第七章 矩阵的直积

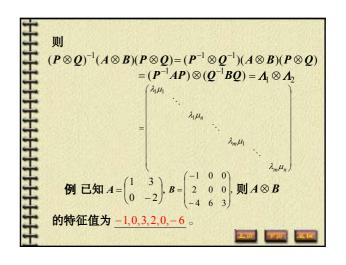
例 已知 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, 试求 $A \otimes B \Rightarrow B \otimes A_{\circ}$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 1 & 2 & 3 \\ -6 & -4 & -2 & | & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

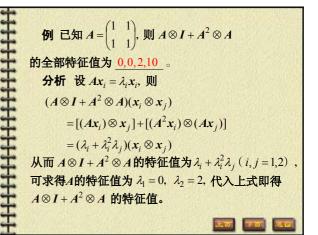
$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 2A & 3A \\ -3A & -2A & -A \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 4 & 2 & | & 6 & 3 \\ 0 & -1 & | & 0 & -2 & | & 0 & -3 \\ -6 & -3 & | & -4 & -2 & | & -2 & -1 \\ 0 & 3 & | & 0 & 2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

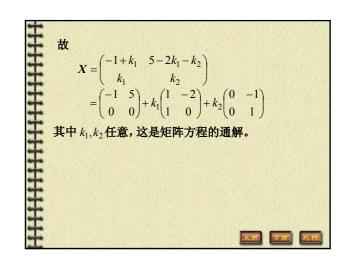


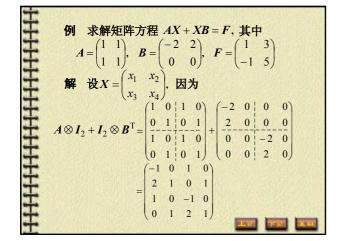
例 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 是单位列向量, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是正交矩阵,则 $\|A \otimes x\|_F = \sqrt{n}$ 。

分析 $\|A \otimes x\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}[(A \otimes x)^H (A \otimes x)]}$ $= \sqrt{\operatorname{tr}[(A^H \otimes x^H)(A \otimes x)]}$ $= \sqrt{\operatorname{tr}[(A^H A) \otimes (x^H x)]}$ $= \sqrt{\operatorname{tr}(I_n \otimes 1)} = \sqrt{\operatorname{tr}I_n} = \sqrt{n}$ 例 设 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 是单位列向量,则 $\|x \otimes y\|_2 = \underline{1}$ 分析 $\|x \otimes y\|_2 = \sqrt{(x \otimes y)^H (x \otimes y)}$ $= \sqrt{(x^H x) \otimes (y^H y)} = \sqrt{1 \otimes 1} = 1$



例 设
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
,则 $\overline{A} = (1,4,2,5,3,6)^{\mathrm{T}}$ 。





例 设 $A \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times n}$, A的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, B的特征值是 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 。证明: 矩阵方程 AXB - X = -F 存在唯一解的充要条件是 $\lambda_i \mu_j \neq 1$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 证 对矩阵方程取拉直得 $(A \otimes B^{\mathrm{T}} - I_m \otimes I_n) \bar{X} = -\bar{F}$ 由于矩阵 $A \otimes B^{\mathrm{T}} - I_m \otimes I_n$ 的特征值为 $\lambda_i \mu_j - 1$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 而矩阵方程有唯一解的充要条件是 $A \otimes B^{\mathrm{T}} - I_m \otimes I_n$ 可逆,即 $\lambda_i \mu_j - 1 \neq 0$ 。 证毕

