3.2 统计决策中的常用分布族

一、Gamma分布族

二、Beta分布族

一、Gamma分布

定义3.5　若随机变量X的密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

则称X服从$Gamma$分布，记作$X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$,其中$\alpha>0,\beta>0$为参数,

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

且$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\Gamma(1)=\Gamma(0)=1,\Gamma(n+1)=n!,\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$

$Gamma$分布族记作$\{\Gamma(\alpha,\beta):\alpha>0,\beta>0\}.$

*Gamma*分布具有下列性质：

性质1　若$X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$,则

$$E(X^k)=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\beta^k}=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\beta^k}$$

它的数学期望与方差分别为

$$EX=\frac{\alpha}{\beta},D(X)=\frac{\alpha}{\beta^2}$$

证明 $E(X^k)=\int_0^{\infty}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha+k-1}\mathrm{e}^{-\beta x}\mathrm{d}x$

$$\underline{\underline{\beta x=t}}\quad\frac{1}{\beta^k\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty}t^{\alpha+k-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)\beta^k}$$

$$=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^k\Gamma(\alpha)}$$

$$=\frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\cdots\alpha}{\beta^k}$$

当$k=1$时，$EX=\frac{\alpha}{\beta}$，当$k=2$时，$EX^2=\frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}$，

所以$D(X)=EX^2-(EX)^2=\frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\alpha}{\beta^2}$

性质3 若$X_j \sim \Gamma(\alpha_j, \beta), j = 1, 2, \cdots, n$, 且诸$X_j$间相互独立，则

$$\sum_{j=1}^{n} X_j \sim \Gamma(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j, \beta)$$

这个性质称为*Gamma*分布的可加性.

性质4 若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，同服从指数分布$e(\beta)$ (即$\Gamma(1, \beta)$分布)，则

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \beta)$$

性质5 若$X\sim\Gamma(\alpha,1)$,则$Y=\dfrac{X}{\beta}\sim\Gamma(\alpha,\beta)$.

在Γ分布中，令$\alpha=\dfrac{n}{2},\beta=\dfrac{1}{2}$,则得到自由度为$n$的$\chi^2(n)$，即$\Gamma(\dfrac{n}{2},\dfrac{1}{2})=\chi^2(n)$.

二、Beta分布

定义3.6　若随机变量X的密度函数为

$$f(x;a,b)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称X服从β分布，记作$Be(a,b)$其中$a>0,b>0$是参数，β分布记作$\{Be(a,b):a>0,b>0\}$.

Beta分布具有如下性质：

性质1　β变量X的k阶矩为

$$E(X^k)=\frac{a(a+1)\cdots(a+k-1)}{(a+b)(a+b+1)\cdots(a+b+k-1)}$$

$$=\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(a+b+k)}$$

它的数学期望与方差分别为

$$EX=\frac{a}{a+b},DX=\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

性质2　设随机变量X与Y独立，$X \sim \Gamma(a,1), Y \sim \Gamma(b,1)$,则

$$Z = \frac{X}{X+Y} \sim Be(a,b)$$

性质3　若$X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$且相互独立，则

$$Z = \frac{X}{X+Y} \sim Be\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right).$$

Thank You!