第三章 矩阵分析

§1 矩阵序列的极限

例 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$$

是否为收敛矩阵？为什么？

解 因为 $\|A\|_1=0.9<1$, (或 $\|A\|_F=\sqrt{0.89}\approx 0.943<1$)

所以A是收敛矩阵。

(可求得 $\|A\|_{m_1}=2.5$, $\|A\|_{m_\infty}=3\times 0.5=1.5$, $\|A\|_\infty=1.4$)

例 矩阵 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$ 是否为收敛矩阵？为什么？

解 由

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-\frac{1}{6} & \frac{4}{3}\\ \frac{1}{3} & \lambda-\frac{1}{6}\end{vmatrix}=\lambda^2-\frac{1}{3}\lambda-\frac{15}{36}=(\lambda-\frac{5}{6})(\lambda+\frac{3}{6})$$

得A的特征值为 $\lambda_1=\frac{5}{6}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

从而 $\rho(A)=\frac{5}{6}<1$, 故A是收敛矩阵。

§2 矩阵级数

例 判断矩阵幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{6^k}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}^k$$

的敛散性。

解 法1. 令 $A=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, 取幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{6^k}x^k$。

因为

$$\rho=\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|=\lim_{k\to+\infty}\frac{\frac{k+1}{6^{k+1}}}{\frac{k}{6^k}}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{k+1}{k}=\frac{1}{6}$$

所以收敛半径为 $r=\frac{1}{\rho}=6$。可求得A的特征值为

$$\lambda_1=5,\quad \lambda_2=-3$$

即 $\rho(A)=5<6$, 故矩阵幂级数绝对收敛。

法2. 取幂级数 $\sum_{k=0}^{+\infty}kx^k$, 则 $A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -8\\ -2 & 1\end{pmatrix}$。

可求得 $r=1$, A的特征值为 $\lambda_1=\frac{5}{6}$, $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

于是 $\rho(A)=\frac{5}{6}<1$, 故矩阵幂级数绝对收敛。

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}0.2 & 0.1 & 0.2\\ 0.5 & 0.5 & 0.4\\ 0.1 & 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$$

判断 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^k$ 的敛散性。若收敛，求其和。

解 因为 $\|A\|_1=0.9<1$, 所以 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^k$ 收敛，且

$$\sum_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}0.8 & -0.1 & -0.2\\ -0.5 & 0.5 & -0.4\\ -0.1 & -0.3 & 0.8\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}28 & 14 & 14\\ 44 & 62 & 42\\ 20 & 25 & 35\end{pmatrix}$$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{4}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$, 则 $\sum_{k=0}^{+\infty}A^k$ 收敛的原因是 $\rho(A)=\frac{5}{6}<1$ ，且其和为 $\begin{pmatrix}\frac{10}{3} & -\frac{16}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3}\end{pmatrix}$。

分析 可求得A的特征值为

$$\lambda_1=\frac{5}{6},\quad \lambda_2=-\frac{1}{2}$$

从而 $\rho(A)=\frac{5}{6}<1$, $\sum_{k=0}^{+\infty}A^k=(I-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{10}{3} & -\frac{16}{3}\\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3}\end{pmatrix}$。

§3 矩阵函数

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}, \cos\boldsymbol{A}t$。

解 因为 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1$

所以 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}^2=-\boldsymbol{I}$。从而

$$\boldsymbol{A}^3=-\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^4=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^6=-\boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{A}^7=-\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^8=\boldsymbol{I},\ \cdots$$

可知 $\boldsymbol{A}^{2k}=(-1)^k\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^{2k+1}=(-1)^k\boldsymbol{A}\quad (k=1,2,\cdots)$

故

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}$，$\cos\boldsymbol{A}t$。

解 由于 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{A}\ (k=2,3,\cdots)$，所以

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}}&=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5+\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots)\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}[(1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots)-1]=\boldsymbol{I}+(e-1)\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}\boldsymbol{A}t+\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+(\tfrac{t}{1!}+\tfrac{t^2}{2!}+\tfrac{t^3}{3!}+\cdots)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}+(e^t-1)\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7+\tfrac{1}{9!}\boldsymbol{A}^9-\cdots\\&=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}+\cdots=\boldsymbol{A}\sin 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}}&=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5+\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{8!}\boldsymbol{I}-\cdots\\&=(1-\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{4!}-\tfrac{1}{6!}+\tfrac{1}{8!}-\cdots)\boldsymbol{I}+(1-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{1}{5!}-\tfrac{1}{7!}+\cdots)\boldsymbol{A}\\&=(\cos 1)\boldsymbol{I}+(\sin 1)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos 1 & \sin 1\\ -\sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{I}+\tfrac{1}{1!}\boldsymbol{A}t+\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3t^3+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4+\cdots\\&=(1-\tfrac{t^2}{2!}+\tfrac{t^4}{4!}-\tfrac{t^6}{6!}+\cdots)\boldsymbol{I}+(t-\tfrac{t^3}{3!}+\tfrac{t^5}{5!}-\cdots)\boldsymbol{A}\\&=(\cos t)\boldsymbol{I}+(\sin t)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\boldsymbol{A}t&=\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4-\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6t^6+\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}(-\tfrac{1}{2!}t^2+\tfrac{1}{4!}t^4+\cdots)\\&=\boldsymbol{I}+(\cos t-1)\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

