第四章　矩阵分解

§1　三角分解介绍

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$ 的Doolittle分解和LDU分解。

解

$$\begin{array}{ccc}5&2&-4\\ \frac{2}{5}&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{array}$$

故

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&2&-4\\0&\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{2}{5}&1&0\\ -\frac{4}{5}&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5&&\\&\frac{1}{5}&\\&&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\frac{2}{5}&-\frac{4}{5}\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I&O\\-CA^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A&B\\O&D-CA^{-1}B\end{pmatrix}$$

取行列式得

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\det A\cdot\det(D-CA^{-1}B)\\&=\det[A(D-CA^{-1}B)]\\&=\det(AD-ACA^{-1}B)\\&=\det(AD-CAA^{-1}B)\\&=\det(AD-CB)\end{aligned}$$

例 求正定矩阵 $A=\begin{pmatrix}5&-2&0\\-2&3&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$ 的Cholesky分解。

解

$$\begin{array}{ccc}\sqrt{5}&&\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}&\sqrt{\frac{11}{5}}&\\ 0&-\sqrt{\frac{5}{11}}&\sqrt{\frac{6}{11}}\end{array}$$

所以

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{5}&&\\-\frac{2}{\sqrt{5}}&\sqrt{\frac{11}{5}}&\\0&-\sqrt{\frac{5}{11}}&\sqrt{\frac{6}{11}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{5}&-\frac{2}{\sqrt{5}}&0\\&\sqrt{\frac{11}{5}}&-\sqrt{\frac{5}{11}}\\&&\sqrt{\frac{6}{11}}\end{pmatrix}$$

例 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 证明

$$\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$$

证 构造矩阵 $\begin{pmatrix}I_m&A\\-B&I_n\end{pmatrix}$, 因为

$$\begin{pmatrix}I_m&O\\B&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&A\\-B&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m&A\\O&I_n+BA\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I_m&-A\\O&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&A\\-B&I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m+AB&O\\-B&I_n\end{pmatrix}$$

所以

$$\det(I_n+BA)=\det\begin{pmatrix}I_m&A\\-B&I_n\end{pmatrix}=\det(I_m+AB)$$

例 设 A, B 为同阶方阵，证明

$$\det\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}=\det(A+B)\det(A-B)$$

证 因为

$$\begin{pmatrix}I&O\\I&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A&B\\B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&O\\-I&I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-B&B\\O&A+B\end{pmatrix}$$

取行列式即得。

例 设A, B, C, D为同阶方阵，A可逆，且$AC=CA$。证明

$$\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\det(AD-CB)$$

证 因为

例 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{C}^{n\times m}$, 且 $\lambda\neq0$。证明

$$\det(\lambda I_m-AB)=\lambda^{m-n}\det(\lambda I_n-BA)$$

(即AB和BA的非零特征值相同)。

证 构造矩阵 $\begin{pmatrix}I_m&A\\B&\lambda I_n\end{pmatrix}$, 因为

$$\begin{pmatrix}I_m&O\\-B&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&A\\B&\lambda I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m&A\\O&\lambda I_n-BA\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}I_m&-\frac{1}{\lambda}A\\O&I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_m&A\\B&\lambda I_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m-\frac{1}{\lambda}AB&O\\B&\lambda I_n\end{pmatrix}$$

所以

$$\det(\lambda I_n - BA) = \det\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix}$$
$$= \det\begin{pmatrix} I_m - \frac{1}{\lambda}AB & O \\ B & \lambda I_n \end{pmatrix}$$
$$= \det(I_m - \tfrac{1}{\lambda}AB)\det(\lambda I_n)$$
$$= \frac{1}{\lambda^m}\det(\lambda I_m - AB)\lambda^n$$
$$= \lambda^{n-m}\det(\lambda I_m - AB)$$

例 试用Householder变换化向量 $x = (-3, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ 与 e_1 同方向。

解 法1. 取 $\alpha = \|x\|_2 = 5$, 则

$$u = \frac{x - 5e_1}{\|x - 5e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{80}}(-8, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

