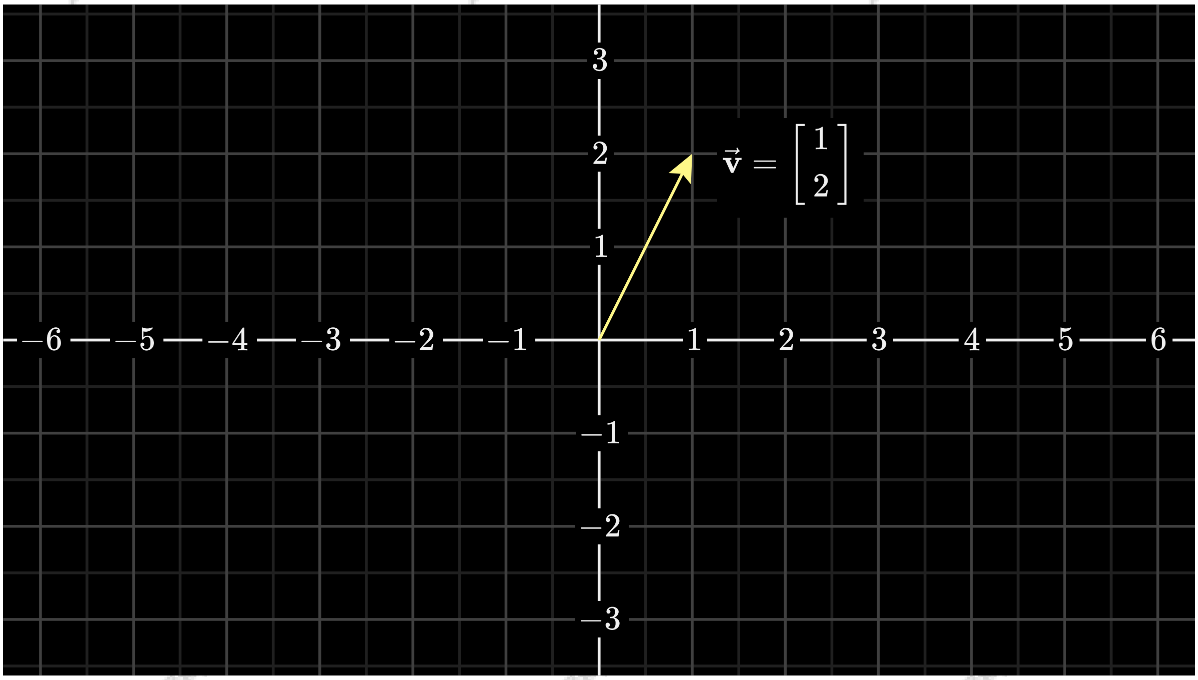
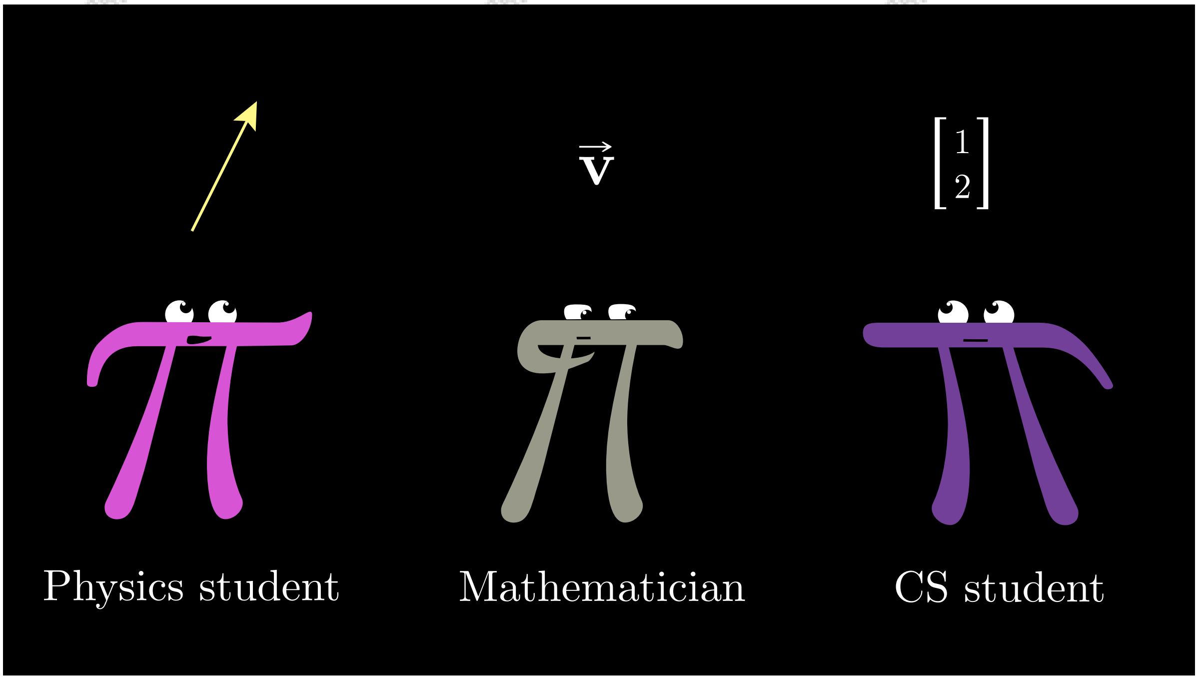
向量，到底是什么？

> ⓘ **Note**
>
> 翻译整理：龙眼，[AI数据科学的个人空间-AI数据科学个人主页-哔哩哔哩视频 (bilibili.com)]

