Lab 2 – Raízes (Parábola)

Material necessário:

- Smartphone com o aplicativo FindByColor.

- Trena, bola e alvo (fornecidos pelo laboratório)

Experiência:

O experimento visa encontrar a equação que modela o movimento parabólico da bola e, a partir da equação, aplicar técnicas de raízes para estimar a velocidade inicial que o objeto sai da mão do arremessador.

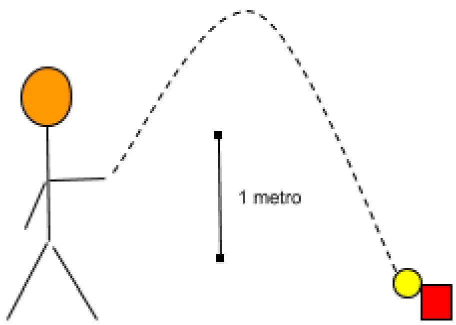


Figura 1: imagem do experimento.

Um dos componentes do grupo deve iniciar a filmagem com a câmera sempre parada em paisagem e enquadrando toda a área de provável percurso até o alvo. Certifique-se também de enquadrar o referencial de um metro para possibilitar a transformação pixel-metro, necessária para este experimento. O outro componente do grupo deve lançar a bola de forma que esta forme uma parábola com sua trajetória e atinja o alvo. A câmera deve capturar a bola percorrendo o espaço da esquerda para a direita.

1- Obtendo os dados do vídeo

A partir do vídeo, extrair 4 quadros e seus respectivos tempos (em milissegundos):

quadro_um: o momento logo que sai da mão do arremessador (utilize o MPC para abrir o arquivo output.avi e descobrir o tempo do evento e procure na tabela .csv, gerada pelo FindByColor, este instante para achar as coordenadas x e y).

quadro_dois: o primeiro quadro logo após o anterior.

quadro_três: o momento em que a bola atinge a altura máxima no vídeo (plote a tabela de pontos de y em função do tempo e encontre o momento que esse evento ocorre).

quadro_quatro: o momento em que a bola atinge o alvo.

2- Cálculo do ângulo inicial de lançamento

Utilizando conhecimentos de trigonometria e os quadros: quadro_um e quadro_dois, calcule o ângulo inicial de lançamento θ, em radianos.

3- Modelo

A modelagem do movimento da partícula sendo lançada em parábola pode ser encontrada pela equação da figura 2. Porém, os valores do eixo y coletados a partir do *FindByColor* precisam ser invertidos e todos os valores em pixel precisam ser convertidos para metro.

Para realizar a operação de inversão do eixo y realize a seguinte operação para cada coordenada y encontrada: $(y = y_{total} - y_{quadro})$.

Também é necessário converter os valores de x para que estes reflitam o deslocamento sofrido durante o movimento. Ou seja, devemos diminuir o valor de x do primeiro quadro dos valores de todos os quadros obtidos.

Para converter todos os valores de x e y coletados para metro, descubra quantos pixels o referencial de um metro possui. Se a filmagem foi realizada corretamente, esse referencial deve aparecer em todas as imagens coletadas. Em seguida, basta aplicar regra de 3 para converter pixel para metro.

$$y = (\tan\theta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + y_0$$

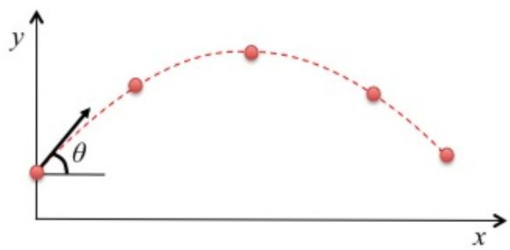


Figura 2: Modelo do movimento de partícula em que θ é o ângulo inicial de lançamento, y_0 é a altura inicial do arremesso, y é a altura ao acertar o alvo, x é a distância percorrida do início do lançamento (momento do quique) até o alvo no eixo x, g é a gravidade (9,81m/s^2) e v_0 é a velocidade inicial, que desejamos descobrir utilizando os métodos numéricos.

Observe que a equação acima deve funcionar para as coordenadas do movimento em um momento qualquer, inclusive para as coordenadas obtidas de um dos quadros capturados. Ou seja, caso você substitua as coordenadas x e y do quarto frame na equação, a velocidade inicial V0 deve ser tal que a igualdade seja respeitada. Desta forma é possível transformar a equação em um problema de raízes e determinar o valor de V0.

3- Métodos intervalares

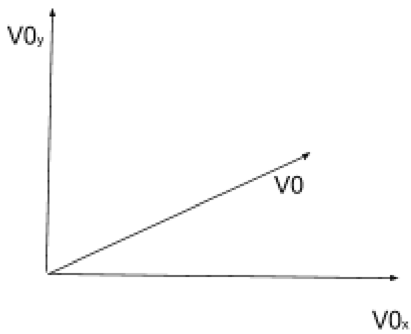
Após isolar a raíz, implemente o método da Bisseção e da falsa posição para descobrir o valor da velocidade inicial do lançamento com precisão de 10^{-6} m/s. Quantas iterações foram necessária para cada método?

4- Métodos não intervalares

Implemente os métodos de Newton e da Secante para descobrir o valor da velocidade inicial do lançamento com precisão de 10^{-6} m/s. O método convergiu? Quantas iterações foram necessária para cada método?

