第2.2节　点估计量的求法

一、矩估计法

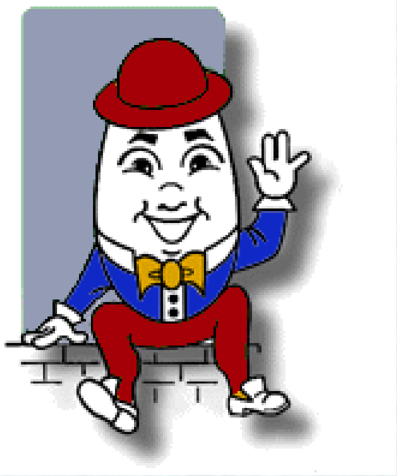
二、最大似然估计法

三、用次序统计量估计参数的方法

一、矩估计法

由于估计量是样本的函数, 是随机变量, 故对不同的样本值, 得到的参数值往往不同, 因此如何求得参数θ的估计量便是问题的关键所在.

常用构造估计量的方法: (三种)



1. 矩估计法

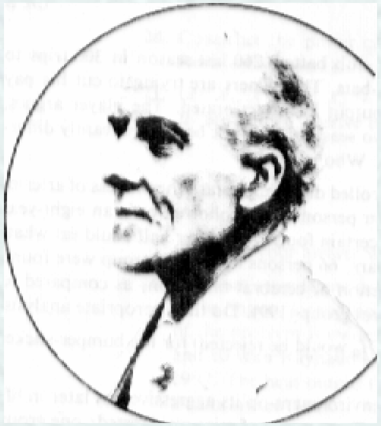
2. 最(极)大似然估计法.

3. 次序统计量估计法

1. 矩估计法

它是基于一种简单的“替换”思想建立起来的一种估计方法 .

是英国统计学家K.皮尔逊最早提出的 .



基本思想：用样本矩估计总体矩 .

理论依据：大数定律

或格列汶科定理

记总体k阶原点矩为 $\alpha_k = E(X^k)$

样本k阶原点矩为 $A_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$

记总体k阶中心矩为 $\mu_k = E[X - E(X)]^k$

样本k阶中心矩为 $B_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k$

用样本矩来估计总体矩，用样本矩的连续函数来估计总体矩的连续函数，这种估计法称为矩估计法.

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\underbrace{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m}_{m\text{个待估参数}})$ (未知)

$\alpha_k = E(X^k)$存在$(k=1,2,\cdots,m)$, $(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$

为来自总体X的简单随机样本.

矩估计法的具体步骤:

1° 求出 $\alpha_k = E(X^k) = \alpha_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m)$, $k=1,2,\cdots,m$;

2° 要求：$\alpha_k = A_k$, $k=1,2,\cdots,m$

这是一个包含 m 个未知参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的方程组.

3° 解出其中 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$，用 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 表示.

4° 用方程组的解 $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\cdots,\hat{\theta}_m$ 分别作为 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_m$ 的估计量，这个估计量称为矩估计量.

矩估计量的观察值称为矩估计值.

注 若 $\hat{\theta}_k$ 是 θ_k 的矩估计，$g(\theta)$ 为连续函数，则也称 $g(\hat{\theta}_k)$ 是 $g(\theta_k)$ 的矩估计.

例1 设总体 X 在 $[0,\theta]$ 上服从均匀分布,其中 θ $(\theta > 0)$ 未知,$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自总体 X 的样本,求 θ 的矩估计量.

解 因为 $\alpha_1 = E(X) = \dfrac{\theta}{2}$,

根据矩估计法, 令 $\dfrac{\theta}{2} = A_1 = \overline{X}$,

所以 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 为所求 θ 的估计量.

例2 设总体 X 在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a, b未知, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自总体X的样本,求a, b的矩估计量.

解 $$\alpha_1 = E(X) = \frac{a+b}{2},$$

$$\alpha_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4},$$

令 $$\frac{a+b}{2} = A_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

$$\frac{(a-b)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2,$$

即 $\begin{cases} a+b=2A_1 \\ b-a=\sqrt{12(A_2-A_1^2)} \end{cases}$

解方程组得到a, b的矩估计量分别为

$$\hat{a}=A_1-\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}-\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

$$\hat{b}=A_1+\sqrt{3(A_2-A_1^2)}=\overline{X}+\sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2},$$

例3 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在，且有 $\sigma^2 > 0$，但 μ 和 σ^2 均为未知，又设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是一个样本，求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

解
$$\alpha_1 = E(X) = \mu,$$
$$\alpha_2 = E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2,$$

令 $\begin{cases} \mu = A_1 \\ \sigma^2 + \mu^2 = A_2 \end{cases}$

解方程组得到矩估计量分别为 $\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

上例表明:

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2未知,即得μ,σ^2的矩估计量

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

一般地:

用样本均值$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$作为总体$X$的均值的矩估计,

用样本二阶中心矩 $B_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$作为总体

X的方差的矩估计.

