第3.3节　贝叶斯估计

一、先验分布和后验分布

二、共轭先验分布

三、贝叶斯风险

四、贝叶斯估计

一、先验分布与后验分布

上一节提出用风险函数衡量决策函数的好坏，但是由于风险函数为二元函数，很难进行全面比较。贝叶斯通过引入先验分布，给出了整体比较 的指标.

1、先验信息

在抽取样本之前，人们对所要估计的未知参数所了解的信息，通常称为先验信息.

例1（p89例3.6） 某学生通过物理试验来确定当地的重力加速度，测得的数据为(m/s^2):

9.80, 9.79, 9.78, 6.81, 6.80

试求当地的重力加速度.

解 用样本均值估计其重力加速度应该是合理的，即

$$\bar{X} = 8.596$$

由经验可知，此结果是不符合事实的。在估计之前我们知道，重力加速度应该在**9.80**附近，即

$$X \sim N(9.80, 0.1^2)$$

这个信息就是重力加速度的先验信息.

在统计学中，先验信息可以更好的帮助人们解决统计决策问题. 贝叶斯将此思想应用于统计决策中，形成了完整的贝叶斯统计方法.

2、先验分布

对未知参数θ的先验信息用一个分布形式π(θ)来表示，此分布π(θ)称为未知参数θ的先验分布.

例如 例1中重力加速度的先验分布为

$$X \sim N(9.80, 0.1^2)$$

3、后验分布

在抽取样本之前，人们对未知参数有个了解，即先验分布。抽取样本之后，由于样本中包含未知参数的信息，而这些关于未知参数新的信息可以帮助人们修正抽样之前的先验信息。

设总体X的分布密度为$p(x,\theta),\theta\in\Theta,\theta$的先验分布为$\pi(\theta),(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$为总体$X$的样本，其联合密度为

$$q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta),$$

而样本值是在知道θ的先验分布的前提下得到的，因而上述分布可以改写为

$$q(x\mid\theta)=q(x_1,x_2,\cdots,x_n\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i\mid\theta),$$

又由于θ和样本x的联合分布可以表示为

$$f(x,\theta)=q(x\mid\theta)\pi(\theta)=m(x)h(\theta\mid x)$$

由此可以得到

$$h(\theta \mid x)=\frac{q(x \mid \theta)\pi(\theta)}{m(x)},\quad \left(m(x)=\int_{\Theta} q(x \mid \theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta\right)$$

则称 $h(\theta \mid x)$为θ的后验分布.即加入新的信息以后，对原有分布进行修正.由此可见，后验分布综合用运了先验分布与样本信息.

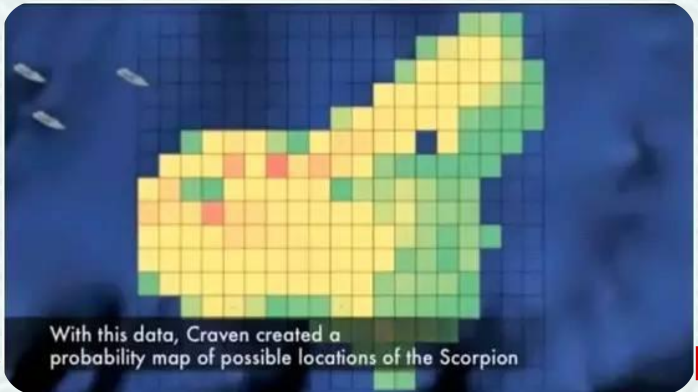
例 1968年美国天蝎号核潜艇在大西洋亚速海海域消失，潜艇上99名海军官兵全部失联。

