第八章　线性空间与线性变换

§1、数域和映射

数集 $\mathbf{K}=\{a+b\sqrt{2}\,|\,a,b\in\mathbf{Q}\}$ 构成一个数域：

对加、减封闭是显然的；

对于乘法，设 $a+b\sqrt{2}\in\mathbf{K}$，$c+d\sqrt{2}\in\mathbf{K}$，有

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbf{K}$$

对除法，若 $a+b\sqrt{2}\neq 0$，则 $a-b\sqrt{2}\neq 0$（否则若 $a-b\sqrt{2}=0$，则 $a=b\sqrt{2}$，因为 $a\in\mathbf{Q}$，从而 $a=b=0$，故 $a+b\sqrt{2}=0$，矛盾），　且有

$$\frac{c+d\sqrt{2}}{a+b\sqrt{2}}=\frac{(c+d\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}{(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbf{K}$$

故K为数域。

例　设Z是全体整数的集合，Z′是全体偶数的集合。定义

$$\sigma(n)=2n\qquad\forall n\in\mathbf{Z}$$

这是Z到Z′的一个映射。

σ是满射，又是单射，即σ是一一对应的。

例　设$\mathbf{K}^{n\times n}$是全体n阶方阵的集合，定义

$$\sigma_1(\boldsymbol{A})=\det\boldsymbol{A}\qquad\forall\boldsymbol{A}\in\mathbf{K}^{n\times n}$$

这是$\mathbf{K}^{n\times n}$到K的一个映射。

σ_1是满射，但不是单射。

例　定义

$$\sigma_2(a)=a\boldsymbol{I}_n\qquad\forall a\in\mathbf{K}$$

这是K到 $\mathbf{K}^{n\times n}$的一个映射。

σ_2是单射，但不是满射。

例　设P[x]是数域K上全体多项式的集合。定义

$$\sigma_3(f(x))=f'(x),\quad \sigma_4(f(x))=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\qquad\forall f(x)\in\mathrm{P}[x]$$

则σ_3和σ_4是P[x]上的变换。

σ_3是满射，但不是单射。

σ_4不是满射，但是单射。

例　定义在实数集合R上的函数 $y=f(x)$ 是R上的一个变换。

例　对前面例中的σ_1与σ_2，有

$$(\sigma_2\sigma_1)(\boldsymbol{A})=\sigma_2(\sigma_1(\boldsymbol{A}))=\sigma_2(\det\boldsymbol{A})=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n\qquad\forall\boldsymbol{A}\in\mathbf{K}^{n\times n}$$

$$(\sigma_1\sigma_2)(a)=\sigma_1(\sigma_2(a))=\sigma_1(a\boldsymbol{I}_n)=(\det(a\boldsymbol{I}_n))=a^n\qquad\forall a\in\mathbf{K}$$

而对σ_3与σ_4，有 $(\forall f(x)\in\mathrm{P}[x])$

$$(\sigma_3\sigma_4)(f(x))=\sigma_3(\sigma_4(f(x)))=\sigma_3\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)=f(x)$$

$$(\sigma_4\sigma_3)(f(x))=\sigma_4(\sigma_3(f(x)))=\sigma_4(f'(x))=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)-f(0)$$

显然，映射的乘法一般不满足交换律。

§2、线性空间及基本性质

例1　数域K上所有n维向量的集合$\mathbf{K}^n$，对于通常向量的加法与数乘运算构成数域K上的线性空间。

问：所有n维实向量的集合$\mathbf{R}^n$，对于通常向量的加法与数乘运算是否构成复数域C上的线性空间？

（否，数乘不封闭。）

问：所有n维复向量的集合$\mathbf{C}^n$，对于通常向量的加法与数乘运算是否构成实数域R上的线性空间？

（构成。）

例2　数域K上所有$m\times n$矩阵的集合$\mathbf{K}^{m\times n}$，对于通常矩阵的加法与数乘运算构成数域K上的线性空间。

例3 系数在数域**K**上的全体多项式集合P[t]，按通常多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域**K**上的线性空间。

例4 系数在数域**K**上次数不超过n的多项式集合$P_n[t]$，按通常多项式的加法和数与多项式的乘法，构成数域**K**上的线性空间。

例5 数域**K**上次数等于n的多项式集合，对于多项式的加法与数乘运算是否构成线性空间？

解 不构成。原因：

（1）对加法不封闭，取 t^n+5 和 $-t^n-2$ 属于该集合，但 $(t^n+5)+(-t^n-2)=3$ 不属于该集合；

（2）对于数乘运算不封闭，如 $0(t^n+5)=0$ 不属于该集合；

（3）无零元素。

例6 全体实函数的集合，对于通常函数的加法与数与函数的乘法，构成实线性空间。

例7 定义在区间[a , b]上的连续实函数的全体C[a ,b]，对于通常函数的加法与数与函数的乘法，构成实线性空间。

例8 设$\boldsymbol{A}\in \mathbf{K}^{m\times n}$，齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}$=**0**的解向量集合S，按通常向量的加法与数乘构成数域**K**上的线性空间。

例9 设$\boldsymbol{A}\in \mathbf{K}^{m\times n}$，非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}$=$\boldsymbol{b}$的解向量集合$\tilde{S}$，按通常向量的加法与数乘不构成数域**K**上的线性空间。

原因：（1）$\tilde{S}$可能是空集；

（2）$\tilde{S}$对加法不封闭；

（3）$\tilde{S}$对数乘不封闭。

例10 全体正实数集合$\mathbf{R}^+$，加法与数乘规定为

$$m\oplus n=mn,\quad k\circ m=m^k,\ \forall m,n\in\mathbf{R}^+,\ k\in\mathbf{R}$$

则$\mathbf{R}^+$构成实线性空间。

其中1是零元素，$\frac{1}{m}$是元素m的负元素。

例11 全体二维实向量的集合V，加法与数乘规定为

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$$

$$k\circ(a,b)=(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

则V构成实线性空间。因为

$$(a,b)\oplus(0,0)=(a+0,b+0+a0)=(a,b)$$

$$(a,b)\oplus(-a,a^2-b)=(a-a,b+(a^2-b)+a(-a))=(0,0)$$

所以(0 , 0)是零元素，($-a$, a^2-b)是元素(a , b)的负元素。

例12 全体n维实向量的集合V，对于通常向量的加法和如下定义的数乘运算是否构成线性空间？为什么？

1） $k\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$ 　2） $k\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$

解 1) 不构成。因为 $(k+l)\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，但

$$k\circ\boldsymbol{\alpha}+l\circ\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$$

即运算律(**7**)不成立。

2) 不构成。因为 $1\circ\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}$，即 (**5**)不成立。

例13 数域**K**按通常数的加法与乘法运算，构成数域**K**上的线性空间。

§3、基、维数与坐标

例 在$\mathbf{K}^{2\times 2}$中，试讨论矩阵组

（1） $\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$。

的线性相关性。

解（1）设 $k_1\boldsymbol{E}_{11}+k_2\boldsymbol{E}_{12}+k_3\boldsymbol{E}_{21}+k_4\boldsymbol{E}_{22}=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

只有 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，故 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 线性无关。

（2）设 $k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4=\boldsymbol{O}$，即

$$\begin{cases} k_2+k_3+k_4=0 \\ k_1+k_3+k_4=0 \\ k_1+k_2+k_4=0 \\ k_1+k_2+k_3=0 \end{cases}$$

由于系数行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0$，所以方程组只有零解，故 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 线性无关。

例 判断P[t]中多项式组 $1,t,t^2,\cdots,t^N$ 的线性相关性，N为取定的自然数。

解 设 $k_0+k_1t+k_2t^2+\cdots+k_Nt^N=0$

上式分别求1阶、2阶、…、N阶导数得：

$$k_1+2k_2t+\cdots+Nk_Nt^{N-1}=0$$
$$2k_2+\cdots+N(N-1)k_Nt^{N-2}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$N!k_N=0$$

联立求解，得 $k_0=\cdots=k_N=0$，故 $1,t,t^2,\cdots,t^N$ 线性无关。

例 判断P$_3$[t]中多项式组

$f_1(t)=t^3-2t^2+4t+1$，$f_2(t)=2t^3-3t^2+9t-1$，

$f_3(t)=t^3+6t-5$，$f_4(t)=2t^3-5t^2+7t+5$

的线性相关性。

解 设 $k_1f_1(t)+k_2f_2(t)+k_3f_3(t)+k_4f_4(t)=0$

整理得

$$(k_1+2k_2+k_3+2k_4)t^3+(-2k_1-3k_2-5k_4)t^2+(4k_1+9k_2+6k_3+7k_4)t+(k_1-k_2-5k_3+5k_4)=0$$

由 $1,t,t^2,t^3$ 线性无关得

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3+2k_4=0 \\ -2k_1-3k_2-5k_4=0 \\ 4k_1+9k_2+6k_3+7k_4=0 \\ k_1-k_2-5k_3+5k_4=0 \end{cases}$$

系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{vmatrix}=0$

齐次方程组有非零解，故 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 线性相关。

例 设V是所有实函数构成的线性空间，讨论V中函数组 e^{2t},t^2,t 的线性相关性。

解 设 $k_1\mathrm{e}^{2t}+k_2t^2+k_3t=0$

对其求导得 $2k_1\mathrm{e}^{2t}+2k_2t+k_3=0$

再求导得 $4k_1\mathrm{e}^{2t}+2k_2=0$

三式联立求解。由于其系数行列式

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^{2t} & t^2 & t \\ 2\mathrm{e}^{2t} & 2t & 1 \\ 4\mathrm{e}^{2t} & 2 & 0 \end{vmatrix}=2\mathrm{e}^{2t}(-2t^2+2t-1)\neq 0$$