从而 $$H = I - 2uu^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

§2 QR分解

例 设A是n阶Householder矩阵，则

$\cos(2\pi A) =$ __I__； $\sin(2\pi A) =$ __O__。

分析 因为 $A^2 = I$, 所以

$$\cos(2\pi A) = I - \frac{(2\pi)^2}{2!}A^2 + \frac{(2\pi)^4}{4!}A^4 - \frac{(2\pi)^6}{6!}A^6 + \cdots$$
$$= I(1 - \frac{(2\pi)^2}{2!} + \frac{(2\pi)^4}{4!} - \frac{(2\pi)^6}{6!} + \cdots)$$
$$= I\cos(2\pi) = I$$
$$\sin(2\pi A) = 2\pi A - \frac{(2\pi)^3}{3!}A^3 + \frac{(2\pi)^5}{5!}A^5 - \frac{(2\pi)^7}{7!}A^7 + \cdots$$
$$= A(2\pi - \frac{(2\pi)^3}{3!} + \frac{(2\pi)^5}{5!} - \frac{(2\pi)^7}{7!} + \cdots)$$
$$= A\sin(2\pi) = O$$

使 $$Hx = 5e_1$$

法2. 取 $\alpha = -\|x\|_2 = -5$, 则

$$u = \frac{x + 5e_1}{\|x + 5e_1\|_2} = \frac{1}{\sqrt{20}}(2, 0, 0, 4)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 0, 2)^{\mathrm{T}}$$

从而 $$H = I - 2uu^{\mathrm{T}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

使 $$Hx = -5e_1$$

例 设 H_m和H_n分别是m阶和n阶Householder矩阵，问 $\begin{pmatrix} H_m & O \\ O & H_n \end{pmatrix}$ 是否 $m+n$ 阶Householder矩阵?为什么?

解 不是。因为

$$\det\begin{pmatrix} H_m & O \\ O & H_n \end{pmatrix} = \det H_m \cdot \det H_n = (-1)\cdot(-1) = 1$$

例 试用Givens变换化向量 $x = (0, 3, 0, -4)^{\mathrm{T}}$ 与 e_1 同方向。

解 取 $c_1 = \frac{0}{\sqrt{0^2+3^2}} = 0$, $s_1 = \frac{3}{\sqrt{0^2+3^2}} = 1$, 则

$$T_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 使\ T_{12}x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

又取 $c_2 = \frac{3}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{3}{5}$, $s_2 = \frac{-4}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = -\frac{4}{5}$, 则

$$T_{14} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad 使\ T_{14}T_{12}x = 5e_1$$

例 试求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&2\end{pmatrix}$ 的QR分解。

解 由于 $\boldsymbol{a}_1=(0,0,2)^{\mathrm T}$, 取 $\alpha_1=\|\boldsymbol{a}_1\|_2=2$, 则

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{H}_1=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 使 $\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&4&-2\\0&3&1\end{pmatrix}$

例 试求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&2\end{pmatrix}$ 的QR分解。

解 将列向量 $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ 正交化得

$$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{a}_2-\frac{2}{4}\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{a}_3-\frac{4}{4}\boldsymbol{p}_1-\frac{-5}{25}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}\\-\frac{6}{5}\\0\end{pmatrix}$$

单位化得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{5}\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{4}{5}\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\\0\end{pmatrix}$$

又由于 $\boldsymbol{b}_2=(4,3)^{\mathrm T}$, 取 $\alpha_2=\|\boldsymbol{b}_2\|_2=5$, 则

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{b}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

于是 $\tilde{\boldsymbol{H}}_2=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm T}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\3&-4\end{pmatrix}$, 令

$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1&\\&\tilde{\boldsymbol{H}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\end{pmatrix} \text{ 则 } \boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

故 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2)\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

于是
$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{p}_1=2\boldsymbol{q}_1\\ \boldsymbol{a}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{q}_1+5\boldsymbol{q}_2\\ \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{p}_1-\frac{1}{5}\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_3=2\boldsymbol{q}_1-\boldsymbol{q}_2+2\boldsymbol{q}_3\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$

例 试求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\0&4&-2\\2&1&2\end{pmatrix}$ 的QR分解。

解 取 $c_1=0, s_1=1$, 则

$$\boldsymbol{T}_{13}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \text{ 使 } \boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&4&-2\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