如何搜索失联潜艇？

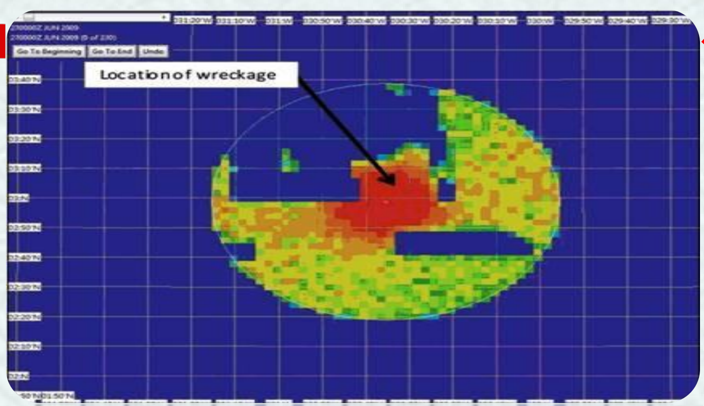
John P. Craven

贝叶斯搜索理论

如何搜索失联潜艇？



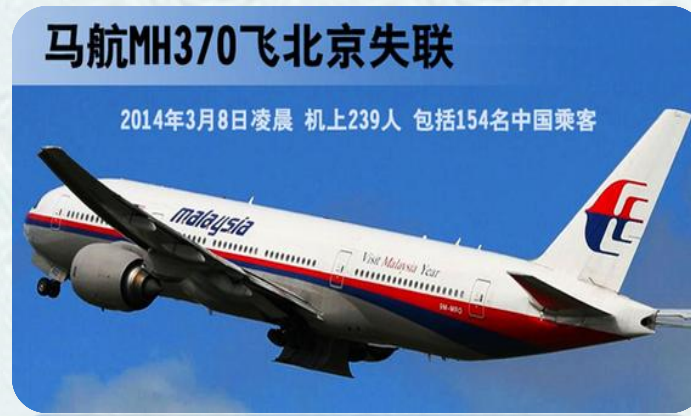
先验概率：$P(A_i)$



后验概率：$P(A_i \mid B)$

贝叶斯搜索理论

2009年法航447航班



2014年马航370航班

例2(p90例3.7) 为了提高某产品的质量，公司经理考虑增加投资来改进生产设备，预计需投资90万元，但从投资效果来看，顾问们提出两种不同的意见：

θ_1：改进生产设备后，高质量产品可占90%,

θ_2：改进生产设备后，高质量产品可占70%,

经理根据以往的经验，两个顾问建议可信度分别为

$$\pi(\theta_1)=0.4 \qquad \pi(\theta_2)=0.6$$

这两个概率是经理的主观判断（也就是先验概率）

为了得到更准确的信息，经理决定进行小规模的试验，实验结果如下：

A：试制**5**个产品，全是正品，

由此可以得到条件分布：

$$p(A|\theta_1)=(0.9)^5=0.590 \quad p(A|\theta_2)=(0.7)^5=0.168$$

由全概率公式可以得到：

$$P(A)=P(A|\theta_1)\pi(\theta_1)+P(A|\theta_2)\pi(\theta_2)=0.337$$

其后验概率为：

$$h(\theta_1 \mid A)=\frac{P(A \mid \theta_1)\pi(\theta_1)}{P(A)}=0.700$$

$$h(\theta_2 \mid A)=\frac{P(A \mid \theta_2)\pi(\theta_2)}{P(A)}=0.300$$

显然经理对二位顾问的看法已经做了修改，为了得到更准确的信息，经理又做了一次试验，结果为

B：试制10个产品，9个是正品，

$$\pi(\theta_1) = 0.7 \qquad \pi(\theta_2) = 0.3$$

$$P(B \mid \theta_1) = 10(0.9)^9(0.1) = 0.387,$$

$$P(B \mid \theta_2) = 10(0.7)^9(0.3) = 0.121$$

$$P(B) = P(B \mid \theta_1)\pi(\theta_1) + P(B \mid \theta_2)\pi(\theta_2) = 0.307$$

$$h(\theta_1 \mid B) = \frac{P(B \mid \theta_1)\pi(\theta_1)}{P(B)} = 0.883$$

$$h(\theta_2 \mid B) = \frac{P(B \mid \theta_2)\pi(\theta_2)}{P(B)} = 0.117$$

由此可见后验分布更能准确描述事情真相.

二、共轭先验分布

为了使得后验分布计算简单，为此引入共轭先验分布.

1、共轭分布族

定义3.7 设总体X的分布密度为$p(x\,|\,\theta)$, F^*为θ的一个分布族，$\pi(\theta)$为θ的任意一个先验分布，$\pi(\theta)\in F^*$,若对样本的任意观测值x，θ 的后验分布$h(\theta\,|\,x)\in F^*$,则称F^*是关于分布密度$p(x\,|\,\theta)$的共轭先验分布族，简称共轭分布族.

注 共轭分布族总是针对分布中的某个参数而言的.

2、后验分布核

由上一小节内容可知，后验分布为

$$h(\theta \mid x)=\frac{q(x \mid \theta)\pi(\theta)}{m(x)}, \quad (m(x)\text{为样本的边缘分布})$$

可以看出，$m(\mathrm{x})$不依赖于参数θ,因而参数θ的后验分布可以写为如下等价形式：

$$h(\theta \mid x) \propto q(x \mid \theta)\pi(\theta)$$

则称$q(x \mid \theta)\pi(\theta)$为后验分布$h(\theta \mid x)$的核。其中符号$\propto$表示左右两边相差一个不依赖$\theta$ 的常数因子.

3、共轭先验分布族的构造方法

共轭先验分布族共有两种构造方法.

第一种方法　首先计算似然函数q(x|θ),根据似然函数所含θ的因式情况，选取与似然函数具有相同核的分布作为先验分布.

例3 (p92例3. 8) 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是来自正态总体$N(\theta,\sigma^2)$的一个样本，其中θ 已知，现寻求σ^2 的共轭先验分布，由于该样本的似然函数为

$$q(x\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}}\right]=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

$$\propto\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2}$$

哪一个分布具有上述核？结论是倒Γ分布，这是因为Γ分布的密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

设$Y = X^{-1}$,则Y的密度函数为

$$f(y;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{1}{y}\right)^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{y}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

此分布密度为倒Γ分布的密度函数, 设σ ²的先验分布为倒Γ分布，即

$$\pi(\sigma^2)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\dfrac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\sigma^2}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

则σ^2的后验分布为

$$h(\sigma^2 \mid x) \propto q(x \mid \sigma^2)\pi(\sigma^2)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha+\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}[\beta+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2]}$$

显然此分布仍为倒Γ分布，即先验分布与后验分布都为倒Γ分布，因而倒Γ分布是σ^2的共轭先验分布族.