只有 $k_1=k_2=k_3=0$，故 e^{2t},t^2,t 线性无关。

例 二维实向量的集合V，按以下规定的加法和数乘

$$(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d+ac)$$

$$k\circ(a,b)=(ka,kb+\frac{k(k-1)}{2}a^2)$$

构成线性空间，试讨论V中向量 $(1,0),(0,1)$ 的线性相关性。

解 设 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$ 使

$$k_1\circ(1,0)\oplus k_2\circ(0,1)=(0,0)$$

即
$$(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2})\oplus(0,k_2)=(0,0)$$

也即
$$(k_1,\frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2)=(0,0)$$

可见 $k_1=0,\ \frac{k_1(k_1-1)}{2}+k_2=0$，这只有 $k_1=k_2=0$，故 $(1,0),(0,1)$ 线性无关。

例 复数集合C既构成C上的线性空间，也构成R上的线性空间。试讨论数1和 i $(=\sqrt{-1})$ 关于这两个空间的线性相关性。

解 C作为C上的线性空间时，1和i是线性相关的，因有 $1,\mathrm{i}\in\mathbf{C}$ 使

$$1\cdot1+\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}=0$$

C作为R上的线性空间时，1和i是线性无关的，因为，若有 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$，使

$$k_1\cdot1+k_2\cdot\mathrm{i}=0$$

则必有 $k_1=k_2=0$（否则，若 $k_2\neq0$，则得 $\mathrm{i}=-\frac{k_1}{k_2}$ 为实数，矛盾）。

例 在$\mathbf{K}^{2\times2}$中，矩阵组

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

线性无关，且任意 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in\mathbf{K}^{2\times2}$ 可表为

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{E}_{11}+a_{12}\boldsymbol{E}_{12}+a_{21}\boldsymbol{E}_{21}+a_{22}\boldsymbol{E}_{22}$$

故 $\dim\mathbf{K}^{2\times2}=4$。又 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 也是$\mathbf{K}^{2\times2}$的一个基。

例 在$\mathbf{K}^{m\times n}$中，矩阵组

$$\boldsymbol{E}_{ij}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \\ 0&\cdots&0&1&0&\cdots&0\\ & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}\begin{array}{c}\\ \\ \\ i\text{行}\\ \\ \\ \\ \end{array}\\ j\text{列}\end{array}\qquad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

线性无关，且任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})\in\mathbf{K}^{m\times n}$ 可表为

$$\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$$

故 $\dim\mathbf{K}^{m\times n}=mn$，且 $\boldsymbol{E}_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 是$\mathbf{K}^{m\times n}$的一个基。

例 求3阶对称矩阵构成的线性空间$S\mathbf{K}^{3\times3}$的基与维数。

解 取

$$\boldsymbol{F}_{11}=\begin{pmatrix}1&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_{22}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_{33}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

易证$\boldsymbol{F}_{ij}$线性无关，且对任意

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\in \mathrm{S}\mathbf{K}^{3\times3}$$

有

$$\boldsymbol{A}=a_{11}\boldsymbol{F}_{11}+a_{22}\boldsymbol{F}_{22}+a_{33}\boldsymbol{F}_{33}$$
$$+a_{12}\boldsymbol{F}_{12}+a_{23}\boldsymbol{F}_{23}+a_{13}\boldsymbol{F}_{13}$$

故$\dim \mathrm{S}\mathbf{K}^{3\times3}=6$，且 $\boldsymbol{F}_{11},\boldsymbol{F}_{22},\boldsymbol{F}_{33},\boldsymbol{F}_{12},\boldsymbol{F}_{23},\boldsymbol{F}_{13}$ 是一个基。

例 在$\mathrm{P}_2[t]$中，求多项式$1+2t-t^2$ 在$\mathrm{P}_2[t]$的基 $1,1+t,1+t+t^2$ 下的坐标。

解 设

$$1+2t-t^2=k_1+k_2(1+t)+k_3(1+t+t^2)$$

比较两边同次幂的系数得

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3=1 \\ \qquad k_2+k_3=2 \\ \qquad\qquad k_3=-1 \end{cases},$$

解得 $k_3=-1,k_2=3,k_1=-1$

故 $1+2t-t^2$ 在该基下的坐标为 $(-1,3,-1)^{\mathrm{T}}$ 。

例 在$\mathrm{P}_n[t]$中，$1,t,t^2,\cdots,t^n$ 线性无关，且任意

$$f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n\in \mathrm{P}_n[t]$$

可由它们线性表出，故 $1,t,t^2,\cdots,t^n$是$\mathrm{P}_n[t]$的一个基，且 $\dim \mathrm{P}_n[t]=n+1$。

例 $\mathrm{P}[t]$是无限维线性空间。因为对任意自然数N，$1,t,t^2,\cdots,t^N$ 线性无关，故 $\dim \mathrm{P}[t]=\infty$。

例 实函数空间$\mathrm{C}[a,b]$是无限维线性空间。

例 复数集合**C**作为复数域**C**上的线性空间是1维的，且1是一个基；复数集合**C**作为实数域**R**上的线性空间是2维的，且1和 i 是一个基。

例 判断 $\mathrm{P}_3[t]$中多项式组

$$f_1(t)=t^3-2t^2+4t+1,\quad f_2(t)=2t^3-3t^2+9t-1,$$
$$f_3(t)=t^3+6t-5,\qquad f_4(t)=2t^3-5t^2+7t+5$$

的线性相关性，并求其秩和一个极大无关组。

解 直接用定义不太方便。取 $\mathrm{P}_3[t]$ 的简单基 $t^3,t^2,t,1$，则 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 在该基下的坐标分别为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

例 在$\mathbf{K}^{2\times2}$中，分别求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$在$\mathbf{K}^{2\times2}$的基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 和 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标。

解 因为 $\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{12}+2\boldsymbol{E}_{21}-3\boldsymbol{E}_{22}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 在该基下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$ 。

又设 $\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4$，即

$$\begin{cases} 0= \qquad k_2+k_3+k_4 \\ 1=k_1 \qquad +k_3+k_4 \\ 2=k_1+k_2 \qquad +k_4 \\ -3=k_1+k_2+k_3 \end{cases}$$

解之得 $k_1=0,k_2=-1,k_3=-2,k_4=3$，故 $\boldsymbol{A}$在该基下的坐标为 $(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$ 。

可求得该向量组的秩为2，且 $(1,-2,4,1)^{\mathrm{T}}$，$(2,-3,9,-1)^{\mathrm{T}}$ 为一个极大无关组。故 $f_1(t),f_2(t),f_3(t),f_4(t)$ 线性相关；该多项式组的秩为2，且 $f_1(t),f_2(t)$ 为一个极大无关组。

例 求$\mathbf{K}^{2\times2}$中矩阵组

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

的秩和极大无关组。

解 取 $\mathbf{K}^{2\times2}$的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 在该基下的坐标为

$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$

可求得该向量组的秩为2，且$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}},(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$是一个极大无关组。故 A_1,A_2,A_3,A_4 的秩为2，且 A_1,A_2 是一个极大无关组。

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

（2）设 $a\in\mathbf{K}^4$在基 a_1,a_2,a_3,a_4 下的坐标为$(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，在基 b_1,b_2,b_3,b_4 下的坐标为$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$，则坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathbf{K}^4$的两个基

$a_1=(1,2,-1,0)$，$a_2=(1,-1,1,1)$，

$a_3=(-1,2,1,1)$，$a_4=(-1,-1,0,1)$

和 $b_1=(2,1,0,1)$，$b_2=(0,1,2,2)$，

$b_3=(-2,1,1,2)$，$b_4=(1,3,1,2)$

(1)求从基a_1,a_2,a_3,a_4到b_1,b_2,b_3,b_4的过渡矩阵；

(2)写出坐标变换公式。

解 （1）法1(直接法) 设

$$b_i=c_{1i}a_1+c_{2i}a_2+c_{3i}a_3+c_{4i}a_4\ (i=1,2,3,4)$$

列四个四元一次方程组求解即得。

或 $$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=C^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathbf{K}^{2\times2}$的两个基

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

和

$$G_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},G_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},G_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},G_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

法2（间接法或中间基法）取$\mathbf{K}^4$的简单基e_1,e_2,e_3,e_4，因为

$$(a_1,a_2,a_3,a_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)A$$
$$(b_1,b_2,b_3,b_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{pmatrix}$$

所以 $(b_1,b_2,b_3,b_4)=(a_1,a_2,a_3,a_4)A^{-1}B$

故从 a_1,a_2,a_3,a_4 到 b_1,b_2,b_3,b_4 的过渡矩阵为

（1）求从基 G_1,G_2,G_3,G_4 到 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 的过渡矩阵；

（2）求矩阵$\begin{pmatrix}0&1\\2&-3\end{pmatrix}$在基$G_1,G_2,G_3,G_4$下的坐标。

解 （1）因为

$$(G_1,G_2,G_3,G_4)=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})C$$

其中 $$C=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$$

故从G_1,G_2,G_3,G_4到$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$的过渡矩阵为

$$C^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

(2) 法1 设

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}=k_1\boldsymbol{G}_1+k_2\boldsymbol{G}_2+k_3\boldsymbol{G}_3+k_4\boldsymbol{G}_4$$

解得 $k_1=0$，$k_2=-1$，$k_3=-2$，$k_4=3$

故 $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ 在 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标为

$$(0,-1,-2,3)^{\mathrm{T}}$$

法2. $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的坐标为 $(0,1,2,-3)^{\mathrm{T}}$，则它在基 $\boldsymbol{G}_1,\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{G}_4$ 下的坐标 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