例 已知 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(1,-2,0,4)$，求 $e^{\boldsymbol{\Lambda}}, e^{\boldsymbol{\Lambda}t}, \sin\boldsymbol{\Lambda}t$，$\cos\boldsymbol{\Lambda}$。

解
$$\begin{aligned}&e^{\boldsymbol{\Lambda}}=\mathrm{diag}(e, e^{-2}, 1, e^4)\\&e^{\boldsymbol{\Lambda}t}=\mathrm{diag}(e^t, e^{-2t}, 1, e^{4t})\\&\sin\boldsymbol{\Lambda}t=\mathrm{diag}(\sin t, -\sin 2t, 0, \sin 4t)\\&\cos\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\cos 1, \cos 2, 1, \cos 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7+\tfrac{1}{9!}\boldsymbol{A}^9-\cdots\\&=\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}+\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}+\cdots\\&=\boldsymbol{A}[\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}+\tfrac{1}{3!}+\cdots)-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{1!}+\tfrac{1}{2!}-\tfrac{1}{3!}+\cdots)]\\&=\boldsymbol{A}[\frac{e-e^{-1}}{2}]=\boldsymbol{A}\,\mathrm{sh}1=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{sh}1\\ -\mathrm{sh}1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\boldsymbol{A}t&=\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4t^4-\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6t^6+\cdots\\&=\boldsymbol{I}(1+\tfrac{1}{2!}t^2+\tfrac{1}{4!}t^4+\cdots)\\&=\boldsymbol{I}[\frac{e^t+e^{-t}}{2}]=\boldsymbol{I}\,\mathrm{ch}\,t=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,t & 0\\ 0 & \mathrm{ch}\,t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$，试求 $e^{\boldsymbol{A}}, e^{\boldsymbol{A}t}, \sin\boldsymbol{A}t$。

解 可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3$

对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_2=(-1,1,1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

故相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{使得}\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$$

从而

$$e^{A}=P\begin{pmatrix} e & & \\ & e^2 & \\ & & e^3 \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} e-e^2+e^3 & e-e^2 & -e^2+e^3 \\ e^2-e^3 & e^2 & e^2-e^3 \\ -e+e^2 & -e+e^2 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix} e^t-e^{2t}+e^{3t} & e^t-e^{2t} & -e^{2t}+e^{3t} \\ e^{2t}-e^{3t} & e^{2t} & e^{2t}-e^{3t} \\ -e^t+e^{2t} & -e^t+e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\sin At = P\begin{pmatrix} \sin t & & \\ & \sin 2t & \\ & & \sin 3t \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin t-\sin 2t+\sin 3t & \sin t-\sin 2t & -\sin 2t+\sin 3t \\ \sin 2t-\sin 3t & \sin 2t & \sin 2t-\sin 3t \\ -\sin t+\sin 2t & -\sin t+\sin 2t & \sin 2t \end{pmatrix}$$

解

$$e^{A}=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & & & \\ & 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & e^2 & & \\ \hline & & & & e^{-1} & e^{-1} \\ & & & & & e^{-1} \end{array}\right),\quad e^{At}=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & t & \frac{t^2}{2} & & & \\ & 1 & t & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & e^{2t} & & \\ \hline & & & & e^{-t} & te^{-t} \\ & & & & & e^{-t} \end{array}\right)$$

$$\sin At=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & t & 0 & & & \\ & 0 & t & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & \sin 2t & & \\ \hline & & & & -\sin t & t\cos t \\ & & & & & -\sin t \end{array}\right)$$

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，试求 $e^{A}, e^{At}, \sin At, \cos A$。