又取 $c_2=\frac{4}{5}, s_2=-\frac{3}{5}$, 则

$$\boldsymbol{T}_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix} \text{ 使 } \boldsymbol{T}_{23}\boldsymbol{T}_{13}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_{13}^{\mathrm T}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm T}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2\\0&5&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}$

例 用Householder变换求矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&3&1&-4\\0&4&-2&3\\2&1&2&4\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

的QR分解。

解 取 $\boldsymbol{a}_1=(0,0,2,0)^{\mathrm T}$, 则 $\alpha_1=\|\boldsymbol{a}_1\|_2=2$, 且

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{a}_1-2\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

于是 $H_1=I_4-2u_1u_1^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ 使得 $H_1A=\begin{pmatrix}2&1&2&4\\0&4&-2&3\\0&3&1&-4\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$

又取 $\boldsymbol{b}_2=(4,3,0)^{\mathrm{T}}$，则 $\alpha_2=\|\boldsymbol{b}_2\|_2=5$，且

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{\boldsymbol{b}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1}{\|\boldsymbol{b}_2-5\tilde{\boldsymbol{e}}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$$

于是
$$\tilde{\boldsymbol{H}}_2=\boldsymbol{I}_3-2\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\\\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

令
$$\boldsymbol{H}_2=\begin{pmatrix}1&\boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{0}&\tilde{\boldsymbol{H}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\\0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

则
$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}2&1&2&4\\0&5&-1&0\\0&0&-2&5\\0&0&0&-5\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

故
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}=(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_2)=\begin{pmatrix}0&\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}&0\\0&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&2&4\\0&5&-1&0\\0&0&-2&5\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$$

例 用Givens变换求矩阵
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$
的QR分解。

解 取 $c_1=\frac{0}{\sqrt{0^2+1^2}}=0,\ s_1=1$，则
$$\boldsymbol{T}_{12}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{且}\quad \boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&-1&0&-1\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

又取 $c_2=\frac{1}{\sqrt{2}},s_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\boldsymbol{T}_{14}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\quad \text{且}\quad \boldsymbol{T}_{14}(\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0\\0&-1&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

再取 $c_3=-\frac{1}{\sqrt{2}},s_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则
$$\boldsymbol{T}_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \text{且}\quad \boldsymbol{T}_{23}(\boldsymbol{T}_{14}\boldsymbol{T}_{12}\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{R}$$

于是
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{14}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_{23}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 设 $\boldsymbol{H}_u$ 和 $\boldsymbol{H}_w$ 都是 n 阶Householder矩阵，则 $\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{H}_u\boldsymbol{H}_w$ 也是Householder矩阵。 (　)

分析 对。因为
$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{H}_u\boldsymbol{H}_w&=\boldsymbol{H}_w(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}})\boldsymbol{H}_w\\&=\boldsymbol{H}_w^2-2(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})^{\mathrm{H}}\\&=\boldsymbol{I}-2(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

由于
$$(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_w^{\mathrm{H}}\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{u}=1$$

故 $\boldsymbol{H}_w\boldsymbol{H}_u\boldsymbol{H}_w$ 也是Householder矩阵。

例 试用Householder变换化向量 $\boldsymbol{x}=(\mathrm{i},-2\mathrm{i}0,0,2)^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{e}_1$ 同方向。

解 $|\alpha|=\|\boldsymbol{x}\|_2=3$，(因为 $x_1=\mathrm{i}$，且要求 $\alpha\overline{x_1}$ 为实数)

取 $\alpha=3\mathrm{i}$ 或 $\alpha=-3\mathrm{i}$，则
$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}-3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{x}-3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{12}}(-2\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-\mathrm{i},-\mathrm{i},0,1)^{\mathrm{T}}$$

(或 $\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{x}+3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1}{\|\boldsymbol{x}+3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt{24}}(4\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2\mathrm{i},-\mathrm{i},0,1)^{\mathrm{T}}$)

从而
$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{H}}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&0&2\mathrm{i}\\-2&1&0&2\mathrm{i}\\0&0&3&0\\-2\mathrm{i}&-2\mathrm{i}&0&1\end{pmatrix}\left(\text{或}\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&0&-2\mathrm{i}\\2&2&0&\mathrm{i}\\0&0&3&0\\2\mathrm{i}&-\mathrm{i}&0&2\end{pmatrix}\right)$$

