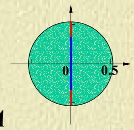
第五章　特征值的估计与表示

§1　特征值的界的估计

例 估计矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.1 \\ -0.2 & 0 & -0.2 \\ -0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值上界。

解　因为 $\|A\|_{m_\infty}=3\times 0.2=0.6$，所以

$$|\lambda|\le 0.6$$



又因为 $B=\dfrac{A+A^{\mathrm{T}}}{2}=O,\ C=\dfrac{A-A^{\mathrm{T}}}{2}=A$

所以　　$|\mathrm{Re}(\lambda)|=0,\quad |\mathrm{Im}(\lambda)|\le 0.6$

例　设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}\ (n>1)$ 满足

$$a_{ii}<0,\quad \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

应用Gerschgorin定理证明A的特征值的实部小于零。

证　因为

$$|z-a_{ii}|\le \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}|\qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

从而由 $a_{ii}<0$ 知A的第 i 个盖尔圆 $G_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 在左半平面，故A的特征值的实部小于零。

由于A是实矩阵，所以

$$|\mathrm{Im}(\lambda)|\le\sqrt{\frac{3(3-1)}{2}}\cdot 0.2=\sqrt{3}\times 0.2\approx 0.3464$$

即A的特征值在虚轴上区间$(-0.3464\mathrm{i},\ 0.3464\mathrm{i})$之内。

实际计算可求得A的特征值为

$$0,\quad 0.3\mathrm{i},\quad -0.3\mathrm{i}$$

估计的效果较好。

例　估计矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac12 & \frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & 1+2\mathrm{i} & 0 & \frac14 \\ -\frac12 & \frac14 & -1 & \frac12 \\ \frac14 & -\frac12 & \frac12 & -2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

的特征值范围。

解　A的四个盖尔圆为

$$G_1:|z-2|\le 1,\quad G_2:|z-1-2\mathrm{i}|\le\frac12$$

$$G_3:|z+1|\le\frac54,\quad G_4:|z+2+2\mathrm{i}|\le\frac54$$

§2　特征值的包含区域

例　估计矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -\frac12 & \frac14 & -\frac14 \\ \frac14 & 1+2\mathrm{i} & 0 & \frac14 \\ -\frac12 & \frac14 & -1 & \frac12 \\ \frac14 & -\frac12 & \frac12 & -2-2\mathrm{i} \end{pmatrix}$

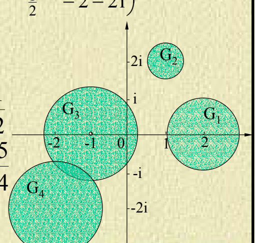
的特征值范围。

解　A的四个盖尔圆为

$$G_1:|z-2|\le 1,\quad G_2:|z-1-2\mathrm{i}|\le\frac12$$

$$G_3:|z+1|\le\frac54,\quad G_4:|z+2+2\mathrm{i}|\le\frac54$$

画在复平面上如图：



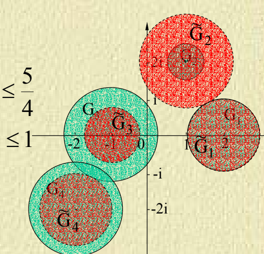
于是A的全部特征值在这四个盖尔圆的并集中。

A的四个列盖尔圆为

$$\tilde G_1:|z-2|\le 1,\quad \tilde G_2:|z-1-2\mathrm{i}|\le\frac54$$

$$\tilde G_3:|z+1|\le\frac34,\quad \tilde G_4:|z+2+2\mathrm{i}|\le 1$$

画在复平面上如图：



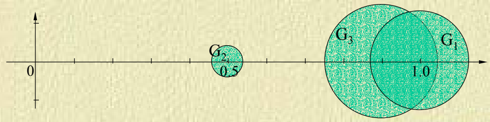
可见A的四个特征值位于四个孤立圆盘 $G_1,G_2,\tilde G_3,\tilde G_4$ 中，且各圆盘中仅有A的一个特征值。