例3（p93例3.9） 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$是来自总体$B(N,\theta)$的一个样本，现寻求$\theta$的共轭先验分布，由于该样本的似然函数为

$$q(x\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[C_N^{x_i}\theta^{x_i}(1-\theta)^{N-x_i}\right]$$

$$\propto \theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{nN-\sum_{i=1}^{n}x_i}, \quad x_i=0,1,\cdots,N$$

哪一个分布具有上述核？结论是β分布，这是因为β分布的密度函数为

$$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设θ的先验分布为β分布，即

$$\pi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}, & 0<\theta<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则θ的后验分布为

$$h(\theta \mid x) \propto q(x \mid \theta)\pi(\theta)$$

$$\propto \theta^{\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}(1-\theta)^{\beta+nN-\sum_{i=1}^{n} x_i - 1}, \quad 0<\theta<1$$

显然此分布是β分布的核，因而β分布是θ的共轭先验分布族. 经计算可知

$$h(\theta \mid x) = Be(\alpha+\sum_{i=1}^{n} x_i, \beta+nN-\sum_{i=1}^{n} x_i)$$

第二种方法 设总体X的分布密度为$p(x|\theta)$,统计量

$T(X)=T(X_1X_2,\cdots,X_n)$是参数$\theta$ 的充分统计量，则有

$$q(x\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i\mid\theta)=g_n(t\mid\theta)h(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

定理3.1 设$f(\theta)$为任一固定的函数，满足条件

(1) $f(\theta)\geq 0,\theta\in\Theta,$

(2) $0<\int_{\Theta}g_n(t\mid\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta<\infty$

则

$$D_f=\{\frac{g_n(t\mid\theta)f(\theta)}{\int_{\Theta}g_n(t\mid\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta}:\quad n=1,2,\cdots\}$$

是共轭先验分布族。

例4（p94例3.10） 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)^T$是来自总体$B(1,\theta)$的一个样本，试寻求$\theta$ 的共轭先验分布？

解 其似然函数为

$$q(x\mid\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^{x_i}(1-\theta)^{1-x_i}=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-\theta)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$=\theta^{n\bar{x}}(1-\theta)^{n-n\bar{x}}=g_n(t\mid\theta)\cdot 1,$$

其中$g_n(t\mid\theta)=\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}$，选取$f(\theta)=1$，则

$$D_f=\left\{\frac{\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}}{\int_0^1\theta^{t}(1-\theta)^{n-t}\,\mathrm{d}\theta}:\ n=1,2,\cdots,t=0,1,2,\cdots\right\}$$

显然此共轭分布族为β分布的子族，因而，两点分布的共轭先验分布族为β分布.

常见共轭先验分布

总体分布	参数	共轭先验分布
二项分布	成功概率p	β分布β(α,β)
泊松分布	均值λ	Γ分布Γ(αβ)
指数分布	均值的倒数λ	Γ分布Γ(αβ)
正态分布（方差已知）	均值μ	正态分布$N(\mu,\sigma^2)$
正态分布（均值已知）	方差σ^2	倒Γ分布

三、贝叶斯风险

1、贝叶斯风险的定义

由第一小节内容可知，给定损失函数以后，风险函数定义为

$$R(\theta,d)=E(L(\theta,d(X)))=\int_{\mathrm{X}} L(\theta,d(x))q(x\mid\theta)\mathrm{d}x$$

此积分仍为θ的函数，在给定θ的先验分布π(θ)时，定义

$$R_B(d)=E_\theta(R(\theta,d))=\int_{\Theta} R(\theta,d)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

为决策函数*d*在给定先验分布π(θ)下的贝叶斯风险，简称为*d*的贝叶斯风险.

2、贝叶斯风险的计算

当X与θ都是连续性随机变量时，贝叶斯风险为

$$R_B(d)=E_\theta(R(\theta,d))=\int_\Theta R(\theta,d)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\Theta\int_X L(\theta,d(x))q(x\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_\Theta\int_X L(\theta,d(x))h(\theta\mid x)m(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_X m(x)\{\int_\Theta L(\theta,d(x))h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta\}\mathrm{d}x$$

当X与θ都是离散型随机变量时，贝叶斯风险为

$$R_B(d)=E(R(\theta,d))$$

$$=\sum_x m(x)\{\sum_\theta L(\theta,d(x))h(\theta\mid x)\}$$

注　由上述计算可以看出，贝叶斯风险为计算两次期望值得到,即

$$R_B(d)=E_\theta(E(L(\theta,d(X)))$$

此时风险大小只与决策函数d有关，而不再依赖参数θ. 因此以此来衡量决策函数优良性更合理

四、贝叶斯估计

1、贝叶斯点估计

定义3.8 若总体X的分布函数$F(x,\theta)$中参数θ为随机变量，$\pi(\theta)$为θ的先验分布，若决策函数类D中存在一个决策函数使得对决策函数类中的任一决策函数均有

$$R_B(d^*) = \inf_{d \in D} R_B(d), \quad \forall d \in D$$

则称$d^*(X)$为参数θ的贝叶斯估计量

注 1、贝叶斯估计是使贝叶斯风险达到最小的决策函数.

2、不同的先验分布，对应不同的贝叶斯估计

2、贝叶斯点估计的计算

平方损失下的贝叶斯估计

定理3.2 设θ的先验分布为π(θ)和损失函数为

$$L(\theta,d)=(\theta-d)^2$$

则θ的贝叶斯估计为

$$d^*(x)=E(\theta\mid X=x)=\int_\Theta \theta h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta$$

其中$h(\theta\mid x)$为参数θ 的后验分布.

