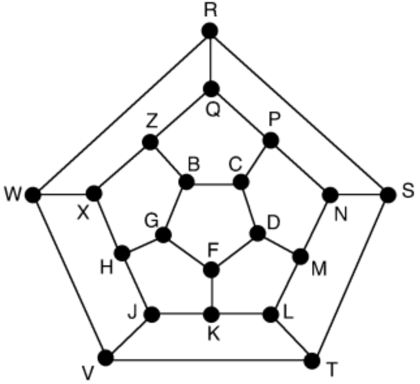
本次课程提纲：Hamilton 图

- Hamilton 图
- 旅行商问题

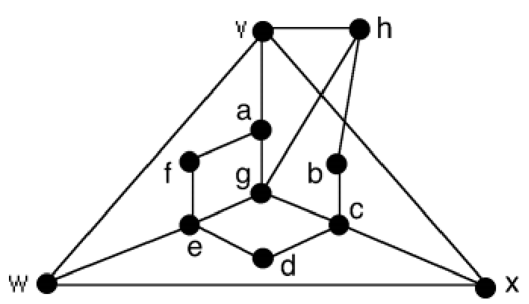
Hamilton（哈密尔顿）图

- 如果经过图 G 每个顶点一次后能够回到出发点，称这样的图为 Hamilton 图，简称 H 图
- 所经过的闭途径是 G 的一个生成圈，称为 G 的 Hamilton 圈



Dodecahedral graph for the Icosian Game.

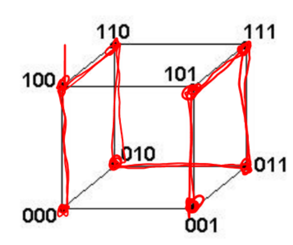
如果存在经过 G 的每个顶点一次的路，称该路为 Hamilton 路，简称 H 路



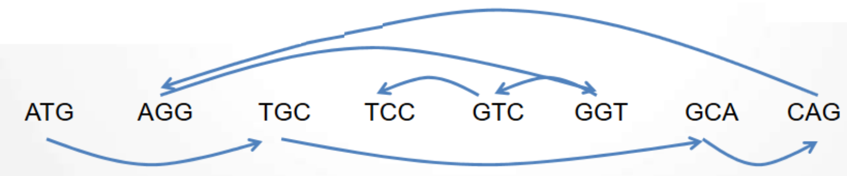
$xwvafedcghb$

Hamilton 路的应用

- 灯泡开关问题



- 基因检测问题



H 图的性质

H 图的必要条件

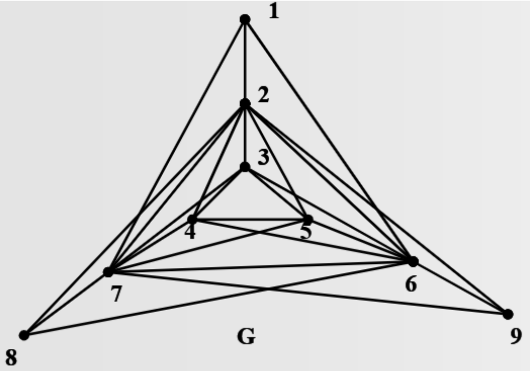
若 G 为 H 图，则对 $V(G)$ 的任一非空顶点子集 S，有 $w(G-S) \le |S|$

证明

- 设 C 是 G 的 H 圈
- 对 $V(G)$ 的任意非空子集 S, 易知 $w(C-S) \le |S|$
- 所以，$w(G-S) \le w(C-s) \le |S|$