例4 设总体X的分布密度为

$$p(x;\theta)=\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}} \quad (x\in R,\ \theta>0)$$

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为来自总体X的样本. 求参数θ的矩估计量.

分析：$p(x;\theta)$中只含有一个未知参数θ，一般地，只需要求：$E(X)=\alpha_1=A_1=\overline{X}\Rightarrow\theta$的矩估计量.

然而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x;\theta)\,\mathrm{d}x$

然而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x p(x;\theta)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\mathrm{d}x=0$$

不含有θ，故不能由此得到θ的矩估计量.

解(方法1) 要求：$E(X^2)=\alpha_2=A_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$

$\because \quad E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x;\theta)\,\mathrm{d}x$

$$=\int_{0}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\mathrm{d}x=2\theta^2.$$

$$\therefore \quad \hat{\theta}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

— θ的矩估计量

(方法2) 要求：

$$E(|X|)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

$$\because \quad E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|p(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2\theta}\mathrm{e}^{-\frac{|x|}{\theta}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\,\mathrm{d}x=\left(-x\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x}{\theta}}\,\mathrm{d}x\right)=\theta$$

$\therefore\ \theta$的矩估计量： $$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$$

注　此例表明：同一参数的矩估计量可不唯一.

例5(p43例2.9) 已知水文站最高水位X服从$\Gamma(\alpha,\beta)$,

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

其中未知参数$\alpha>0,\beta>0$，试求α，β的矩估计

解 由Γ分布的性质1可知，

$$E(X)=\frac{\alpha}{\beta},\quad E(X^2)=\frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2},$$

建立方程

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha}{\beta} = \bar{X}, \\ \dfrac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}$$

求解方程可得

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{X}^2}{S_n^2}, \qquad \hat{\beta} = \frac{\bar{X}}{S_n^2}$$

小结：矩估计法的优点：简单易行, 并不需要事先知道总体是什么分布．

缺点：当总体类型已知时，没有充分利用分布提供的信息. 一般场合下, 矩估计量不具有唯一性．

其主要原因在于建立矩法方程时，选取哪些总体矩用相应样本矩代替带有一定的随意性．

二、最大似然估计法

最大似然估计法是在总体类型已知条件下使用的一种参数估计方法 .

它首先是由德国数学家高斯在1821年提出的 ,

然而，这个方法常归功于英国统计学家Fisher .

Fisher在1922年重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质 .

Gauss

Fisher

1 最大似然法的基本思想

先看一个简单例子：

某位同学与一位猎人一起外出打猎．

一只野兔从前方窜过．

只听一声枪响，野兔应声倒下．

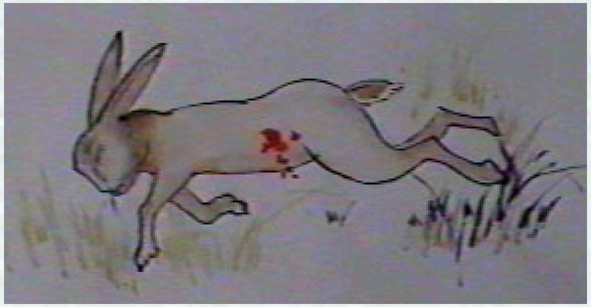
如果要你推测，

是谁打中的呢？

你会如何想呢？

你就会想，只发一枪便打中,猎人命中的概率一般大于这位同学命中的概率. 看来这一枪是猎人射中的 .

这个例子所作的推断已经体现了最大似然法的基本思想 .



引例 设 $X\sim B(1,p)$, p未知. 设想我们事先知道 p 只有两种可能:

$$p=0.7 \quad 或 \quad p=0.3$$

如今重复试验3次,得结果: 0， 0, 0

问: 应如何估计p?