向量是线性代数的基础模块，所以我们必须搞懂向量到底是什么。

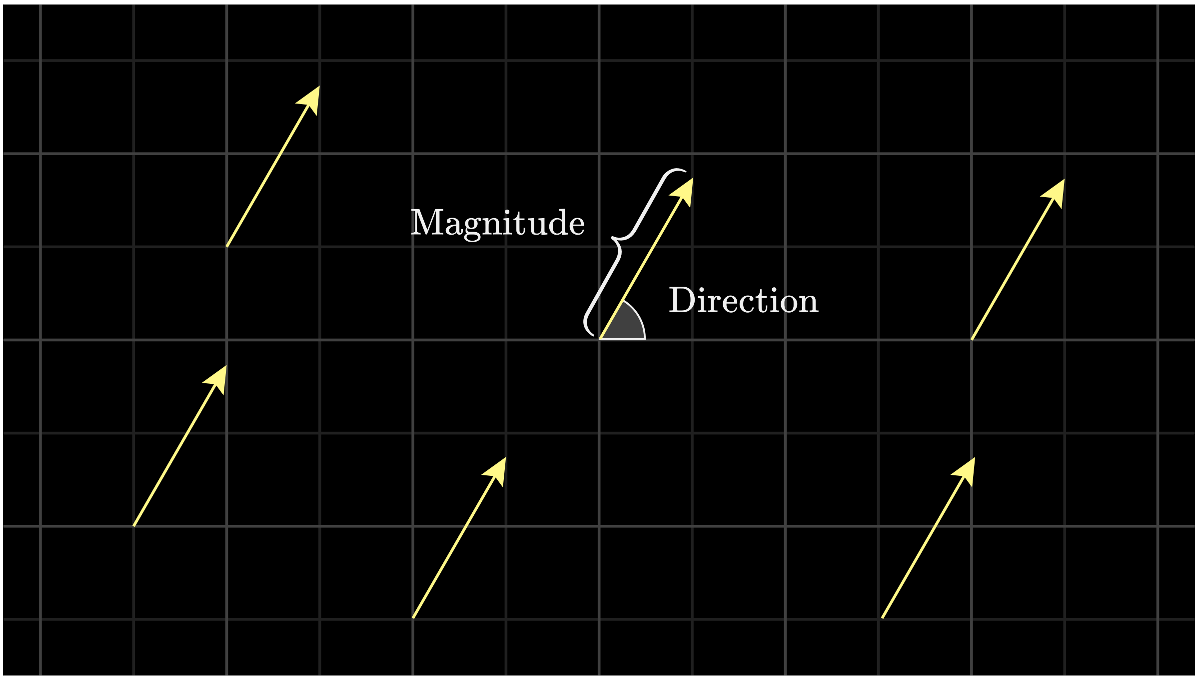


一般来说，我们有三种看待向量的角度，它们是物理学视角，计算机科学视角和数学家的视角。

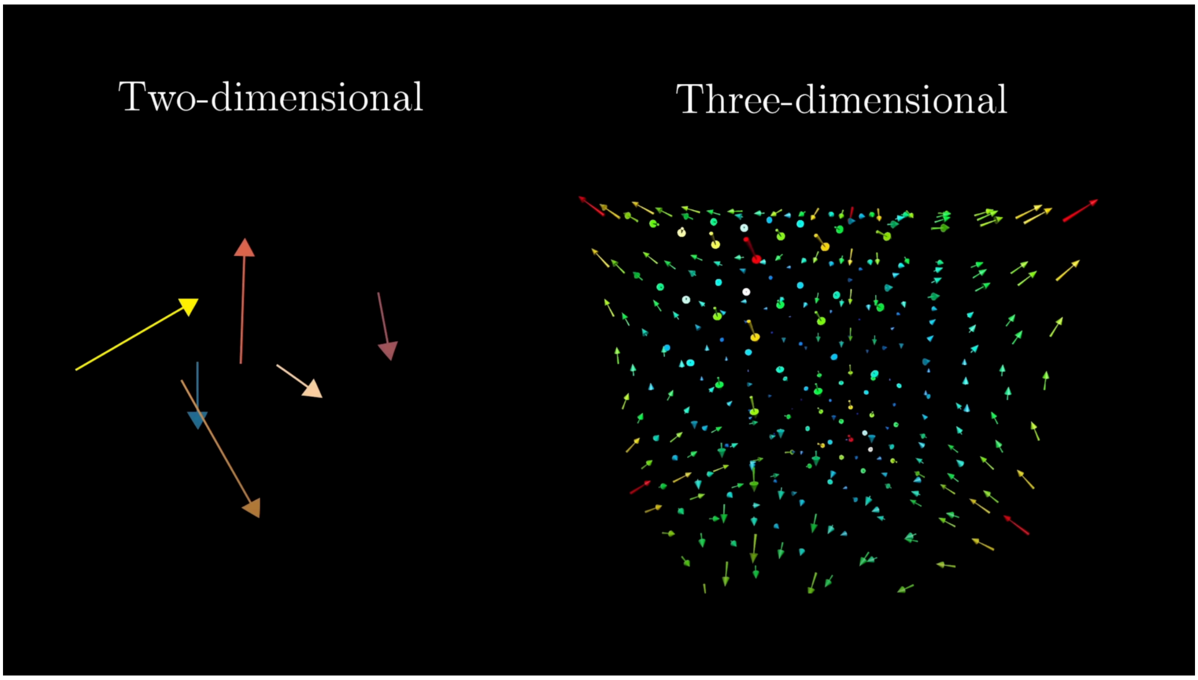


物理视角

物理学视角认为向量是指向空间中的箭头。一个向量包含2个维度，一个是长度，一个是它指向的方向，只要这两个维度不变，你可以随意移动它，它仍然是同一个向量。



在二维平面上的向量肯定就是二维的，而在我们现实日常生活中的向量一般是三维的。



计算机科学视角

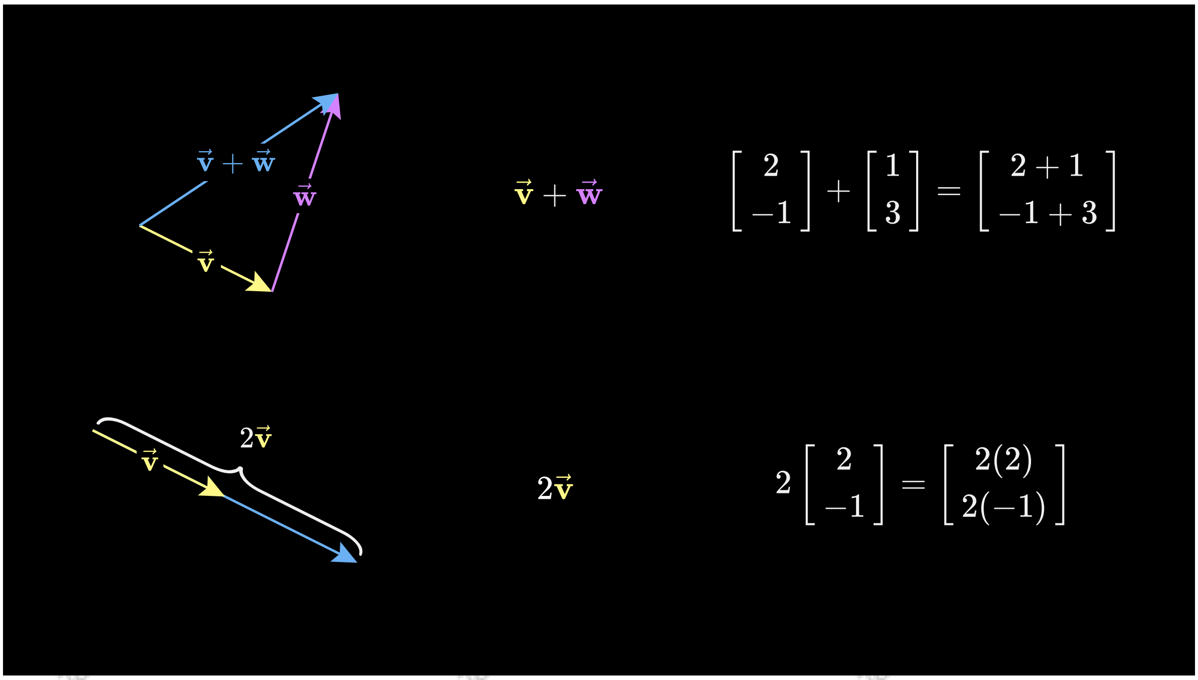
从计算机科学视角看，向量其实跟有序的数字列表是等价的。比如，你在做关于房价的分析，你关心的唯二特征只有面积和价格，你可能会将每栋房子建模为一对数字，第一个数表示面积，第二个数表示价格。

$$\begin{bmatrix} 2{,}600\ \text{ft}^2 \\ \$300{,}000 \end{bmatrix}$$

注意这里的顺序很重要，不能随意颠倒的。用专业一点的话说，你是将房子建模为一个二维向量，这里说的“向量”其实就是列表，只不过听上去感觉要高级一些，之所以说是二维向量，是因为它的长度是2。