解 $e^{A}=\begin{pmatrix} e^2 & e^2 & \frac{1}{2}e^2 & \frac{1}{6}e^2 \\ & e^2 & e^2 & \frac{1}{2}e^2 \\ & & e^2 & e^2 \\ & & & e^2 \end{pmatrix}$，$e^{At}=\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} & \frac{t^3}{6}e^{2t} \\ & e^{2t} & te^{2t} & \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ & & e^{2t} & te^{2t} \\ & & & e^{2t} \end{pmatrix}$

$$\sin At=\begin{pmatrix} \sin 2t & t\cos 2t & -\frac{t^2}{2}\sin 2t & -\frac{t^3}{6}\cos 2t \\ & \sin 2t & t\cos 2t & -\frac{t^2}{2}\sin 2t \\ & & \sin 2t & t\cos 2t \\ & & & \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$\cos At=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 1 & 0 & -\frac{t^2}{2} & & & \\ & 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & \cos 2t & & \\ \hline & & & & \cos t & t\sin t \\ & & & & & \cos t \end{array}\right)$$

$$\cos A=\begin{pmatrix} \cos 2 & -\sin 2 & -\frac{1}{2}\cos 2 & \frac{1}{6}\sin 2 \\ & \cos 2 & -\sin 2 & -\frac{1}{2}\cos 2 \\ & & \cos 2 & -\sin 2 \\ & & & \cos 2 \end{pmatrix}$$

例 已知 $A=\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & & & \\ \hline & & & 2 & & \\ \hline & & & & -1 & 1 \\ & & & & & -1 \end{array}\right)$，

求 $e^{A}, e^{At}, \sin At, \cos At$。

例 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 e^{At}，$\sin A$。

解 可求得

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\quad 使\ P^{-1}AP=J=\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

故

$$e^{At}=Pe^{Jt}P^{-1}=P\left(\begin{array}{cc|c} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{4t} \end{array}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} t\,\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ -t\,\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}-t\,\mathrm{e}^{2t} & 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4t} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{4t} & \mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(\sin\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \sin 2 & \cos 2 & 0 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 4 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin 2+\cos 2 & \cos 2 & 0 \\ -\cos 2 & \sin 2-\cos 2 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2-\frac{1}{2}\sin 4 & \frac{1}{2}\sin 2-\frac{1}{2}\sin 4 & \sin 4 \end{pmatrix}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，试计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}},\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t},\sin\boldsymbol{A}t,\cos\boldsymbol{A}$。

解 法1. $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^3$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$（三重）

设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$

列方程组：

1）求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$

$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1+4b_2=\mathrm{e}^2 \\ r'(2)=\quad b_1+4b_2=\mathrm{e}^2 \\ r''(2)=\quad 2b_2=\mathrm{e}^2 \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} b_0=\mathrm{e}^2 \\ b_1=-\mathrm{e}^2 \\ b_2=\frac{1}{2}\mathrm{e}^2 \end{cases}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$，$\sin\boldsymbol{A}$。

解 可求得相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad 使\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\left(\begin{array}{c|cc} 1 & & \\ \hline & 1 & 1 \\ & & 1 \end{array}\right)$$

故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{J}t}\,\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & & \\ & \mathrm{e}^{t} & t\,\mathrm{e}^{t} \\ & & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} b_0+2b_1+4b_2 & 0 & 0 \\ b_1+4b_2 & b_0+b_1 & b_1+4b_2 \\ b_1+4b_2 & -b_1-4b_2 & b_0+3b_1+8b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^2 & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^2 & 0 & \mathrm{e}^2 \\ \mathrm{e}^2 & -\mathrm{e}^2 & 2\mathrm{e}^2 \end{pmatrix}$$

2）求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$

$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1+4b_2=\mathrm{e}^{2t} \\ r'(2)=\quad b_1+4b_2=t\,\mathrm{e}^{2t} \\ r''(2)=\quad 2b_2=t^2\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} b_0=\mathrm{e}^{2t}-2t\,\mathrm{e}^{2t}+2t^2\,\mathrm{e}^{2t} \\ b_1=t\,\mathrm{e}^{2t}-2t^2\,\mathrm{e}^{2t} \\ b_2=\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{2t} \end{cases}$$

$$=\begin{pmatrix} (1-2t)\mathrm{e}^{t} & -2t\,\mathrm{e}^{t} & 6t\,\mathrm{e}^{t} \\ -t\,\mathrm{e}^{t} & (1-t)\mathrm{e}^{t} & 3t\,\mathrm{e}^{t} \\ -t\,\mathrm{e}^{t} & -t\,\mathrm{e}^{t} & (1+3t)\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

$$\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(\sin\boldsymbol{J})\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\left(\begin{array}{c|cc} \sin 1 & & \\ \hline & \sin 1 & \cos 1 \\ & & \sin 1 \end{array}\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin 1-2\cos 1 & -2\cos 1 & 6\cos 1 \\ -\cos 1 & \sin 1-\cos 1 & 3\cos 1 \\ -\cos 1 & -\cos 1 & \sin 1+3\cos 1 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} b_0+2b_1+4b_2 & 0 & 0 \\ b_1+4b_2 & b_0+b_1 & b_1+4b_2 \\ b_1+4b_2 & -b_1-4b_2 & b_0+3b_1+8b_2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 0 & 0 \\ t\,\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}-t\,\mathrm{e}^{2t} & t\,\mathrm{e}^{2t} \\ t\,\mathrm{e}^{2t} & -t\,\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{2t}+t\,\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