使得
$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1\quad (\text{或}\ \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}=-3\mathrm{i}\boldsymbol{e}_1)$$

例 设T是n阶Given矩阵，H_u是n阶Householder矩阵，则 TH_uT^{-1}也是Householder矩阵。 （ ）

分析 对。因为

$$\begin{aligned}TH_uT^{-1} &= T\,(I-2uu^{\mathrm{H}})\,T^{\mathrm{H}}\\ &= TT^{\mathrm{H}}-2(Tu)(Tu)^{\mathrm{H}}\\ &= I-2(Tu)(Tu)^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

由于

$$(Tu)^{\mathrm{H}}(Tu)=u^{\mathrm{H}}T^{\mathrm{H}}Tu=u^{\mathrm{H}}u=1$$

故TH_uT^{-1}也是Householder矩阵。

则
$$H_1AH_1=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\5&1&-2\\0&2&1\end{pmatrix}$$

法2. 利用Givens变换

取 $c=\frac{3}{5}, s=\frac{4}{5}$，则

$$T_{23}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\quad 且\ T_{23}AT_{23}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\\5&1&2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

例 试用Givens变换化向量$x=(\mathrm{i},-2\mathrm{i},0,2)^{\mathrm{T}}$与$e_1$同方向。

解 取 $c_1=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt5}$，$s_1=-\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt5}$，则

$$T_{12}=\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt5}&\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt5}&0&0\\\frac{2\mathrm{i}}{\sqrt5}&\frac{\mathrm{i}}{\sqrt5}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\ 使\ T_{12}x=\begin{pmatrix}\sqrt5\\0\\0\\2\end{pmatrix}$$

又取 $c_2=\frac{\sqrt5}{3}$，$s_2=\frac{2}{3}$，则

$$T_{14}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt5}{3}&0&0&\frac{2}{3}\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\frac{2}{3}&0&0&\frac{\sqrt5}{3}\end{pmatrix}\ 使\ T_{14}T_{12}x=3e_1$$

例 化矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0&1\\0&-1&-2&4\\0&-2&1&3\\1&4&3&1\end{pmatrix}$正交相似于三对角阵。

解 法1. 用Householder变换

对$a_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$，取$\alpha_1=\|a_3\|_2=1$，则

$$u_1=\frac{a_3-\tilde e_1}{\|a_3-\tilde e_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

于是
$$\tilde H_1=I-2u_1u_1^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

例 化矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\3&1&2\\4&-2&1\end{pmatrix}$正交相似于Hessenberg阵。

解 法1. 利用Householder变换

对$a_2=(3,4)^{\mathrm{T}}$，取$\alpha_1=\|a_2\|_2=5$，则

$$u_1=\frac{a_2-5\tilde e_1}{\|a_2-5\tilde e_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

于是 $\tilde H_1=I-2u_1u_1^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$，令

$$H_1=\begin{pmatrix}1&0^{\mathrm{T}}\\0&\tilde H_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\0&\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$$

令
$$H_1=\begin{pmatrix}1&0^{\mathrm{T}}\\0&\tilde H_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

则
$$H_1AH_1=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&1&3&4\\0&3&1&-2\\0&4&-2&-1\end{pmatrix}$$

对$a_2=(3,4)^{\mathrm{T}}$，取$\alpha_2=\|a_2\|_2=5$，则

$$u_2=\frac{a_2-5\hat e_1}{\|a_2-5\hat e_1\|_2}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

从而
$$\hat H_2=I-2u_2u_2^{\mathrm{T}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$$

令
$$H_2=\begin{pmatrix} I_2 & O \\ O & \hat{H}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

则
$$H_2H_1AH_1H_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}=T$$

故正交矩阵
$$Q=H_1H_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

使
$$Q^{\mathrm{T}}AQ=T$$

§3 满秩分解

例 求矩阵
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$
的Hermite标准形H和变换阵S。

解
$$(A \mid I)=\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2+r_1}$$

法2. 利用Givens变换

取 $c_1=0,\ s_1=1$，则
$$T_{24}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 且\ T_{24}AT_{24}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