数学家视角

数学家呢，当然是最厉害的，说话也是最难懂的，他们希望能够概括以上两个视角，说向量可以是任何东西，只要是能够做向量相加和一个数乘以向量的操作就OK，插一句，我们把一个数乘以向量简称为数乘向量。如果你对这个视角有点懵很正常，视频后半段就会讨论这些操作。

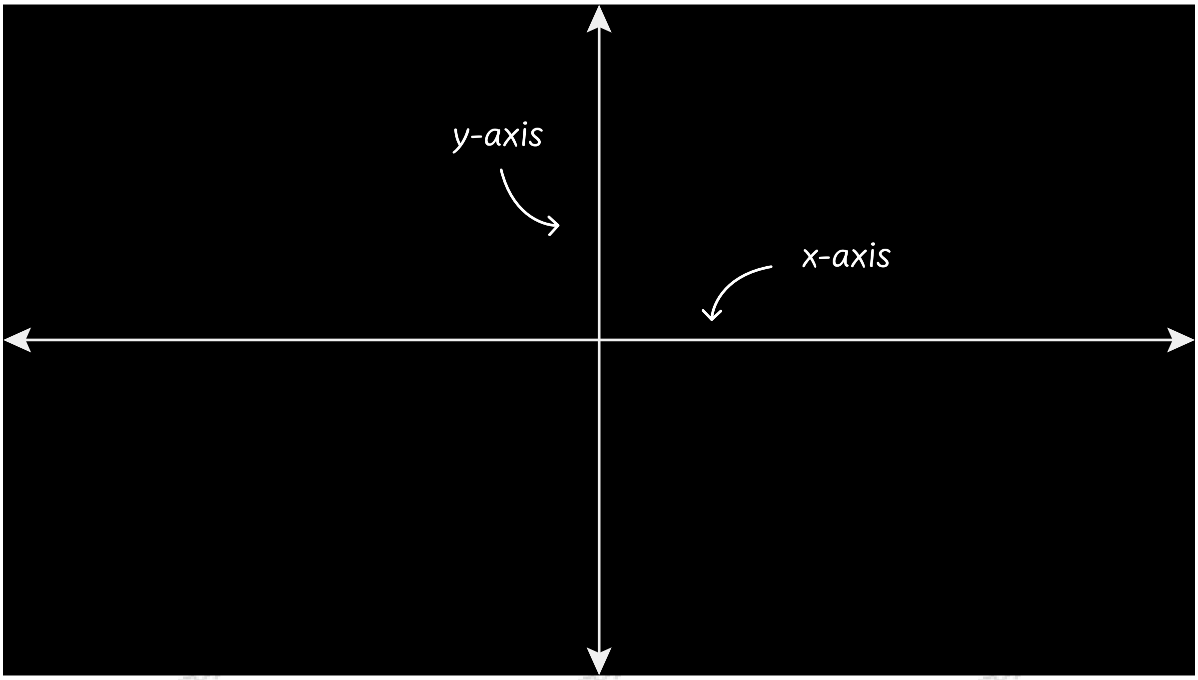


数学家的视角一般都很抽象，我们可以先不管他，我会在这个视频系列的最后再来详细讨论，这里提到这点的主要原因是我想强调一个事实：向量加法和数乘向量的计算在整个线性代数中都扮演着十分重要的角色。

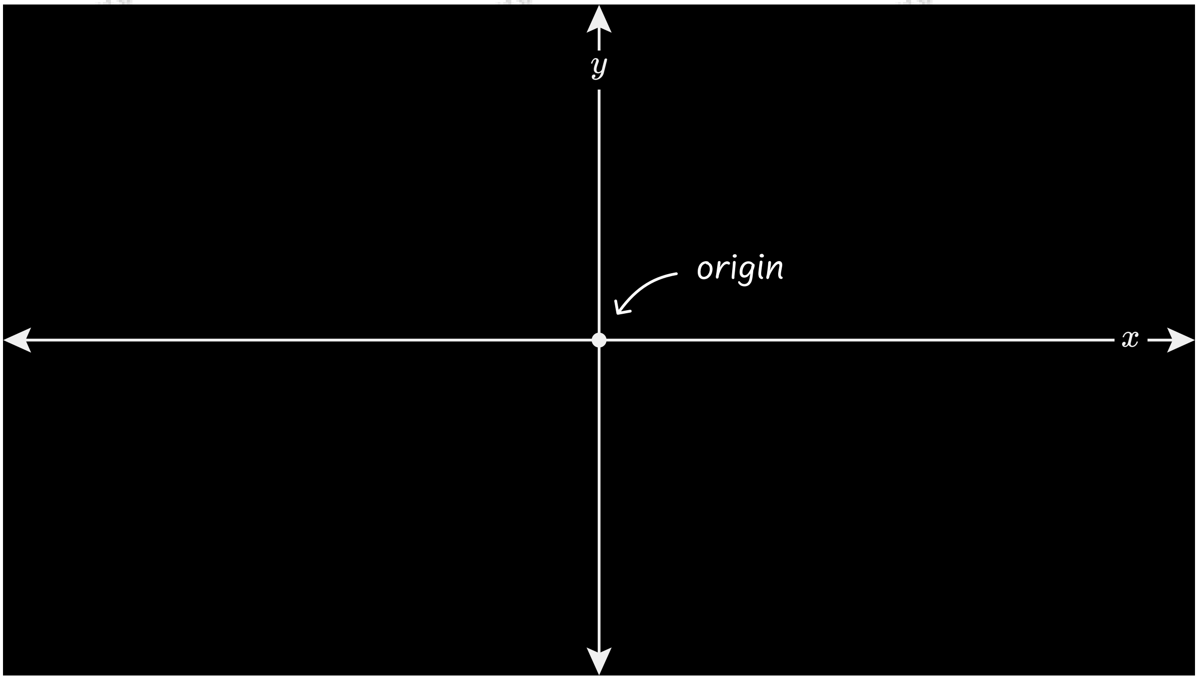
关于坐标系的思考

在我们谈论向量加法和数乘向量之前，我们来以几何的方式对向量加以理解，就是这种有长度有方向的箭头，我们可以把这个箭头放在x-y二维坐标系中来观察，箭头的起点位于原点，虽然物理学上可以将原点放在任意位置，但在线性代数中，我们一般把原点作为起点。现在你能理解向量是空间中的箭头了，那接下来我们就来理解下“向量是有序的数字列表”这种说法。可以把向量放在坐标系中来进行观察。

