 &= \{v_6v_7, v_1v_8, v_3v_4\} \end{aligned}$$

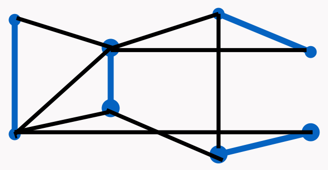


M_1, M_2, M_3等都是G的匹配。

（2）、最大匹配 M--- 如果M是图G的包含边数最多的匹配，称M是G的一个**最大匹配**。特别是，若最大匹配*饱和了*G的所有顶点，称它为G的一个**完美匹配**。



G的一个 最大匹配

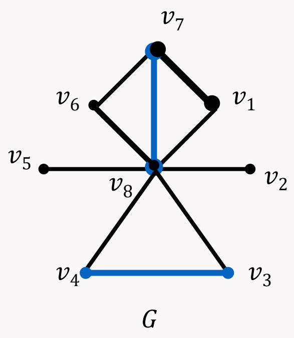


G的一个完美匹配

注：一个图G不一定存在完美匹配。

(3)、M交错路 --- 如果M是图G的匹配，G中一条由M中的边和非M中的边交错形成的路，称为G中的一条**M交错路**。特别地，若M交错路的起点与终点是M非饱和点，称这种M交错路为**M可扩路**。

在下图中：



设$M = \{v_7v_8, v_3v_4\}$，则：

路$v_6v_7v_8v_3v_4$与$v_1v_7v_8v_2$都是M交错路。其中后者是M可扩路。

2、贝尔热定理

定理1（贝尔热，1957）**G的匹配M是最大匹配，当且仅当G不包含M可扩路。**

证明：“必要性”

若G包含一条M可扩路P, 则可令该可扩路为：

$$P = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{2k} v_{2k+1}.$$

显然，P中M中的边比非M中的边少一条。于是作新的匹配M_1, 它当中的边由P中非M中边组成。M_1中边比M中多一条，这与M是G的最大匹配矛盾。

“充分性”

若不然，设M_1是G的一个最大匹配，则$|M_1| > |M|$.

令$H = M_1 \Delta M = (M_1 \cup M) - (M_1 \cap M)$.

容易知道：$G[H]$的每个分支或者是由M_1与M中边交替组成的偶圈，或者是由M_1与M中边交替组成的路。

在每个偶圈中，M_1与M中边数相等；但因$|M_1| > |M|$, 所以，至少有一条路P, 其起点和终点都是M非饱和点，于是，它是G的一条M可扩路。这与条件矛盾。

注：贝尔热定理给我们提供了扩充G的匹配的思路。

贝尔热(1926---2002）法国著名数学家。他的《无限图理论及其应用》(1958）是继哥尼之后的图论历史上的第二本图论专著。他不仅在图论领域做出了许多贡献，而且四处奔波传播图论，推动了图论的普及和发展

1993年，他获得组合与图论领域颁发的欧拉奖章。

贝尔热在博弈论、拓扑学领域里也有杰出贡献。*在博弈领域，他引入了Nash均衡之外的另一种均衡系统。Nash的生活被改编成电影《美丽的心灵》，获02年奥斯卡金像奖。*

贝尔热对中国的手工艺很感兴趣。他也是一位象棋高手，还创作过小说《谁杀害了Densmore公爵》。

(二)、偶图的匹配与覆盖

1、问题的提出

在日常生活，工程技术中，常常遇到求偶图的匹配问题。下面看一个例子：

有7名研究生A, B, C, D, E, F, G毕业寻找工作。就业处提供的公开职位是：会计师(a), 咨询师(b), 编辑(c), 程序员(d), 记者(e), 秘书(f)和教师(g). 每名学生申请的职位如下：