例 试估计矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0.11 & 0.02\\ 0.02 & 0.5 & 0.01\\ 0.01 & 0.14 & 0.9\end{pmatrix}$ 的特征值分布范围，并适当选择一组正数，使A的三个盖尔圆互不相交。

解 A的三个盖尔圆为

$G_1:|z-1|\le 0.13,\ G_2:|z-0.5|\le 0.03,\ G_3:|z-0.9|\le 0.15$

作图：

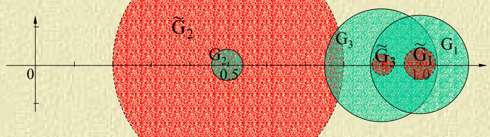


取 $\alpha_1=1,\alpha_2=0.1,\alpha_3=1,\quad D=\mathrm{diag}(1,0.1,1)$，则

$$B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}1 & 0.011 & 0.02\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\\ 0.01 & 0.014 & 0.9\end{pmatrix}$$

B的三个盖尔圆为：

$\tilde{G}_1:|z-1|\le 0.031,\ \tilde{G}_2:|z-0.5|\le 0.3,\ \tilde{G}_3:|z-0.9|\le 0.024$



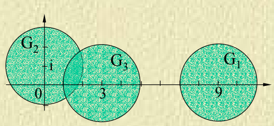
综合考虑知，在 $\tilde{G}_1,\tilde{G}_2,\tilde{G}_3$中各有$A$的一个特征值。

例 试分离矩阵 $A=\begin{pmatrix}9 & 1 & 1\\ 1 & \mathrm{i} & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值。

解 A的三个盖尔圆为：

$G_1:|z-9|\le 2,\ G_2:|z-\mathrm{i}|\le 2,\ G_3:|z-3|\le 2$

作图：



取 $\alpha_1=0.5,\alpha_2=1,\alpha_3=1,$

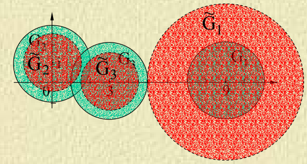
$D=\mathrm{diag}(0.5,1,1)$

则 $B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}9 & 2 & 2\\ 0.5 & \mathrm{i} & 1\\ 0.5 & 1 & 3\end{pmatrix}$

B的三个盖尔圆为：

$\tilde{G}_1:|z-9|\le 4,\quad \tilde{G}_2:|z-\mathrm{i}|\le 1.5,\quad \tilde{G}_3:|z-3|\le 1.5$

作图：



综合考虑知，在$G_1,\tilde{G}_2,\tilde{G}_3$中各有$A$的一个特征值。

例 应用盖尔定理隔离 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0.1 & 1\\ 1 & 10 & 0 & 1\\ 0.1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ 的特征值(要求画图表示)，并利用实矩阵特征值的性质改进所得结果。

解 A的四个盖尔圆为

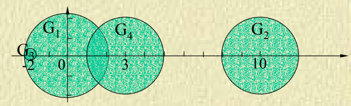
$G_1:|z|\le 2.1$

$G_2:|z-10|\le 2$

$G_3:|z+2|\le 0.1$

$G_4:|z-3|\le 2$

作图：



取 $D=\mathrm{diag}(1,0.4,1,1)$，则

$$B=D^{-1}AD=\begin{pmatrix}0 & 0.4 & 0.1 & 1\\ 2.5 & 10 & 0 & 2.5\\ 0.1 & 0 & -2 & 0\\ 1 & 0.4 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