3）求 $\sin\boldsymbol{A}t$

$$\begin{cases} r(2)=b_0+2b_1+4b_2=\sin 2t \\ r'(2)=\quad b_1+4b_2=t\cos 2t \\ r''(2)=\quad 2b_2=-t^2\sin 2t \end{cases}$$

解得

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = \sin 2t - 2t\cos 2t - 2t^2 \sin 2t \\ b_1 = t\cos 2t + 2t^2 \sin 2t \\ b_2 = -\frac{1}{2} t^2 \sin 2t \end{array}\right.$$

故

$$\sin \boldsymbol{A}t = b_0 \boldsymbol{I} + b_1 \boldsymbol{A} + b_2 \boldsymbol{A}^2$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 + 2b_1 + 4b_2 & 0 & 0 \\ b_1 + 4b_2 & b_0 + b_1 & b_1 + 4b_2 \\ b_1 + 4b_2 & -b_1 - 4b_2 & b_0 + 3b_1 + 8b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin 2t & 0 & 0 \\ t\cos 2t & \sin 2t - t\cos 2t & t\cos 2t \\ t\cos 2t & -t\cos 2t & \sin 2t + t\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} b_0 = -\mathrm{e}^2 & (1-2t)\mathrm{e}^{2t} & \sin 2t - 2t\cos 2t & \cos 2 + 2\sin 2 \\ b_1 = \mathrm{e}^2 & t\,\mathrm{e}^{2t} & t\cos 2t & -\sin 2 \end{array}\right.$$

故

$$f(\boldsymbol{A})(\text{或 } f(\boldsymbol{A}t)) = b_0 \boldsymbol{I} + b_1 \boldsymbol{A}$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 + 2b_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 + b_1 & b_1 \\ b_1 & -b_1 & b_0 + 3b_1 \end{pmatrix} = \cdots$$

4）求 $\cos \boldsymbol{A}$

$$\left\{\begin{array}{l} r(2) = b_0 + 2b_1 + 4b_2 = \cos 2 \\ r'(2) = \qquad b_1 + 4b_2 = -\sin 2 \\ r''(2) = \qquad\qquad 2b_2 = -\cos 2 \end{array}\right.$$

解得

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = 2\sin 2 - \cos 2 \\ b_1 = -\sin 2 + 2\cos 2 \\ b_2 = -\frac{1}{2}\cos 2 \end{array}\right.$$

故

$$\cos \boldsymbol{A} = b_0 \boldsymbol{I} + b_1 \boldsymbol{A} + b_2 \boldsymbol{A}^2$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 + 2b_1 + 4b_2 & 0 & 0 \\ b_1 + 4b_2 & b_0 + b_1 & b_1 + 4b_2 \\ b_1 + 4b_2 & -b_1 - 4b_2 & b_0 + 3b_1 + 8b_2 \end{pmatrix}$$

例 已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，试计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ 和 $\sin \boldsymbol{A}$。

解 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\quad \lambda_3 = 1$

设 $r(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2$

则由 (求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ $\sin \boldsymbol{A}$)

$$\left\{\begin{array}{lll} r(2) = b_0 + 2b_1 + 4b_2 & = \mathrm{e}^{2t} & \sin 2 \\ r'(2) = b_1 + 4b_2 & = t\,\mathrm{e}^{2t} & \cos 2 \\ r(1) = b_0 + b_1 + b_2 & = \mathrm{e}^{t} & \sin 1 \end{array}\right.$$

解得

$$\left\{\begin{array}{ll} b_0 = 4\mathrm{e}^t - 3\mathrm{e}^{2t} + 2t\,\mathrm{e}^{2t} & 4\sin 1 - 3\sin 2 + 2\cos 2 \\ b_1 = -4\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{2t} - 3t\,\mathrm{e}^{2t} & -4\sin 1 + 4\sin 2 - 3\cos 2 \\ b_2 = \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} + t\,\mathrm{e}^{2t} & \sin 1 - \sin 2 + \cos 2 \end{array}\right.$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2 & 0 & 0 \\ -\sin 2 & \sin 2 + \cos 2 & -\sin 2 \\ -\sin 2 & \sin 2 & -\sin 2 + \cos 2 \end{pmatrix}$$