$$A：b, c；\quad B：a, b, d, f, g；\quad C：b, e；\quad D：b, c, e；$$

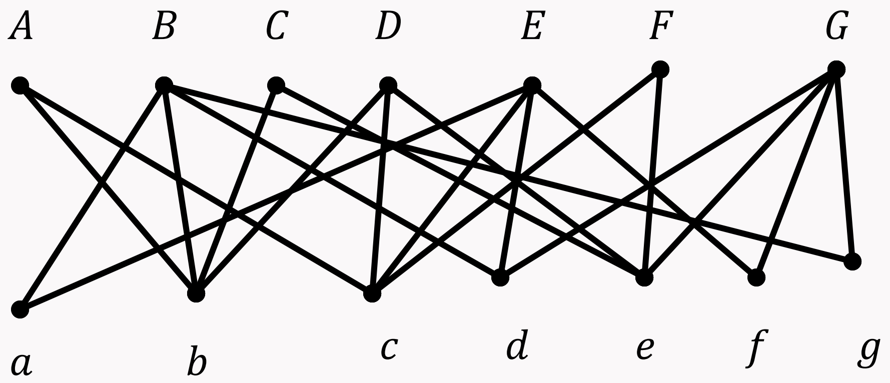
$$E：a, c, d, f；\quad F：c, e；\quad G：d, e, f, g；$$

问：学生能找到理想工作吗？

解：如果令$X = \{A, B, C, D, E, F, G\}, Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, X中顶点与Y中顶点连线当且仅当学生申请了该工作。于是，得到反映学生和职位之间的状态图：

$A: b,c;\quad B: a,b,d,f,g;\quad C: b,e;\quad D: b,c,e;$

$E: a,c,d,f;\quad F: c,e;\quad G: d,e,f,g;$



问题转化为求饱和X每个顶点的一个匹配！

需要解决的问题是：(1) 匹配是否存在？(2) 如何求出匹配？

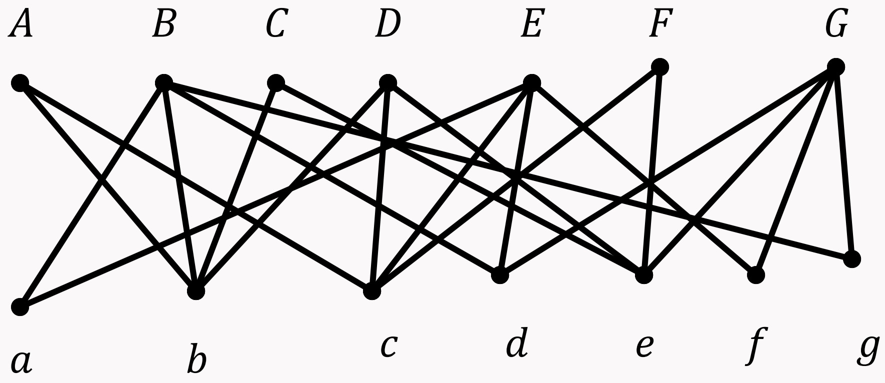
2、偶图匹配存在性判定----Hall定理

定理2（Hall定理）**设$\boldsymbol{G}=(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$是偶图，则$\boldsymbol{G}$存在饱和$\boldsymbol{X}$每个顶点的匹配的充要条件是：**

$$\text{对}\forall \boldsymbol{S}\subseteq \boldsymbol{X},\text{有}|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S})|\geq|\boldsymbol{S}|,$$

其中$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S})$表示$\boldsymbol{S}$的邻集（图$\boldsymbol{G}$中所有与$\boldsymbol{S}$相邻接顶点的集合）。

例1，在下面偶图中，是否存在饱和$X=\{A,B,C,D,E,F,G\}$的每个顶点的匹配？

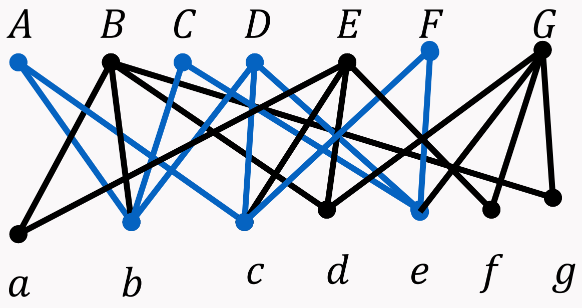


解：（1） 当S取X中单元点时, 容易验证：$|N(S)| > |S|$

（2） 当S取X中二元点集时, 容易验证:$|N(S)| \geqq |S|$

（3） 当S取X中三元点集时, 容易验证：$|N(S)| \geqq |S|$

（4） 当S取X中四元点集时， 若取$S = \{A, C, D, F\}$, 则有$3 = |N(S)| < |S| = 4$



所以，不存在饱和X每个顶点的匹配。

下面我们证明Hall定理。

证明：“必要性”

