第七章　矩阵的直积

例 已知 $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-2&-1\end{pmatrix}$, 试求 $A\otimes B$ 和 $B\otimes A$。

解　$A\otimes B=\begin{pmatrix}2B&B\\O&-B\end{pmatrix}$

$$=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&4&6&1&2&3\\-6&-4&-2&-3&-2&-1\\ \hdashline 0&0&0&-1&-2&-3\\0&0&0&3&2&1\end{array}\right)$$

例　设A是m阶方阵，B是n阶方阵，且A和B都是可对角化矩阵。证明：$A\otimes B$ 也可对角化。

证　由于

$$P^{-1}AP=\Lambda_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_m\end{pmatrix},\quad Q^{-1}BQ=\Lambda_2=\begin{pmatrix}\mu_1&&&\\&\mu_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mu_n\end{pmatrix}$$

$$B\otimes A=\begin{pmatrix}A&2A&3A\\-3A&-2A&-A\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{array}{cc:cc:cc}2&1&4&2&6&3\\0&-1&0&-2&0&-3\\ \hdashline -6&-3&-4&-2&-2&-1\\0&3&0&2&0&1\end{array}\right)$$

则

$$(P\otimes Q)^{-1}(A\otimes B)(P\otimes Q)=(P^{-1}\otimes Q^{-1})(A\otimes B)(P\otimes Q)$$
$$=(P^{-1}AP)\otimes(Q^{-1}BQ)=\Lambda_1\otimes\Lambda_2$$
$$=\begin{pmatrix}\lambda_1\mu_1&&&&&&\\&\ddots&&&&&\\&&\lambda_1\mu_n&&&&\\&&&\ddots&&&\\&&&&\lambda_m\mu_1&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&\lambda_m\mu_n\end{pmatrix}$$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}1&3\\0&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&0&0\\-4&6&3\end{pmatrix}$, 则 $A\otimes B$ 的特征值为 $-1,0,3,2,0,-6$ 。

例　设 $x\in\mathbf{R}^n$是单位列向量，$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$是正交矩阵，则 $\|A\otimes x\|_F=\sqrt{n}$ 。

分析　$\|A\otimes x\|_F=\sqrt{\operatorname{tr}[(A\otimes x)^H(A\otimes x)]}$
$=\sqrt{\operatorname{tr}[(A^H\otimes x^H)(A\otimes x)]}$
$=\sqrt{\operatorname{tr}[(A^HA)\otimes(x^Hx)]}$
$=\sqrt{\operatorname{tr}(I_n\otimes 1)}=\sqrt{\operatorname{tr} I_n}=\sqrt{n}$

例　设 $x,y\in\mathbf{C}^n$ 是单位列向量，则 $\|x\otimes y\|_2=$ 1

分析　$\|x\otimes y\|_2=\sqrt{(x\otimes y)^H(x\otimes y)]}$
$=\sqrt{(x^Hx)\otimes(y^Hy)]}=\sqrt{1\otimes 1}=1$

例 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, 则 $A\otimes I+A^2\otimes A$ 的全部特征值为 $0,0,2,10$ 。

分析　设 $Ax_i=\lambda_i x_i$, 则

$(A\otimes I+A^2\otimes A)(x_i\otimes x_j)$
$=[(Ax_i)\otimes x_j]+[(A^2x_i)\otimes(Ax_j)]$
$=(\lambda_i+\lambda_i^2\lambda_j)(x_i\otimes x_j)$

从而 $A\otimes I+A^2\otimes A$的特征值为$\lambda_i+\lambda_i^2\lambda_j$（$i,j=1,2$），可求得$A$的特征值为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, 代入上式即得 $A\otimes I+A^2\otimes A$ 的特征值。

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$，则 $\vec{\boldsymbol{A}}=(1,4,2,5,3,6)^{\mathrm{T}}$。

故

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1+k_1 & 5-2k_1-k_2\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&5\\0&0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1&-2\\1&0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

其中 k_1,k_2 任意，这是矩阵方程的通解。

例 求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{XB}=\boldsymbol{F}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-2&2\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&3\\-1&5\end{pmatrix}$$

解 设 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，因为

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2+\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\0&1&0&1\\\hline 1&0&1&0\\0&1&0&1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc|cc}-2&0&0&0\\2&0&0&0\\\hline 0&0&-2&0\\0&0&2&0\end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}$$

例 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{R}^{m\times m}$，$\boldsymbol{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$\boldsymbol{B}$的特征值是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$。证明：矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}-\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{F}$ 存在唯一解的充要条件是

$$\lambda_i\mu_j\neq 1\ （i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n）$$

证 对矩阵方程取拉直得

$$(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n)\vec{\boldsymbol{X}}=-\vec{\boldsymbol{F}}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n$ 的特征值为

$$\lambda_i\mu_j-1\quad（i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n）$$

而矩阵方程有唯一解的充要条件是 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{I}_n$ 可逆，即 $\lambda_i\mu_j-1\neq 0$。 **证毕**

所以得线性方程组

$$\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\-1\\5\end{pmatrix}$$

解之得同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-1+x_3\\x_2=5-2x_3-x_4\end{cases}$

通解为 $\begin{cases}x_1=-1+k_1\\x_2=5-2k_1-k_2\\x_3=k_1\\x_4=k_2\end{cases}$

例 利用直积求解矩阵方程

$$2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{O}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}$。

解 对矩阵方程取拉直，得

$$(2\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\vec{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{0}$$

可求得

$$2\boldsymbol{I}_4+\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{I}_2\otimes\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&-2&0&0\\0&0&0&0\\2&0&4&-2\\0&2&0&2\end{pmatrix}$$

同解方程组为
$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

通解为
$$\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad t\text{任意}$$

故
$$\boldsymbol{X} = t\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad t\text{任意}$$