证　首先对贝叶斯风险做变换

$$\min R_B(d)=\min\int_{\mathrm{X}} m(x)\{\int_{\Theta}[\theta-d(x)]^2 h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta\}\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \min a.s\int_{\Theta}[\theta-d(x)]^2 h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta$$

（等价性的证明参见《高等数理统计》P361茆诗松等编或者利用法都引理）

又因为

$$\int_{\Theta}[\theta-d(x)]^2 h(\theta\,|\,x)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\Theta}[\theta-E(\theta\,|\,x)+E(\theta\,|\,x)-d(x)]^2 h(\theta\,|\,x)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\Theta}[\theta-E(\theta\,|\,x)]^2 h(\theta\,|\,x)\mathrm{d}\theta+\int_{\Theta}[E(\theta\,|\,x)-d(x)]^2 h(\theta\,|\,x)\mathrm{d}\theta$$

$$+2\int_{\Theta}[\theta-E(\theta\,|\,x)][E(\theta\,|\,x)-d(x)]h(\theta\,|\,x)\mathrm{d}\theta$$

又因为 $E(\theta \mid x)=\int_{\Theta}\theta h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$ 则

$$\int_{\Theta}[\theta-E(\theta \mid x)][E(\theta \mid x)-d(x)]h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$=[E(\theta \mid x)-d(x)]\int_{\Theta}[\theta-E(\theta \mid x)]h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$=[E(\theta \mid x)-d(x)][E(\theta \mid x)-E(\theta \mid x)]=0$$

因而

$$\int_{\Theta}[\theta-d(x)]^2 h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\Theta}[\theta-E(\theta \mid x)]^2 h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$+\int_{\Theta}[E(\theta \mid x)-d(x)]^2 h(\theta \mid x)\mathrm{d}\theta$$

显然，当 $d^*(x)=E(\theta \mid x)$ $a.s$ 时，$R_B(d)$ 达到最小.

定理3.3　设θ的先验分布为π(θ)和损失函数为加权平方损失

$$L(\theta,d)=\lambda(\theta)(\theta-d)^2$$

则θ的贝叶斯估计为

$$d^*(x)=\frac{E(\lambda(\theta)\cdot\theta\mid x)}{E(\lambda(\theta)\mid x)}$$

证明略，此证明定理3.2的证明类似.

定义3.9 设$d=d(x)$为决策函数类D中任一决策函数，损失函数为$L(\theta,d(x))$,则$L(\theta,d(x))$对后验分布$h(\theta|x)$的数学期望称为后验风险，记为

$$R(d\mid x)=E[L(\theta,d(x))\mid x]$$
$$=\begin{cases}\int_\Theta L(\theta,d(x))h(\theta\mid x)\mathrm{d}x, & \theta\text{为连续型随机变量,}\\ \sum_i L(\theta_i,d(x))h(\theta_i\mid x), & \theta\text{为离散型随机变量.}\end{cases}$$

注 如果存在一个决策函数，使得

$$R(d^{**}\mid x)=\inf_d R(d\mid x),\quad \forall d\in D$$

则称此决策为后验风险准则下的最优决策函数，或称为贝叶斯（后验型）决策函数。

定理3.5 对给定的统计决策问题(包含先验分布给定的情形）和决策函数类D,当贝叶斯风险满足如下条件：

$$\inf_{d} R_B(d) < \infty, \quad \forall d \in D$$

则贝叶斯决策函数$d^*(x)$与贝叶斯后验型决策函数$d^{**}(x)$是等价的.

证明从略

定理表明：如果决策函数使得贝叶斯风险最小，此决策函数也使得后验风险最小，反之，也成立.

定理3.4 设参数θ为随机向量，先验分布为π(θ)和损失函数为二次损失函数

$$L(\theta,d)=(d-\theta)^T Q(d-\theta)$$

其中Q为正定矩阵，则θ的贝叶斯估计为后验分布h(θ|x)的均值向量，即

$$d^*(x)=E(\theta\mid x)=\begin{bmatrix} E(\theta_1\mid x) \\ \vdots \\ E(\theta_p\mid x) \end{bmatrix}$$

其中参数向量为$\theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_p)$.

注 定理表明，正定二次损失下，θ的贝叶斯估计不受正定矩阵Q的选取干扰，表现出其稳健性.

证　在二次损失下，任一个决策函数向量d(x)=

$(d_1(x), d_2(x), \cdots, d_n(x))^T$的后验风险为

$$E[(d-\theta)^T Q(d-\theta) \mid x]$$

$$= E[((d-d^*)+(d^*-\theta))^T Q((d-d^*)+(d^*-\theta)) \mid x]$$

又由于$E(d^*-\theta \mid x)=0$,因而

$$E[(d-\theta)^T Q(d-\theta) \mid x]$$

$$=(d-d^*)^T Q(d-d^*)+E[(d^*-\theta)^T Q(d^*-\theta) \mid x]$$

其中第二项为常数，而第一项非负，因而只需当

$d=d^*(x)$时，风险达到最小.