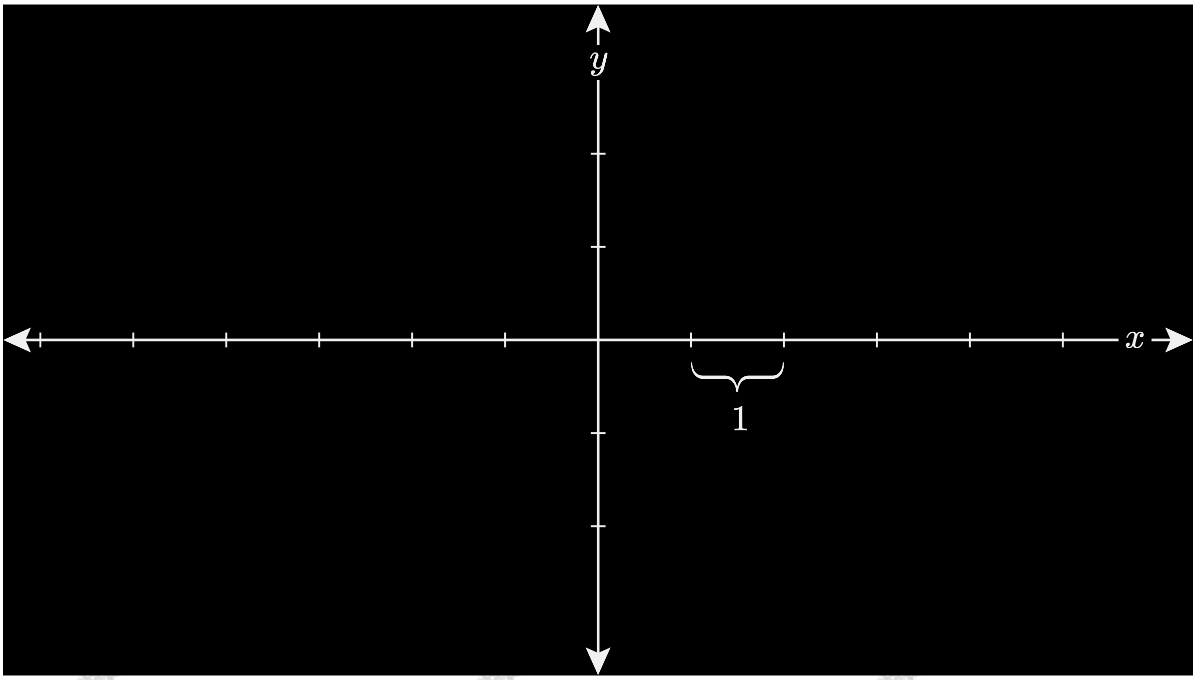
相信你们许多人已经很熟悉坐标系，但我觉得还是值得再学习一下，因为线性代数中各种重要概念的不同角度理解与碰撞都离不开坐标系。我们先专注于二维空间，画一条水平线，*x轴*，和一条垂直线，*y轴*。



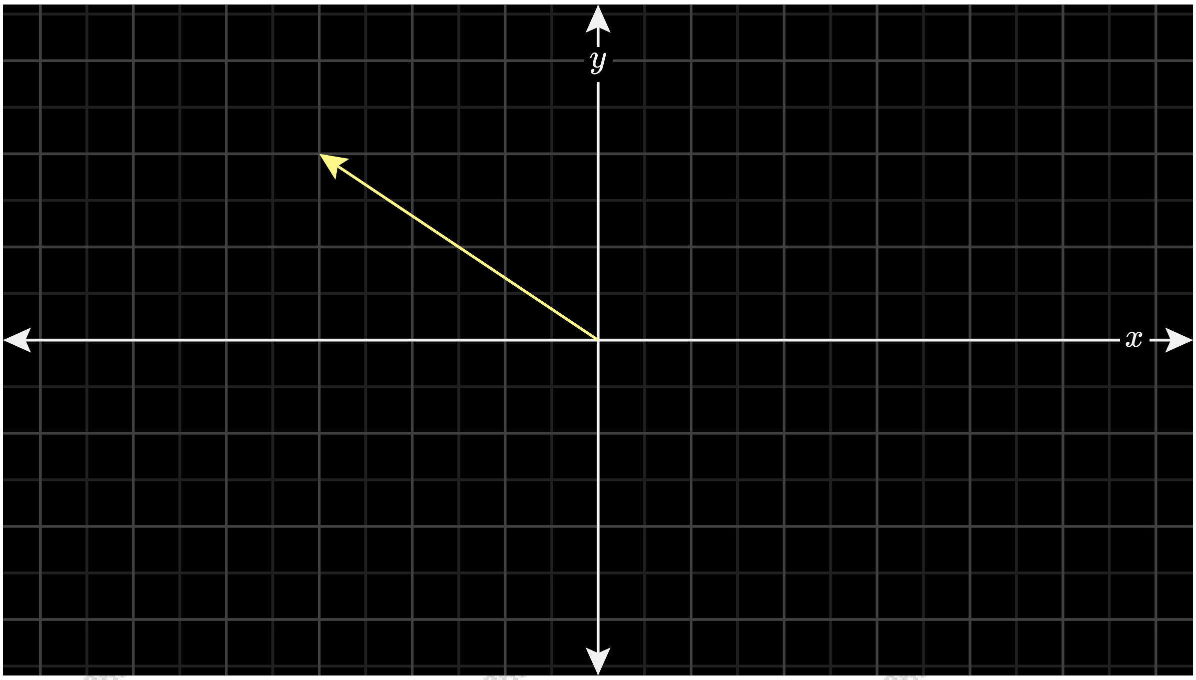
它们相交的地方即*原点*，原点即空间的中心点，也是所有向量的根源。



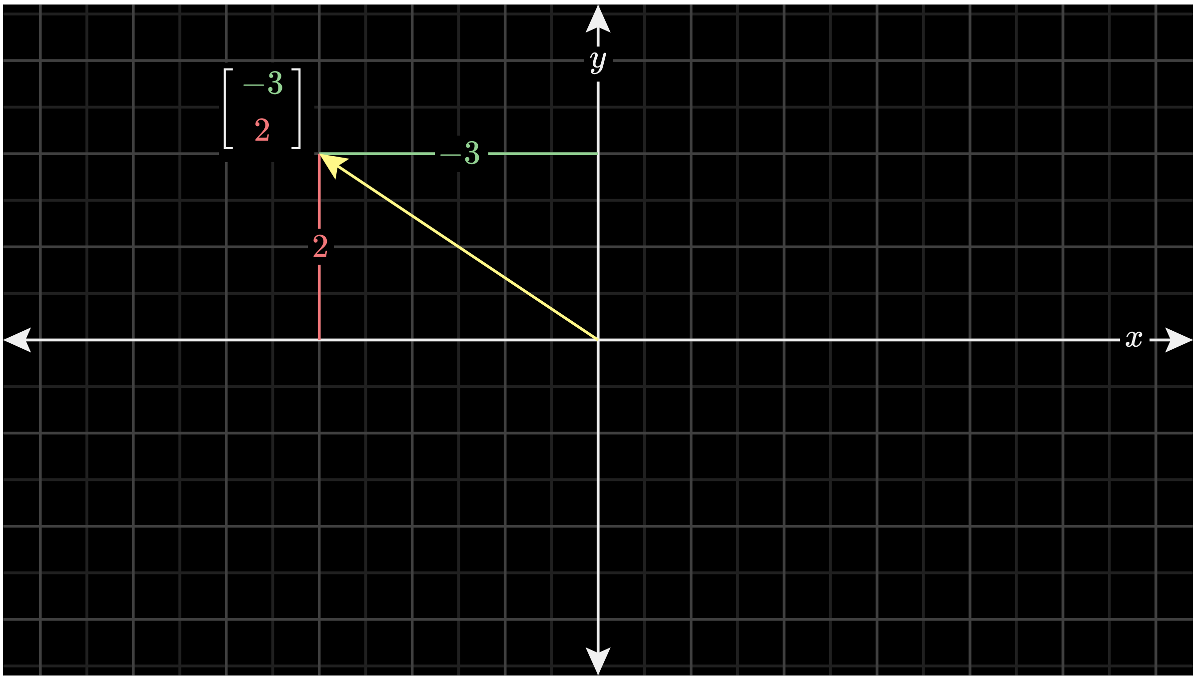
可以将长度为1的单位表示成坐标轴上的任意距离，然后基于这个距离在坐标轴上做刻度标记。



