# 第八章 线性空间与线性变换 §1、数域和映射

数集  $K = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbf{Q}\}$  构成一个数域: 对加、减封闭是显然的;

对于乘法,设  $a+b\sqrt{2} \in \mathbf{K}$ ,  $c+d\sqrt{2} \in \mathbf{K}$ , 有  $(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2}) = (ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2} \in \mathbf{K}$  对除法,若  $a+b\sqrt{2} \neq 0$ ,则  $a-b\sqrt{2} \neq 0$  (否则若  $a-b\sqrt{2}=0$ ,则  $a=b\sqrt{2}$ ,因为  $a \in \mathbf{Q}$ ,从而 a=b=0,故  $a+b\sqrt{2}=0$ ,矛盾),且有

10 mm (24 mm)

# 例 设P[x]是数域K上全体多项式的集合。定义 $\sigma_3(f(x)) = f'(x)$ , $\sigma_4(f(x)) = \int_0^x f(t) dt$ $\forall f(x) \in P[x]$

则 $\sigma_3$ 和 $\sigma_4$ 是P[x]上的变换。

 $\sigma_3$ 是满射,但不是单射。  $\sigma_4$ 不是满射,但是单射。

例 定义在实数集合R上的函数 y = f(x) 是R上的一个变换。







$$\frac{c + d\sqrt{2}}{a + b\sqrt{2}} = \frac{(c + d\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})}$$
$$= \frac{ac - 2bd}{a^2 - 2b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2} \in \mathbf{K}$$

故K为数域。

例 设Z是全体整数的集合, Z'是全体偶数的 集合。 定义

 $\sigma(n) = 2n$   $\forall n \in \mathbb{Z}$  这是 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的一个映射。  $\sigma$ 是满射,又是单射,即 $\sigma$ 是一一对应的。

days



例 对前面例中的 $\sigma_1$ 与 $\sigma_2$ ,有

 $(\sigma_2\sigma_1)(A) = \sigma_2(\sigma_1(A)) = \sigma_2(\det A) = (\det A)I_n$ 

 $\forall A \in \mathbf{K}^{n \times n}$  $(\sigma_1 \sigma_2)(a) = \sigma_1(\sigma_2(a)) = \sigma_1(a\mathbf{I}_n) = (\det(a\mathbf{I}_n)) = a^n$ 

 $\sigma_1 \sigma_2(a) = \sigma_1(\sigma_2(a)) = \sigma_1(aI_n) = (\det(aI_n)) = a^n$  $\forall a \in \mathbf{K}$ 

而对 $\sigma_3$ 与 $\sigma_4$ ,有  $(\forall f(x) \in P[x])$ 

 $(\sigma_3\sigma_4)(f(x)) = \sigma_3(\sigma_4(f(x))) = \sigma_3(\int_0^x f(t) dt) = f(x)$ 

 $(\sigma_4 \sigma_3)(f(x)) = \sigma_4(\sigma_3(f(x))) = \sigma_4(f'(x))$  $= \int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0)$ 

显然,映射的乘法一般不满足交换律。







例 设 $K^{n \times n}$ 是全体n阶方阵的集合,定义  $\sigma_1(A) = \det A \quad \forall A \in K^{n \times n}$ 

这是Kn×n到K的一个映射。

σ,是满射,但不是单射。

例 定义

 $\sigma_2(a) = a\mathbf{I}_n \quad \forall a \in \mathbf{K}$ 

这是K到  $K^{n \times n}$ 的一个映射。

σ,是单射,但不是满射。

# § 2、线性空间及基本性质

例1 数域K上所有n维向量的集合Kn,对于通常向量的加法与数乘运算构成数域K上的线性空间。问:所有n维实向量的集合Rn,对于通常向量的加法与数乘运算是否构成复数域C上的线性空间?(否,数乘不封闭。)

问: 所有n维复向量的集合Cn,对于通常向量的加法与数乘运算是否构成实数域R上的线性空间?

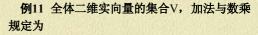


**例3** 系数在数域K上的全体多项式集合P[/],按通常多项式的加法和数与多项式的乘法,构成数域K上的线性空间。

例4 系数在数域K上次数不超过n的多项式集合  $P_n[t]$ ,按通常多项式的加法和数与多项式的乘法,构成数域K上的线性空间。

**例**5 数域K上次数等于n的多项式集合,对于 多项式的加法与数乘运算是否构成线性空间?

- 解 不构成。原因:
- (1) 对加法不封闭,取 $t^n + 5$  和 $-t^n 2$  属于该集合,但 $(t^n + 5) + (-t^n 2) = 3$  不属于该集合;



$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c,b+d+ac)$$
  
 $k \circ (a,b) = (ka,kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2)$ 

# 则V构成实线性空间。因为

$$(a,b) \oplus (0,0) = (a+0,b+0+a0) = (a,b)$$

$$(a,b) \oplus (-a,a^2-b) = (a-a,b+(a^2-b)+a(-a))$$
  
= (0,0)

所以(0,0)是零元素, $(-a,a^2-b)$ 是元素(a,b)的 负元素。







- (2) 对于数乘运算不封闭,如  $0(t^n + 5) = 0$  不属于该集合:
  - (3) 无零元素。

**例**6 全体实函数的集合,对于通常函数的加法 与数与函数的乘法,构成实线性空间。

例7 定义在区间[a,b]上的连续实函数的全体 C[a,b],对于通常函数的加法与数与函数的乘法,构成实线性空间。

例8 设 $A \in K^{m \times n}$ ,齐次线性方程组Ax = 0的解向量集合S,按通常向量的加法与数乘构成数域K上的线性空间。







**例12** 全体n维实向量的集合V,对于通常向量的加法和如下定义的数乘运算是否构成线性空间?为什么?

- 1)  $k \circ \alpha = \alpha$ ,  $\forall \alpha \in V$  2)  $k \circ \alpha = 0$ ,  $\forall \alpha \in V$
- 解 1) 不构成。因为  $(k+l) \circ \alpha = \alpha$ ,但  $k \circ \alpha + l \circ \alpha = \alpha + \alpha = 2\alpha$

即运算律(7)不成立。

- 2) 不构成。因为  $1 \circ \alpha = 0 \neq \alpha$ , 即 (5) 不成立。
- **例**13 数域K按通常数的加法与乘法运算,构成数域K上的线性空间。







例9 设 $A \in K^{m \times n}$ ,非齐次线性方程组Ax = b的解向量集合 $\S$ ,按通常向量的加法与数乘不构成数域 K上的线性空间。

- 原因: (1) S可能是空集:
  - (2) S对加法不封闭:
  - (3) S对数乘不封闭。

例10 全体正实数集合 $\mathbf{R}^+$ ,加法与数乘规定为 $m \oplus n = mn$ , $k \circ m = m^k$ , $\forall m, n \in \mathbf{R}^+$ , $k \in \mathbf{R}$ 则 $\mathbf{R}^+$ 构成实线性空间。

其中1是零元素, $\frac{1}{m}$ 是元素m的负元素。







# §3、基、维数与坐标

例 在K2×2中,试讨论矩阵组

(1) 
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
,  $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

(2) 
$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

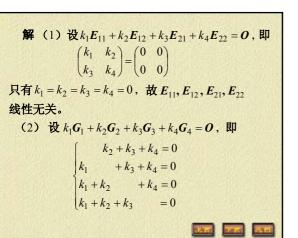
$$G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