法2．对应特征值2有2个线性无关的特征向量，于是 $m_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ 是$\boldsymbol{A}$的最小多项式。设

$$r(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda$$

由

$$\begin{array}{lllll} & (\text{求}\,\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}} & \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} & \sin \boldsymbol{A}t & \cos \boldsymbol{A}\ ) \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} r(2) = b_0 + 2b_1 = \mathrm{e}^2 & \mathrm{e}^{2t} & \sin 2t & \cos 2 \\ r'(2) = \qquad b_1 = \mathrm{e}^2 & t\,\mathrm{e}^{2t} & t\cos 2t & -\sin 2 \end{array}\right.$$

解得

于是

$$f(\boldsymbol{A})(\text{或} f(\boldsymbol{A}t)) = b_0 \boldsymbol{I} + b_1 \boldsymbol{A} + b_2 \boldsymbol{A}^2$$

$$= \begin{pmatrix} b_0 + 2b_1 + 4b_2 & b_1 + 16b_2 & 4(b_1 + 3b_2) \\ 0 & b_0 + 2b_1 + 4b_2 & 0 \\ 0 & 3(b_1 + 3b_2) & b_0 + b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} & 12\mathrm{e}^t - 12\mathrm{e}^{2t} + 13t\,\mathrm{e}^{2t} & -4\mathrm{e}^t + 4\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} & 0 \\ 0 & -3\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

$$\sin \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sin 2 & 12\sin 1 - 12\sin 2 + 13\cos 2 & -4\sin 1 + 4\sin 2 \\ 0 & \sin 2 & 0 \\ 0 & -3\sin 1 + 3\sin 2 & \sin 1 \end{pmatrix}$$

例 已知4阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\pi, -\pi, 0, 0$, 试计算 $\sin\boldsymbol{A}$和 $\cos\boldsymbol{A}$。

解 法1 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\lambda^2(\lambda-\pi)(\lambda+\pi)=\lambda^4-\pi^2\lambda^2$

由H-C定理得 $\boldsymbol{A}^4-\pi^2\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$, 从而

$$\boldsymbol{A}^4=\pi^2\boldsymbol{A}^2,\ \boldsymbol{A}^5=\pi^2\boldsymbol{A}^3,\ \boldsymbol{A}^6=\pi^4\boldsymbol{A}^2,\ \boldsymbol{A}^7=\pi^4\boldsymbol{A}^3,\ \cdots$$

即 $\boldsymbol{A}^{2k}=\pi^{2k-2}\boldsymbol{A}^2,\ \boldsymbol{A}^{2k+1}=\pi^{2k-2}\boldsymbol{A}^3\quad(k=2,3,\cdots)$

故

$$\begin{aligned}\sin\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{1}{5!}\boldsymbol{A}^5-\tfrac{1}{7!}\boldsymbol{A}^7+\tfrac{1}{9!}\boldsymbol{A}^9-\cdots\\&=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{3!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{\pi^2}{5!}\boldsymbol{A}^3-\tfrac{\pi^4}{7!}\boldsymbol{A}^3+\tfrac{\pi^6}{9!}\boldsymbol{A}^3-\cdots\\&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3(-\tfrac{1}{3!}+\tfrac{\pi^2}{5!}-\tfrac{\pi^4}{7!}+\tfrac{\pi^6}{9!}-\cdots)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3\tfrac{1}{\pi^3}(-\tfrac{\pi^3}{3!}+\tfrac{\pi^5}{5!}-\tfrac{\pi^7}{7!}+\tfrac{\pi^9}{9!}-\cdots)\\&=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^3\tfrac{\sin\pi-\pi}{\pi^3}=\boldsymbol{A}-\tfrac{1}{\pi^2}\boldsymbol{A}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\boldsymbol{A}&=\boldsymbol{I}-\tfrac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2+\tfrac{1}{4!}\boldsymbol{A}^4-\tfrac{1}{6!}\boldsymbol{A}^6+\tfrac{1}{8!}\boldsymbol{A}^8-\cdots\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^2(-\tfrac{1}{2!}+\tfrac{\pi^2}{4!}-\tfrac{\pi^4}{6!}+\cdots)\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^2\tfrac{1}{\pi^2}(-\tfrac{\pi^2}{2!}+\tfrac{\pi^4}{4!}-\tfrac{\pi^6}{6!}+\cdots)\\&=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^2\tfrac{\cos\pi-1}{\pi^2}=\boldsymbol{I}-\tfrac{2}{\pi^2}\boldsymbol{A}^2\end{aligned}$$

法2 4阶方阵$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\pi, -\pi, 0, 0$。设

$$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+b_3\lambda^3$$

则由

$$\begin{array}{llll} & & (\text{求}\sin\boldsymbol{A} & \cos\boldsymbol{A}\ )\\ \left\{\begin{array}{l}r(\pi)=b_0+\pi b_1+\pi^2b_2+\pi^3b_3\\ r(-\pi)=b_0-\pi b_1+\pi^2b_2-\pi^3b_3\\ r(0)=b_0\\ r'(0)=b_1\end{array}\right. & & \begin{array}{l}=\sin\pi=0\\ =\sin(-\pi)=0\\ =\sin0=0\\ =\cos0=1\end{array} & \begin{array}{l}=\cos\pi=-1\\ =\cos(-\pi)-1\\ =\cos0=1\\ =-\sin0=0\end{array}\end{array}$$