H 图的性质

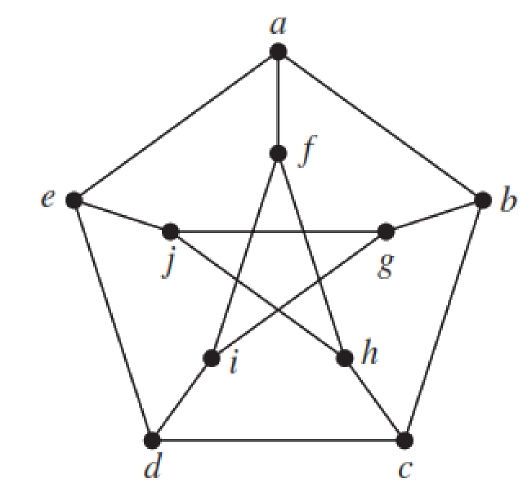
- 可用来证明不是 H 图



- 取 $S = \{2, 7, 6\}$, 易知 $w(G - s) = 4 > |S| = 3$

H 图的性质

- 但满足定理的图不一定是 H 图



H 图的判定

- 图的 H 性判定是 NP 难问题
- 拓展 H 图的实用特征仍然被图论领域认为是重大而没有解决的问题
- 图的 Hamilton 问题和四色问题被谓为挑战图论领域 150 年智力极限的总和

Dirac 定理：充分条件

对于 $n \geq 3$ 的单图 G，如果 $\delta(G) \geq n/2$，G 是 H 图

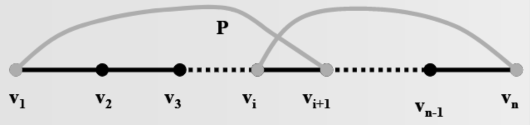
证明

- 易证 G 连通

H 图的判定

证明

- 设 $P \triangleq v_1 v_2 \cdots v_k$ 是 G 中最长的路
- 由 $\delta(v_1) \geq n/2$，$\delta(v_k) \geq n/2$ 易证存在 $v_1 v_{i+1} \in E(G)$，$v_k v_i \in E(G)$
- 下面证明图中的圈是 H 圈
- 若不然，存在节点 v_j 与 y，$v_j y \in E(G)$，我们可以构造一条更长的路 $y v_j - v_n v_i - v_1 v_{i+1} - v_j$，与 P 是最长路矛盾



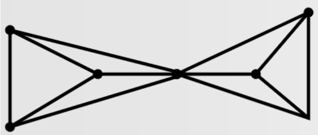
Dirac

- 该定理是数学家 Dirac 在 1952 年得到的，被认为是 H 问题的划时代奠基性成果
- Dirac 是丹麦 Aarhus 大学知名教授，其父亲 (继父) 是在量子力学家与数学家 Dirac
- 1960 年，美国数学家 Ore 考察不相邻两点度和情况，弱化了 Dirac 条件

Ore 定理

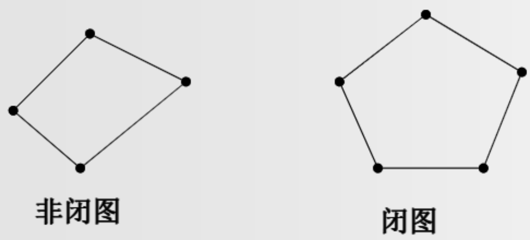
若 $d(u) + d(v) \geq n$ 对任意不相邻 u, v 成立，G 是 H 图

- 该定理证明和 Dirac 定理可以完全一致
- 该定理的条件是紧的



H 图的判定

- 1976 年，牛津大学的图论大师 Bondy 等在 Ore 定理基础上，得到图和它的闭包间的同 Hamilton 性
- 在 n 阶单图中，若对 $d(u)+d(v) \geq n$ 的任意顶点 u,v，均有 u,v 相邻, 则称 G 是闭图



H 图的判定

引理

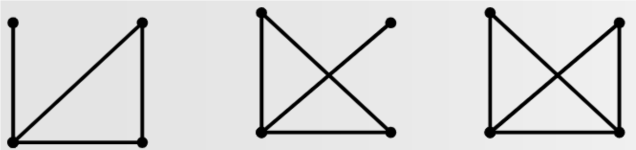
若 G_1 和 G_2 是同一个点集 V 的两个闭图，则 $G = G_1 \cap G_2$ 是闭图

证明

- 任取 $u, v \in V(G)$，若 $d(u) + d(v) \geq n$
- 有 $d_{G_i}(u) + d_{G_i}(v) \geq n$
- 因 G_1, G_2 是闭图，所以 u, v 在 G_1, G_2 中都邻接，所以，在 G 中也邻接。故 G 是闭图