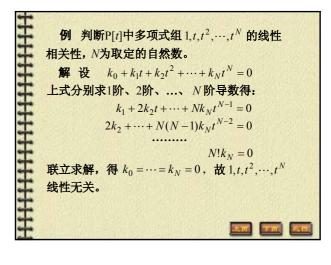
的线性相关性。

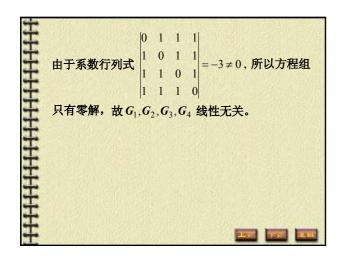


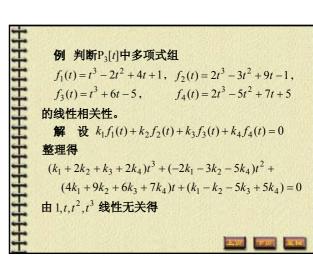


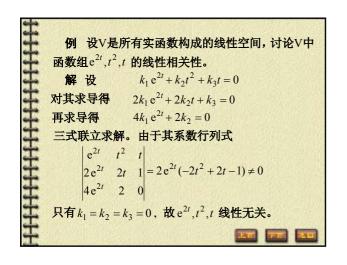


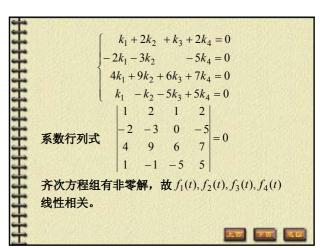


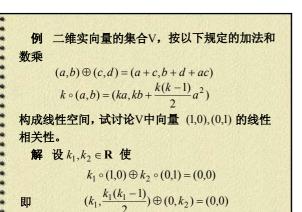


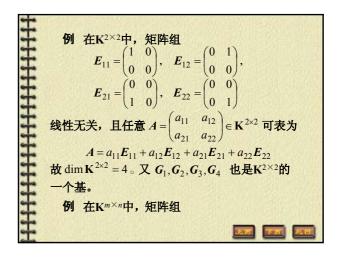


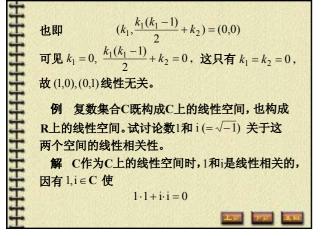


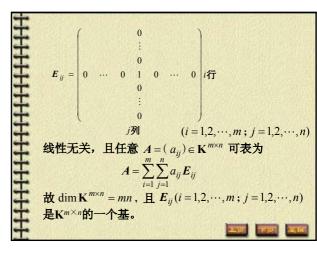




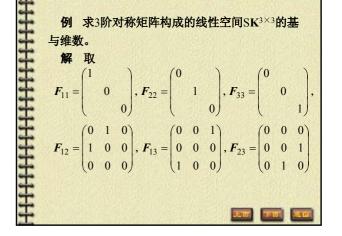


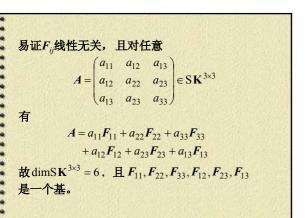


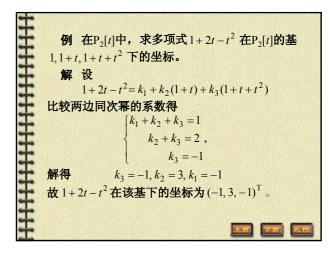


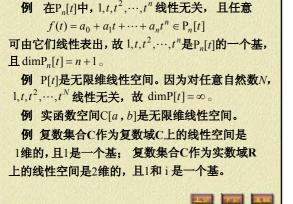


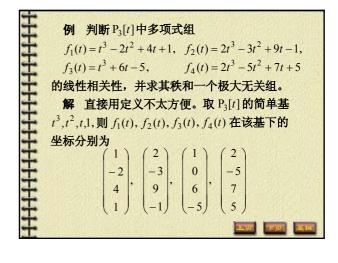
C作为R上的线性空间时,1和i是线性无关的,因为,若有  $k_1,k_2\in \mathbf{R}$  ,使  $k_1\cdot 1+k_2\cdot \mathbf{i}=0$  则必有  $k_1=k_2=0$  (否则,若  $k_2\neq 0$ ,则得  $\mathbf{i}=-\frac{k_1}{k_2}$  为实数,矛盾)。





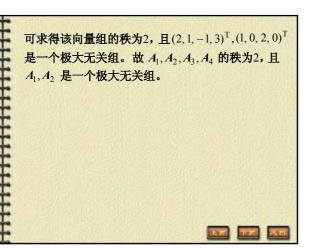


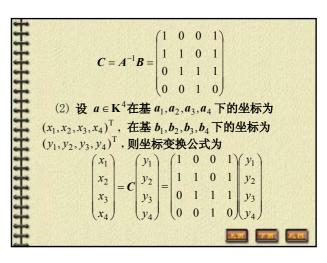


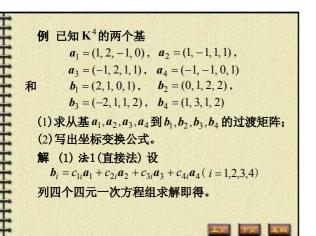


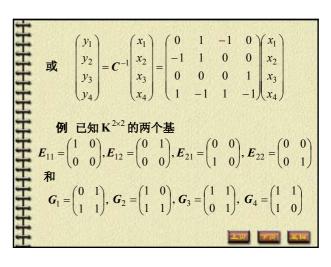
例 在 $\mathbf{K}^{2\times2}$ 中,分别求矩阵  $A=\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$ 在 $\mathbf{K}^{2\times2}$ 的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 和 $G_1,G_2,G_3,G_4$ 下的坐标。
解 因为 $A=0E_{11}+E_{12}+2E_{21}-3E_{22}$ ,所以A 在该基下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 。
又设 $A=k_1G_1+k_2G_2+k_3G_3+k_4G_4$ ,即  $\begin{cases}0=&k_2+k_3+k_4\\1=k_1&+k_3+k_4\\2=k_1+k_2&+k_4\\-3=k_1+k_2+k_3\end{cases}$ 解之得 $k_1=0,k_2=-1,k_3=-2,k_4=3$ ,故A在该基下的坐标为 $(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 。

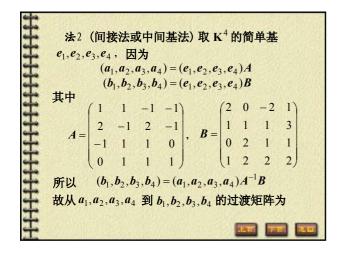
可求得该向量组的秩为2,且 $(1,-2,4,1)^{\mathrm{T}}$ , $(2,-3,9,-1)^{\mathrm{T}}$  为一个极大无关组。故  $f_1(t)$ , $f_2(t)$ , $f_3(t)$ , $f_4(t)$  线性相关;该多项式组的秩为2,且  $f_1(t)$ , $f_2(t)$  为一个极大无关组。 例 求  $\mathbf{K}^{2\times 2}$  中矩阵组  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$  的秩和极大无关组。 解 取  $\mathbf{K}^{2\times 2}$  的简单基  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{21}$ ,  $E_{22}$ , 则矩阵  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A_4$  在该基下的坐标为  $(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$ , $(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$ , $(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ , $(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$ 