B的四个盖尔圆为

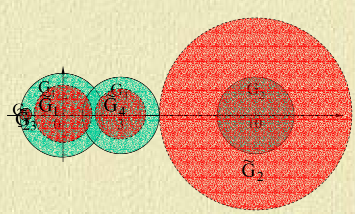
$\tilde{G}_1:|z|\le 1.5$

$\tilde{G}_2:|z-10|\le 5$

$\tilde{G}_3:|z+2|\le 0.1$

$\tilde{G}_4:|z-3|\le 1.4$

作图：



故在 $\tilde{G}_1, G_2, G_3, \tilde{G}_4$ 中各有$\boldsymbol{A}$的一个特征值。

于是在区间

$$[-1.5, 1.5],\ [8, 12],\ [-2.1, -1.9],\ [1.6, 4.4]$$

中各有$\boldsymbol{A}$的一个特征值。

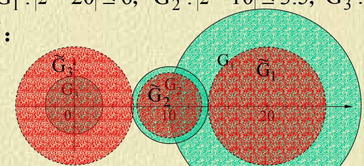
取 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0.5$， $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(1, 1, 0.5)$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 20 & 2 & 4 \\ 3 & 10 & 0.5 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$的三个盖尔圆为：

$$\tilde{G}_1 : |z-20| \le 6,\ \tilde{G}_2 : |z-10| \le 3.5,\ \tilde{G}_3 : |z| \le 6$$

作图：



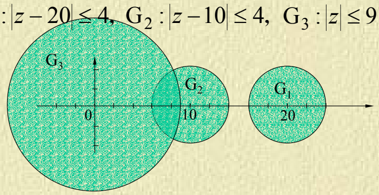
它们已分离，故在 $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, G_3$中各有$\boldsymbol{A}$的一个特征值。

例 试分离矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值，并在复平面上画图。

解 $\boldsymbol{A}$的三个盖尔圆为：

$$G_1 : |z-20| \le 4,\ G_2 : |z-10| \le 4,\ G_3 : |z| \le 9$$

作图：



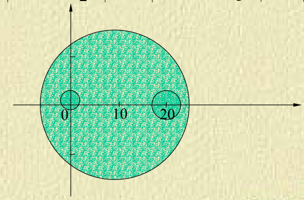
应取$\alpha_1 < 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 1$， 但$G_1$与$G_2$靠太近，无法分。

例 隔离矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 2 \\ 6 & 9 & 9 \\ 1 & 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$的特征值(要求画图表示)。

解 $\boldsymbol{A}$的三个盖尔圆为

$$G_1 : |z-20| \le 3,\ G_2 : |z-9| \le 15,\ G_3 : |z-\mathrm{i}| \le 2$$

作图：

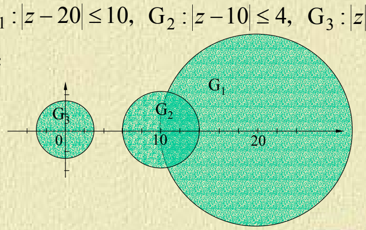


例 试分离矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征值，并在复平面上画图。

解 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的三个盖尔圆为：

$$G_1 : |z-20| \le 10,\ G_2 : |z-10| \le 4,\ G_3 : |z| \le 3$$

作图：



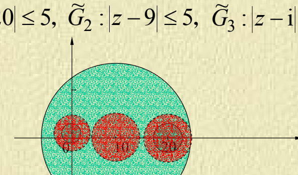
取 $\alpha_1 = \alpha_3 = 1, \alpha_2 = 3$， 令 $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(1,3,1)$，则

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{B}$的三个盖尔圆为

$$\tilde{G}_1 : |z-20| \le 5,\ \tilde{G}_2 : |z-9| \le 5,\ \tilde{G}_3 : |z-\mathrm{i}| \le 4$$

作图：



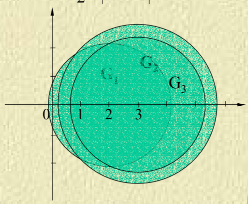
在 $\tilde{G}_1$， $\tilde{G}_2$， $\tilde{G}_3$中各有$\boldsymbol{A}$的一个特征值。

例 试估计矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1.1 & 1 \\ -0.8 & 3 & 2 \\ 1.2 & 1.1 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值分布区域。

