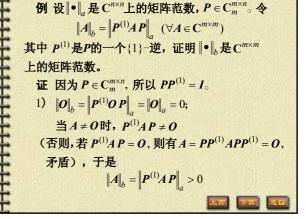


又因为
$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}$$
,所以
$$\sin(\frac{\pi}{2}AA^{(1)}) = \frac{\pi}{2}AA^{(1)} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!}(AA^{(1)})^3 + \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!}(AA^{(1)})^5 - \cdots$$

$$= (AA^{(1)})(\frac{\pi}{2} - \frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!} - \frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7!} + \cdots)$$

$$= (AA^{(1)})\sin(\frac{\pi}{2}) = AA^{(1)}$$



2)
$$\|kA\|_{b} = \|P^{(1)}(kA)P\|_{a} = \|kP^{(1)}AP\|_{a}$$

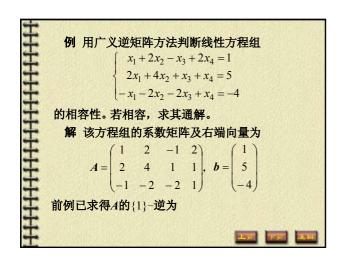
 $= |k\|P^{(1)}AP\|_{a} = |k\|A\|_{b};$
3) $\|A+B\|_{b} = \|P^{(1)}(A+B)P\|_{a}$
 $\leq \|P^{(1)}AP\|_{a} + \|P^{(1)}BP\|_{a} = \|A\|_{b} + \|B\|_{b}$
4) $\|AB\|_{b} = \|P^{(1)}ABP\|_{a} = \|P^{(1)}APP^{(1)}BP\|_{a}$
 $\leq \|P^{(1)}AP\|_{a}\|P^{(1)}BP\|_{a} = \|A\|_{b}\|B\|_{b}$

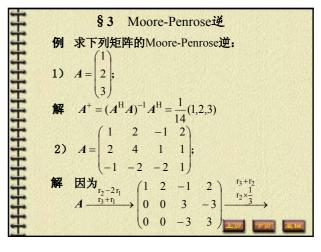
$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y$$

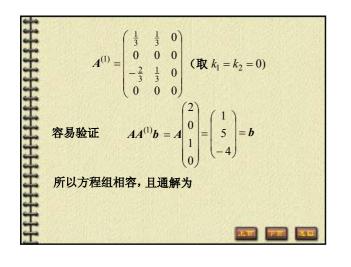
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

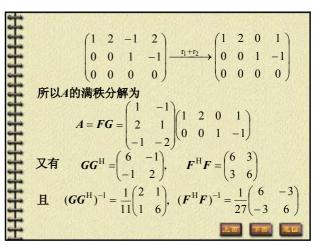
$$(y_1, y_2, y_3, y_4 任意)$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} y_4 \quad (y_2, y_4 任意)$$









从而
$$A^{+} = G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -6 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

同理,由
$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix} (I & O)$$
 得
$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$
而由 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ A \end{pmatrix} (O & I)$ 得 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$

3)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m \times n}$$

解 因为 $A = FG = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{m \times 1} (1 & \cdots & 1)_{1 \times n}$

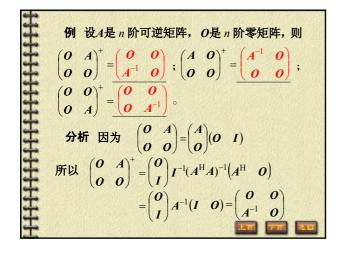
所以 $A^+ = G^H (GG^H)^{-1} (F^H F)^{-1} F^H$

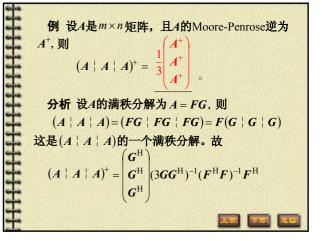
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n \times 1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m} (1 & \cdots & 1)_{1 \times m} = \frac{1}{mn} A^T$$

例 设 A 是 n 阶 可 逆矩阵,则
$$\begin{pmatrix}
A & A \\
A & A
\end{pmatrix}^{+} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix}
A^{-1} & A^{-1} \\
A^{-1} & A^{-1}
\end{pmatrix}$$
分析 因为 $\begin{pmatrix}
A & A \\
A & A
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
A \\
A
\end{pmatrix} (I & I)$, 故
$$\begin{pmatrix}
A & A \\
A & A
\end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix}
I \\
I
\end{pmatrix} (2I)^{-1} (2A^{H}A)^{-1} (A^{H} & A^{H})$$

$$= \begin{pmatrix}
I \\
I
\end{pmatrix} \frac{1}{2} I \cdot \frac{1}{2} A^{-1} (A^{H})^{-1} (A^{H} & A^{H})$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix}
I \\
I
\end{pmatrix} A^{-1} (I & I) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix}
A^{-1} & A^{-1} \\
A^{-1} & A^{-1}
\end{pmatrix}$$