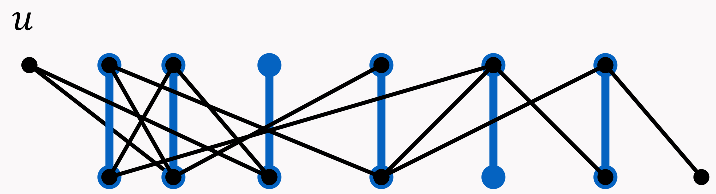
如果G存在饱和X每个顶点的匹配，由匹配的定义，X的每个顶点在Y中至少有一个邻接点，所以：

$$对\forall S \subseteq X,有|N(S)| \geq |S|.$$

“充分性”

如果G是满足条件$(*)$的偶图，但是不存在饱和X每个顶点的匹配。

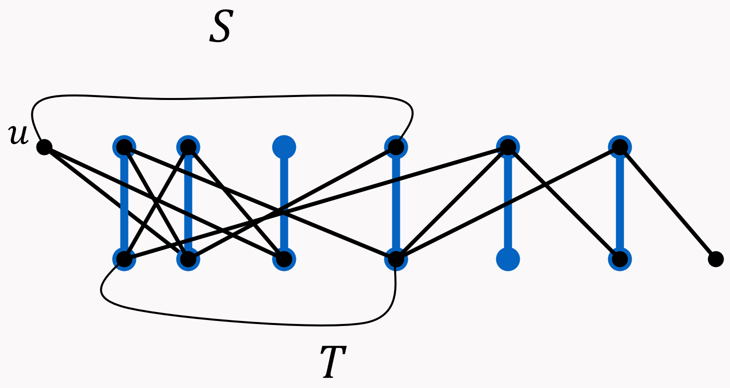
令M^*是G的一个最大匹配，但是不饱和X的顶点$u.$



示意图G

又令Z是通过M^*与点u相连形成的所有M^*交错路上的点集。

因M^*是最大匹配，所以u是所有交错路上唯一的一个未饱和点。



令$S = X \cap Z\ ,T = Z \cap Y,$

显然，$S - \{u\}$中点与T中点在M^*下配对，即：

$$|T| = |S| - 1 < |S|.$$

即：$|N(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|,$与条件矛盾。

注：（1）$G = (X, Y)$存在饱和X每个顶点的匹配也常说成存在由X到Y的匹配。

（2）Hall定理也可表述为：设$G=(X,Y)$是偶图，如果存在X的一个子集S, 使得$|N(S)|<|S|$, 那么G中不存在由X到Y的匹配。

（3）Hall定理也称为“婚姻定理”，表述如下：

“婚姻定理”：在一个由r个女人和s个男人构成的人群中，$1\le r\le s$. 在熟识的男女之间可能出现r对婚姻的充分必要条件是，对每个整数$k\ (1\le k\le r)$, 任意k个女人共认识至少k个男人。

（4）Hall定理是在偶图中求最大匹配算法的理论基础，即匈牙利算法基础。

（5）Hall(1904---1982)英国人,20世纪最伟大的数学家之一。主要功绩是在代数学领域。在剑桥大学工作期间,主要研究群论1932年发表的关于素数幂阶群论文是他最有名的工作。匹配定理是他1935年在剑桥大学

做讲师时发表的结果。Hall是一名雅致的学者，对学生特别友好，当他觉得有必要批评学生时，他都会以一种十分温和的方式建议他们改正。

推论：**若$\boldsymbol{G}$是$\boldsymbol{k}\ (\boldsymbol{k}>\mathbf{0})$正则偶图，则$\boldsymbol{G}$存在完美匹配。**

证明：一方面，由于G是$k\ (k>0)$正则偶图, 所以$k|X|=k|Y|$, 于是得$|X|=|Y|$;

另一方面，对于X的任一非空子集S, 设E_1与E_2分别是与S和$N(S)$关联的边集，显然有：$E_1\subseteq E_2$, 即：

$$k|S|=|E_1|\le|E_2|=k|N(S)|.$$

由Hall定理，存在由X到Y的匹配. 又$|X|=|Y|$, 所以G存在完美匹配。

例2（1）证明：每个k方体都有完美匹配(k大于等于2)

（2）求K_{2n}和$K_{n,n}$中不同的完美匹配的个数。

（1）证明一：证明每个k方体都是k正则偶图。

事实上，由k方体的构造：k方体有2^k个顶点，每个顶点可以用长度为k的二进制码来表示，两个顶点连线当且仅当代表两个顶点的二进制码只有一位坐标不同。

如果我们划分k方体的2^k个顶点，把坐标之和为偶数的顶点归入X, 否则归入Y. 显然，X中顶点互不邻接，Y中顶点也如此。所以k方体是偶图。

又不难知道k方体的每个顶点度数为k, 所以k方体是k正则偶图。

由推论：k方体存在完美匹配。

证明二：直接在k方体中找出完美匹配。

设k方体顶点二进制码为$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, 我们取$(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 0)$,和$(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, 1)$之间的全体边所成之集为$M$.