我也会把这些刻度标记延伸到整个二维空间，形成网格线，在以后的视频里我会经常这样做，不过现在我倒是不需要。

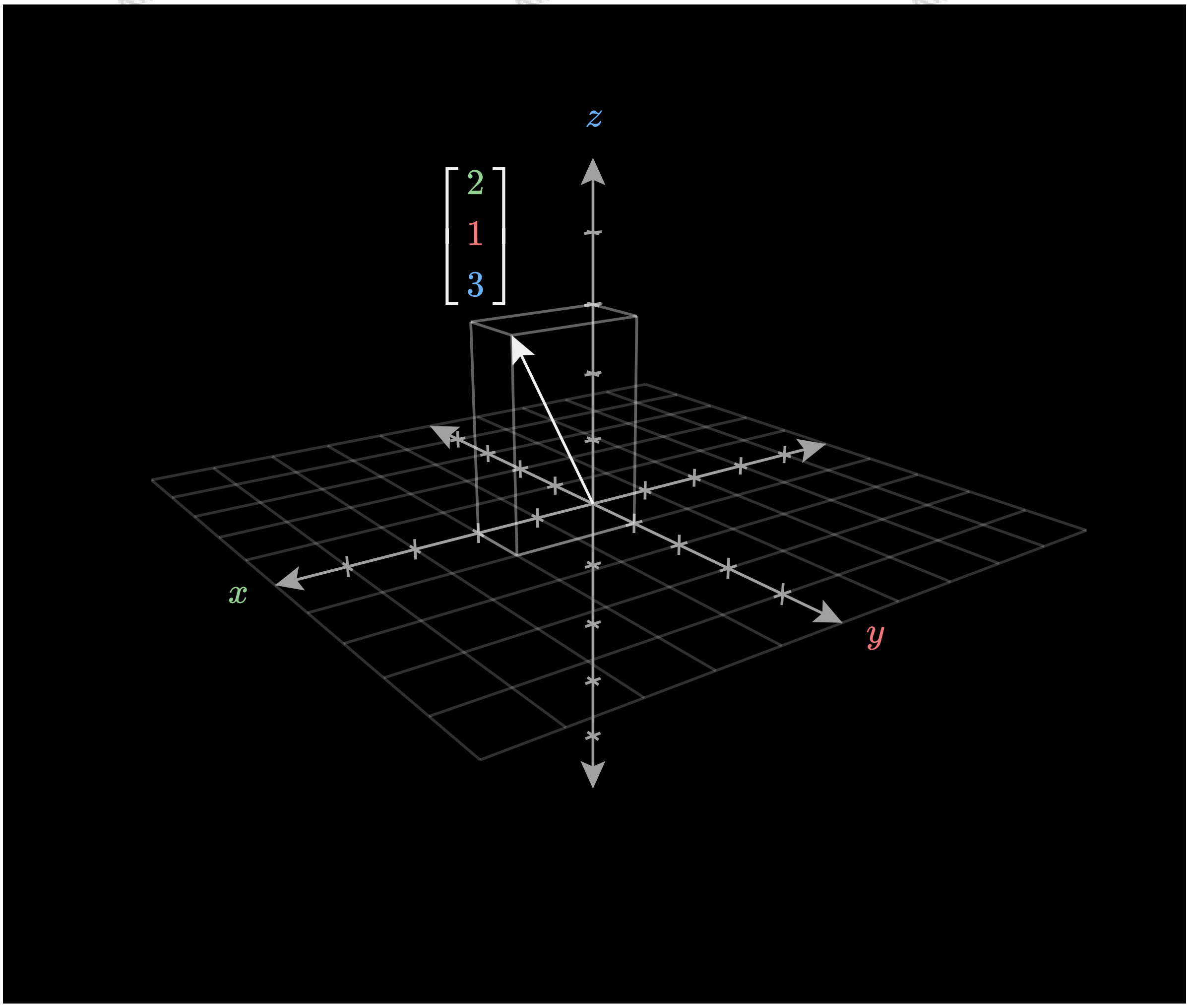


在二维空间里，向量用坐标表示就是一对数字，这对数字隐含着这个向量是如何从原点走向它的箭头终点的。它的第一个数字告诉你可以沿着x轴走多远，正数表示向右走，负数表示向左走，第二个数字告诉你可以沿着y轴走多远，正数表示向上走，负数表示向下走。



因为二维空间中的点也是用一对数字坐标来表示，为了和向量区分开来，一般约定向量是将这对数字垂直书写，并用方括号包围。每一对数字表示唯一一个向量，每一个向量都与一对数字相对应。

切换到三维空间中呢，需要增加第三个轴，z轴，它同时垂直于x轴和y轴。三维空间中的向量，就是一个有序的三元数组了：第一个数字告诉你可以沿着x轴走多远，第二个数字告诉你可以沿着y轴走多远，第三个数字告诉你可以沿着新的z轴走多远。