例 在线性空间 $\mathrm{P}_3[t]$ 中，旧基为 $1,t,t^2,t^3$，新基为 $f_1=1$，$f_2=1+t$，$f_3=1+t+t^2$，$f_4=1+t+t^2+t^3$

(1) 求从新基到旧基的过渡矩阵；

(2) 求 $f=1+2t+3t^2+4t^3$ 在新基下的坐标。

解 (1) 因为

$$(f_1,f_2,f_3,f_4)=(1,t,t^2,t^3)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

所以从新基到旧基的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1\\ & & & 1\end{pmatrix}$$

(2) f 在旧基下的坐标为 $(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$，从而 f 在新基下的坐标 $(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 满足

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & & \\ & 1 & -1 & \\ & & 1 & -1\\ & & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ -1\\ 4\end{pmatrix}$$

故 f 在新基下的坐标为 $(-1,-1,-1,4)^{\mathrm{T}}$。

例 设 $(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$ 为 $\mathbf{K}^{2\times 2}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在基

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 4\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 7\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 8 & -3\end{pmatrix}$$

下的坐标，$(y_1,y_2,y_3,y_4)^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 下的坐标，且

$$y_1=3x_1+5x_2,\quad y_2=x_1+2x_2,$$
$$y_3=2x_3-3x_4,\quad y_4=-5x_3+8x_4$$

(1) 求由基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 到 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的过渡矩阵；

(2) 求基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$。

解 由于

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

根据基变换公式得

$$(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)\boldsymbol{C}$$

其中

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -5 & 8\end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{C}$ 即为由基 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4$ 到 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的过渡矩阵。

又由

$$(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3,\boldsymbol{B}_4)=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\boldsymbol{C}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)\begin{pmatrix}2&-5&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&8&3\\0&0&5&2\end{pmatrix}$$

得

$$\boldsymbol{B}_1=2\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=-5\boldsymbol{A}_1+3\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_3=8\boldsymbol{A}_3+5\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}_4=3\boldsymbol{A}_3+2\boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

例 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 和 β_1,β_2,β_3是3维线性空间V的两个基，且满足

$$\begin{cases}\beta_1\qquad+\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\ \beta_1+\beta_2\qquad=\qquad\alpha_2+\alpha_3\\ \qquad\beta_2+\beta_3=\alpha_1\qquad+\alpha_3\end{cases}$$

(1) 求从基 β_1,β_2,β_3 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的过渡矩阵；

(2) 求元素 $\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标。

解 由所给关系式得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

于是

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

故从基 β_1,β_2,β_3 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

又有

$$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&2\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}2\\-5\\1\end{pmatrix}$$

故α在基β_1,β_2,β_3下的坐标为$(2,-5,1)^{\mathrm{T}}$。

§4、线性子空间

例 在线性空间V中，$\{\theta\}$和V都是V的子空间，称它们是V的**平凡(假)子空间**，其余的子空间称为**非平凡(真)子空间**。

例 在2维几何空间$\mathbf{R}^2$中，过原点的任一直线上的向量集合是$\mathbf{R}^2$的子空间；在$\mathbf{R}^3$中，过原点的直线或平面上的向量集合是$\mathbf{R}^3$的子空间。

例 全体实函数组成的线性空间中，$P[t]$是它的一个子空间；$P_n[t]$是$P[t]$的子空间。

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{K}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量集合S是$\mathbf{K}^n$的子空间，且 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是S的基，$\dim S=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$。

例 求$\mathbf{K}^n$的子空间 $W_1=\{(0,\cdots,0,x_n)\mid x_n\in\mathbf{K}\}$ 的基与维数。

解 取 $\boldsymbol{e}_n=(0,\cdots,0,1)\in W_1$，则 $\boldsymbol{e}_n$ 线性无关，且对任一 $\boldsymbol{a}=(0,\cdots,0,a_n)\in W_1$，有 $\boldsymbol{a}=a_n\boldsymbol{e}_n$。故 $\dim W_1=1$，且$\boldsymbol{e}_n$ 是W_1的一个基。

例 求$\mathbf{K}^n$的子空间

$$W_2=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,\cdots,x_n\in\mathbf{K}\text{且}x_1+\cdots+x_n=0\}$$

的基与维数。

解 在W_2中取向量组

$$\boldsymbol{a}_1=(1,-1,0,\cdots,0),\quad \boldsymbol{a}_2=(1,0,-1,0,\cdots,0),$$

$$\cdots,\quad \boldsymbol{a}_{n-1}=(1,0,\cdots,0,-1)$$

先证 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性无关。由于矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\ 1&0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&0&0&\cdots&-1\end{pmatrix}$$

的秩 rank $\boldsymbol{A}=n-1$，所以 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性无关。

又取 $\forall \boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in \mathrm{W}_2$，其中

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$$

下证 $\boldsymbol{a}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性表示。

法1　设 $\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}$，比较分量得：

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=a_1\\ -k_1=a_2\\ -k_2=a_3\\ \cdots\cdots\\ -k_{n-1}=a_n\end{cases}$$

增广矩阵

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&\cdots&1&a_1\\ -1&0&\cdots&0&a_2\\ 0&-1&\cdots&0&a_3\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&-1&a_n\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{\cdots\\ r_1+r_n}]{\substack{r_1+r_2\\ r_1+r_3}}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&\cdots&0&0\\ -1&0&\cdots&0&a_2\\ 0&-1&\cdots&0&a_3\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&\cdots&-1&a_n\end{array}\right)$$

方程组的解为

$$k_1=-a_2,\ k_2=-a_3,\cdots,\ k_{n-1}=-a_n$$

即 $\boldsymbol{a}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性表示。

法2　构造矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{n-1}\\ \boldsymbol{a}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&\cdots&0\\ 1&0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&0&0&\cdots&-1\\ a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\end{pmatrix}$$

由于

$$\det\boldsymbol{B}\ \underset{i=2,\cdots,n}{\overset{c_1+c_i}{=\!=}}\ \begin{vmatrix}0&-1&0&\cdots&0\\ 0&0&-1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&-1\\ 0&a_2&a_3&\cdots&a_n\end{vmatrix}=0$$

所以 rank $\boldsymbol{B}<n$，即 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}$ 线性相关。但 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 线性表示。从而 $\dim \mathrm{W}_2=n-1$，且 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ 是W_2的一个基。

例　$\mathrm{S}\mathbf{K}^{3\times3}$是$\mathbf{K}^{3\times3}$的子空间，$\dim\mathrm{S}\mathbf{K}^{3\times3}=6$。

更一般地，$\mathrm{S}\mathbf{K}^{n\times n}$是$\mathbf{K}^{n\times n}$的子空间，且

$$\dim\mathrm{S}\mathbf{K}^{n\times n}=\frac{n(n+1)}{2}$$

例　在$\mathbf{K}^{2\times3}$中，下列子集是否构成子空间？如果是子空间，求基和维数。

(1)　$\mathrm{W}_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\ 0&c&d\end{pmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbf{K}\right\}$；

(2)　$\mathrm{W}_2=\left\{\begin{pmatrix}a&b&0\\ 0&c&d\end{pmatrix}\middle| a+b+c+d=0,\ a,b,c,d\in\mathbf{K}\right\}$

解（1）由于$\boldsymbol{O}\in\mathrm{W}_1$，所以$\mathrm{W}_1$非空。设$k\in\mathbf{K}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0\\ 0&c_1&d_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2&b_2&0\\ 0&c_2&d_2\end{pmatrix}\in\mathrm{W}_1$$

则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2&0\\ 0&c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix}\in\mathrm{W}_1$$

$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_1&kb_1&0\\ 0&kc_1&kd_1\end{pmatrix}\in\mathrm{W}_1$$

故W_1是子空间。

取矩阵组

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad E_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad E_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

则易知$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$线性无关，且$\mathrm{W}_1$中任意矩阵可由它们线性表示。 故$\dim \mathrm{W}_1=4$，且$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{23}$是$\mathrm{W}_1$的一个基。

(2) 由于$\boldsymbol{O}\in \mathrm{W}_2$，所以$\mathrm{W}_2$非空。设$k\in\mathbf{K}$，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1&b_1&0\\0&c_1&d_1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_2&b_2&0\\0&c_2&d_2\end{pmatrix}\in \mathrm{W}_2$$

则 $\quad a_1+b_1+c_1+d_1=0$，$a_2+b_2+c_2+d_2=0$

由于

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_1+a_2&b_1+b_2&0\\0&c_1+c_2&d_1+d_2\end{pmatrix},$$
$$k\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}ka_1&kb_1&0\\0&kc_1&kd_1\end{pmatrix}$$

且 $\quad (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)=0$

$\quad ka_1+kb_1+kc_1+kd_1=0$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\in \mathrm{W}_2$，$k\boldsymbol{A}\in \mathrm{W}_2$，从而 W_2是子空间。

可知 $\dim \mathrm{W}_2=3$，且

$$\boldsymbol{F}_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{F}_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

是一个基。

例 在$\mathrm{P}_3[t]$中，子集

$$\mathrm{W}=\{a+bt+ct^2+dt^3 \mid a+b+c=0, a,b,c,d\in\mathbf{K}\}$$

是否构成子空间？如果是子空间，求基和维数。

解 设$k\in\mathbf{K}$，

$$f(t)=a_1+b_1t+c_1t^2+d_1t^3\in \mathrm{W}$$
$$g(t)=a_2+b_2t+c_2t^2+d_2t^3\in \mathrm{W}$$

则 $\quad a_1+b_1+c_1=0$，$\quad a_2+b_2+c_2=0$

由于

$$f(t)+g(t)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)t+(c_1+c_2)t^2+(d_1+d_2)t^3$$
$$kf(t)=ka_1+kb_1t+kc_1t^2+kd_1t^3$$