定理3.6 设θ的先验分布为π(θ)和损失函数为

$$L(\theta, d) = |d - \theta|,$$

则θ的贝叶斯估计为

$$d^*(x) = \{\text{后验分布}h(\theta \mid x)\text{的中位数}\}$$

证 设m为$h(\theta|x)$的中位数，又设$d=d(x)$为θ的另一估计，为确定起见，先设$d>m$,由绝对损失函数的定义可得

$$L(\theta, m) - L(\theta, d) = \begin{cases} m - d, & \theta \le m, \\ 2\theta - (m + d), & m < \theta < d, \\ d - m, & \theta \ge d, \end{cases}$$

又由于

当$m<\theta<d$时，$2\theta-(m+d)\le 2d-(m+d)=d-m$

则

$$L(\theta,m)-L(\theta,d)\le\begin{cases} m-d, & \theta\le m, \\ d-m, & \theta>m, \end{cases}$$

由于m是中位数，因而

$$P\{\theta\le m\mid x\}\ge\frac{1}{2},\qquad P\{\theta>m\mid x\}\le\frac{1}{2},$$

则有

$$R(m \mid x) - R(d \mid x) = E(L(\theta, m) - L(\theta, d) \mid x)$$

$$\leq (m-d)P\{\theta \leq m \mid x\} + (d-m)P\{\theta > m \mid x\}$$

$$\leq (m-d)\cdot\frac{1}{2} + (d-m)\cdot\frac{1}{2} = 0$$

于是，当$d>m$时

$$R(m \mid x) \leq R(d \mid x)$$

同理可证，当$d<m$时 $R(m \mid x) \leq R(d \mid x)$

因而 $d^*(x) = m = \{$后验分布$h(\theta \mid x)$的中位数$\}$

定理3.7 设θ的先验分布为π(θ)和损失函数为

$$L(\theta,d)=\begin{cases} k_0(\theta-d), & d\le\theta, \\ k_1(d-\theta), & d>\theta, \end{cases}$$

则θ的贝叶斯估计为

$$d^*(x)=\{\text{后验分布}\,h(\theta\mid x)\text{的}\,\frac{\mathrm{k}_1}{\mathrm{k}_1+k_0}\,\text{上侧分位数}\}$$

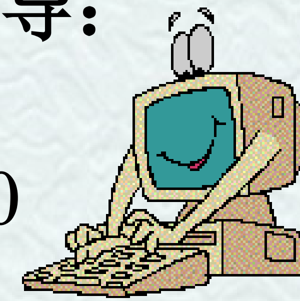
证 首先计算任一决策函数$d(x)$的后验风险

$$R(d\mid x)=E[L(\theta,d(x))]=\int_{-\infty}^{+\infty}L(\theta,d(x))h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\infty}^{d} k_1(d-\theta)h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta+\int_{d}^{+\infty} k_0(\theta-d)h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta$$

$$=(k_1+k_0)\int_{-\infty}^{d}(d-\theta)h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta+k_0(E(\theta\mid x)-d)$$

为了得到$R(d|x)$的极小值，关于等式两边求导：



$$\frac{\mathrm{d}R(d\mid x)}{\mathrm{d}(d)}=(k_1+k_0)\int_{-\infty}^{d}h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta-k_0=0$$

即

$$\int_{-\infty}^{d}h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta=\frac{k_0}{k_1+k_0}\Rightarrow\int_{d}^{+\infty}h(\theta\mid x)\mathrm{d}\theta=\frac{k_1}{k_1+k_0}$$

则

$$d^{*}(x)=\{\text{后验分布}h(\theta\mid x)\text{的}\frac{\mathrm{k}_1}{\mathrm{k}_1+k_0}\text{上侧分位数}\}$$

例5(p98例3.11) 设总体X服从两点分布$B(1,p)$，其中参数p未知，而p在[0,1]上服从均匀分布，样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来自总体X，损失函数为平方损失，试求参数p的贝叶斯估计与贝叶斯风险?

解 平方损失下的贝叶斯估计为：

$$d^*(x) = E(p \mid X = x) = \int_{\Theta} p h(p \mid x) \mathrm{d}p$$

而

$$h(p \mid x) = \frac{q(x \mid p)\pi(p)}{m(x)} = \frac{q(x \mid p)\pi(p)}{\int_0^1 q(x \mid p)\pi(p) \mathrm{d}p}$$

$$=\frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot 1}{\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot 1\mathrm{d}p}=\frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\beta(\sum_{i=1}^{n}x_i+1,n+1-\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

其中$\beta(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$,则

$$h(p\mid x)=\frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}\Gamma(n+2)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{n}x_i+1)\Gamma(n+1-\sum_{i=1}^{n}x_i)}$$

$$=\frac{p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}(n+1)!}{(\sum_{i=1}^{n}x_i)!(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)!}$$

$$d^*(x)=\int_\Theta ph(p\mid x)\mathrm{d}p$$

$$=\frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}\int_0^1 p^{\sum_{i=1}^n x_i+1}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\mathrm{d}p$$

$$=\frac{(n+1)!}{(\sum_{i=1}^n x_i)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}\frac{(\sum_{i=1}^n x_i+1)!(n-\sum_{i=1}^n x_i)!}{(n+2)!}$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^n x_i+1}{n+2}$$