解得 $\begin{cases}b_0=0\\b_1=1\\b_2=0\\b_3=-\frac{1}{\pi^2}\end{cases}\qquad\begin{cases}b_0=1\\b_1=0\\b_2=-\frac{2}{\pi^2}\\b_3=0\end{cases}$

故 $\sin\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi^2}\boldsymbol{A}^3,\qquad\cos\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\frac{2}{\pi^2}\boldsymbol{A}^2$

例 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$, 求$\sqrt{\boldsymbol{A}}$和 $\ln\boldsymbol{A}$。

解 可求得相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad\text{且}\quad\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$$

使 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$$

取$f(\lambda)=\sqrt{\lambda},\ g(\lambda)=\ln\lambda$, 则

$$f'(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\lambda}},\quad g'(\lambda)=\frac{1}{\lambda},$$

故

$$\begin{aligned}\sqrt{\boldsymbol{A}}=f(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}f(1)&0&0\\0&f(1)&f'(1)\\0&0&f(1)\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-1&3\\-\frac12&\frac12&\frac32\\-\frac12&-\frac12&\frac52\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln\boldsymbol{A}=g(\boldsymbol{A})&=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}g(1)&0&0\\0&g(1)&g'(1)\\0&0&g(1)\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\-1&-1&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2&-2&6\\-1&-1&3\\-1&-1&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}-2 & & \\ 1 & -2 & \\ & 1 & -2\end{pmatrix}$，求 $f(A)$。

解

$$A^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & \\ & -2 & 1\\ & & -2\end{pmatrix},\quad f(A^{\mathrm T})=\begin{pmatrix}f(-2) & f'(-2) & \frac12 f''(-2)\\ & f(-2) & f'(-2)\\ & & f(-2)\end{pmatrix}$$

故 $$f(A)=(f(A^{\mathrm T}))^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}f(-2) & & \\ f'(-2) & f(-2) & \\ \frac12 f''(-2) & f'(-2) & f(-2)\end{pmatrix}$$

例 已知 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & 1 & 1\end{array}\right)$，求 e^{At}, $\cos A$。

解

$$e^{At}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & t & & \\ & 1 & & \\ \hline & & e^t & \\ & & te^t & e^t\end{array}\right),\quad \cos A=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & & \\ & 1 & & \\ \hline & & \cos 1 & \\ & & -\sin 1 & \cos 1\end{array}\right)$$

---

§4　矩阵微积分

例 设 $A(t)=\begin{pmatrix}1 & te^t\\ 0 & 2te^{2t}\end{pmatrix}$，求 $A^{-1}(t)$ 的存在区间，并求 $\frac{d}{dt}A^{-1}(t)$。

解 因为 $\det A(t)=2te^{2t}$，仅当 $t=0$ 时，$A(t)$ 奇异，故 $A^{-1}(t)$ 的存在区间为 $(-\infty,0),(0,+\infty)$。

法1. 由于

$$A^{-1}(t)=\frac{1}{2te^{2t}}\begin{pmatrix}2te^{2t} & -te^t\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac12 e^{-t}\\ 0 & \frac{1}{2t}e^{-2t}\end{pmatrix}$$

所以 $$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=\begin{pmatrix}0 & \frac12 e^{-t}\\ 0 & -\frac{1+2t}{2t^2}e^{-2t}\end{pmatrix}$$ （由定义）

法2. $$\frac{d}{dt}A^{-1}(t)=-A^{-1}(t)\left(\frac{d}{dt}A(t)\right)A^{-1}(t)$$

$$=-\begin{pmatrix}1 & -\frac12 e^{-t}\\ 0 & \frac{1}{2t}e^{-2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & (1+t)e^t\\ 0 & 2(1+2t)e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac12 e^{-t}\\ 0 & \frac{1}{2t}e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \frac12 e^{-t}\\ 0 & -\frac{1+2t}{2t^2}e^{-2t}\end{pmatrix}$$

例 设 A 是可逆矩阵，则 $\int_0^1 e^{At}dt=$ $\underline{A^{-1}(e^A-I)}$。

分析 $$\int_0^1 e^{At}dt=A^{-1}\int_0^1 Ae^{At}dt=A^{-1}\int_0^1\frac{d}{dt}e^{At}dt$$

$$=A^{-1}(e^{At})\Big|_0^1=A^{-1}(e^A-I)$$

例 已知 $f(x)=a^{\mathrm T}x=x^{\mathrm T}a$，其中 $a=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$ 是已知向量，$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是向量变量，求 $\frac{df}{dx}$。