显然，M中的边均不相邻接，所以作成k方体的匹配，又容易知道：$|M| = 2^{k-1}$. 所以M是完美匹配。

（2）我们用归纳法求K_{2n}和$K_{n,n}$中不同的完美匹配的个数。

K_{2n}的任意一个顶点有$2n-1$种不同的方法被匹配。所以K_{2n}的不同完美匹配个数等于$(2n-1)K_{2n-2}$, 如此推下去，可以归纳出K_{2n}的不同完美匹配个数为：$(2n-1)!!$

同样的推导方法可归纳出$K_{n,n}$的不同完美匹配个数为：$n!$

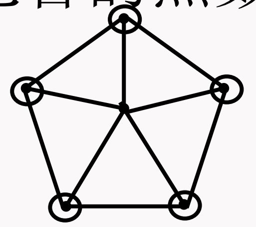
例3 证明树至多存在一个完美匹配。

证明：若不然，设M_1与M_2是树T的两个不同的完美匹配，那么$M_1 \Delta M_2 \neq \Phi$, 容易知道：$T[M_1 \Delta M_2]$每个非空部分顶点度数为2，即它存在圈，于是推出T中有圈，矛盾。

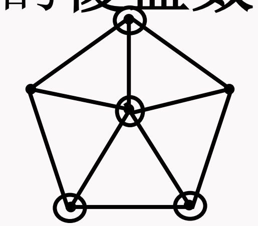
3、点覆盖与哥尼定理

(1)、图的点覆盖概念与性质

定义1：图的**点覆盖** ---G的一个顶点子集K称为G的一个**点覆盖**，如果G的每条边都至少有一个端点在K中。G的一个包含点数最少的点覆盖称为G的**最小点覆盖**，其包含的点数称为G的**覆盖数**，记为$\alpha(G)$.



(a) 一个覆盖



(b) 一个最小覆盖

定理2 **设$\boldsymbol{M}$是$\boldsymbol{G}$的匹配，$\boldsymbol{K}$是$\boldsymbol{G}$的覆盖，若$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{K}|$, 则$\boldsymbol{M}$是最大匹配，而$\boldsymbol{K}$是最小覆盖。**