且 $\quad (a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)=0$

$\quad ka_1+kb_1+kc_1=0$

故 $f(t)+g(t)\in \mathrm{W}$，$kf(t)\in \mathrm{W}$，从而W是子空间。

可知 $\dim \mathrm{W}=3$，且

$$f_1(t)=1-t,\ f_2(t)=1-t^2,\ f_3(t)=t^3$$

是一个基。

例 在$\mathbf{K}^{2\times 2}$中，求由

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\-1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}3&1\\1&3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_4=\begin{pmatrix}1&1\\-3&3\end{pmatrix}$$

生成的子空间的基与维数。

解 取$\mathbf{K}^{2\times 2}$的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，则$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 在该基下的坐标分别为

$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$(1,1,-3,3)^{\mathrm{T}}$

可求得该向量组的秩为2，且

$$(2,1,-1,3)^{\mathrm{T}},\ (1,0,2,0)^{\mathrm{T}}$$

是一个极大无关组。

故$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4$ 的秩为2，且 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是一个极大无关组。从而 $\mathrm{L}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_4)$ 的维数为2，且$\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是它的一个基。

例 设 $W_1 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$，$W_2 = L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$，其中

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 1, 0), \quad \boldsymbol{a}_2 = (-1, 1, 1, 1)$$

$$\boldsymbol{b}_1 = (2, -1, 0, 1), \quad \boldsymbol{b}_2 = (1, -1, 3, 7)$$

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的基与维数。

解 因为

$$W_1 + W_2 = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) + L(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2) = L(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$$

所以只要求出向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ 的秩和极大无关组即可。由于

$$(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{b}_2^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

从而向量组的秩为3，且 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$ 是一个极大无关组，故 $\dim(W_1 + W_2) = 3$，基为 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_1$。

对任意 $\boldsymbol{a} \in W_1 \cap W_2$，有 $\boldsymbol{a} \in W_1$ 且 $\boldsymbol{a} \in W_2$，即

$$\boldsymbol{a} = k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 = l_1\boldsymbol{b}_1 + l_2\boldsymbol{b}_2$$

也即 $$k_1\boldsymbol{a}_1 + k_2\boldsymbol{a}_2 - l_1\boldsymbol{b}_1 - l_2\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{0}$$

比较分量得 $$\begin{cases} k_1 - k_2 - 2l_1 - l_2 = 0 \\ 2k_1 + k_2 + l_1 + l_2 = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad - 3l_2 = 0 \\ \qquad k_2 - l_1 - 7l_2 = 0 \end{cases}$$

因为 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组为 $\begin{cases} k_1 = -l_2 \\ k_2 = 4l_2 \\ l_1 = -3l_2 \end{cases}$，通解为 $\begin{cases} k_1 = -c \\ k_2 = 4c \\ l_1 = -3c \\ l_2 = c \end{cases}$

故 $\boldsymbol{a} = -c\boldsymbol{a}_1 + 4c\boldsymbol{a}_2 = c(-5, 2, 3, 4)$ （c任意）

从而 $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$，且 $(-5, 2, 3, 4)$ 是一个基。

例 已知$\mathbf{K}^{n\times n}$的两个子空间

$$W_1 = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}\},$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}\}$$

证明：$\mathbf{K}^{n\times n} = W_1 \oplus W_2$。

证 对任意 $\boldsymbol{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$ 有

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$$

其中 $\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$, $\boldsymbol{C} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ 。容易验证

$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{B} \in W_1$，$\boldsymbol{C} \in W_2$。这表明

$$\mathbf{K}^{n\times n} = W_1 + W_2$$

又对任意 $\boldsymbol{A} \in W_1 \cap W_2$ 有

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A},$$

从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$，此即 $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{O}\}$。故

$$\mathbf{K}^{n\times n} = W_1 \oplus W_2。$$

例 设方阵$\boldsymbol{A} \in \mathbf{K}^{n\times n}$满足 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$，又设

$$W_1 = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n\},$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{x} \mid (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n\}$$

证明：$\mathbf{K}^n = W_1 \oplus W_2$。

证 对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n$ 有

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$$

其中 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。容易验证

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{y} \in W_1$，$\boldsymbol{z} \in W_2$。这表明 $\mathbf{K}^n = W_1 + W_2$。

又对任意 $\boldsymbol{x} \in W_1 \cap W_2$ 有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

从而 $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0},$$

即 $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$。故 $\mathbf{K}^n = W_1 \oplus W_2$。

§5、线性变换

例1 在$\mathbf{K}^3$中，定义变换

$$T(a,b,c)=(a+1,a+b,c),\quad \forall(a,b,c)\in\mathbf{K}^3$$

问T是否线性变换？

解 取$\boldsymbol{a}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{b}=(a_2,b_2,c_2)\in\mathbf{K}^3$，$k\in\mathbf{K}$，则

$$T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=T(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$$
$$=(a_1+a_2+1,a_1+a_2+b_1+b_2,c_1+c_2)$$
$$T(\boldsymbol{a})+T(\boldsymbol{b})=(a_1+1,a_1+b_1,c_1)+(a_2+1,a_2+b_2,c_2)$$
$$=(a_1+a_2+2,a_1+a_2+b_1+b_2,c_1+c_2)$$

可见 $T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\neq T(\boldsymbol{a})+T(\boldsymbol{b})$，故$T$不是线性变换。

例2 在$\mathbf{K}^n$中，定义变换

$$T(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\quad \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{K}^n \text{而 } \boldsymbol{A}\in\mathbf{K}^{n\times n}\text{取定}$$

则T是$\mathbf{K}^n$的线性变换。

例3 在$\mathbf{K}^{n\times n}$中，定义变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB},\quad \forall\boldsymbol{X}\in\mathbf{K}^{n\times n}$$

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbf{K}^{n\times n}$ 取定。问T是否线性变换？

解 设$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{K}^{n\times n}$，$k\in\mathbf{K}$，则有

$$T(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})-(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B}$$
$$=(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB})+(\boldsymbol{AY}-\boldsymbol{YB})$$
$$=T(\boldsymbol{X})+T(\boldsymbol{Y})$$
$$T(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})-(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B}=k(\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB})=kT(\boldsymbol{X})$$

故T是$\mathbf{K}^{n\times n}$的线性变换。

若取变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XB}+\boldsymbol{C}$$

则当$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$时，$T$是线性变换。

例4 在$\mathrm{P}_n[t]$中，求微分

$$D(f(t))=f'(t),\quad \forall f(t)\in\mathrm{P}_n[t]$$

是一个线性变换。

例5 在$\mathrm{C}[a,b]$中，定义变换

(1) $T_1(f(x))=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$；

(2) $T_2(f(x))=\int_a^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$；

(3) $T_3(f(x))=\int_a^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$

问T_1,T_2,T_3是否线性变换？

解 (1) (2) 是；(3) 不是。因为

$$T_3(2f(x))=\int_a^x 4f^2(t)\,\mathrm{d}t=4T_3(f(x))\neq 2T_3(f(x))$$

例6 设V是数域K上的线性空间。定义V的变换

(1) $I(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$，　(2) $O(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$，　$\forall\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{V}$

分别称之为恒等变换(或单位变换)，零变换。

它们都是V的线性变换。

例 已知$\mathbf{K}^3$的线性变换

$$T(x_1,x_2,x_3)=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)$$

(1) 求$\mathrm{R}(T)$ 的维数和一个基；

(2) 求$\mathrm{N}(T)$ 的维数和一个基。

解 (1) 取 $\mathbf{K}^3$的简单基

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\ \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\ \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$$

由于

$$T(\boldsymbol{e}_1)=(1,0,1),\ T(\boldsymbol{e}_2)=(2,1,1),\ T(\boldsymbol{e}_3)=(-1,1,-2)$$

可求得$T(\boldsymbol{e}_1),T(\boldsymbol{e}_2),T(\boldsymbol{e}_3)$ 的秩为2，且$T(\boldsymbol{e}_1),T(\boldsymbol{e}_2)$是一个极大无关组。故 $\dim\mathrm{R}(T)=2$，且 $(1,0,1)$，$(2,1,1)$是$\mathrm{R}(T)$ 的一个基。

(2) 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,x_3)\in \mathrm{N}(T)$，则

$$T(\boldsymbol{a})=T(x_1,x_2,x_3)$$
$$=(x_1+2x_2-x_3,x_2+x_3,x_1+x_2-2x_3)=(0,0,0)$$

于是
$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_2+x_3=0 \\ x_1+x_2-2x_3=0 \end{cases}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=3x_3 \\ x_2=-x_3 \end{cases}$，通解为 $\begin{cases} x_1=3k \\ x_2=-k \\ x_3=k \end{cases}$（$k$任意）

于是 $\boldsymbol{a}=k(3,-1,1)$。故 $\dim\mathrm{N}(T)=1$，且$(3,-1,1)$是$\mathrm{N}(T)$ 的一个基。

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM}$$
$$=\begin{pmatrix} 2x_{21} & -2x_{11}-2x_{12}+2x_{22} \\ 2x_{21} & -2x_{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

得
$$\begin{cases} 2x_{21}=0 \\ -2x_{11}-2x_{12}+2x_{22}=0 \\ 2x_{21}=0 \\ -2x_{21}=0 \end{cases}$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_{11}=-x_{12}+x_{22} \\ x_{21}=0 \end{cases}$

例 已知$\mathbf{K}^{2\times 2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM} \quad \forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{K}^{2\times 2},\ \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

求T的象子空间与核子空间的维数和基。

解 (1) 取 $\mathbf{K}^{2\times 2}$的简单基

$$\boldsymbol{E}_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{E}_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