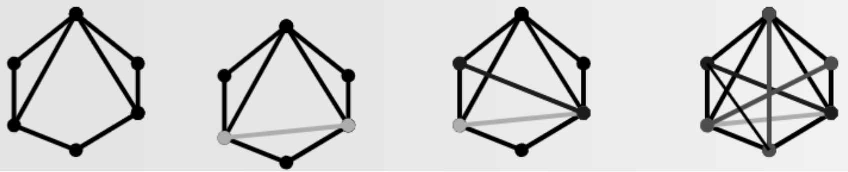
H 图的判定

闭图 G_1, G_2 的并不一定是闭图



闭包

- 包含 G 的极小闭图称为 G 的闭包
- 如果 G 本身是闭图，其闭包是它本身
- 如果 G 不是闭图，则可以通过在度和大于等于 n 的不相邻顶点对间加边来构造闭图



闭包

定理

图 G 的闭包是唯一的

证明

- 设 G_1 与 G_2 是 G 的两个闭包，$\{e_i\}$ 与 $\{f_i\}$ 是添加的边集合
- 我们证明 $e_i \in E(G_2)$
- 若不然，记 $e_k = uv$ 为第一条不在 G_2 中的边，令 $H = G + \{e_1, \cdots, e_{k-1}\}$，有 $d_H(u) + d_H(v) \geq n$
- H 也是 G_2 的子图，故 $d_{G_2}(u) + d_{G_2}(v) \geq n$
- 由于 $e_k \notin E(G_2)$，和 G_2 是闭包矛盾

Bondy 闭包定理

Bondy 闭包定理

图 G 是 H 图当且仅当它的闭包是 H 图

证明

- 必要性显然，下证充分性
- 若 G 的闭包和 G 相同，结论显然，以下假设其不同
- 设 e_i 是为构造 G 的闭包而添加的边
- 引理：对于单图 G，若存在不相邻顶点 u,v：$d(u)+d(v)\geq n$，那么 G 是 H 图当且仅当 $G+uv$ 是 H 图
- 由引理，G 是 H 图当且仅当 $G+e_1$ 是 H 图，$G+e_1$ 是 H 图当且仅当 $G+e_1+e_2$ 是 H 图
- 反复应用引理，可以得到定理结论

Bondy 闭包定理

- 设 G 是 $n \geq 3$ 的单图，若 G 的闭包是完全图，则 G 是 H 图
- 由闭包定理也可以推出 Dirac 和 Ore 定理

图的 H 性的度序列判定法

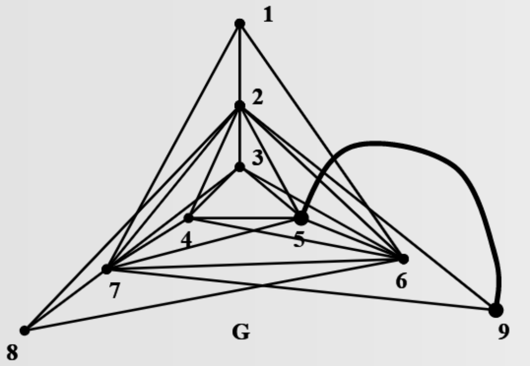
在闭包定理的基础上，Chvatal 和 Bondy 进一步得到度序列判定法

Chvatal 度序列判定定理

设简单图 G 的度序列是 $(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_1 \le \cdots \le d_n, n \ge 3$。若对任意 $m < n/2$，$d_m > m$ 或 $d_{n-m} \ge n - m$，G 是 H 图

- 证明方法：证 G 的闭包是完全图

图的 H 性的度序列判定法



$d_1 = d_2 = d_3 = 3, d_4 = d_5 = 5, d_6 = 6, d_7 = 7, d_8 = d_9 = 8$：可以验证 Chvatal 定理条件成立

课后练习与思考题

- 证明 Bondy 闭包定理证明中用到的引理：对于单图 G，若存在不相邻顶点 u, v：$d(u)+d(v) \geq n$，那么 G 是 H 图当且仅当 $G+uv$ 是 H 图
- 一个 $3 \times 3 \times 3$ 的立方体每个顶点有一块奶酪，一只小老鼠从立方体左上角出发，每次经过一个节点并吃掉节点的奶酪，并且不能经过没有奶酪的节点，问该老鼠能否抵达中心节点，并吃掉所有 27 块奶酪