证明：设M^*与K^*分别是G的最大匹配和最小覆盖。

由匹配和覆盖定义有：$|M^*| \leq |K^*|$.（为什么？）所以，有：

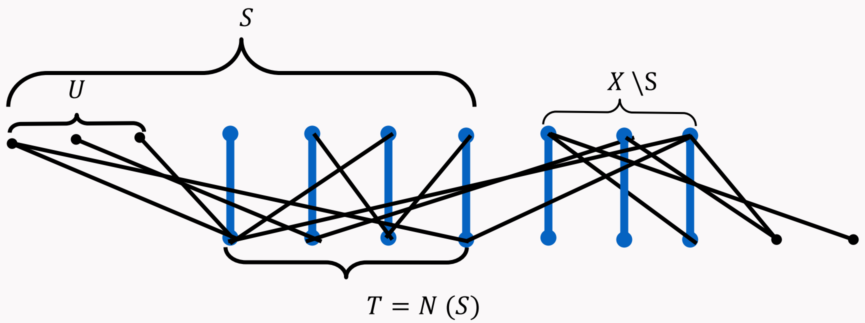
$$|M| \leq |M^*| \leq |K^*| \leq |K|.$$

所以，当$|M| = |K|$时，有$|M| = |M^*|$, $|K^*| = |K|$, 即M是最大匹配，而K是最小覆盖。

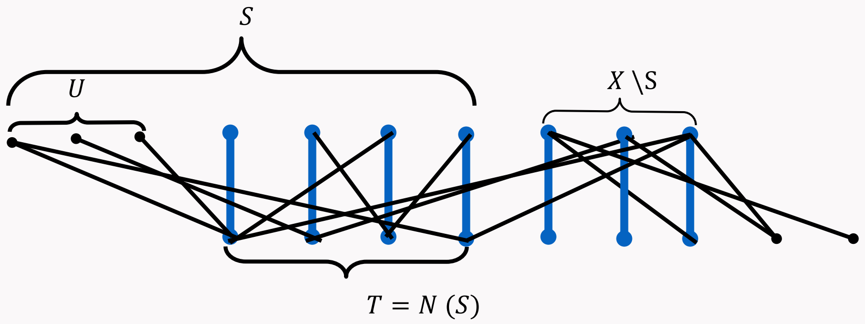
(2)、偶图的点覆盖与偶图匹配间的关系----哥尼定理

定理3（哥尼，1931）**在偶图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。**

证明：设$G=(X,Y)$，M^*是偶图G的最大匹配。U表示X中M^*非饱和点集。Z表示由M^*交错路连到U的顶点的所有路上的点作成的集合。且令$S=Z\cap X$，$T=Z\cap Y$.



由M^*的最大性，T中点是M^*饱和的，且$N(S) = T$。



现在，令$K^* = (X - S) \cup T$.

可以证明：$K^* = (X - S) \cup T$是G的一个覆盖。

事实上，若$K^* = (X - S) \cup T$不是G的一个覆盖。则存在G的一条边，其一个端点在S中，而另一个端点在$Y - T$中，这与$N(S) = T$矛盾！

显然$|K^*| = |M^*|$。由定理2，K^*是最小覆盖。

哥尼(König)——第一本图论教材的撰写者

到了1936年，第一本图论教材才与读者见面。作者是哥尼(1884----1944).哥尼早期学习拓扑学，但对图论兴趣特别大。他一直工作在布达佩斯工业大学。讲课很有激情，吸引了很多优秀学生转向图论研究。特别是，他把一起获得匈牙利国家高中数学竞赛一等奖的3个学生都吸引来研究图论，这3个学生是：Erdös, Gallai, Turan. 都是伟大的数学家。

哥尼的著作名称是《有限图与无限图理论》。这本书对青年学者产生了很大影响，推动了图论的进一步发展。在20多年时间里，它都是世界上唯一一本图论著作。直到1958年，法国数学家贝尔热(Berge）才出版专著《无限图理论及其应用》。

哥尼1944年为免遭纳碎迫害，只有自杀。

例4 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线。证明：布尔矩阵中，包含了所有“1”的线的最少数目，等于具有性质“任意两个1都不在同一条线上的1的最大数目”。

例如：在如下布尔矩阵中：

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

证明：设布尔阵是n行m列矩阵，把它模型为一个偶图如下：每行每列分别用一个点表示，X表示行点集合，Y表示列点集合；两点连线，当且仅当该行该列元为1.

于是，包含了所有“1”的线的最少数目对应偶图中的最小点覆盖数。而具有性质“任意两个1都不在同一条线上的1的最大数目” 对应偶图的最大匹配包含的边数。

由哥尼定理，命题得到证明。

(三)、托特（Tutte）定理

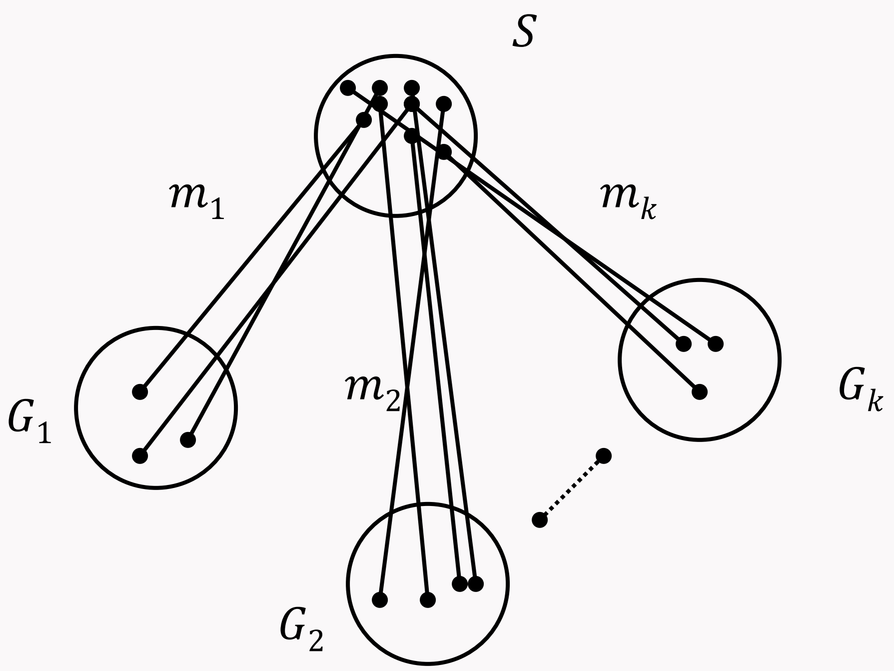
定理4（托特定理，1947）**图G有完美匹配当且仅当对V的任意非空真子集S，有：**