由概率论的知识, 3次试验中出现“1”的次数

$$Y \sim B(3,p)$$

$$P\{Y=k\}=C_3^k p^k(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,2,3)$$

$$P\{Y=k\}=C_3^k p^k(1-p)^{n-k} \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

Y		0	1	2	3
$P\{Y=k\}$	$p=0.7$时	0.027	0.189	0.441	0.343
	$p=0.3$时	0.343	0.441	0.189	0.027

依题设，“重复试验3次, 得结果： 0， 0， 0”

即事件 $\{Y=0\}$ 发生.

$\because \quad P\{Y=0; p=0.3\} > P\{Y=0; p=0.7\}$

$\therefore$ 选 $\hat{p}=0.3$ 作为p的估计.

2　似然函数

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应于样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个样本值.称

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta$$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta),$$

为 似 然 函 数.　其中 $p(x, \theta)$ 为离散型总体的分布律，$f(x, \theta)$ 为连续型总体的概率密度函数.

最大似然估计

得到样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时,选取使似然函数 $L(\theta)$

取得最大值的 $\hat{\theta}$ 作为未知参数 θ 的估计值,

即 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \hat{\theta}) = \max\limits_{\theta \in \Theta} L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)$.

(其中 Θ 是 θ 可能的取值范围)

这样得到的 $\hat{\theta}$ 与样本值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有关,记为

$\boxed{\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$, **参数 θ 的最大似然估计值**

$\boxed{\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)}$ 参数 θ 的最大似然估计量

3. 求最大似然估计的步骤

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

或 $$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta);$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln p(x_i;\theta)$$ 或 $$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta);$$

(三) 对θ求导$\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$，并令$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0}$，对数似然方程

解方程即得未知参数 θ的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\theta_i}\ln L=0,\qquad i=1,2,\cdots,k.}$$

对数似然方程组

解出由k个方程组成的方程组,即可得各未知参数$\theta_i\ (i=1,2,\cdots,k)$的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例6(p46例2.12) 设 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布, $(X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计量.

解 因为 X 的分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} \quad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

所以 λ 的似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \left[\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i!)\right],$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{\lambda} = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计值 $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$

这一估计量与矩估计量是相同的.

例7(p47例2.13)设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\mathrm{T}}$是来自$X$的一个样本,求$\mu$和$\sigma^2$的最大似然估计量.

解 X的概率密度为

$$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

X 的似然函数为

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$令\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i - n\mu\right] = 0, \\[2ex] -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

由 $\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right] = 0$ 解得 $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$,

由 $-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = 0$ 解得

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2,$$

故 μ 和 σ^2 的最大似然估计量分别为

$\hat{\mu} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. 它们与相应的矩估计量相同.

例8(p47例2.14) 设总体X服从柯西分布，其分布密度为

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\pi[1+(x-\theta)^2]},\quad -\infty<x<+\infty,$$

试求参数θ的最大似然估计.

解 由分布可知，其似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\pi[1+(x_i-\theta)^2]}$$

似然方程为

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\theta}{1+(x_i-\theta)^2}=0$$

此方程只能求解其数值解，可以用样本中位数

为初始值进行迭代。又因为此分布均值不存在，

不可用矩估计.

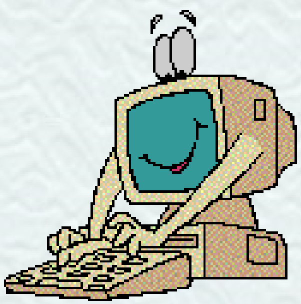
例9(p48例2.15) 设总体 X 在 $[\theta_1,\theta_2]$ 上服从均匀分布,其中 θ_1,θ_2 未知, $(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是来自总体 X 的一个样本值,求 θ_1,θ_2 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(1)}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

$x_{(n)}=\max(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

X 的概率密度为

$$f(x;\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1\le x\le\theta_2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$



因为$\theta_1 \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le \theta_2$ 等价于$\theta_1 \le x_{(1)}, x_{(n)} \le \theta_2$,

作为θ_1, θ_2的函数的似然函数为

$$L(\theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n}, & \theta_1 \le x_{(1)},\ x_{(n)} \le \theta_2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是对于满足条件$\theta_1 \le x_{(1)}, \ \theta_2 \ge x_{(v)}$的任意$\theta_1, \theta_2$有

$$L(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n} \le \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n},$$

即似然函数$L(\theta_1, \theta_2)$在$\theta_1 = x_{(1)}$, $\theta_2 = x_{(n)}$时

取到最大值$(x_{(n)} - x_{(1)})^{-n}$,

θ_1, θ_2的最大似然估计值

$$\hat{\theta}_1 = x_{(1)} = \min_{1\le i\le n} x_i, \quad \hat{\theta}_2 = x_{(n)} = \max_{1\le i\le n} x_i,$$

θ_1, θ_2的最大似然估计量

$$\hat{\theta}_1 = \min_{1\le i\le n} X_i, \quad \hat{\theta}_2 = \max_{1\le i\le n} X_i \ .$$

4. 最大似然估计的性质

定理2.4 设$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计，如果函数$g(\theta)$是$\theta \in \Theta$的连续函数，则$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的最大似然估计.