5- Comparação com a velocidade inicial V0 do objeto (velocidade que o objeto sai do chão após quique) calculada pelas imagens.

A velocidade inicial pode ser calculada a partir das componentes V_{x0} e V_{y0}, obtidas a partir dos dados obtidos do vídeo.



$V0_x$ pode ser calculado da seguinte forma:

$V0_x = \frac{x_i - x_1}{t_i - t_1}$, em que x_i é a posição em x para o quadro_dois, quadro_três ou quadro_quatro, e t_i é o respectivo tempo desses quadros. Comente o valor da velocidade encontrada no eixo x para os quadros capturados do vídeo.

$V0_y$, por sua vez, pode ser calculado por:

$V0_y = g * (t_3 - t_1)$, em que g = 9.81, t_3 é o tempo do quadro_três e t_1 o tempo do quadro_um.

Lembre de realizar as devidas conversões de pixel para metro e que a quantidade de pixels em 1 metro pode ser obtida a partir de qualquer frame capturado do vídeo utilizando o *paint*.

Finalmente calcule $V0 = \sqrt{V0_x^2 + V0_y^2}$

O relatório deve conter os seguintes quesitos:

1. Imagem contendo todos os pontos encontrados pelo FindByColor sobre o quadro_um, destacando os 4 pontos dos quadros utilizados anteriormente.
2. Cálculo do ângulo de lançamento e o valor encontrado.

3. Determinação do intervalo contendo a velocidade raiz da equação.
4. Algoritmos, chamada e resultados dos métodos para determinação da raiz.
5. Comparação entre os métodos e comparação dos resultados destes com a velocidade calculada experimentalmente.
6. Plote, na primeira imagem, além dos pontos encontrados pelo FindByColor, a trajetória descrita pela bola de acordo com a equação que modela o movimento para a velocidade encontrada com os métodos e para a velocidade calculada de forma experimental.

Método da Bisseção

- Encontrar um intervalo $[a,b]$ que contenha a raiz
- Seccionar o intervalo no seu ponto médio
- Se x for uma solução aceitável para o valor da raiz, pare.
- Senão, use o Teorema para verificar se a raiz está em $[a,x]$ ou em $[x,b]$. Redefina o intervalo $[a,b]$ e volte ao passo 1.

Método de Newton

- Analisar a função para determinar um valor de x_0 próximo a raiz.
- Encontrar a derivada de $f(x)$.
- Calcular estimativas consecutivas para a raiz usando a expressão:
- Repetir o passo 3 até que se tenha obtido a precisão desejada.

Programa:

Os algoritmos abaixo implementam os métodos da Bisseção, Newton e Secante, respectivamente. Escreva a função no Scilab para implementar esses métodos.

Algoritmo do método da Bisseção:
Entrada: intervalo inicial , precisão p e número máximo de iterações N
Saída: valor x da raiz calculada e número de iterações realizadas

```
cont = 0;
x=a;
faça
        xa=x;
        x = (a+b)/2;
        se f(x)f(a) < 0
                b=x
        senão
                a=x
        cont = cont+1;
enquanto |x – xa|/|x| > p e cont < N
```

Teste do código:

Função que desejamos saber o zero, por exemplo: f(x)=x^2 +log(x)

Função Bisseção do tipo:
[raiz,iter]=bissecao(a,b,p,N)

Chamada: [raiz,iter]=bissecao(0.1,1,10^(-4),100)

Saida: iter = 14, raiz=0.6528870

Algoritmo do método de Newton:
Entrada: estimativa inicial , precisão p e número máximo de iterações N
Saída: valor rn da raiz calculada e número de iterações realizadas

```
rn =;           //raiz nova
cont = 0;
faça
    ra = rn;   //raiz antiga = raiz nova
    rn = ra - f(ra)/f'(ra);
    cont = cont+1;
enquanto |rn - ra|/|rn| > p e cont < N
```

Teste do código:

Função que desejamos saber o zero. Por exemplo: f(x)=x^2 +log(x)

Função Newton do tipo:
[raiz,iter]=newton(x,p,N)

Chamada:
[raiz,iter]=newton(0.8,10^(-4),100)

Saida: iter = 3, raiz=0.6529186

Algoritmo do método da Secante:
Entrada: estimativas iniciais e , precisão p e número máximo de iterações N
Saída: valor rn da raiz calculada e número de iterações realizadas

```
ra1 =;          //raiz antiga 1
rn = ;          //raiz nova
cont = 0;
faça
    ra2 = ra1;
    ra1 = rn;
    rn = ra1 - f(ra1)(ra2-ra1)/(f(ra2)-f(ra1));
    cont = cont+1;
enquanto |rn – ra1|/|rn| > p e cont < N
```

Teste do código:

Função que desejamos saber o zero. Por exemplo: f(x)=x^2 +log(x)

Função Secante do tipo:
[raiz,iter]=secante(x0,x1,p,N)

Chamada:
[raiz,iter]=secante(0.1,10,10^(-4),100)

Saida: iter = 6, raiz=0.6529186

Obs: Para implementar o método da falsa posição basta substituir no método da bisseção a fórmula x=(a+b)/2 por x=a - f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a)).