$$\boldsymbol{o(G-S) \le |S|.}$$

注：$o\ (G-S)$表示奇分支数目（分支中包含顶点的数目）。

推论（彼得森定理）**没有割边的3正则图存在完美匹配**

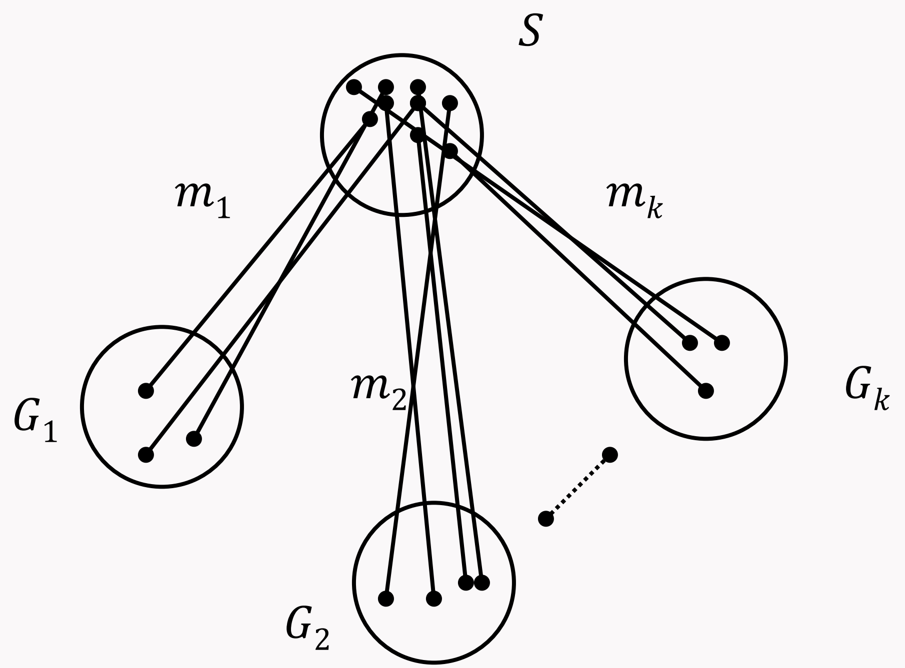
证明：设S是V的任意一个非空真子集，$G_1, G_2, \dots, G_k$是$G-S$的所有奇分支。$m_i(1 \le i \le k)$表示端点分属于S和G_i的边数。



下面分析m_i

在G_i中，其总度数为$2|E(G_i)|$.

在G_i中，其点在G中的总度数为$3|V(G_i)|$.



于是有：

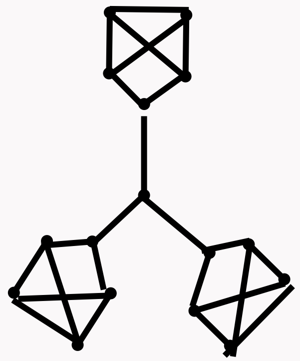
$$m_i = 3|V(G_i)| - 2|E(G_i)|.$$

因此，m_i必然为奇数，但G无割边，于是$m_i \geq 3$. 这样：

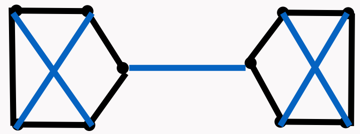
$$o(G-S) = k \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k} m_i \leq \frac{1}{3}\sum_{v \in S} d(v) = \frac{1}{3} * 3|S| = |S|.$$

由托特定理，G有完美匹配。

注：推论中的条件是G存在完美匹配的充分条件而不是必要条件。例如：



（a）没有完美匹配



（b）有完美匹配

Thank You !