其贝叶斯风险为

$$R_B(\hat{p}) = E_\theta(R(\theta, d)) = \int_\Theta E[L(p,d)]\pi(p)\mathrm{d}p$$

$$= \int_0^1 E(\hat{p} - p)^2 \mathrm{d}p = \int_0^1 E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i + 1}{n+2} - p\right)^2 \mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2}\int_0^1 E\left(\sum_{i=1}^n X_i + 1 - (n+2)p\right)^2 \mathrm{d}p$$

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i + 1 - (n+2)p\right)^2$$

$$= E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 + 2(1-(n+2)p)E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) + (1-(n+2)p)^2$$

又因为 $$(\sum_{i=1}^{n} X_i) \sim B(n,p)$$

则 $$E\sum_{i=1}^{n} X_i = np,\quad E(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2 = np(1-p)+(np)^2$$

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i + 1 - (n+2)p)^2 = np(1-p) + (1-2p)^2$$

所以 $$R_B(\hat{p}) = \frac{1}{(n+2)^2}\int_0^1 np(1-p)+(1-2p)^2\,\mathrm{d}p$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2}\left(\frac{4-n}{3}+\frac{n-4}{2}+1\right) = \frac{1}{6(n+2)}$$

而p的最大似然估计为$\overline{X}$,其贝叶斯风险为$\dfrac{1}{6n} > \dfrac{1}{6(n+2)}$

例6(p100例3.12) 设总体X服从正态分布$N(\mu,1)$，其中参数μ未知，而μ服从标准正态布在$N(0,1)$，样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来自总体X，损失函数为平方损失，试求参数μ的贝叶斯估计?

解 平方损失下的贝叶斯估计为:

$$d^*(x) = E(\mu \mid X = x) = \int_\Theta \mu h(\mu \mid x) \mathrm{d}\mu$$

而

$$h(\mu \mid x) = \frac{q(x \mid \mu)\pi(\mu)}{m(x)} = \frac{q(x \mid \mu)\pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} q(x \mid \mu)\pi(\mu)\mathrm{d}\mu}$$

$$=\frac{\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}\mu^2\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}\mu^2\}\mathrm{d}\mu}$$

$$=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}+(n+1)\mu^2-2\mu n\bar{x}]\}}{\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}\}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-\frac{1}{2}[(n+1)\mu^2-2\mu n\bar{x}]\}\mathrm{d}\mu}$$

$$=\frac{\exp\{-\frac{1}{2}[(n+1)\mu^2-2\mu n\bar{x}]\}}{\sqrt{2\pi}\exp\{\frac{n^2}{2(n+1)}(\bar{x})^2\}\sqrt{\frac{1}{n+1}}}$$

化简得

$$h(\mu\mid x)=\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}$$

$$d^*(x)=\hat{\mu}=\int_{\Theta}\mu h(\mu\mid x)\mathrm{d}\mu$$

$$=\left(\frac{n+1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\exp\left\{-\frac{n+1}{2}\left(\mu-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right)^2\right\}\mathrm{d}\mu$$

$$=\frac{n\bar{x}}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}x_i\neq\bar{x}$$

其贝叶斯风险为$\dfrac{1}{n+1}<R_B(\bar{x})=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{1}{n}$

例7(p101 例3.13) 设总体X服从均匀分布$U(0,\theta)$,

其中参数θ未知，而θ服从pareto分布，其分布函数与密度函数分别为

$$F(\theta)=1-\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^{\alpha},\theta\geq\theta_0,\quad \pi(\theta)=\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}},\theta\geq\theta_0,$$

其中$0<\alpha<1$,和$\theta_0>0$为已知，该分布记为$Pa(\alpha,\theta_0)$,

θ的数学期望为$E(\theta)=\dfrac{\alpha\theta_0}{\alpha-1}$,$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$来自总体$X$，损失函数为绝对值损失和平方损失时，

试求参数θ的贝叶斯估计?

解 $$h(\theta \mid x)=\frac{q(x\mid\theta)\pi(\theta)}{m(x)}=\frac{q(x\mid\theta)\pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} q(x\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\right)\cdot\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}}}{\int_{\theta_1}^{+\infty}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\right)\cdot\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+1}}\mathrm{d}\theta}=\frac{\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{n+\alpha+1}}}{\int_{\theta_1}^{+\infty}\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{n+\alpha+1}}\mathrm{d}\theta}\quad (\theta_1=\max\{x_1,\cdots,x_n,\theta_0\})$$

$$=\frac{\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{n+\alpha+1}}}{\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{(\alpha+n)\theta_1^{n+\alpha}}}=\frac{(\alpha+n)\theta_1^{n+\alpha}}{\theta^{n+\alpha+1}},\quad (\theta>\theta_1)$$

显然$h(\theta \mid x)$仍为*pareto*分布$Pa(\alpha+n,\theta_1)$.