解 $f(x)=a^{\mathrm T}x=x^{\mathrm T}a=a_1x_1+\cdots+a_nx_n$

因为 $$\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

所以 $$\frac{df}{dx}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm T}=(a_1,\cdots,a_n)^{\mathrm T}=a$$

例 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 已知，$x=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm T}$ 是向量变量，$f(x)=x^{\mathrm T}Ax$，求 $\frac{df}{dx}$。

解 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}a_{st}x_s x_t$

$$=x_1\sum_{t=1}^{n}a_{1t}x_t+x_2\sum_{t=1}^{n}a_{2t}x_t+\cdots+$$

$$+x_i\sum_{t=1}^{n}a_{it}x_t+\cdots+x_n\sum_{t=1}^{n}a_{nt}x_t$$

因为

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_{1i}x_1+\cdots+a_{i-1,i}x_{i-1}+(a_{ii}x_i+\sum_{t=1}^{n}a_{it}x_t)+$$

$$+a_{i+1,i}x_{i+1}+\cdots+a_{ni}x_n$$

$$=\sum_{s=1}^{n}a_{si}x_s+\sum_{t=1}^{n}a_{it}x_t$$

例 设 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times n}$ 是矩阵变量，$f(\boldsymbol{X})=\det\boldsymbol{X}$，试求 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$。

解 设 X_{ij} 是 $\det\boldsymbol{X}$ 中元素 x_{ij} 的代数余子式，则

$$f(\boldsymbol{X})=\det\boldsymbol{X}=x_{i1}X_{i1}+\cdots+x_{ij}X_{ij}+\cdots+x_{in}X_{in}$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=X_{ij}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}})_{n\times n}=(X_{ij})_{n\times n}=(\boldsymbol{X}^*)^{\mathrm{T}}$$

当 $\boldsymbol{X}$ 可逆时，

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=((\det\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\det\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{-\mathrm{T}}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{s=1}^{n}a_{s1}x_s+\sum_{t=1}^{n}a_{1t}x_t\\ \vdots\\ \sum_{s=1}^{n}a_{sn}x_s+\sum_{t=1}^{n}a_{nt}x_t\end{pmatrix}$$

$$=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$$

特例，当 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 时，即 $\boldsymbol{A}$ 对称时，$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。

例 已知 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}t_1 & t_2 & t_3\\ t_4 & t_5 & t_6\end{pmatrix}$，$f(\boldsymbol{X})=t_1t_6+t_2t_5+t_3t_4$，

则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\underline{\begin{pmatrix}t_6 & t_5 & t_4\\ t_3 & t_2 & t_1\end{pmatrix}}$。

分析 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial t_1} & \frac{\partial f}{\partial t_2} & \frac{\partial f}{\partial t_3}\\ \frac{\partial f}{\partial t_4} & \frac{\partial f}{\partial t_5} & \frac{\partial f}{\partial t_6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_6 & t_5 & t_4\\ t_3 & t_2 & t_1\end{pmatrix}$

例 已知 $\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times n}$，$f(\boldsymbol{X})=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{X}$，则 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\underline{\boldsymbol{I}_n}$。

分析 $f(\boldsymbol{X})=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{X}=x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{nn}$

于是 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$，故 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)_{n\times n}=\boldsymbol{I}_n$。

例 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 已知，$\boldsymbol{X}=(x_{ij})_{n\times m}$ 为矩阵变量，$f(\boldsymbol{X})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})$，求 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}$。

解 $f(\boldsymbol{X})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})=\sum_{s=1}^{m}\sum_{t=1}^{n}a_{st}x_{ts}$

$$=a_{ji}x_{ij}+\sum_{\substack{s=1\\ s\neq j或t\neq i}}^{m}\sum_{t=1}^{n}a_{st}x_{ts}$$

因为 $\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}=a_{ji}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}=(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}})_{n\times m}=(a_{ji})_{n\times m}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$$

例 已知 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^m$，对于矛盾方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，使得 $f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|_2^2$ 为最小的向量 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 称为**最小二乘解**，试导出最小二乘解所满足的方程组。

解 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 使 $f(\boldsymbol{x})$ 达到极小，从而应有

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}}=\boldsymbol{0}$$

因为

$$f(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b}\|_2^2=(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$$

由前几例得 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}-2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(0)}}=2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^{(0)}-2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}^{(0)}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$

称 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ 为**法方程组**，它是最小二乘解所满足的方程组。

例 已知 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$，且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$。