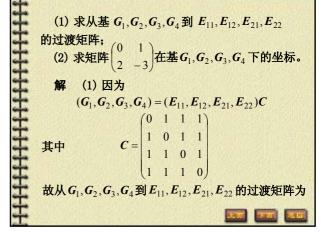


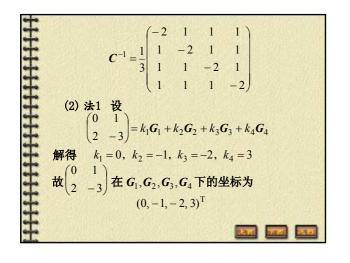


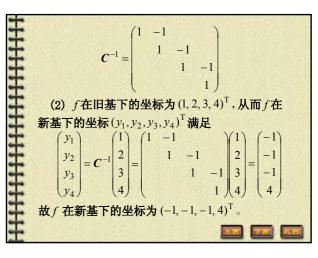


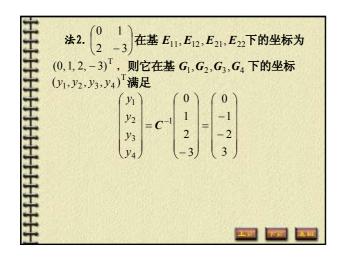


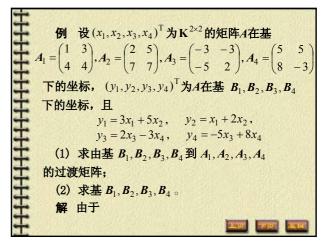


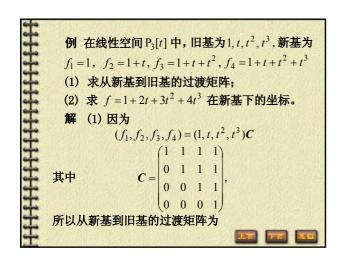




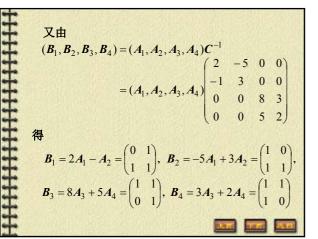


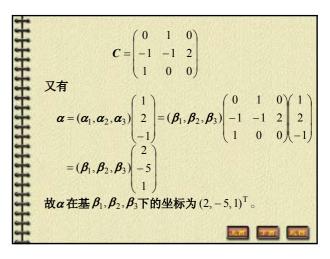












例 已知  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 是3维线性空间V 的两个基,且满足  $\beta_1 + \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 \\ \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 \end{cases}$$

- (1) 求从基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  到基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的过渡矩阵;
- (2) 求元素  $\alpha = \alpha_1 + 2\alpha_2 \alpha_3$  在基  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标。

解 由所给关系式得

20 70 20

§ 4、线性子空间

例 在线性空间V中, $\{\theta\}$ 和V都是V的子空间,称它们是V的平凡(假)子空间,其余的子空间称为非平凡(真)子空间。

例 在2维几何空间R<sup>2</sup>中,过原点的任一直线上的向量集合是R<sup>2</sup>的子空间;在R<sup>3</sup>中,过原点的直线或平面上的向量集合是R<sup>3</sup>的子空间。

例 全体实函数组成的线性空间中,P[t]是它的一个子空间, $P_{n}[t]$ 是P[t]的子空间。

例 设 $A \in K^{m \times n}$ ,则Ax = 0的解向量集合S是 $K^n$ 的子空间,且Ax = 0的基础解系是S的基,

 $\dim S = n - \operatorname{rank} A_{\circ}$ 

Eur Fu

l lear

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

于是

$$(\boldsymbol{\alpha}_{1}, \boldsymbol{\alpha}_{2}, \boldsymbol{\alpha}_{3}) = (\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \boldsymbol{\beta}_{3}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= (\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}, \boldsymbol{\beta}_{3}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故从基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵为

-

例 求 $\mathbf{K}^n$ 的子空间  $W_1 = \{(0, \dots, 0, x_n) | x_n \in \mathbf{K}\}$ 的基与维数。

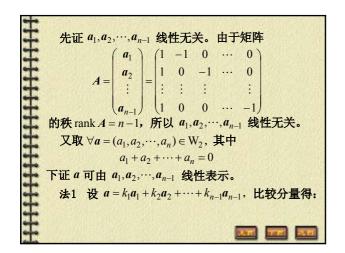
解 取  $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in W_1$ , 则  $e_n$  线性无关,且对任一  $a = (0, \dots, 0, a_n) \in W_1$ , 有  $a = a_n e_n$ 。故 dim $W_1 = 1$ ,且  $e_n$  是 $W_1$ 的一个基。

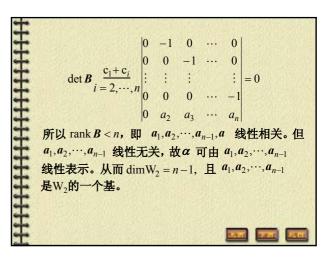
例 求K"的子空间

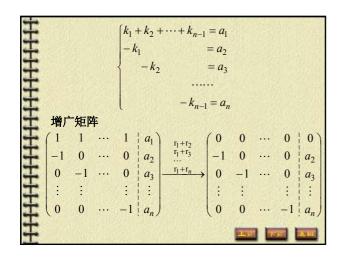
 $W_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbf{K} \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$  的基与维数。

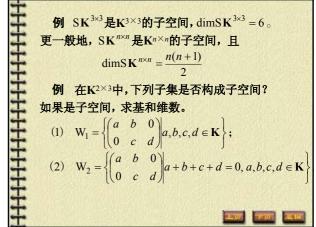
解 在W<sub>2</sub>中取向量组

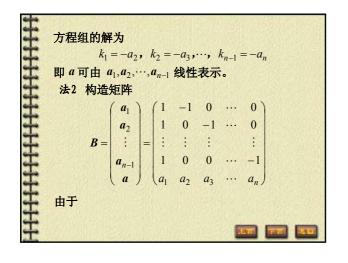
$$a_1 = (1,-1,0,\cdots,0), \quad a_2 = (1,0,-1,0,\cdots,0),$$
  
  $\cdots, \quad a_{n-1} = (1,0,\cdots,0,-1)$ 

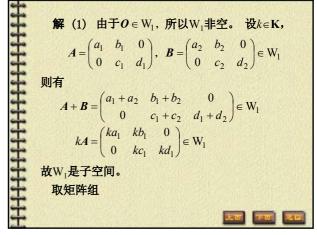


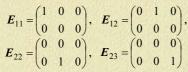










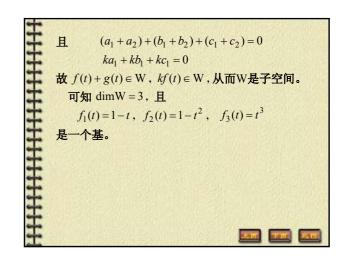


则易知  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{23}$ 线性无关,且 $W_1$ 中任意 矩阵可由它们线性表示。 故  $\dim W_1 = 4$ ,且  $E_{11}$ ,  $E_{12}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{23}$  是 $W_1$ 的一个基。

(2) 由于
$$\mathbf{O} \in \mathbf{W}_2$$
,所以 $\mathbf{W}_2$ 非空。设 $k \in \mathbf{K}$ ,
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{W}_2$$

则  $a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0$ ,  $a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 0$ 

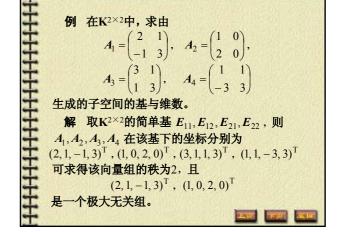
100 Total 1000

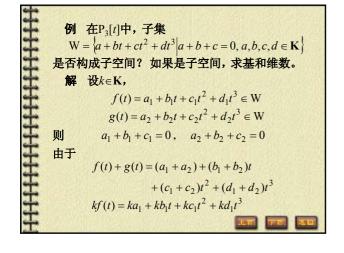


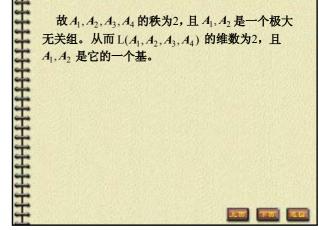
由于
$$A+B=\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & 0\\ 0 & c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{pmatrix},$$