根据定理3.6可知，绝对值损失对应的贝叶斯估计为后验分布的中位数,即

$$F(\hat{\theta}_B) = 1 - (\frac{\theta_1}{\hat{\theta}_B})^{\alpha+n} = \frac{1}{2}$$

则

$$d^*(x) = \hat{\theta}_B = 2^{\frac{1}{\alpha+n}}\theta_1$$

根据定理3.2可知，平方损失对应的贝叶斯估计为后验分布的均值,即

$$d^*(x) = \hat{\theta}_\beta = \frac{\alpha+n}{\alpha+n-1}\theta_1 = \frac{\alpha+n}{\alpha+n-1}\max\{x_1, \cdots, x_n, \theta_0\}$$

定理3.8　设参数θ的先验分布为$\pi(\theta)$，$g(\theta)$为θ 的连续函数，则在平方损失函数下，$g(\theta)$的贝叶斯估计为

$$d(x)=E[g(\theta)\mid x].$$

证明　在平方损失下，任一决策函数$d=d(x)$的后验风险为$E[(d-g(\theta))^2\mid x]=d^2-2dE[g(\theta)\mid x]+E[g^2(\theta)\mid x]$.

当$d(x)=E[g(\theta)\mid x]$时，上述后验风险达到最小. 即在平方损失下，$g(\theta)$的贝叶斯估计为$d(x)=E[g(\theta)\mid x]$.

例8(p102 例3.14) 设总体X服从伽玛分布$\Gamma(r,\theta)$，其中参数r已知，θ的先验分布为$\Gamma(\alpha,\beta)$，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$来自总体X，损失函数取平方损失和损失函数

$$L(\theta,d)=\theta^2\left(d-\frac{1}{\theta}\right)^2$$

试求参数θ^{-1}的贝叶斯估计?

解 由于$E(X)=\dfrac{r}{\theta}$，因此，人们更感兴趣θ^{-1}估计，θ的后验分布为

$$h(\theta\mid x)=\frac{q(x\mid\theta)\pi(\theta)}{m(x)}=\frac{q(x\mid\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty}q(x\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{r}}{\Gamma(r)}x_i^{\,r-1}\mathrm{e}^{-\theta x_i}\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}}{\int_0^{+\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta^{r}}{\Gamma(r)}x_i^{\,r-1}\mathrm{e}^{-\theta x_i}\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\theta}\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)}}{\int_0^{+\infty}\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)}\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr}}{\Gamma(\alpha+nr)}\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)}$$

则θ^{-1}在平方损失下的贝叶斯估计为

$$d^*(x)=\hat{\theta}^{-1}=E(\theta^{-1}\mid x)$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr}}{\Gamma(\alpha+nr)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\theta}\cdot\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr}}{\Gamma(\alpha+nr)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+nr-1)}{(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr-1}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta}{\alpha+nr-1}$$

由定理3.3可知，θ^{-1}在$L(\theta,d)=\theta^2(d-\frac{1}{\theta})^2$下的贝叶斯估计为

$$d^*(x)=\hat{\theta}^{-1}=\frac{E(\theta^2\cdot\theta^{-1}\mid x)}{E(\theta^2\mid x)}$$

$$=\frac{\dfrac{(\sum_{i=1}^n x_i+\beta)^{\alpha+nr}}{\Gamma(\alpha+nr)}\int_0^{+\infty}\theta\cdot\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^n x_i+\beta)}\mathrm{d}\theta}{\dfrac{(\sum_{i=1}^n x_i+\beta)^{\alpha+nr}}{\Gamma(\alpha+nr)}\int_0^{+\infty}\theta^2\cdot\theta^{nr+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\theta(\sum_{i=1}^n x_i+\beta)}\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\int_0^{+\infty}\theta^{nr+\alpha}\mathbf{e}^{-\theta(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\beta)}\mathbf{d}\theta}{\int_0^{+\infty}\theta^{nr+\alpha+1}\mathbf{e}^{-\theta(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\beta)}\mathbf{d}\theta}$$

$$=\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr+2}}{\Gamma(\alpha+nr+2)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+nr+1)}{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\beta)^{\alpha+nr+1}}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\beta}{\alpha+nr+1}$$

$$=\frac{\alpha+nr-1}{\alpha+nr+1}\cdot\frac{1}{\alpha+nr-1}(\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta)=\frac{\alpha+nr-1}{\alpha+nr+1}\hat{\theta}^{-1}$$

3、贝叶斯估计的误差

在计算θ的估计时，用到了θ的后验分布，因此考察估计值与真实值之间的误差时，也应考虑θ的后验分布，误差定义如下：

定义3.10 参数θ的后验分布为$h(\theta|x)$,其贝叶斯估计为$\hat{\theta}$，则$(\hat{\theta}-\theta)^2$的后验期望为

$$MSE(\hat{\theta}\mid x)=E_{\theta|x}(\hat{\theta}-\theta)^2$$

称其为$\hat{\theta}$的后验均方差，而其平方根$[MSE(\hat{\theta}\mid x)]^{\frac{1}{2}}$称为后验标准误差，其中符号$E_{\theta|x}$表示对条件分布$h(\theta\mid x)$求期望。

后验均方差与后验方差的关系

1、当$\hat{\theta}=E(\theta|x)$时，则后验均方差为

$$MSE(\hat{\theta}|x)=E_{\theta|x}(E(\theta|x)-\theta)^2=\mathrm{Var}(\theta|x)$$

2、当$\hat{\theta}=E(\theta|x)$时，则后验均方差达到最小，因而后验均值$E(\theta|x)$是较好的贝叶斯估计.这是因为

$$\begin{aligned}MSE(\hat{\theta}|x)&=E_{\theta|x}[(\hat{\theta}-E(\theta|x)+(E(\theta|x)-\theta)]^2\\&=E_{\theta|x}[\hat{\theta}-E(\theta|x)]^2+\mathrm{Var}(\theta|x)\\&=[\hat{\theta}-E(\theta|x)]^2+\mathrm{Var}(\theta|x)\geq \mathrm{Var}(\theta|x)\end{aligned}$$

后验均方差与后验方差的优点

1、二者只依于样本，不依赖参数θ.