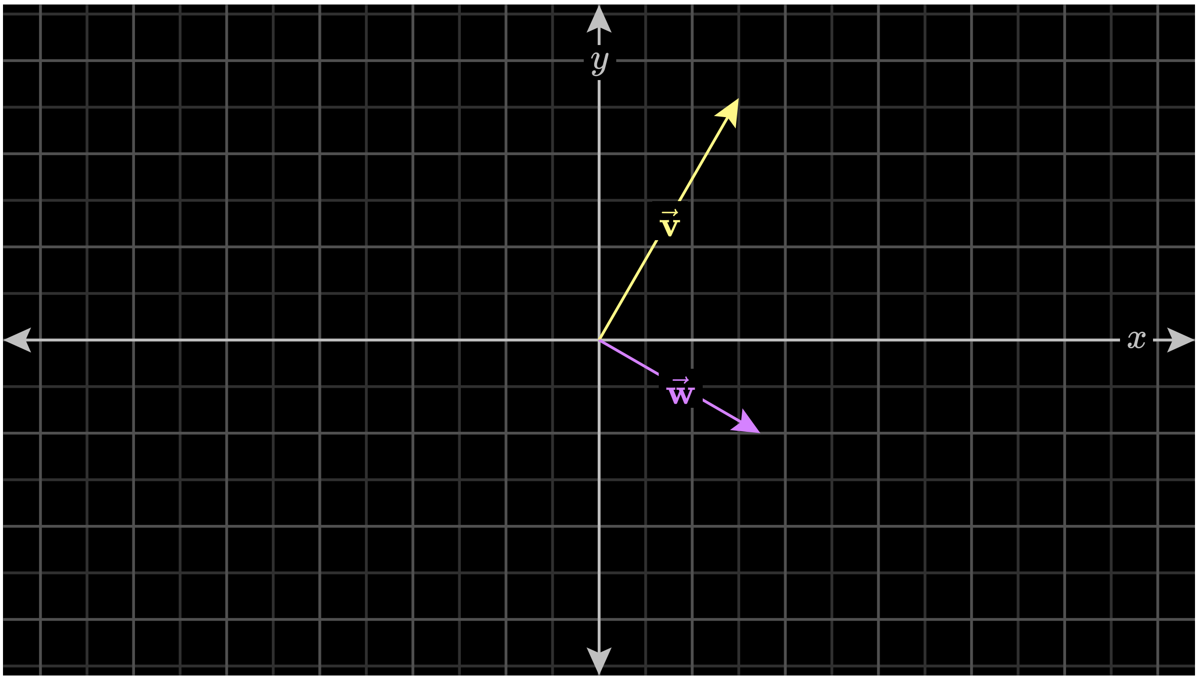
同样的，每一个三元组都与空间中的唯一一个向量相对应。

向量操作

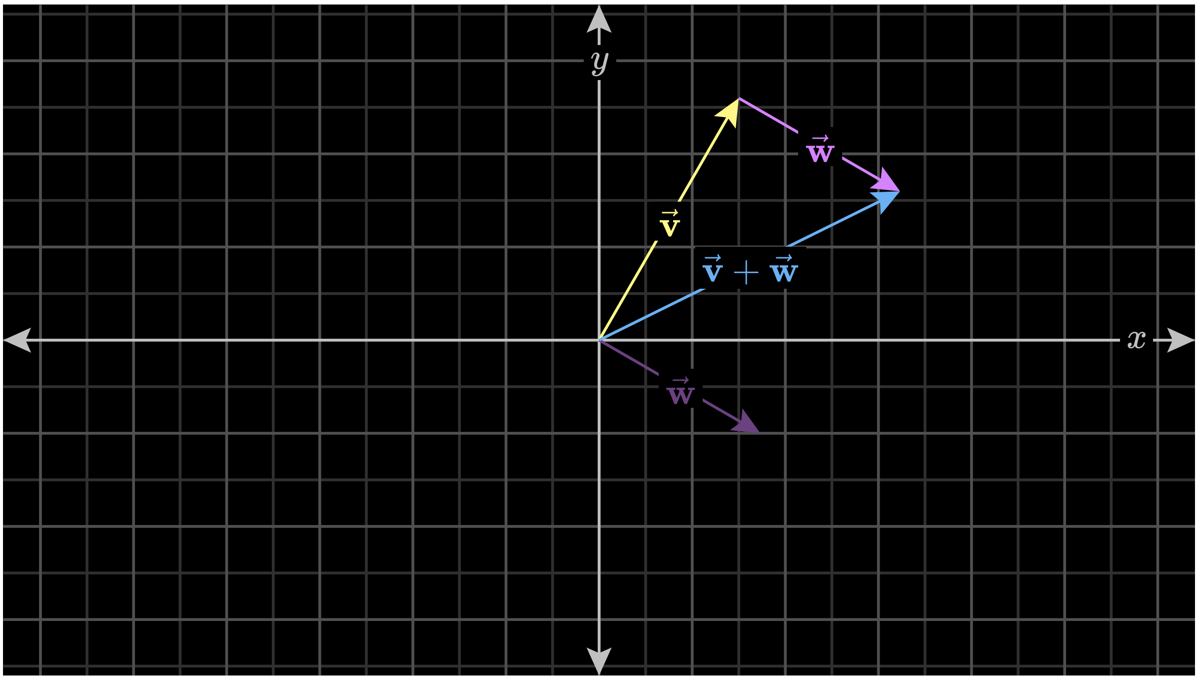
我们来重点看向量加法和数乘向量，毕竟在线性代数中几乎每个主题都是围绕着这两个操作进行的。不过幸好这两个操作都还比较简单和直接。

加法

假设我们有两个向量，向量v指向右上，向量w指向右下。

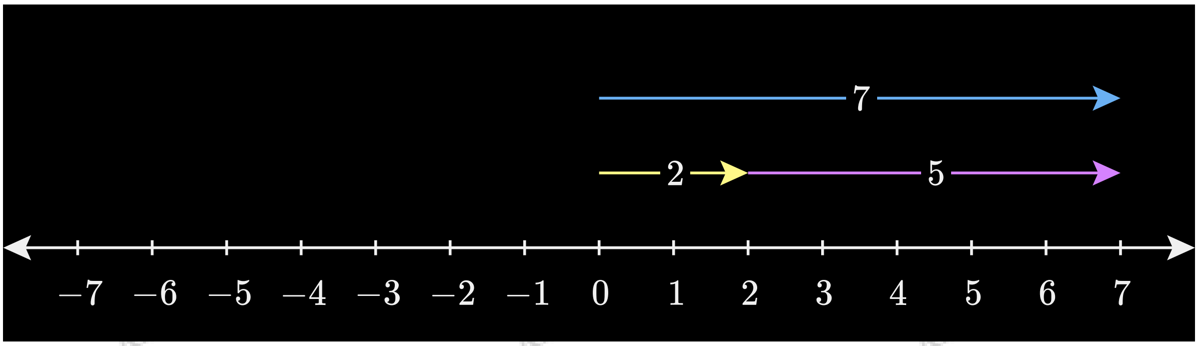


要将这两个向量相加，可以将第w向量的尾巴移动到v向量的箭头顶端，但注意要保持w的方向不变。然后，从第一个向量v的起点画一个新向量到第二个向量w现在的箭头顶端，这个新向量就是它们的和。

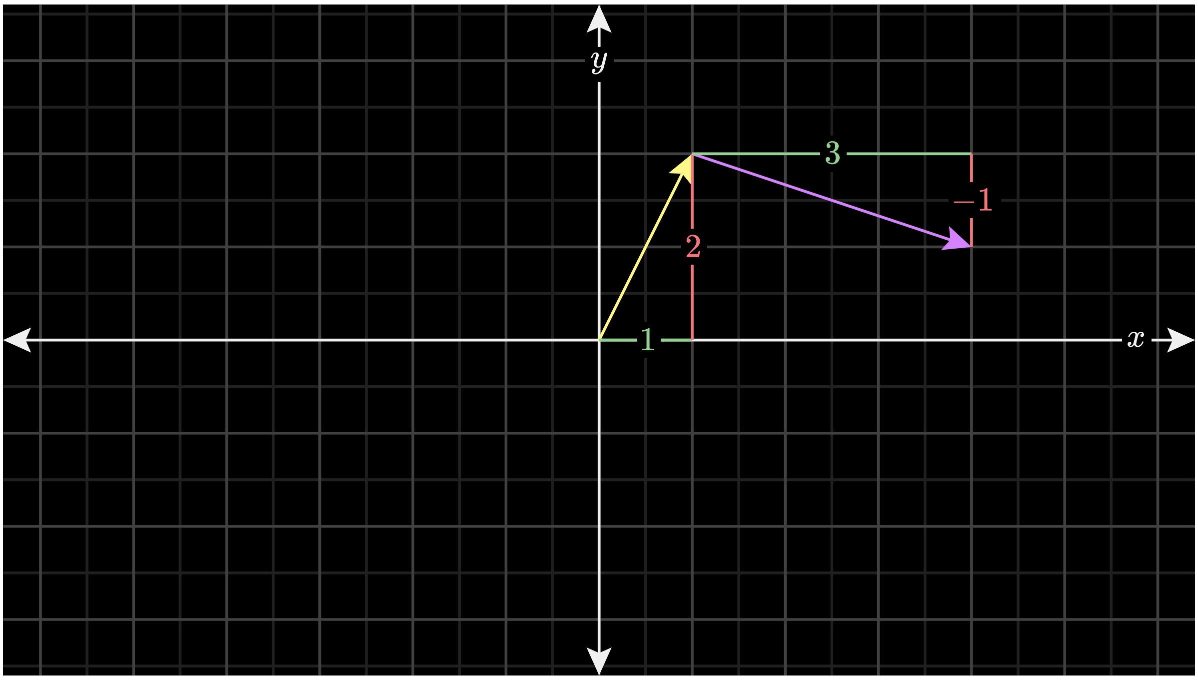


那和操作为什么是这样定义的，而不是在w向量移动之前就直接画一个箭头连接两个向量的箭头顶端？嗯，可以这样思考，每一个向量都是表示沿着某个特定方向移动一定距离，如果你沿着第一个向量的方向走它对应的距离，然后沿着第二个向量的方向再走它对应的距离，综合起来的效果与沿着这两个向量的和的移动方式是一样的。