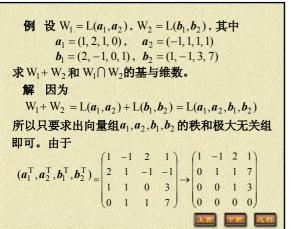
$$kA=\begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & 0\\ 0 & kc_1 & kd_1 \end{pmatrix}$$
且  $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)=0$ 

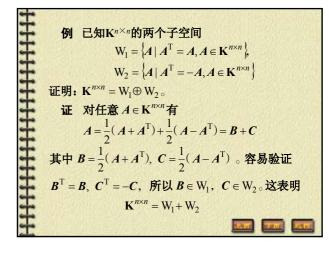
$$ka_1+kb_1+kc_1+kd_1=0$$
故  $A+B\in W_2$ ,  $kA\in W_2$ , 从而  $W_2$ 是子空间。
可知  $\dim W_2=3$ , 且
$$F_1=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, F_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
是一个基。

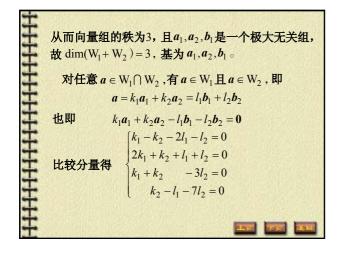


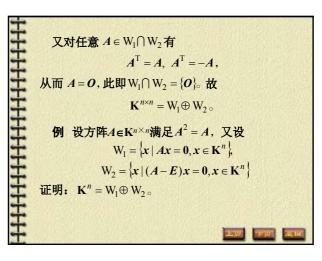


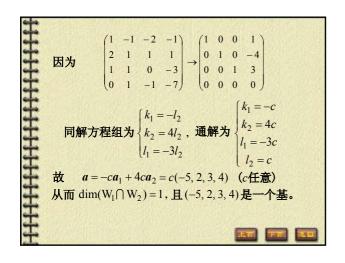


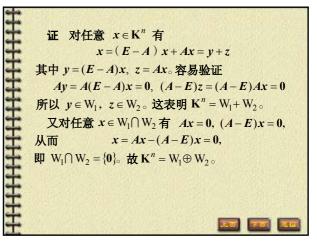












# § 5、线性变换

# 例1 在K3中, 定义变换

 $T(a,b,c) = (a+1,a+b,c), \forall (a,b,c) \in \mathbf{K}^3$ 问T是否线性变换?

**EXECUTE:**  $\mathbf{p} = (a_1, b_1, c_1), \mathbf{b} = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbf{K}^3, k \in \mathbf{K}$ 

则

$$T(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = T(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

$$= (a_1 + a_2 + 1, a_1 + a_2 + b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

$$T(\mathbf{a}) + T(\mathbf{b}) = (a_1 + 1, a_1 + b_1, c_1) + (a_2 + 1, a_2 + b_2, c_2)$$

$$= (a_1 + a_2 + 2, a_1 + a_2 + b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

可见  $T(a+b) \neq T(a) + T(b)$ , 故T不是线性变换。

例4 在 $P_n[t]$ 中,求微分

 $D(f(t)) = f'(t), \forall f(t) \in P_n[t]$ 

是一个线性变换。

例5 在C[a,b]中,定义变换

- (1)  $T_1(f(x)) = \int_a^x f(t) dt$ ;
- (2)  $T_2(f(x)) = \int_0^x f(t) \sin t \, dt$ ;
- (3)  $T_3(f(x)) = \int_0^x f^2(t) dt$

问 T<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>, T<sub>3</sub>是否线性变换?

解(1)(2)是;(3)不是。因为

 $T_3(2f(x)) = \int_0^x 4f^2(t) dt = 4T_3(f(x)) \neq 2T_3(f(x))$ 





# 例2 在K"中,定义变换

T(x) = Ax,  $\forall x \in \mathbf{K}^n \mathbf{\overline{n}} A \in \mathbf{K}^{n \times n}$ 取定 则T是Kn的线性变换。

例3 在 $K^{n\times n}$ 中,定义变换

T(X) = AX - XB,  $\forall X \in \mathbf{K}^{n \times n}$ 

其中  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  取定。问T是否线性变换?

# 例6 设V是数域K上的线性空间。定义V的变换

- (1)  $I(\alpha) = \alpha$ ,
- (2)  $O(\alpha) = \theta$ ,  $\forall \alpha \in V$

分别称之为恒等变换(或单位变换),零变换。

它们都是V的线性变换。

# 解 设 $X, Y \in \mathbf{K}^{n \times n}$ , $k \in \mathbf{K}$ , 则有

$$T(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)B$$
$$= (AX - XB) + (AY - YB)$$
$$= T(X) + T(Y)$$

T(kX) = A(kX) - (kX)B = k(AX - XB) = kT(X)故T是 $K^n \times n$ 的线性变换。

若取变换

$$T(X) = AX - XB + C$$

则当C = O时,T是线性变换。

# 由于

 $T(e_1) = (1, 0, 1), T(e_2) = (2, 1, 1), T(e_3) = (-1, 1, -2)$ 可求得 $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$  的秩为2,且 $T(e_1), T(e_2)$ 是一个极大无关组。故  $\dim R(T) = 2$ ,且 (1, 0, 1),

 $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ 

 $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3)$ 

(2,1,1)是R(T)的一个基。

例 已知K3的线性变换

(1) 求R(T) 的维数和一个基;

(2) 求N(T) 的维数和一个基。

解 (1) 取 K3的简单基

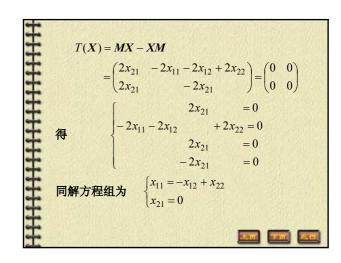


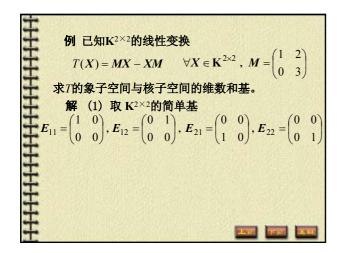


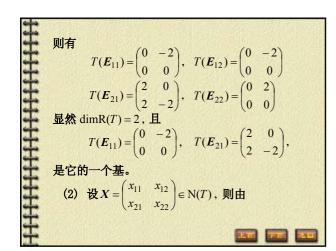


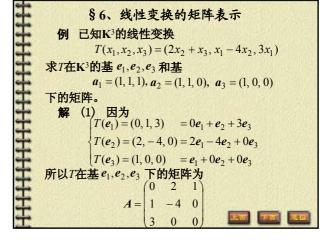
(2) 设 
$$a = (x_1, x_2, x_3) \in N(T)$$
,则
$$T(a) = T(x_1, x_2, x_3)$$

$$= (x_1 + 2x_2 - x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_2 - 2x_3) = (0, 0, 0)$$
于是
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$
同解方程组为 
$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$
,通解为 
$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = -k \end{cases}$$
 (k任意)
$$x_3 = k$$
于是  $a = k(3, -1, 1)$ 。故 dimN(T) = 1,且(3, -1, 1)
是N(T) 的一个基。