法1 通解为 $\begin{cases} x_{11}=-k_1+k_2 \\ x_{12}=k_1 \\ x_{21}=0 \\ x_{22}=k_2 \end{cases}$ （k_1,k_2任意）

从而 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} -k_1+k_2 & k_1 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

故 $\dim\mathrm{N}(T)=2$，且$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是它的一个基。

法2 基础解系为

$$(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故 $\dim\mathrm{N}(T)=2$，且$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$是它的一个基。

则有

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然 $\dim\mathrm{R}(T)=2$，且

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

是它的一个基。

(2) 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in\mathrm{N}(T)$，则由

§6、线性变换的矩阵表示

例 已知$\mathbf{K}^3$的线性变换

$$T(x_1,x_2,x_3)=(2x_2+x_3,\ x_1-4x_2,\ 3x_1)$$

求T在$\mathbf{K}^3$的基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 和基

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,1),\boldsymbol{a}_2=(1,1,0),\ \boldsymbol{a}_3=(1,0,0)$$

下的矩阵。

解 (1) 因为

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{e}_1)=(0,1,3)=0\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3 \\ T(\boldsymbol{e}_2)=(2,-4,0)=2\boldsymbol{e}_1-4\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3 \\ T(\boldsymbol{e}_3)=(1,0,0)=\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3 \end{cases}$$

所以T在基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 法1 因为

$$\begin{cases} T(\boldsymbol{a}_1)=(3,-3,3)=3\boldsymbol{a}_1-6\boldsymbol{a}_2+6\boldsymbol{a}_3 \\ T(\boldsymbol{a}_2)=(2,-3,3)=3\boldsymbol{a}_1-6\boldsymbol{a}_2+5\boldsymbol{a}_3 \\ T(\boldsymbol{a}_3)=(0,1,3)\quad=3\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}_3 \end{cases}$$

所以T在基 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

法2 因为

$$T(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

又有 $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

从而

$$T(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -2 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

例 已知$\mathbf{K}^{2\times 2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{MX}-\boldsymbol{XM}, \quad \forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{K}^{2\times 2}, \quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

求T在$\mathbf{K}^{2\times 2}$的基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$下的矩阵。

解 因为

$$T(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-2\boldsymbol{E}_{12},\ T(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=-2\boldsymbol{E}_{12},$$

$$T(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{11}+2\boldsymbol{E}_{21}-2\boldsymbol{E}_{22}$$

$$T(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=2\boldsymbol{E}_{12}$$

故T在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

例 已知$\mathrm{P}_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2$$

求T在$\mathrm{P}_2[t]$的基 $1,t,t^2$ 和基

$$f_1(t)=1,\ f_2(t)=1+t,\ f_3(t)=1+t+t^2$$

下的矩阵。

解 由于

$$\begin{cases} T(1)=4-3t-3t^2 \\ T(t)=6-5t-6t^2 \\ T(t^2)=t^2 \end{cases}$$

所以T在基$1,t,t^2$下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

又由于

$$\begin{cases} T(f_1(t))=4-3t-3t^2 \\ T(f_2(t))=10-8t-9t^2 \\ T(f_3(t))=10-8t-8t^2 \end{cases}$$

所以 $T(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)\begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 \\ -3 & -8 & -8 \\ -3 & -9 & -8 \end{pmatrix}$

又有 $(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

从而

$$T(f_1,f_2,f_3)=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&10&10\\-3&-8&-8\\-3&-9&-8\end{pmatrix}$$
$$=(f_1,f_2,f_3)\begin{pmatrix}7&18&18\\0&1&0\\-3&-9&-8\end{pmatrix}$$

所以T在基 $f_1(t),f_2(t),f_3(t)$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}7&18&18\\0&1&0\\-3&-9&-8\end{pmatrix}$$

所以D在基 $1,t,\frac{t^2}{2!},\cdots,\frac{t^n}{n!}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&0\end{pmatrix}$$

例 n维线性空间V的恒等变换 I 在V的任一基下的矩阵是n阶单位矩阵$\boldsymbol{I}_n$；零变换O在V的任一基下的矩阵是零矩阵$\boldsymbol{O}$。

例 求$\mathrm{P}_n[t]$的微分变换D在基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 和 $1,t,\frac{t^2}{2!},\cdots,\frac{t^n}{n!}$ 下的矩阵。

解 因为

$$\begin{cases}D(1)=0 & =0\cdot1+0\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ D(t)=1 & =1\cdot1+0\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ D(t^2)=2t & =0\cdot1+2\cdot t+0\cdot t^2+\cdots+0\cdot t^n\\ \quad\cdots\cdots & \\ D(t^n)=nt^{n-1} & =0\cdot1+\cdots+n\cdot t^{n-1}+0\cdot t^n\end{cases}$$

所以D在基 $1,t,t^2,\cdots,t^n$ 下的矩阵为

例 已知$\mathbf{K}^{2\times2}$的两个线性变换

$$T_1(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\boldsymbol{M},\quad T_2(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}k_1x_{11}&0\\0&k_2x_{22}\end{pmatrix}$$
$$\forall\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{pmatrix}\in\mathbf{K}^{2\times2},\quad \boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 为固定数。求 T_1+T_2，T_1T_2 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵。又问 T_1,T_2 是否可逆？若可逆，求其在同一基下的矩阵。

解 因为

$$T_1(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad T_1(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

又因为

$$D(1)=0=0\cdot1+0\cdot t+0\cdot\tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot\tfrac{t^n}{n!}$$
$$D(t)=1=1\cdot1+0\cdot t+0\cdot\tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot\tfrac{t^n}{n!}$$
$$D(\tfrac{t^2}{2!})=t=0\cdot1+1\cdot t+0\cdot\tfrac{t^2}{2!}+\cdots+0\cdot\tfrac{t^n}{n!}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D(\tfrac{t^n}{n!})=\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}=0\cdot1+\cdots+1\cdot\tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}+0\cdot\tfrac{t^n}{n!}$$

$$T_1(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\quad T_1(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

而

$$T_2(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{pmatrix}k_1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_2(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$
$$T_2(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_2(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\0&k_2\end{pmatrix}$$

所以T_1,T_2在该基下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}k_1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&k_2\end{pmatrix}$$

T_1+T_2在该基下的矩阵为

$$A+B=\begin{pmatrix}1+k_1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1+k_2\end{pmatrix}$$

T_1T_2在该基下的矩阵为

$$AB=\begin{pmatrix}k_1 & 0 & 0 & 0\\ k_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k_2\\ 0 & 0 & 0 & k_2\end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$可逆，所以T_1可逆，且T_1^{-1}在该基下的矩阵为

且

$$-2E_{12}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad 2E_{11}+2E_{21}-2E_{22}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

是$\mathrm{R}(T)$的一个基。 又由 $Ax=\mathbf{0}$ 得基础解系为 $(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$(1,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，故 $\dim\mathrm{N}(T)=2$，且

$$-E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{11}+E_{22}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

是$\mathrm{N}(T)$的一个基。

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & 0 & 0\\ \frac12 & -\frac12 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac12 & \frac12\\ 0 & 0 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}$$

例 设T是4维线性空间V的线性变换，又设T在V的基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -2 & -2\\ 2 & 6 & 5 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{pmatrix}$$

求T在基

$\beta_1=\alpha_1,\ \beta_2=-\alpha_1+\alpha_2,\ \beta_3=-\alpha_2+\alpha_3,\ \beta_4=-\alpha_3+\alpha_4$

下的矩阵。

解 法1. 因为

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$$

例 已知$\mathrm{K}^{2\times2}$的线性变换

$$T(X)=MX-XM,\quad \forall X\in\mathrm{K}^{2\times2},\quad M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

求T的值域与核的维数和基。

解 可求得T在$\mathrm{K}^{2\times2}$的基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

又可求得$\operatorname{rank}A=2$,且$(0,-2,0,0)^{\mathrm{T}}$,$(2,0,2,-2)^{\mathrm{T}}$是$\boldsymbol{A}$的列向量组的一个极大无关组，故 $\dim\mathrm{R}(T)=2$，

又有 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P$，其中

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad 且P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}T(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)&=T[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)P]\\ &=[T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)]P\\ &=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)AP\\ &=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)P^{-1}AP\end{aligned}$$

从而T在基 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 下的矩阵为

$$B=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&3&0&0\\2&4&0&0\\0&0&1&3\\0&0&2&4\end{pmatrix}$$

法2. 由 $T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)A$ 知

$$T(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2,$$
$$T(\alpha_2)=-2\alpha_1+6\alpha_2,$$
$$T(\alpha_3)=-2\alpha_1+5\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4,$$
$$T(\alpha_4)=-2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3+6\alpha_4$$

于是

$$T(\beta_1)=T(\alpha_1)=-\alpha_1+2\alpha_2=\beta_1+2\beta_2$$

所以 $(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)A^{-1}B=(a_1,a_2,a_3)C$

即由基 a_1,a_2,a_3 到基 b_1,b_2,b_3 的过渡矩阵为

$$C=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

由 $T(a_i)=b_i\quad(i=1,2,3)$ 得

$$T(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)=(a_1,a_2,a_3)C$$

可见T在基 a_1,a_2,a_3 下的矩阵为C。又因为

$$T(b_1,b_2,b_3)=T[(a_1,a_2,a_3)C]=T(a_1,a_2,a_3)C$$
$$=(b_1,b_2,b_3)C$$

故T在基 b_1,b_2,b_3 下的矩阵仍为C。

$$T(\beta_2)=-T(\alpha_1)+T(\alpha_2)=-\alpha_1+4\alpha_2$$
$$=3\beta_1+4\beta_2$$
$$T(\beta_3)=-T(\alpha_2)+T(\alpha_3)=-\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4$$
$$=\beta_3+2\beta_4$$
$$T(\beta_4)=-T(\alpha_3)+T(\alpha_4)=-3\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4$$
$$=3\beta_3+4\beta_4$$