解 A的三个盖尔圆为：

$$G_1: |z-2| \le 2.1,\ G_2: |z-3| \le 2.8,\quad G_3: |z-3| \le 2.3$$

作图：



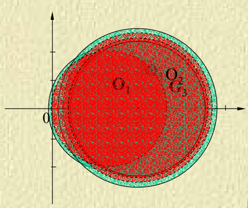
而A的三个Ostrowski圆为（取 $\alpha=\frac{1}{2}$）

$$O_1: |z-2| \le \sqrt{2.1}\cdot\sqrt{2} \approx 2.049$$

$$O_2: |z-3| \le \sqrt{2.8}\cdot\sqrt{2.2} \approx 2.48$$

$$O_3: |z-3| \le \sqrt{2.3}\cdot\sqrt{3} \approx 2.63$$

作图：

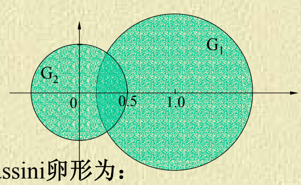


例 试估计矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -0.8 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值分布区域。

解 A的两个盖尔圆为：

$$G_1: |z-1| \le 0.8,\qquad G_2: |z| \le 0.5$$

作图：



A的一个Cassini卵形为：

$$O_{12}: |z-1||z| \le 0.8\times 0.5 = 0.4$$

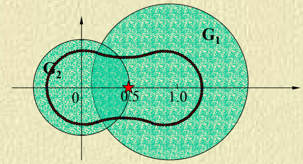
令 $z=x+\mathrm{i}\,y$，则由 $|z-1||z|=0.4$ 得Cassini卵形线的标准方程

$$[(x-\tfrac{1}{2})^2+y^2]^2-2(\tfrac{1}{2})^2[(x-\tfrac{1}{2})^2-y^2]=(0.63)^4-(\tfrac{1}{2})^4$$

其中心在 0.5，左端点 $(-0.3,0)$，右端点 $(1.3,0)$，

最高点 $(0.2,\pm 0.4), (0.8,\pm 0.4)$；最低点 $(0.5,\pm 0.38)$。

作图：



可见结果较为精确，不过Cassini卵形线比较难画。

§3 实对称矩阵特征值的表示

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 的奇异值为

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_n$$

又设 $$R(\boldsymbol{x})=\frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}}$$

则 $\max\limits_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}} R(\boldsymbol{x}) = (\ \sigma_1^2\ )$。

分析 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 的特征值为

$$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2 \ge \cdots \ge \sigma_n^2$$

故 $$\max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}} R(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}} = \sigma_1^2$$

§4 广义特征值问题

例 求解广义特征值问题 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{Bx}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

解 $$\det(\lambda\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda & -\lambda-2 \\ -\lambda-2 & 4\lambda \end{vmatrix}$$

$$=3\lambda^2-4\lambda-4=(\lambda-2)(3\lambda+2)$$

广义特征值为 $\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}$

求解 $(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应 $\lambda_1 = 2$ 的广义特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

全部广义特征向量为 $k\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (k \neq 0)$

求解 $(-\frac{2}{3}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得对应 $\lambda_2 = -\frac{2}{3}$ 的广义特征

向量为 $\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

全部广义特征向量为 $l\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\quad (l \neq 0)$

例 已知实对称矩阵$\boldsymbol{A}$和正定矩阵$\boldsymbol{B}$分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求B-正交矩阵$\boldsymbol{Q}$使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角矩阵。

解 先求解广义特征值问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$。

$$\det(\lambda\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -\lambda-2 \\ -\lambda-2 & 4\lambda \end{vmatrix} = 3\lambda^2 - 4\lambda - 4 = (\lambda-2)(3\lambda+2)$$

广义特征值为 $\lambda_1 = 2,\quad \lambda_2 = -\frac{2}{3}$

对应的广义特征向量分别为

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

（它们已是B-正交的）按B-单位化得

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_1}}\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_2}}\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

故B-正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

使得 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$