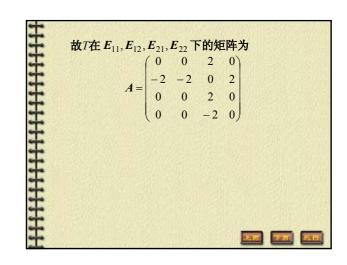


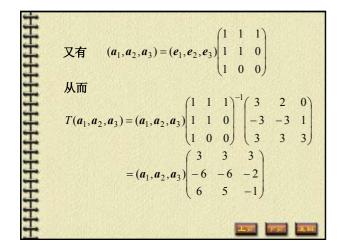


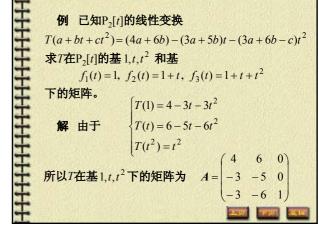


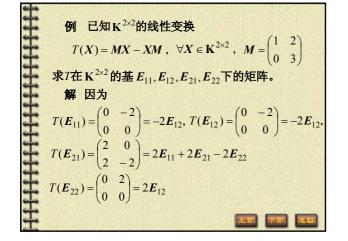


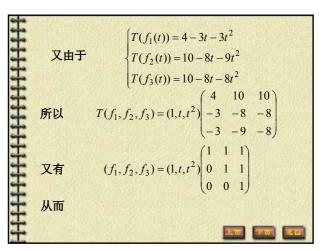
(2) 法1 因为
$$\begin{cases}
T(a_1) = (3, -3, 3) = 3a_1 - 6a_2 + 6a_3 \\
T(a_2) = (2, -3, 3) = 3a_1 - 6a_2 + 5a_3 \\
T(a_3) = (0, 1, 3) = 3a_1 - 2a_2 - a_3
\end{cases}$$
所以7在基 $a_1, a_2, a_3$  下的矩阵为
$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
法2 因为
$$T(a_1, a_2, a_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

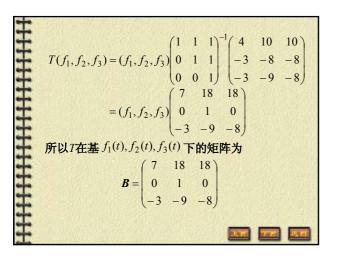


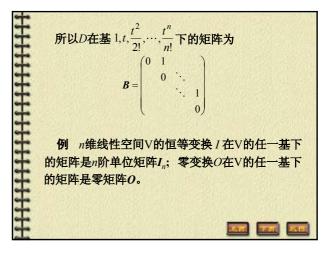


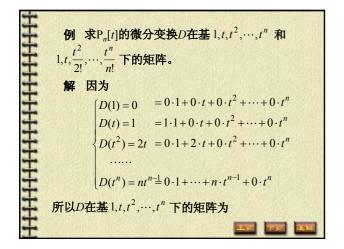


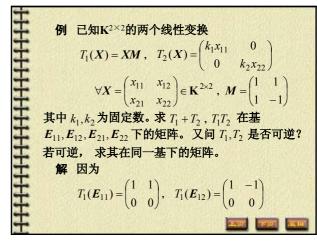


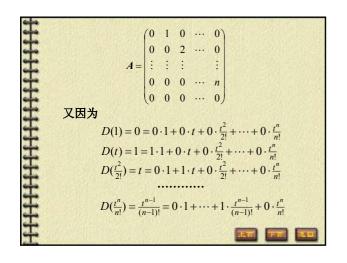


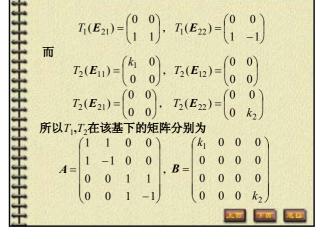


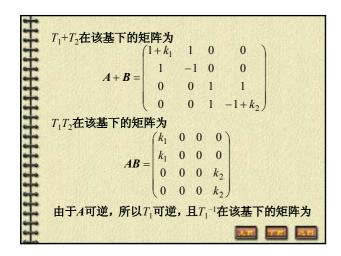


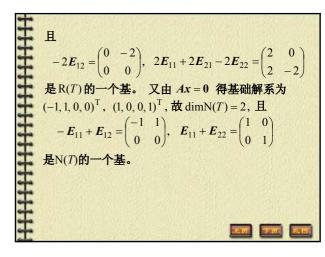


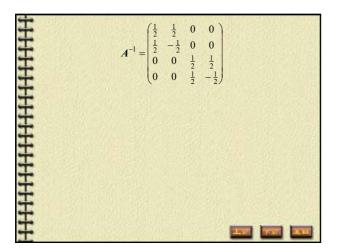




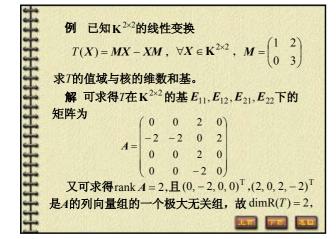


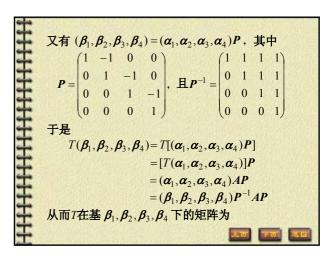


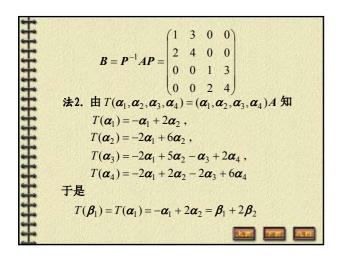


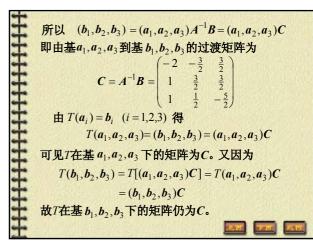


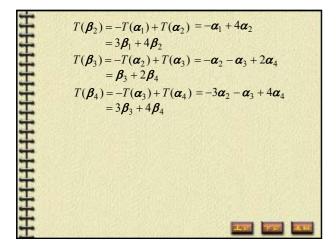
例 设
$$T$$
是4维线性空间V的线性变换,又设 $T$ 在 V的基  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  下的矩阵为 
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$
 求 $T$ 在基 
$$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = -\alpha_1 + \alpha_2, \beta_3 = -\alpha_2 + \alpha_3, \beta_4 = -\alpha_3 + \alpha_4$$
 下的矩阵。 
$$\mathbf{M} \quad \mathbf{L} \mathbf{1}. \quad \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{h}$$
 
$$T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) A$$

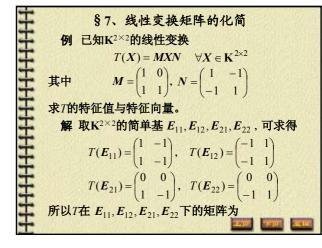


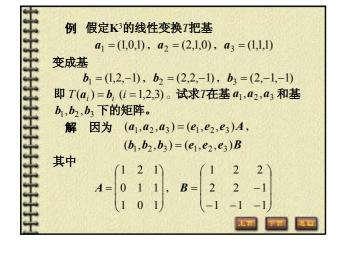


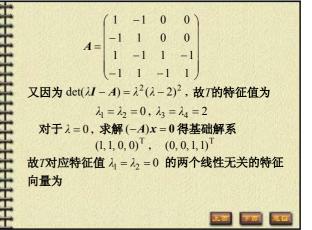


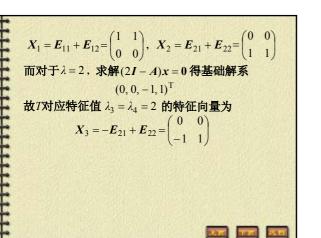












# 例 已知 $P_2[t]$ 的线性变换

$$T(a+bt+ct^{2}) = (4a+6b) - (3a+5b)t - (3a+6b-c)t^{2}$$
$$\forall a+bt+ct^{2} \in P_{2}[t]$$