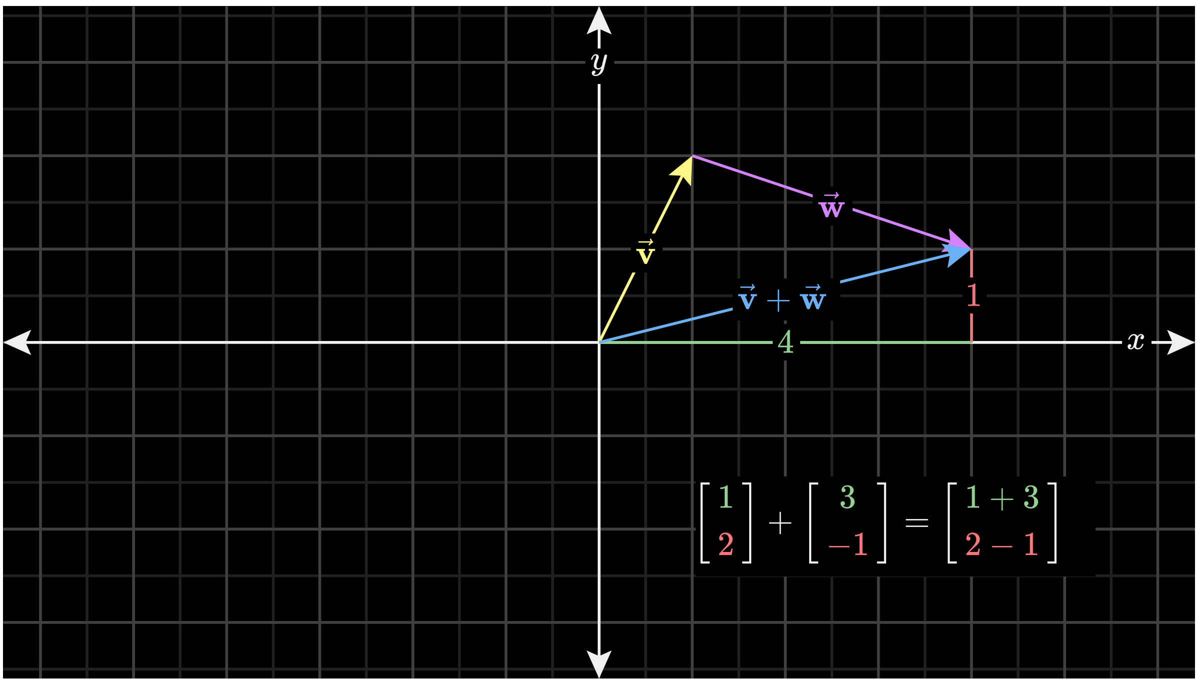
我们也可以把这种加法简化成是数值线上的移动。就跟教你家娃一样，2+5，就是向右移动2步，然后再加上向右移动的5步。总的效果与你直接向右走7步是一样的。



然后，我们来看看向量加法在数值上的变化是什么样子的。这里的第一个向量的坐标是$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，第二个向量的坐标是$\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$。当你使用这种移动向量后首尾相连的方法做和时，你可以把这个过程分解成4个步骤：即向右走1步，然后向上走2步，然后向右走3步，然后向下走1步。