§7、线性变换矩阵的化简

例 已知$\mathbf{K}^{2\times2}$的线性变换

$$T(X)=MXN\quad\forall X\in\mathbf{K}^{2\times2}$$

其中 $M=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $N=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

求T的特征值与特征向量。

解 取$\mathbf{K}^{2\times2}$的简单基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$，可求得

$$T(E_{11})=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix},\quad T(E_{12})=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$T(E_{21})=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix},\quad T(E_{22})=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

所以T在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

例 假定$\mathbf{K}^3$的线性变换T把基

$$a_1=(1,0,1),\ a_2=(2,1,0),\ a_3=(1,1,1)$$

变成基

$$b_1=(1,2,-1),\ b_2=(2,2,-1),\ b_3=(2,-1,-1)$$

即 $T(a_i)=b_i\ (i=1,2,3)$。试求T在基 a_1,a_2,a_3 和基 b_1,b_2,b_3 下的矩阵。

解 因为 $(a_1,a_2,a_3)=(e_1,e_2,e_3)A$,

$$(b_1,b_2,b_3)=(e_1,e_2,e_3)B$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

又因为 $\det(\lambda I-A)=\lambda^2(\lambda-2)^2$，故$T$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=\lambda_4=2$$

对于 $\lambda=0$，求解 $(-A)x=0$ 得基础解系

$$(1,1,0,0)^{\mathrm{T}},\quad(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$$

故T对应特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 的两个线性无关的特征向量为

$$X_1=E_{11}+E_{12}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad X_2=E_{21}+E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

而对于$\lambda=2$，求解$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$得基础解系

$$(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

故T对应特征值 $\lambda_3=\lambda_4=2$ 的特征向量为

$$X_3=-E_{21}+E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathrm{P}_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2 \qquad \forall a+bt+ct^2\in \mathrm{P}_2[t]$$

试求$\mathrm{P}_2[t]$的一个基，使T在该基下的矩阵为对角阵。

解 取$\mathrm{P}_2[t]$的简单基 $1,t,t^2$，可求得 T在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$$

又可求得$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$；

对应 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$；

例 已知$\mathrm{P}_2[t]$的线性变换

$$T(a+bt+ct^2)=(4a+6b)-(3a+5b)t-(3a+6b-c)t^2 \qquad \forall a+bt+ct^2\in \mathrm{P}_2[t]$$

求T的特征值与特征向量。

解 取$\mathrm{P}_2[t]$的简单基 $1,t,t^2$，则由

$$\begin{cases}T(1)=4-3t-3t^2\\ T(t)=6-5t-6t^2\\ T(t^2)=t^2\end{cases}$$

得T在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$

对应 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{p}_2=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{p}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \text{ 使 } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}$$

由 $(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)\boldsymbol{P}$ 得$\mathrm{P}_2[t]$的基

$$f_1=-1+t+t^2,\quad f_2=-2+t,\quad f_3=t^2$$

T在该基下的矩阵为$\boldsymbol{\Lambda}$。

又因为$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$，故$T$的特征值为

$$\lambda_1=-2,\quad \lambda_2=\lambda_3=1$$

对于$\lambda_1=-2$，求解$(-2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

故T对应特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为

$$f_1=-1+t+t^2$$

对于$\lambda_2=\lambda_3=1$，求解$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系

$$(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

故T对应特征值$\lambda_2=\lambda_3=1$ 有两个线性无关的特征向量

$$f_2=-2+t,\quad f_3=t^2$$

例 已知$\mathbf{K}^{2\times 2}$的线性变换

$$T(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\boldsymbol{N}\qquad \forall \boldsymbol{X}\in\mathbf{K}^{2\times 2}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

试求$\mathbf{K}^{2\times 2}$的一个基，使T在该基下的矩阵为Jordan阵。

解 取$\mathbf{K}^{2\times 2}$的简单基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$，可求得$T$在该基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-1&1&0&0\\1&-1&1&-1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

又可求得$\boldsymbol{A}$的特征值为

$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=\lambda_4=2$

对应特征值$\lambda_1=\lambda_2=0$的两个线性无关的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1=(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}，\quad \boldsymbol{p}_2=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$$

对应特征值$\lambda_3=\lambda_4=2$只有一个线性无关的特征向量

$$\boldsymbol{p}_3=(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

又求解$(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{p}_3$ 得解向量 $\boldsymbol{p}_4=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0)^{\mathrm{T}}$。

故相似变换阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{1}{2}\\1&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&-1&0\\0&1&1&0\end{pmatrix} \text{ 使 } \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&2&1\\&&&2\end{pmatrix}$$

可求得 $\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=[(\lambda-1)^2-4]^3=(\lambda+1)^3(\lambda-3)^3$

故$\boldsymbol{A}$的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=3$$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$(-1,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(0,-1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$

对应特征值3的线性无关特征向量为

$(1,0,0,0,0,1)^{\mathrm{T}}$，$(0,1,0,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$(0,0,1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$

故T的特征值为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1,\quad \lambda_4=\lambda_5=\lambda_6=3$$

对应特征值-1的线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}_1=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_6，\boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_5，\boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

由 $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)=(\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P}$

得$\mathbf{K}^{2\times2}$的基

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_3=\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_4=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0\end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为$\boldsymbol{J}$。

全部特征向量为

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3 \quad (k_1,k_2,k_3\text{不全为零})$$

对应特征值3的线性无关特征向量为

$$\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_6,\quad \boldsymbol{\beta}_5=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_5,\quad \boldsymbol{\beta}_6=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

全部特征向量为

$$k_4\boldsymbol{\beta}_4+k_5\boldsymbol{\beta}_5+k_6\boldsymbol{\beta}_6 \quad (k_4,k_5,k_6\text{不全为零})$$

2) T在V的一组基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4,\boldsymbol{\beta}_5,\boldsymbol{\beta}_6$下的矩阵为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(-1,-1,-1,3,3,3)$$

例 给定V^6的基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6$ 及线性变换

$$T(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i+2\boldsymbol{\alpha}_{7-i} \quad (i=1,2,\cdots,6)$$

1）求T的全部特征值与特征向量；

2) 求V的一组基，使T在该基下的矩阵为对角阵。

解 1）由于$T(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_6)\boldsymbol{A}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&&&&&2\\&1&&&2&\\&&1&2&&\\&&2&1&&\\&2&&&1&\\2&&&&&1\end{pmatrix}$$

例 线性空间V和子空间$\{\boldsymbol{\theta}\}$，对V上的每个线性变换T来说都是不变子空间。

例 线性变换T的值域 $\mathrm{R}(T)$与核$\mathrm{N}(T)$是T的不变子空间。

证 首先，$\mathrm{R}(T)$与$\mathrm{N}(T)$是V的子空间 。

对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{R}(T)\subset\mathrm{V}$ 有 $T(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{R}(T)$，故$\mathrm{R}(T)$是$T$的不变子空间。

对任意 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathrm{N}(T)$，有 $T(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\theta}$，又有

$$T(T(\boldsymbol{\alpha}))=T(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\theta}$$

即 $T(\boldsymbol{\alpha})\in\mathrm{N}(T)$，故$\mathrm{N}(T)$是$T$的不变子空间。

例 设λ是线性变换T的特征值，由对应λ的全部特征向量再添上零向量构成的集合

$$\mathrm{V}_\lambda=\{\alpha \mid T(\alpha)=\lambda\alpha\}$$

是V的子空间，且它是T的不变子空间。称V_λ为线性变换T(对应特征值λ的) **特征子空间**。

例 设A, B为n阶方阵，且$AB=BA$。如果λ_0是A的特征值，V_{λ_0} 是A的特征子空间。证明：V_{λ_0} 是B的不变子空间。

证 任取 $x\in \mathrm{V}_{\lambda_0}$，则 $Ax=\lambda_0 x$。由于

$$A(Bx)=(AB)x=(BA)x=B(Ax)=\lambda_0(Bx)$$

故 $Bx\in \mathrm{V}_{\lambda_0}$，即 V_{λ_0} 是B的不变子空间。

例 已知$\mathbf{K}^{2\times 2}$的子空间

$$\mathrm{W}=\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix} \middle| \, x_{11}+x_{22}=0,\ x_{ij}\in\mathbf{K}\right\}$$

和线性变换

$$T(X)=B^{\mathrm{T}}X-X^{\mathrm{T}}B \quad \forall X\in\mathbf{K}^{2\times 2},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

(1) 求W的一个基；

(2) 证明W是T的不变子空间；

(3) 将T看成W上的线性变换，试求W的一个基，使T在该基下的矩阵为对角矩阵。

解 (1) W的一个基为

$$A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

(2) 任取 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in\mathrm{W}$，则 $x_{11}+x_{22}=0$；

$$T(X)=B^{\mathrm{T}}X-X^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}0 & -x_{11}+x_{12}-x_{21}\\ x_{11}-x_{12}+x_{21} & 0\end{pmatrix}\in\mathrm{W}$$

故W是T的不变子空间。

(3) 因为

$$T(A_1)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=-A_2+A_3$$

$$T(A_2)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=A_2-A_3$$

$$T(A_3)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=-A_2+A_3$$

所以

$$T(A_1,A_2,A_3)=(A_1,A_2,A_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

即T在W的基 A_1,A_2,A_3 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

可求得A的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=2$

对应于$\lambda_1=\lambda_2=0$ 有两个线性无关的特征向量

$$p_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\quad p_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$$

对应于$\lambda_3=2$ 的特征向量为 $p_3=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$