试求 $P_2[t]$ 的一个基,使T在该基下的矩阵为对角阵。

解 取 $P_2[t]$ 的简单基  $1,t,t^2$ ,可求得 T在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

又可求得A的特征值为  $\lambda_1 = -2$  ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  ; 对应  $\lambda_1 = -2$  的特征向量为  $p_1 = (-1, 1, 1)^T$  ;





# 例 已知 $P_2[t]$ 的线性变换

$$T(a+bt+ct^{2}) = (4a+6b) - (3a+5b)t - (3a+6b-c)t^{2}$$
$$\forall a+bt+ct^{2} \in P_{2}[t]$$

求了的特征值与特征向量。

解 取
$$P_2[t]$$
的简单基  $1,t,t^2$ ,则由

$$\begin{cases} T(1) = 4 - 3t - 3t^2 \\ T(t) = 6 - 5t - 6t^2 \\ T(t^2) = t^2 \end{cases}$$

得
$$7$$
在该基下的矩阵为  $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ 

FIEL SE

对应  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  的线性无关特征向量为

$$p_2 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}, p_3 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

故相似变换阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \mathbf{\notin} \ \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{P}$$

由 $(f_1, f_2, f_3) = (1, t, t^2) P$  得 $P_2[t]$ 的基

 $f_1 = -1 + t + t^2$ ,  $f_2 = -2 + t$ ,  $f_3 = t^2$ **T在该基下的矩阵为** $\Lambda$ **。** 





又因为 $\det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2$ ,故T的特征值为  $\lambda_1 = -2$  , $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 

对于 $\lambda_1 = -2$ , 求解(-2I - A)x = 0 得基础解系

 $(-1,1,1)^{T}$ 故T对应特征值  $\lambda_1 = -2$  的特征向量为

 $f_1 = -1 + t + t^2$ 

向量

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , 求解(I - A)x = 0 得基础解系 $(-2, 1, 0)^T$ ,  $(0, 0, 1)^T$ 

故7对应特征值 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  有两个线性无关的特征

 $f_2 = -2 + t$ ,  $f_3 = t^2$ 



例 已知K<sup>2×2</sup>的线性变换

$$T(X) = MXN \quad \forall X \in \mathbf{K}^{2 \times 2}$$
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

其中  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 

试求 $K^{2\times 2}$ 的一个基,使T在该基下的矩阵为Jordan阵。解 取 $K^{2\times 2}$ 的简单基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ ,可求得

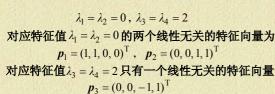
T在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

又可求得4的特征值为







又求解 $(2I - A)x = -p_3$  得解向量  $p_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)^T$ 故相似变换阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \not\oplus P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

可求得  $\det(\lambda I - A) = [(\lambda - 1)^2 - 4]^3 = (\lambda + 1)^3 (\lambda - 3)^3$ 故A的特征值为

 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ ,  $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$ 

对应特征值-1的线性无关特征向量为

 $(-1, 0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (0, -1, 0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 0, -1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 

对应特征值3的线性无关特征向量为

 $(1, 0, 0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 0, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 0, 1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 故T的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$
,  $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = 3$ 

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$$\beta_1 = -\alpha_1 + \alpha_6$$
,  $\beta_2 = -\alpha_2 + \alpha_5$ ,  $\beta_3 = -\alpha_3 + \alpha_4$ 



 $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})P$ 得K2×2的基

$$\boldsymbol{X}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{X}_{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_{4} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为J。

全部特征向量为

 $k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2 + k_3 \beta_3$  ( $k_1, k_2, k_3$ 不全为零) 对应特征值3的线性无关特征向量为

 $\boldsymbol{\beta}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_6$ ,  $\boldsymbol{\beta}_5 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_5$ ,  $\boldsymbol{\beta}_6 = \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4$ 全部特征向量为

 $k_4 \beta_4 + k_5 \beta_5 + k_6 \beta_6$  ( $k_4, k_5, k_6$ 不全为零)

2) T在V的一组基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6$ 下的矩阵为  $\Lambda = diag(-1, -1, -1, 3, 3, 3)$ 

例 给定 $V^6$ 的基  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  及线性变换  $T(\alpha_i) = \alpha_i + 2\alpha_{7-i} \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$ 

- 1) 求7的全部特征值与特征向量;
- 2) 求V的一组基, 使T在该基下的矩阵为对角阵。
- 解 1) 由于 $T(\alpha_1,\dots,\alpha_6) = (\alpha_1,\dots,\alpha_6)A$ ,其中

$$A \neq T(\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_6) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_6)A$$
,其中
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

例 线性空间V和子空间 $\{\theta\}$ ,对V上的每个线性 变换7来说都是不变子空间。

例 线性变换T的值域 R(T)与核N(T)是T的不变 子空间。

证 首先, R(T)与N(T)是V的子空间。

对任意 $\alpha \in R(T) \subset V$ 有 $T(\alpha) \in R(T)$ ,故R(T)是T的不变子空间。

对任意 $\alpha \in N(T)$ ,有 $T(\alpha) = \theta$ ,又有  $T(T(\boldsymbol{\alpha})) = T(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$ 

即  $T(\alpha) \in N(T)$ , 故N(T)是T的不变子空间。





例 设λ是线性变换T的特征值,由对应λ的 全部特征向量再添上零向量构成的集合

$$V_{\lambda} = \{ \boldsymbol{\alpha} | T(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda \boldsymbol{\alpha} \}$$

是V的子空间,且它是T的不变子空间。称V.为 线性变换 $T(对应特征值\lambda的)$ 特征子空间。

例 设A, B为n阶方阵, 且AB=BA。如果 $\lambda_0$ 是A的特征值, $V_{\lambda_0}$  是A的特征子空间。证明: $V_{\lambda_0}$  是 B的不变子空间。

证 任取  $x \in V_{\lambda_0}$ ,则  $Ax = \lambda_0 x$ 。由于  $A(Bx) = (AB)x = (BA)x = B(Ax) = \lambda_0(Bx)$ 故  $Bx \in V_{\lambda_0}$ , 即  $V_{\lambda_0}$  是B的不变子空间。

# (3) 因为 $T(\mathbf{A}_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3$ $T(A_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_2 - A_3$ $T(A_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A_2 + A_3$ 所以

$$T(A_1, A_2, A_3) = (A_1, A_2, A_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

即T在W的基 A1, A2, A3 下的矩阵为

例 已知K2×2的子空间

$$\mathbf{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} | x_{11} + x_{22} = 0, x_{ij} \in \mathbf{K} \right\}$$

和线性变换

$$T(X) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} X - X^{\mathrm{T}} \mathbf{B} \quad \forall X \in \mathbf{K}^{2 \times 2}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (1) 求W的一个基:
- (2) 证明W是T的不变子空间:
- (3) 将T看成W上的线性变换, 试求W的一个基, 使了在该基下的矩阵为对角矩阵。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

可求得A的特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$ 对应于 \( \lambda = \lambda = 0 有两个线性无关的特征向量

$$p_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad p_2 = (-1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