此性质可以推广到总体分布中含有多个未知参数的情况.

例10 (p48例2. 16) 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自X的一个样本值, 求$g(\mu, \sigma^2) = P\{X > 2\}$的最大似然估计.

解 $g(\mu, \sigma^2) = P\{X > 2\} = 1 - P\{X \le 2\}$

$$=1-P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{2-\mu}{\sigma}\}=1-\Phi(\frac{2-\mu}{\sigma})$$

而μ和σ^2的最大似然估计为$\bar{X},S_n^2$,同时$\Phi(\mu,\sigma^2)$为连续函数，因而$g(\mu,\sigma^2)$的最大似然估计为

$$g(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=1-\Phi(\frac{2-\bar{X}}{S_n})$$

定理2.5 设$T=T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为θ的任一充分统计量,则θ的最大似然估计$\hat{\theta}$一定可以表示成T的函数.

证 由因子分解定理可知

$$L(\theta) = h(x_1, x_2, \cdots, x_n)g(T(x_1, x_2, \cdots, x_n), \theta)$$

其中h与θ无关，因此，最大化$L(\theta)$等于最大化$g(T, \theta)$,因此，最大似然估计$\hat{\theta}$（若存在）一定是T的函数.

注 该定理说明最大似然估计充分利用了样本中包含的参数的信息，因而是一种比较好的估计，通常情况下，最大似然估计不仅是相合估计，而且是渐近正态估计.

三、用次序统计量估计参数的方法

1. 用样本中位数与样本极差估计参数

由1.4节可知，由于样本中位数与样本极差计算方便，因而通常情况下，可以用样本中位数估计总体期望，用样本极差估计总体的标准差。

定理2.6 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2为未知, $\tilde{X}$是样本的中位数，则对任意的x,有

$$\lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{\frac{2n}{\pi\sigma^2}}(\tilde{X}-\mu) \le x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

由上述定理可知，$\tilde{X} \sim AN(\mu, \frac{\pi\sigma^2}{2n})$，因此只要$n$ 足够大，$\tilde{X}$出现在μ附近的概率越大，因而n 充分大时，可以选择用$\tilde{X}$估计μ.

对于正态总体，可以证明样本极差的均值与方差为

$$E(R) = d_n\sigma, \qquad D(R) = v_n^2\sigma^2$$

其中d_n, v_n取值可以参见52页表2.1.

因此 $$E\left(\frac{R}{d_n}\right) = \sigma, \qquad D\left(\frac{R}{d_n}\right) = \frac{v_n^2}{d_n^2}\sigma^2$$

由此可以看到，可以用$\frac{R}{d_n}$去估计σ，由此产生的平均平方误差为$\frac{v_n^2}{d_n^2}\sigma^2$.

但实际经验表明，当$n>10$时，用$\dfrac{R}{d_n}$去估计σ,由此产生的误差较大，因而，n较大时，可以分组去计算R_i,其次计算相应的平均极差$\overline{R}$,再用$\dfrac{\overline{R}}{d_n}$估计,效果良好.

例10 (p53例2.19) 某维尼纶厂20天内生产正常，随机的抽样得到20个纤度数值，等分成4组，每组5个数值，如下表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	极差R
1	1.36	1.49	1.43	1.41	1.37	0.13
2	1.40	1.32	1.42	1.47	1.39	0.15
3	1.41	1.36	1.40	1.34	1.42	0.08
4	1.42	1.45	1.35	1.42	1.39	0.10

假设纤度服从正态分布，试估计总体的标准差。

解　计算平均极差

$$\bar{r} = \frac{1}{4}(0.13 + 0.15 + 0.08 + 0.10) = 0.115$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{r}}{d_5} = \frac{0.115}{2.325} = 0.049 \qquad \hat{\sigma} = s_n = 0.043$$

显然两种估计结果极为接近，但极差形式简单.

Thank You!