$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} G^{H} (GG^{H})^{-1} (F^{H}F)^{-1} F^{H} \\ G^{H} (GG^{H})^{-1} (F^{H}F)^{-1} F^{H} \\ G^{H} (GG^{H})^{-1} (F^{H}F)^{-1} F^{H} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} A^{+} \\ A^{+} \\ A^{+} \end{pmatrix}$$

$$x = A^{+}b + (I - A^{+}A)y$$

$$= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1} \\ y_{2} \\ y_{3} \\ y_{4} \end{pmatrix}$$

$$(y_{1}, y_{2}, y_{3}, y_{4} 任意)$$
极小范数解为
$$x_{0} = A^{+}b = \frac{1}{11} (5, 10, 8, -3)^{T}$$

§ 4 A+的应用

用广义逆矩阵方法判断线性方程组 $x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1$

 $2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5$ $-x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4$

是否相容?如果相容,求通解和极小范数解: 如果不相容, 求全部最小二乘解和极小范数最小 二乘解。

解 该方程组的系数矩阵和右端向量为

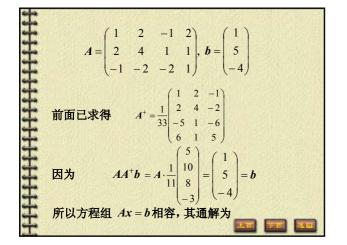


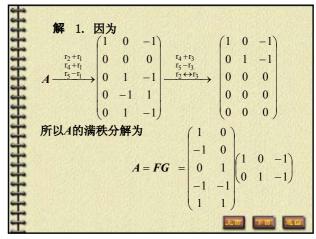
例 已知

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- 1. 求A的满秩分解;
- 2. 求 A+;
- 3. 用广义逆方法判断 Ax = b 是否有解:
- 4. 求 Ax = b 的极小范数解或极小范数最小 二乘解(指出所求的是哪种解)。





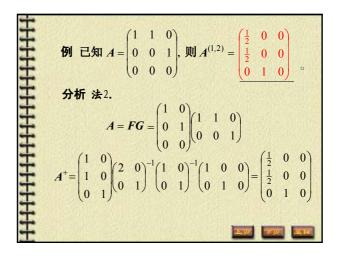


2.
$$A^{+} = G^{H}(GG^{H})^{-1}(F^{H}F)^{-1}F^{H}$$

$$= \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 8 & -8 & -8 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 10 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$
3. $AA^{+}b = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \neq b \quad Ax = b$ 无解;
4. 极小范数最小二乘解 $x_{0} = A^{+}b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

例 已知
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, 则 $A^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ \circ 分析 法1. 取 $S = I_3$, $P = (e_1, e_3, e_2)$, 则
$$SAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 从而
$$A^{(1,2)} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例 设
$$x_1, x_2, \dots, x_m (m > 1)$$
 是 \mathbf{R}^n 中两两正交的
单位列向量,记 $A = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,则 $A^+ = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix}$ 。
分析 因为 $A = FG = (x_1, x_2, \dots, x_m)I_n$,所以 $A^+ = (F^TF)^{-1}F^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix} = I_m^{-1} \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{pmatrix}$



例 设
$$A \in C_n^{m \times n}$$
, 证明 $\|AA^+\|_2 = 1$ 。
证 $\|AA^+\|_2 = \sqrt{(AA^+)^H (AA^+)}$ 的最大特征值
但 $(AA^+)^H (AA^+) = (AA^+)(AA^+) = AA^+$
记 $B = AA^+$, 注意 $B^2 = (AA^+)^2 = AA^+ = B$
设 $Bx = \lambda x$, 则有
$$\lambda x = Bx = B^2 x = \lambda^2 x$$
由 $x \neq 0$ 得 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$ 是 B的特征值。
由 A 列满秩知,当 $x \neq 0$ 时, $Ax \neq 0$,于是
$$B(Ax) = AA^+ (Ax) = Ax$$
即 1 是 B的特征值,故
$$\|AA^+\|_2 = \sqrt{B}$$
 的最大特征值 = 1