解 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=(\sum_{k=1}^{m}x_ka_{k1},\sum_{k=1}^{m}x_ka_{k2},\cdots,\sum_{k=1}^{m}x_ka_{kn})$

因为 $\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x_i}=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$

所以
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial x_m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}$$

---

§ 5 矩阵分析的应用

例 用矩阵函数方法求解微分方程组
$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1=2x_1+x_2+4x_3+4t\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2=2x_2\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_3=3x_2+x_3\\ x_1(0)=2,\ x_2(0)=1,\ x_3(0)=3\end{cases}$$

解 写成矩阵形式
$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{f}(t)\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&4\\0&2&0\\0&3&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}4t\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$

可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=1$

设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$

由 $\begin{cases}r(2)=b_0+2b_1+4b_2=\mathrm{e}^{2t}\\ r'(2)=b_1+4b_2=t\,\mathrm{e}^{2t}\\ r(1)=b_0+b_1+b_2=\mathrm{e}^{t}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_0=2t\,\mathrm{e}^{2t}-3\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{t}\\ b_1=-3t\,\mathrm{e}^{2t}+4\mathrm{e}^{2t}-4\mathrm{e}^{t}\\ b_2=t\,\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{t}\end{cases}$

所以
$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}&12\mathrm{e}^{t}-12\mathrm{e}^{2t}+13t\,\mathrm{e}^{2t}&-4\mathrm{e}^{t}+4\mathrm{e}^{2t}\\0&\mathrm{e}^{2t}&0\\0&-3\mathrm{e}^{t}+3\mathrm{e}^{2t}&\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}$$

依次计算 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{2t}+13t\,\mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{2t}\\ 3\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$,

---

$$\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\int_0^t\begin{pmatrix}4\tau\,\mathrm{e}^{-2\tau}\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}-2t\,\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-2t}+1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{f}(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}-2t-1\\0\\0\end{pmatrix}$$

故
$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{2t}+13t\,\mathrm{e}^{2t}\\ \mathrm{e}^{2t}\\ 3\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{2t}-2t-1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^{2t}+13t\,\mathrm{e}^{2t}-2t-1\\ \mathrm{e}^{2t}\\ 3\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$$

例 已知
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{b}(t)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}\\0\\-\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

1) 求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$；

2) 用矩阵函数方法求微分方程
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Ax}(t)+\boldsymbol{b}(t)$$
满足初始条件 $\boldsymbol{x}(0)$的解。

解 1) $\det(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)^2(\lambda-2)$

法1. 可求得

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix},\quad 使\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&-2&\\&&2\end{pmatrix}$$

所以

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-2t}&&\\&\mathrm{e}^{-2t}&\\&&\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}&-2\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}&-2\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{2t}&-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}\\-\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}&-2\mathrm{e}^{-2t}+2\mathrm{e}^{2t}&3\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}$$

法2. 可求得 $m_A=(\lambda+2)(\lambda-2)$。设

$$r(\lambda)=b_0+b_1\lambda$$

由 $\begin{cases}r(-2)=b_0-2b_1=\mathrm{e}^{-2t}\\r(2)=b_0+2b_1=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_0=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{2t})\\b_1=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})\end{cases}$

于是

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}b_0-b_1&2b_1&b_1\\b_1&b_0&b_1\\b_1&2b_1&b_0-b_1\end{pmatrix}=\cdots$$

法3. 设 $r(\lambda)=b_0+b_1\lambda+b_2\lambda^2$。由

$\begin{cases}r(-2)=b_0-2b_1+4b_2=\mathrm{e}^{-2t}\\r'(-2)=b_1-4b_2=t\,\mathrm{e}^{-2t}\\r(2)=b_0+2b_1+4b_2=\mathrm{e}^{2t}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_0=t\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2t}+\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2t}\\b_1=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})\\b_2=-\frac{1}{4}t\,\mathrm{e}^{-2t}+\frac{1}{16}(\mathrm{e}^{2t}-\mathrm{e}^{-2t})\end{cases}$

故

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}=b_0\boldsymbol{I}+b_1\boldsymbol{A}+b_2\boldsymbol{A}^2$$

$$=\begin{pmatrix}b_0-b_1+4b_2&2b_1&b_1\\b_1&b_0+4b_2&b_1\\b_1&2b_1&b_0-b_1+4b_2\end{pmatrix}=\cdots$$

2) 计算 $\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}(\tau)=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}(\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{pmatrix}t\\0\\-t\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{x}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\int_0^t\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}\tau}\boldsymbol{b}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$=\begin{pmatrix}0\\-\mathrm{e}^{-2t}\\2\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\,\mathrm{e}^{-2t}\\0\\-t\,\mathrm{e}^{-2t}\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}t\\-1\\2-t\end{pmatrix}$$