故相似变换阵

$$P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix} \text{ 使 } P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&2\end{pmatrix}$$

由 $(B_1,B_2,B_3)=(A_1,A_2,A_3)P$ 得W的基

$$B_1=A_1+A_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$B_2=-A_1+A_3=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$B_3=-A_2+A_3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为Λ。

§8、欧氏空间

例 在n维向量空间$\mathbf{R}^n$中，对任意

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$$

规定
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$

易证它是内积，$\mathbf{R}^n$按上述内积构成欧氏空间。

也称上述内积为$\mathbf{R}^n$的标准内积。

如果规定
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}k_ix_iy_i=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{y}$$

其中 $k_i>0\,(i=1,2,\cdots,n)$， 而 $\Lambda=\mathrm{diag}(k_1,\cdots,k_n)$，则它也是内积，$\mathbf{R}^n$按此内积也构成欧氏空间。

更进一步，若规定$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$，其中$\boldsymbol{A}$是$n$阶正定矩阵， 则它也是内积。

例 在mn维矩阵空间$\mathbf{R}^{m\times n}$中，对任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$， 规定

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}\qquad\text{（标准内积）}$$

或
$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}a_{ij}b_{ij}\qquad(k_{ij}>0)$$

则它们都是内积，$\mathbf{R}^{m\times n}$按这些内积构成欧氏空间。

例 在实线性空间$\mathrm{C}[a,b]$中，规定

$$(f(t),g(t))=\int_a^b f(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

或
$$(f(t),g(t))=\int_a^b w(\tau)f(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

$$\forall f(t),g(t)\in\mathrm{C}[a,b]$$

其中 $w(t)\in\mathrm{C}[a,b]$ 且 $w(t)>0$。

由定积分性质易知它们是内积。

例 在线性空间$\mathrm{P}_n[t]$中，对任意 $f(t),g(t)\in\mathrm{P}_n[t]$

规定
$$(f(t),g(t))=\int_0^1 f(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

或
$$(f(t),g(t))=\int_{-1}^1 f(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

或
$$(f(t),g(t))=\sum_{i=1}^{n+1}f(i)g(i)$$

它们都是内积。

证 对第三种情形，仅证非负性。 显然

$$(f(t),f(t))=\sum_{i=1}^{n+1}f^2(i)\ge 0$$

若$(f(t),f(t))=0$，则 $f(1)=f(2)=\cdots=f(n+1)=0$

法1 根据代数学基本定理知， n次多项式在复数域上最多只有n个根，而 $f(x)$ 有n+1个根，故 $f(x)=0$。

法2 设 $f(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_nt^n$， 得

$$\begin{cases}f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n=0\\ f(2)=a_0+2a_1+\cdots+2^na_n=0\\ \quad\cdots\cdots\\ f(n+1)=a_0+(n+1)a_1+\cdots+(n+1)^na_n=0\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\1&2&\cdots&2^n\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&n+1&\cdots&(n+1)^n\end{vmatrix}\ne 0$$

所以只有 $a_0=\cdots=a_n=0$，即 $f(t)=0$。

例 设V是n维实线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是V的一个基，对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathrm{V}$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$$
$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

规定
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

或
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}k_ix_iy_i\qquad(k_i>0)$$

则它们是内积。

如在$\mathbf{R}^n$中

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

或 $$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i^2} \quad (k_i > 0)$$

在$\mathbf{R}^{m\times n}$中， $$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

在C$[a,b]$中， $$\|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$$

$$(\cos mt,\cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos m\tau\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)\tau + \cos(m+n)\tau]\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad (m\neq n)$$
$$(\sin mt,\cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi}\sin m\tau\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(m+n)\tau + \sin(m-n)\tau]\,\mathrm{d}\tau = 0$$
$$(1,\cos nt) = \int_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau\,\mathrm{d}\tau = 0$$
$$(1,\sin nt) = \int_{-\pi}^{\pi}\sin n\tau\,\mathrm{d}\tau = 0$$

于是该函数组两两正交。又有

例 给定n维实线性空间V的基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，对任意$\boldsymbol{\alpha}\in$V有$\boldsymbol{\alpha} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha}_n$，即$\boldsymbol{\alpha}$对应列向量$\boldsymbol{x} = (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，规定

$$\|\boldsymbol{\alpha}\|_p = \|\boldsymbol{x}\|_p$$

则它是元素$\boldsymbol{\alpha}$的一种长度。

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\tau} = \sqrt{2\pi}$$
$$\|\sin mt\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 m\tau\,\mathrm{d}\tau} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2m\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \sqrt{\pi}$$
$$\|\cos nt\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 n\tau\,\mathrm{d}\tau}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2n\tau)\,\mathrm{d}\tau} = \sqrt{\pi}$$

故它们不是单位元素。

例 在实线性空间 C$[-\pi,\pi]$中定义内积为

$$(f(t),g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad \forall f(t),g(t)\in \mathrm{C}[-\pi,\pi]$$

试证明函数组

$$1,\cos t,\sin t,\cos 2t,\sin 2t,\cdots,\cos nt,\sin nt,\cdots$$

是两两正交的，但它们不是单位元素。

证 可求得

$$(\sin mt,\sin nt) = \int_{-\pi}^{\pi}\sin m\tau\sin n\tau\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(m-n)\tau - \cos(m+n)\tau]\,\mathrm{d}\tau = 0 \quad (m\neq n)$$

例 设欧氏空间V^3的基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的度量矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

则$\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2$与$\beta_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$的内积$(\beta_1,\beta_2) =$ $\underline{-12}$

分析 法1 由度量矩阵定义知

$(\alpha_1,\alpha_2)=2$，$(\alpha_1,\alpha_3)=-4$，$(\alpha_2,\alpha_2)=1$，$(\alpha_2,\alpha_3)=-2$

从而

$$(\beta_1,\beta_2) = (\alpha_1 + 2\alpha_2,\alpha_2 + 2\alpha_3)$$
$$= (\alpha_1,\alpha_2) + 2(\alpha_1,\alpha_3) + 2(\alpha_2,\alpha_2) + 4(\alpha_2,\alpha_3)$$
$$= 2 + 2\times(-4) + 2\times 1 + 4\times(-2) = -12$$

法2 由度量矩阵的性质得

$$(\beta_1,\beta_2)=(1,2,0)A\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=(1,2,0)\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=-12$$

例 已知$\mathbf{R}^{2\times2}$按内积

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}\ ,\qquad \forall \boldsymbol{A}=(a_{ij})_{2\times2}\ ,\ \boldsymbol{B}=(b_{ij})_{2\times2}$$

构成欧氏空间。 给定$\mathbf{R}^{2\times2}$的一个基

$$\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{G}_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$$

试求一个标准正交基。

解 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{G}_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{G}_2-\frac{(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{A}_1)}{(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1)}\boldsymbol{A}_1$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\boldsymbol{G}_3-\frac{(\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{A}_1)}{(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1)}\boldsymbol{A}_1-\frac{(\boldsymbol{G}_3,\boldsymbol{A}_2)}{(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2)}\boldsymbol{A}_2$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4=\boldsymbol{G}_4-\frac{(\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_1)}{(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_1)}\boldsymbol{A}_1-\frac{(\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_2)}{(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{A}_2)}\boldsymbol{A}_2-\frac{(\boldsymbol{G}_4,\boldsymbol{A}_3)}{(\boldsymbol{A}_3,\boldsymbol{A}_3)}\boldsymbol{A}_3$$

$$=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}\begin{pmatrix}1&-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}-\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}&\frac{3}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{1}{5}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{7}&\frac{3}{7}\\\frac{3}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$$

标准正交基为

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{\|\boldsymbol{A}_1\|}\boldsymbol{A}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_2=\frac{1}{\|\boldsymbol{A}_2\|}\boldsymbol{A}_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_3=\frac{1}{\|\boldsymbol{A}_3\|}\boldsymbol{A}_3=\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}3&3\\-4&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_4=\frac{1}{\|\boldsymbol{A}_4\|}\boldsymbol{A}_4=\frac{1}{\sqrt{63}}\begin{pmatrix}3&3\\3&-6\end{pmatrix}$$

例 已知$\mathrm{P}_2[t]$按内积

$$(f(t),g(t))=\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

构成欧氏空间，试求$\mathrm{P}_2[t]$的一个标准正交基。

解 取$\mathrm{P}_2[t]$的基 $1,t,t^2$，则

$$f_1=1$$

$$f_2=t-\frac{(t,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1=t-\frac{\int_0^1 t\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t}f_1=t-\frac{1}{2}$$

$$f_3=t^2-\frac{(t^2,f_1)}{(f_1,f_1)}f_1-\frac{(t^2,f_2)}{(f_2,f_2)}f_2=t^2-t+\frac{1}{6}$$

标准正交基为

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{(f_1,f_1)}}f_1=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\,\mathrm{d}t}}f_1=1$$

$$g_2=\frac{1}{\sqrt{(f_2,f_2)}}f_2=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1(t-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}t}}f_2=\sqrt{12}(t-\frac{1}{2})$$

$$g_3=\frac{1}{\sqrt{(f_3,f_3)}}f_3=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1(t^2-t+\frac{1}{6})^2\,\mathrm{d}t}}f_3$$

$$=\sqrt{180}(t^2-t+\frac{1}{6})$$

例 已知3维欧氏空间V的一个基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，且该基的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&2&0\\1&0&4\end{pmatrix}$$

求V的正交基 β_1,β_2,β_3 和标准正交基 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$。

解 $\beta_1=\alpha_1$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$$

$$=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\alpha_1)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\alpha_1-\frac{(\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=\alpha_3-\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$$