又取 $c_2=\frac{3}{5},\ s_2=-\frac{4}{5}$，则
$$T_{34}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad 且\ T_{34}T_{24}AT_{24}^{\mathrm{T}}T_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -12 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_1-r_2 \\ r_2\times(-1)}]{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+4r_2}}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)\xrightarrow[\substack{r_4\times(-1) \\ r_3\leftrightarrow r_4}]{\substack{r_1+r_4 \\ r_2-r_4}}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

故正交矩阵
$$Q=T_{24}^{\mathrm{T}}T_{34}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

使
$$Q^{\mathrm{T}}AQ=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -\frac{11}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

故A的Hermite标准形H和所用的变换阵S为
$$H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & -5 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

使得
$$SA=H$$

例 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&1&3\\0&2&2&-1&-6\end{pmatrix}$$

求可逆矩阵S和置换矩阵P 使得

$$SAP=\begin{pmatrix}I_r&K\\O&O\end{pmatrix}$$

解 可求得A的Hermite标准形H和可逆矩阵S为

$$\begin{pmatrix}H\\I_5\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{ccccc}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\\\hdashline 1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{c_2\leftrightarrow c_3\\c_3\leftrightarrow c_4}]{\substack{c_5+3c_3\\c_1\leftrightarrow c_2}}\left(\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\\hdashline 0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right)$$

故 $T=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 使 $SAT=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

$$H=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-3&-5&0&-1\\-2&-4&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

使 $SA=H$。如取 $P=(e_2,e_3,e_4,e_1,e_5)$，则

$$SAP=HP=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&-3\\0&0&1&0&0\\\hdashline 0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

如对矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&1&3\\0&2&2&-1&-6\end{pmatrix}$$

已求得矩阵

$$S=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-3&-5&0&-1\\-2&-4&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix},\ T=\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

使得

$$SAT=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

例 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&1&3\\0&2&2&-1&-6\end{pmatrix}$$

求可逆矩阵S和T 使得SAT为等价标准形。

解 可求得A的Hermite标准形H和可逆矩阵S为

$$H=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}2&3&0&1\\-3&-5&0&-1\\-2&-4&0&-1\\-1&-1&1&0\end{pmatrix}$$

使 $SA=H$。又有

又可求得

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2&0\\-1&0&-1&0\\0&-1&1&1\\2&2&-1&0\end{pmatrix},\ T^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

故

$$A=S^{-1}\begin{pmatrix}I_3\\\mathbf{0}^{\mathrm T}\end{pmatrix}(I_3\quad \mathbf{0})T^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

例 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&-1&0&-1&0\\0&0&-1&1&3\\0&2&2&-1&-6\end{pmatrix}$ 的满秩分解。

解 $A\xrightarrow[r_4-2r_1]{r_2+r_1}\begin{pmatrix}0&1&-1&2&3\\0&0&-1&1&3\\0&0&-1&1&3\\0&0&4&-5&-12\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times(-1)]{\substack{r_1-r_2\\r_3-r_2\\r_4+4r_2}}$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&1&-1&-3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\substack{r_1+r_4\\r_2-r_4\\r_4\times(-1)\\r_3\leftrightarrow r_4}}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}$$

$(j_1=2,j_2=3,j_3=4)$

故 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{FG}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&0&-1\\0&-1&1\\2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

§4 奇异值分解

例 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$ 的奇异值分解。

解 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=0$, 相应的特征向量为

$$\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{e}_3$$

从而 $\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{I}_3$

法1. 取 $\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{\Sigma}=(\sqrt{5})$, 于是

$$\boldsymbol{U}_1=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}\end{pmatrix}$$

再取 $\boldsymbol{U}_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{U}=(\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2)$ 为酉矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

法2. 因为 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$, 其特征值为

$$\lambda_1=5,\quad\lambda_2=0$$

对应的特征向量分别为

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

单位化得酉矩阵 $\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$

则$\boldsymbol{A}$的奇异值分解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

注 在法2中，如果取对应矩阵 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}$ 的特征值 $\lambda_1=5$ 的特征向量为 $(-1,-2)^{\mathrm{T}}$, 相应的可得酉矩阵

$\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}5&\\&0\end{pmatrix}$

但此时 $\boldsymbol{U}\begin{pmatrix}\sqrt5&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{A}$

因此用法2进行计算时，尚需对结果进行检验。