2、二者的计算不依赖于统计量的分布，即抽样分布

3、贝叶斯估计不考虑无偏性，因为贝叶斯估计只考虑出现的样本，不考虑没出现的样本.

4、贝叶斯区间估计

定义 当θ为连续型随机变量时，给定$1-\alpha$, 当

$$P\{a \le \theta \le b \mid x\} = 1-\alpha,$$

则称区间$[a,b]$为参数θ的贝叶斯区间估计.

定义 当θ为离散型随机变量时，给定$1-\alpha$, 当

$$P\{a \le \theta \le b \mid x\} > 1-\alpha,$$

则称区间$[a,b]$为参数θ的贝叶斯区间估计.

定义3.11 设参数θ的后验分布为$h(\theta|x)$，对给定的样本$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$和概率$1-\alpha(0<\alpha<1)$,若存在两个统计量，$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(X)$和$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(X)$,使得

$$P\{\hat{\theta}_L<\theta<\hat{\theta}_U\mid x\}\geq 1-\alpha$$

则称区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为参数$\theta$的置信度为$1-\alpha$的贝叶斯置信区间，或简称为$\theta$的$1-\alpha$的置信区间，而满足$P\{\theta\geq\hat{\theta}_L\mid x\}\geq 1-\alpha$的$\hat{\theta}_L$为$\theta$的$1-\alpha$单侧置信下限，满足$P\{\theta\leq\hat{\theta}_U\mid x\}\geq 1-\alpha$的$\hat{\theta}_U$为$\theta$的$1-\alpha$单侧置信上限.

注 贝叶斯置信区间依赖于先验分布，不需要抽样分布，计算相对简单.

正态分布均值的贝叶斯置信区间

例9（p104例3.15） 设$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是来自正态总体$N(\theta,\sigma^2)$的一个样本，其中σ^2已知，取θ的先验分布为正态分布$N(\mu,\tau^2)$，参数μ,τ^2已知，试求参数θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

解 θ的先验分布为

$$\pi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\{-\frac{1}{2\tau^2}(\theta-\mu)^2\}$$

则样本X与θ的联合密度函数为

$$f(x,\theta)=k_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sigma^2}\left(n\theta^2-2n\theta\overline{x}+\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)+\frac{1}{\tau^2}\left(\theta^2-2\mu\theta+\mu^2\right)\right]\right\}$$

$$k_1=(2\pi)^{-(n+1)/2}\tau^{-1}\sigma^{-n},\quad \overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n},\quad \sigma_0^2=\frac{\sigma^2}{n},$$

$$A=\sigma_0^{-2}+\tau^{-2},\quad B=\overline{x}\sigma_0^{-2}+\mu\tau^{-2},C=\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\mu^2\tau^{-2}$$

则有

$$f(x,\theta)=k_1\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[A\theta^2-2\theta B+C\right]\right\}=k_2\exp\left\{-\frac{1}{2A^{-1}}(\theta-B/A)^2\right\}$$

其中$k_2=k_1\exp\left\{-\frac{1}{2}(C-B^2/A)\right\}.$

因此样本X的边缘分布为

$$m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\theta) d\theta = k_2 \left(\frac{2\pi}{A} \right)^{\frac{1}{2}}$$

因而θ的后验分布为

$$h(\theta \mid x) = \frac{f(x,\theta)}{m(x)} = \left(\frac{A}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ -\frac{(\theta - B/A)^2}{2/A} \right\}$$

这正好是正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的密度函数。其中

$$\mu_1 = \frac{B}{A} = \frac{\bar{x}\sigma_0^{-2} + \mu\tau^{-2}}{\sigma_0^{-2} + \tau^{-2}}, \sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2 \tau^2}{\sigma_0^2 + \tau^2}$$

据此可知$\dfrac{\theta-\mu_1}{\sigma_1}$服从标准正态分布，于是可得

$$P\left\{\left|\frac{\theta-\mu_1}{\sigma_1}\right| \le \boldsymbol{u}_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

即

$$P\{\mu_1-\sigma_1\boldsymbol{u}_{\alpha/2} \le \theta \le \mu_1+\sigma_1\boldsymbol{u}_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

故可得θ的$1-\alpha$贝叶斯置信区间为

$$[\mu_1-\sigma_1\boldsymbol{u}_{\alpha/2}, \mu_1+\sigma_1\boldsymbol{u}_{\alpha/2}]$$

例10(p105例3. 16) 对某儿童进行智力测验，设测验结果服从N(θ,100),其中θ为心理学中儿童的智商，θ的先验分布为N(100,225),试求θ的置信为0.95的贝叶斯置信区间.

解 将相关数据代入上述置信区间公式可得：θ的置信度为0.95的置信区间为

$$[94.07,\ 126.69]$$

而用经典方法可得θ的置信度为0.95的置信区间为

$$[95.4,\ 134.6]$$

Thank You!