对应于 $\lambda_3 = 2$  的特征向量为  $p_3 = (0, -1, 1)^T$ 

故相似变换阵

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \notin P^{-1}AP = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

解(1) W的一个基为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) **任取** 
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in W$$
, **则**  $x_{11} + x_{22} = 0$ ;

$$T(X) = B^{\mathsf{T}} X - X^{\mathsf{T}} B$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_{11} + x_{12} - x_{21} \\ x_{11} - x_{12} + x_{21} & 0 \end{pmatrix} \in W$$

故W是T的不变子空间。



由 
$$(B_1, B_2, B_3) = (A_1, A_2, A_3)P$$
 得W的基

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{B}_2 = -\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 $B_3 = -A_2 + A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 

T在该基下的矩阵为A。





# § 8、欧氏空间

例 在n维向量空间Rn中,对任意

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$$

易证它是内积,R"按上述内积构成欧氏空间。 也称上述内积为R"的标准内积。

如果规定 
$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i y_i = x^{\mathrm{T}} \Lambda y$$

其中  $k_i > 0$   $(i = 1, 2, \dots, n)$ ,而  $\Lambda = \text{diag}(k_1, \dots, k_n)$ , 则它也是内积,R"按此内积也构成欧氏空间。





 $(f(t),g(t)) = \sum_{i=1}^{n+1} f(i)g(i)$ 或

它们都是内积。

证 对第三种情形,仅证非负性。显然

$$(f(t), f(t)) = \sum_{i=1}^{n+1} f^{2}(i) \ge 0$$

若
$$(f(t), f(t)) = 0$$
,则  $f(1) = f(2) = \cdots = f(n+1) = 0$ 

法1 根据代数学基本定理知, n次多项式在 复数域上最多只有n个根,而 f(x) 有n+1个根,故 f(x) = 0

法2 设 
$$f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$$
, 得



更进一步,若规定 $(x,y)=x^TAy$ ,其中A是n阶 正定矩阵, 则它也是内积。

例 在mn维矩阵空间 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 中,对任意  $A=(a_{ii})_{m\times n}$  ,  $\mathbf{B} = (b_{ii})_{m \times n}$  , 规定

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$
 (标准内积)

$$(A, B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} k_{ij} a_{ij} b_{ij} \quad (k_{ij} > 0)$$

则它们都是内积,R<sup>m×n</sup>按这些内积构成欧氏空间。





 $f(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_n = 0$  $f(2) = a_0 + 2a_1 + \dots + 2^n a_n = 0$  $f(n+1) = a_0 + (n+1)a_1 + \dots + (n+1)^n a_n = 0$ 其系数行列式

所以只有  $a_0 = \cdots = a_n = 0$ , 即 f(t) = 0。





例 在实线性空间C[a,b]中,规定

$$(f(t),g(t)) = \int_{a}^{b} f(\tau)g(\tau) d\tau$$
$$(f(t),g(t)) = \int_{a}^{b} w(\tau)f(\tau)g(\tau) d\tau$$
$$\forall f(t),g(t) \in \mathbb{C}[a,b]$$

其中 $w(t) \in \mathbb{C}[a,b]$ 且w(t) > 0。

由定积分性质易知它们是内积。

例 在线性空间 $P_n[t]$ 中,对任意  $f(t),g(t) \in P_n[t]$ 

规定 
$$(f(t),g(t)) = \int_0^1 f(\tau)g(\tau) d\tau$$
 或 
$$(f(t),g(t)) = \int_0^1 f(\tau)g(\tau) d\tau$$



例 设V是n维实线性空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是V的 一个基,对任意  $\alpha, \beta \in V$  有

$$\boldsymbol{\alpha} = x_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + x_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + x_n \boldsymbol{\alpha}_n$$
$$\boldsymbol{\beta} = y_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + y_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \dots + y_n \boldsymbol{\alpha}_n$$

规定

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i y_i \quad (k_i > 0)$$

则它们是内积。





如在R<sup>n</sup>中  

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$
或 
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2} \quad (k_i > 0)$$
在R<sup>m×n</sup>中, 
$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$
在C[a,b]中, 
$$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(\tau) d\tau}$$

$$(\cos mt, \cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos m\tau \cos n\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)\tau + \cos(m+n)\tau] \, d\tau = 0$$

$$(m \neq n)$$

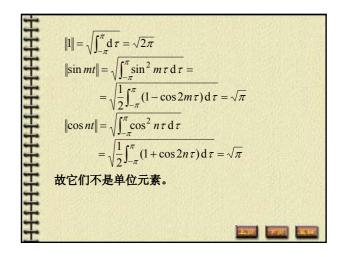
$$(\sin mt, \cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\tau \cos n\tau \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(m+n)\tau + \sin(m-n)\tau] \, d\tau = 0$$

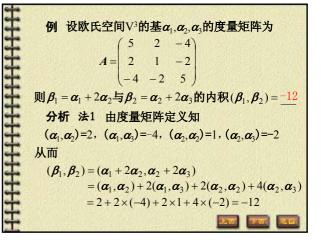
$$(1, \cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\tau \, d\tau = 0$$

$$(1, \sin nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin n\tau \, d\tau = 0$$
**于是该函数组两两正交。又有**

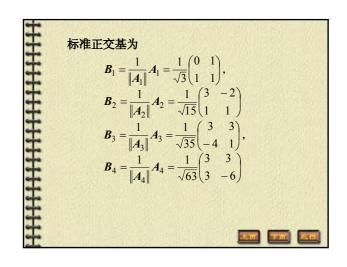
例 给定n维实线性空间V的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ,对任意 $\alpha \in V$ 有 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ ,即 $\alpha$ 对应列向量 $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$ ,规定 $\|\alpha\|_p = \|x\|_p$ 则它是元素 $\alpha$ 的一种长度。

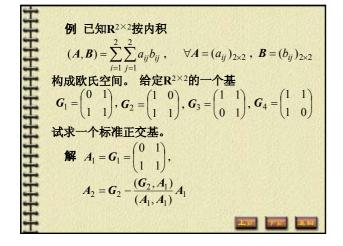


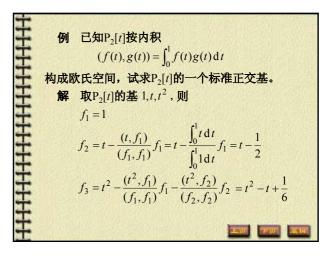
例 在实线性空间  $C[-\pi,\pi]$  中定义内积为  $(f(t),g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(\tau) d\tau \quad \forall f(t),g(t) \in C[-\pi,\pi]$  试证明函数组  $1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots$  是两两正交的,但它们不是单位元素。 证 可求得  $(\sin mt,\sin nt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m\tau \sin n\tau d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)\tau - \cos(m+n)\tau] d\tau = 0$   $(m \neq n)$ 



# 法2 由度量矩阵的性质得 $(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = (1,2,0)A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,2,0) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -12$







$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

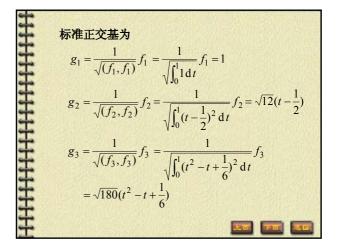
$$A_3 = G_3 - \frac{(G_3, A_1)}{(A_1, A_1)} A_1 - \frac{(G_3, A_2)}{(A_2, A_2)} A_2$$

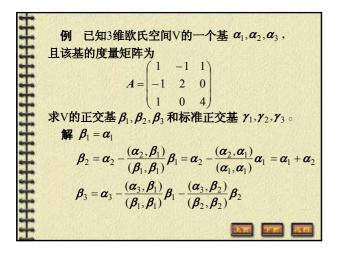
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