单位化得标准正交基

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{(\beta_1,\beta_1)}}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1,\alpha_1)}}\alpha_1=\alpha_1$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{(\beta_2,\beta_2)}}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2)}}(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{(\beta_3,\beta_3)}}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3)$$

例 设W_1,W_2是欧氏空间V的子空间，且$W_1\perp W_2$，证明 $W_1\cap W_2=\{\theta\}$。

证 设$\alpha\in W_1\cap W_2$，则$\alpha\in W_1$且$\alpha\in W_2$。又$W_1\perp W_2$，所以$(\alpha,\alpha)=0$，即$\alpha=\theta$，故

$$W_1\cap W_2=\{\theta\}$$

例 设W是欧氏空间$\mathbf{R}^3$中由向量

$$\boldsymbol{a}_1=(1,1,2),\quad \boldsymbol{a}_2=(2,2,3)$$

生成的子空间，求$W^\perp$。

解 设$\boldsymbol{a}=(x_1,x_2,x_3)\in W^\perp$，则

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_1)=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}_2)=0$$

即 $\begin{cases}x_1+x_2+2x_3=0\\2x_1+2x_2+3x_3=0\end{cases}$，同解方程组为$\begin{cases}x_1=-x_2\\x_3=0\end{cases}$，

通解为$\begin{cases}x_1=-k\\x_2=k\\x_3=0\end{cases}$；故 $\boldsymbol{a}=k(-1,1,0)$，从而 $W^\perp=L(\boldsymbol{b})$，

其中$\boldsymbol{b}=(-1,1,0)$。

例 欧氏空间 $\mathbf{R}^{2\times2}$ 的内积为

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}a_{ij}b_{ij}$$

子空间 $W=L(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)$，其中

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

求 $W^\perp$ 的一个标准正交基。

解 设$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\in W^\perp$,则

$$\begin{cases}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{X})=x_1+x_2=0\\(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{X})=x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

其基础解系为 $(1,-1,1,0)^T$，$(1,-1,0,1)^T$

于是$W^\perp$的基为 $\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

正交化 $\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{B}_1=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$

再单位化得 $W^\perp$的标准正交基

$$\boldsymbol{D}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{D}_2=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$$

§9、欧氏空间的线性变换

例 设$\boldsymbol{Q}$是n阶正交矩阵，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$，规定

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$$

证明T是$\mathbf{R}^n$的正交变换。

证 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ 有

$$(T(\boldsymbol{x}), T(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y})$$
$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

从而T是正交变换。

(2) 验证T是W中的对称变换；

(3) 求W的一个标准正交基，使 T在该基下的矩阵为对角矩阵。

解 (1) W的基为

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

它们已正交，单位化得W的一个标准正交基

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 可求得

例 已知$\mathbf{R}^n$的线性变换

$$T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$$

其中$\boldsymbol{A}$是n阶实对称矩阵。证明T是$\mathbf{R}^n$的对称变换。

证 对任意 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ 有

$$(T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, T(\boldsymbol{y}))$$

从而T是对称变换。

$$T(\boldsymbol{B}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_1 + 2\boldsymbol{B}_2$$

$$T(\boldsymbol{B}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$$

$$T(\boldsymbol{B}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{B}_3$$

可见T在标准正交基 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{B}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

由于$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵，所以T是W中的对称变换。

例 已知矩阵空间$\mathbf{R}^{2\times2}$的子空间

$$\mathrm{W} = \left\{ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \middle| \, x_3 - x_4 = 0, \quad x_i \in \mathbf{R} \right\}$$

$\mathbf{R}^{2\times2}$中的内积为

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ij}, \ \forall \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

W中的线性变换为

$$T(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}, \quad \forall \boldsymbol{X} \in \mathrm{W}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 求子空间W的一个标准正交基；

(3) 可求得 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1)$，从而$\boldsymbol{A}$的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -1$。

对应 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_1 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{p}_2 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}} \quad (\text{已正交})$$

对应 $\lambda_3 = -1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3 = (-1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$。

故正交矩阵 $\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 3 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

由 $(\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\boldsymbol{D}_3)=(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\boldsymbol{B}_3)\boldsymbol{Q}$ 得W的标准正交基

$$\boldsymbol{D}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{B}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{D}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

T在该基下的矩阵为$\boldsymbol{\Lambda}$。

例 设欧氏空间V^n的正交变换T的特征值都是实数，证明存在V^n的标准正交基，使得T在该基下的矩阵为对角矩阵。

证 取V^n的标准正交基 $\gamma_1,\cdots,\gamma_n$， 则T在该基下的矩阵$\boldsymbol{A}$是正交矩阵。由于$\boldsymbol{A}$是正规矩阵，且特征值均为实数，所以存在正交矩阵$\boldsymbol{Q}$， 使

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\boldsymbol{\Lambda}$$

令 $$(\delta_1,\cdots,\delta_n)=(\gamma_1,\cdots,\gamma_n)\boldsymbol{Q}$$

则 $\delta_1,\cdots,\delta_n$ 是标准正交基，T在该基下的矩阵为$\boldsymbol{\Lambda}$。

例 在欧氏空间V^n中，若2是对称变换T的一个2重特征值，则T在子空间

$$\mathrm{W}=\left\{\alpha \middle| T(\alpha)=2\alpha,\alpha\in\mathrm{V}^n\right\}$$

的基下的矩阵为<u>$2\boldsymbol{I}_2$</u>。

分析 T在V^n的标准正交基下的矩阵$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵。 由于2是T的2重特征值， 从而2是$\boldsymbol{A}$的2重特征值。由实对称矩阵的性质知，$\boldsymbol{A}$对应特征值2有2个线性无关的特征向量， 于是T对应特征值2有2个线性无关的特征向量。 注意到W是T对应特征值2的所有特征向量加上零向量组成的，所以

例 设欧氏空间V^n的基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵为$\boldsymbol{G}$，正交变换T在该基下的矩阵为$\boldsymbol{A}$，证明：

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$$

证 法1 由 $T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{A}$ 知

$$T(\alpha_i)=\alpha_1a_{1i}+\alpha_2a_{2i}+\cdots+\alpha_na_{ni}$$

设 $\boldsymbol{G}=(g_{ij})_{n\times n}$，则有

$$\begin{aligned}g_{ij}&=(\alpha_i,\alpha_j)=(T(\alpha_i),T(\alpha_j))\\&=(\alpha_1a_{1i}+\cdots+\alpha_na_{ni},\alpha_1a_{1j}+\cdots+\alpha_na_{nj})\\&=\sum_{s=1}^n\sum_{t=1}^n a_{si}(\alpha_s,\alpha_t)a_{tj}\end{aligned}$$

W的维数为2，取W的基 α_1,α_2，则

$$T(\alpha_1)=2\alpha_1,T(\alpha_2)=2\alpha_2$$

从而 $$T(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

即T在W的基下的矩阵为$2\boldsymbol{I}_2$。

$$=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})\boldsymbol{G}\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{G}$。

法2 由于T是正交变换，从而 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 也是V^n的基（不一定是标准正交基）。又由

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{A}$$

知，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 的过渡矩阵为$\boldsymbol{A}$，故基 $T(\alpha_1),T(\alpha_2),\cdots,T(\alpha_n)$ 的度量矩阵为

$$B = A^{\mathrm{T}}GA$$

但

$$B = ((T(\alpha_i),T(\alpha_j)))_{n\times n} = ((\alpha_i,\alpha_j))_{n\times n} = G$$

于是 $$A^{\mathrm{T}}GA = G$$

§10、酉空间介绍

例 在n维向量空间$\mathbf{C}^n$中，对任意

$$x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}，\ y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^n$$

规定 $$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = y^{\mathrm{H}}x = x^{\mathrm{T}}\overline{y}$$

易证它是内积，$\mathbf{C}^n$按上述内积构成酉空间。

例 在mn维矩阵空间$\mathbf{C}^{m\times n}$中，对任意$A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$，规定

$$(A,B) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}$$

则它是内积，$\mathbf{C}^{m\times n}$按此内积构成酉空间。

例 在复线性空间C$[a,b]$中，规定

$$(f(t),g(t)) = \int_a^b f(\tau)\overline{g(\tau)}\,\mathrm{d}\tau，\quad \forall f(t),g(t)\in \mathrm{C}[a,b]$$

由定积分性质易知它是内积，C$[a,b]$按此内积构成酉空间。

例 设V是n维复线性空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是V的一个基，对任意 $\alpha,\beta\in \mathrm{V}$ 有

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$$
$$\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$$

规定 $$(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$$

则它是内积，V按此内积构成酉空间。

§11、投影矩阵

例 已知$\mathbf{R}^3$的子空间 $\mathrm{L} = \mathrm{L}(x_1,x_2)$，$\mathrm{M} = \mathrm{L}(y_1)$，其中

$$x_1 = (1,2,0)^{\mathrm{T}}，\ x_2 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}，\ y_1 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$$

求投影矩阵 $P_{\mathrm{L,M}}$ 和向量 $x = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$ 沿着M到L的投影。

解 令

$$X = (x_1,x_2) = \begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&1\end{pmatrix},\quad Y = (y_1) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

则

$$P_{\mathrm{L,M}} = (X,O)(X,Y)^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\2&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

$$P_{\mathrm{L,M}}x = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

例 设$\mathbf{R}^3$中子空间L是由向量

$$x_1 = (1,1,0)^{\mathrm{T}}，\quad x_2 = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$$

生成的，求正交投影矩阵P_{L}和向量 $x = (1,2,3)^{\mathrm{T}}$沿着$\mathrm{L}^{\perp}$到L的投影。

解 令 $X = (x_1,x_2) = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$，则

$$P_{\mathrm{L}} = X(X^{\mathrm{H}}X)^{-1}X^{\mathrm{H}}$$

$$= \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2\\2&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$