可以重新组织这些步骤，让你先做完所有的水平移动，然后再做所有的垂直移动，那么也就是首先向右移动1+3步，然后向上移动2-1步。所以新向量的坐标就是4和1。

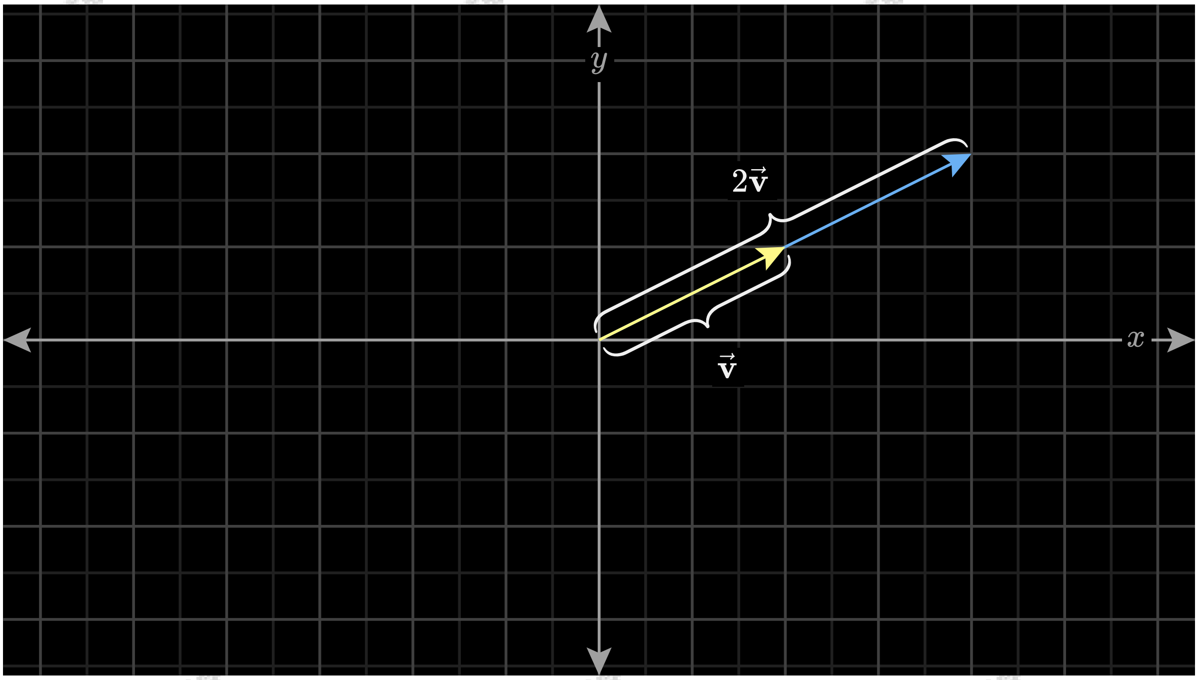


所以，总结来说，要将两个向量所对应的数值相加，就是将它们对应的匹配项加在一起即可。

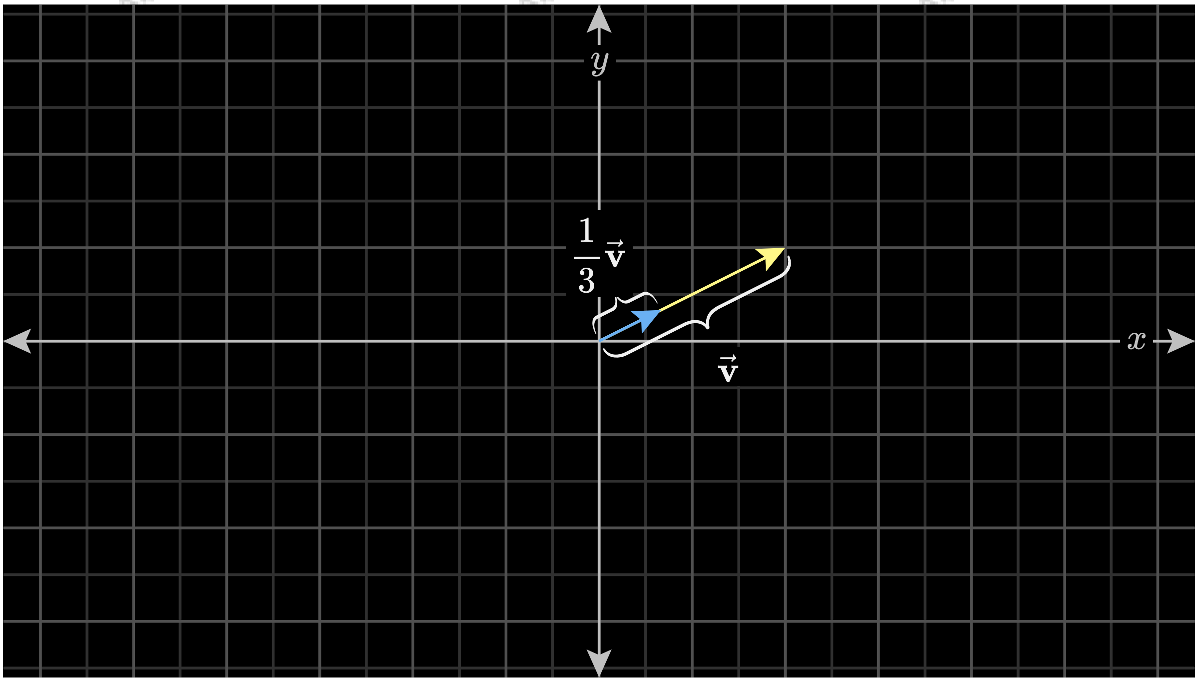
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

缩放

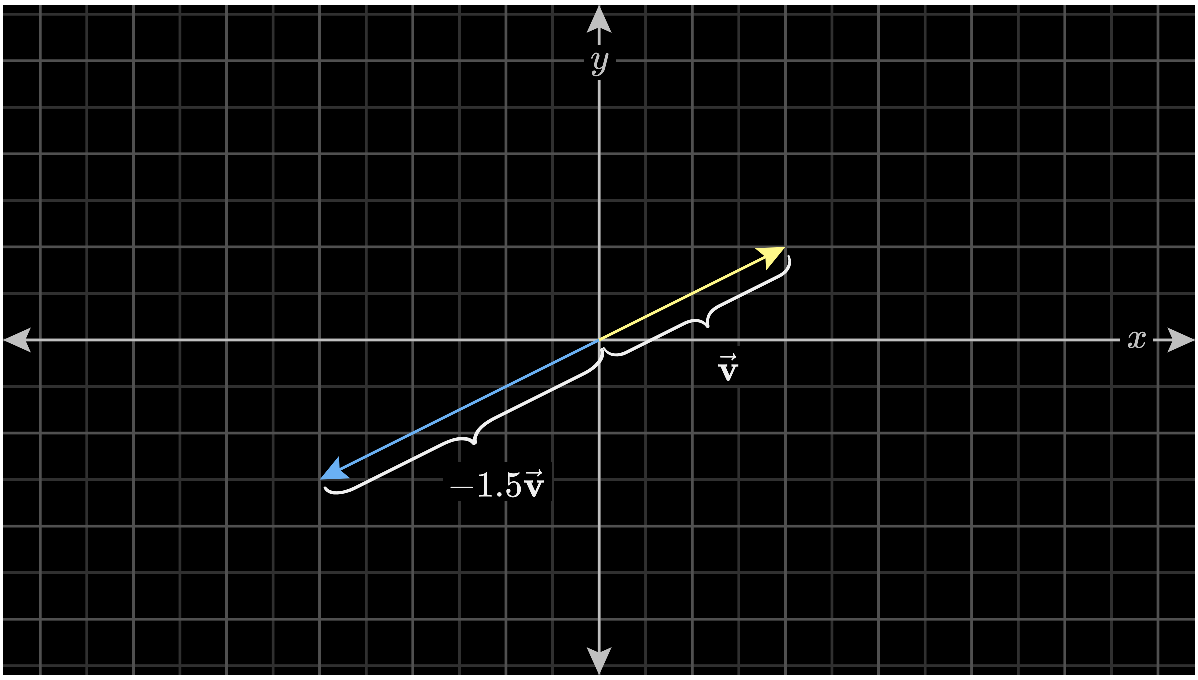
另一个基本的向量操作是数乘向量。我们来看一些例子。如果你用2去乘以给定的向量，你就是再将该向量拉伸，使其长度是原来的两倍。



如果你将一个向量乘以1/3，那就是在将向量压缩，使其长度是原始长度的三分之一。



如果你用一个负数比如-1.8去乘向量，那么向量就会翻转，然后被拉伸1.8倍。



这种拉伸、压缩和反转方向的过程称为“缩放”。刚刚我们用的2、1/3或-1.8这样的数字去缩放某个向量，我们可以称这些数字为“标量”。事实上，在线性代数中，数字在这里做的事就是缩放向量，所以通常“标量”和“数字”这两个词可以互换使用。在数值上，将向量拉伸2倍就是对应于将其每个坐标乘以2。所以总结来看，将给定向量乘以标量意味着将这个向量的每个分量乘以那个标量。

$$2v = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

结论

好了，你将在接下来的视频系列中看到，几乎所有线性代数主题都围绕着这两个基本操作：向量加法和数乘向量。

我们还将在最后的线性代数章节中去讨论一个话题：不管你是如何表示向量的，数学家们为什么就只考虑这些操作呢。

事实上，不管你认为向量本质的是空间中具有长度和方向的箭头，还是可以有很好几何解释的数字列表，都不是最重要的。重要的是，把这两种理解关联起来，来回转换来回翻译的能力。它可以为数据分析师提供将一堆数字进行物理概念化视觉化的好方法，可以更好的看清数字中的模式，让你对一些操作有一种全局视图。

另一方面，它也为物理学家和计算机图形程序员之类的人提供了一种使用数字去描述空间和操作的语言，这些数字可以通过计算机去处理和运行。例如，当你去做数学动画时，你首先会想象空间中发生了什么，然后让计算机去以数字的方式表示出来，并弄清楚在屏幕上什么地方放置哪些像素，这一般都要依赖于你对线性代数有很好的理解。

OK，以上就是有关向量的基础，下个视频，我们将开始围绕向量探讨一些有趣简洁的概念，如生成空间、基和线性相关性。

> **Note**
>
> 笔记来自于对3Blue1Brown线性代数课程理解嚼碎后的灵魂翻译和整理。
>
> 原文链接：[3Blue1Brown - Vectors, what even are they?]