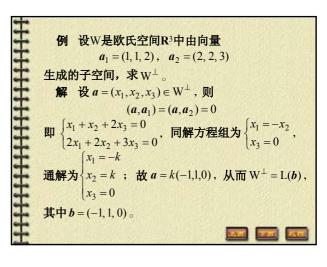
$$A_4 = G_4 - \frac{(G_4, A_1)}{(A_1, A_1)} A_1 - \frac{(G_4, A_2)}{(A_2, A_2)} A_2 - \frac{(G_4, A_3)}{(A_3, A_3)} A_3$$

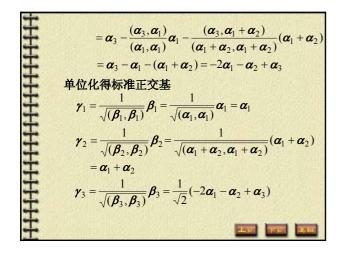
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{5}} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

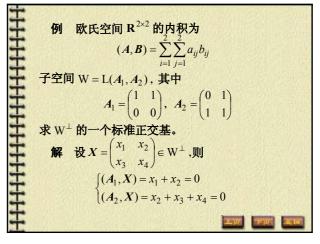
$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

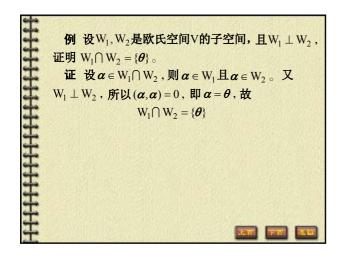


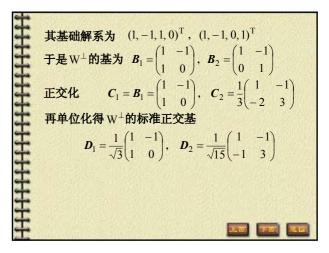












# § 9、欧氏空间的线性变换

例 设Q是n阶正交矩阵,对任意  $x \in \mathbb{R}^n$  , 规定 T(x) = Ox

证明T是R"的正交变换。

证 对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$  有

$$(T(x),T(y)) = (Qx,Qy) = (Qx)^{T}(Qy)$$
$$= x^{T}Q^{T}Qy = x^{T}y = (x,y)$$

从而T是正交变换。

- Die
- - 250 M

- (2) 验证T是W中的对称变换;
- (3) 求W的一个标准正交基,使T在该基下的矩阵为对角矩阵。

# 解(1) W的基为

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

它们已正交,单位化得W的一个标准正交基

$$\mathbf{\textit{B}}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\textit{B}}_{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\textit{B}}_{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 可求得



# 例 已知 $R^n$ 的线性变换 $T(x) = x^n$

T(x) = Ax,  $x \in \mathbb{R}^n$ 

其中A是n阶实对称矩阵。证明T是 $R^n$ 的对称变换。

证 对任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$  有

$$(T(x), y) = (Ax, y) = (Ax)^{T} y = x^{T} A^{T} y$$
  
=  $x^{T} A y = (x, Ay) = (x, T(y))$ 

从而T是对称变换。



$$T(\mathbf{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_2$$

$$T(\mathbf{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

$$T(\mathbf{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3\mathbf{B}_3$$

可见T在标准正交基 $B_1, B_2, B_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

由于A是实对称矩阵,所以T是W中的对称变换。





# 例 已知矩阵空间R<sup>2×2</sup>的子空间

$$W = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} | x_3 - x_4 = 0, \quad x_i \in \mathbf{R} \right\}$$

R<sup>2×2</sup>中的内积为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{ij}, \ \forall \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

W中的线性变换为

$$T(X) = XB$$
,  $\forall X \in W$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 

(1) 求子空间W的一个标准正交基;



(3) 可求得 
$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)^2 (\lambda + 1)$$
,从而A的  
特征值为  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ , $\lambda_3 = -1$ 。

对应  $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$  的特征向量为

$$p_1 = (1, 1, 0)^T$$
,  $p_2 = (0, 0, 1)^T$  (已正交)

对应 
$$\lambda_3 = -1$$
 的特征向量为  $p_3 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 。

故正交矩阵
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



由  $(D_1, D_2, D_3) = (B_1, B_2, B_3)Q$  得W的标准正交基  $D_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 + B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   $D_2 = B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$   $D_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-B_1 + B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 

Der Tie Bill

**例** 设欧氏空间\/"的正交变换\/"的特征值都是 实数,证明存在\/"的标准正交基,使得\//在该基下 的矩阵为对角矩阵。

证 取 $V^n$ 的标准正交基 $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ,则T在该基下的矩阵A是正交矩阵。由于A是正规矩阵,且特征值均为实数,所以存在正交矩阵Q,使

$$Q^{T}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_{1}, \dots, \lambda_{n}) = \Lambda$$
 令  $(\delta_{1}, \dots, \delta_{n}) = (\gamma_{1}, \dots, \gamma_{n})Q$  则  $\delta_{1}, \dots, \delta_{n}$  是标准正交基, $T$ 在该基下的矩阵为 $\Lambda$ 。

Divi





例 在欧氏空间V"中,若2是对称变换7的一个 2重特征值,则7在子空间

$$W = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \middle| T(\boldsymbol{\alpha}) = 2\boldsymbol{\alpha}, \, \boldsymbol{\alpha} \in V^n \right\}$$

的基下的矩阵为 $2I_2$ 。

T在该基下的矩阵为A。

分析 T在V"的标准正交基下的矩阵A是实对称矩阵。由于2是T的2重特征值,从而2是A的2重特征值。由实对称矩阵的性质知,A对应特征值2有2个线性无关的特征向量,于是T对应特征值2有2个线性无关的特征向量。注意到W是T对应特征值2的所有特征向量加上零向量组成的,所以







例 设欧氏空间 $V^n$ 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  的度量矩阵为G,正交变换T在该基下的矩阵为A,证明: $A^TGA = G$  证 法1 由  $T(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) A$  知

证 法1 由  $T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) A$  知  $T(\boldsymbol{\alpha}_i) = \boldsymbol{\alpha}_1 a_{1i} + \boldsymbol{\alpha}_2 a_{2i} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{ni}$ 

设 
$$G = (g_{ii})_{n \times n}$$
,则有

$$g_{ij} = (\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\alpha}_j) = (T(\boldsymbol{\alpha}_i), T(\boldsymbol{\alpha}_j))$$

$$= (\boldsymbol{\alpha}_1 a_{1i} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{ni}, \boldsymbol{\alpha}_1 a_{1j} + \dots + \boldsymbol{\alpha}_n a_{nj})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{si}(\boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\alpha}_t) a_{tj}$$





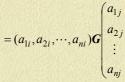


W的维数为2,取W的基 $\alpha_1, \alpha_2$ ,则

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1) = 2\boldsymbol{\alpha}_1, T(\boldsymbol{\alpha}_2) = 2\boldsymbol{\alpha}_2$$

从而 
$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

即T在W的基下的矩阵为 $2I_2$ 。



故 $A^{\mathrm{T}}GA = G_{\odot}$ 

法2 由于T是正交变换,从而  $T(\alpha_1)$ , $T(\alpha_2)$ ,…, $T(\alpha_n)$  也是 $V^n$ 的基(不一定是标准正交基)。又由

$$T(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_n)A$$

知,从基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n)$ 的过渡矩阵为A,故基 $T(\alpha_1), T(\alpha_2), \cdots, T(\alpha_n)$ 

的度量矩阵为







