第六章　广义逆矩阵

§2　{1}-逆及其应用

例　已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&4&1&1\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix}$$

求 $A^{(1)}$ 和一个 $A^{(1,2)}$。

解　$$(A,I)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&-1&2&1&0&0\\2&4&1&1&0&1&0\\-1&-2&-2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&-1&2&1&0&0\\0&0&3&-3&-2&1&0\\0&0&-3&3&1&0&1\end{array}\right)$$

例　设 $A\in C^{m\times n}$，$A^{(1)}$ 是 A 的一个 $\{1\}$-逆，则

$\cos(\frac{\pi}{2}AA^{(1)})=\underline{I-(AA^{(1)})}$；　$\sin(\frac{\pi}{2}AA^{(1)})=\underline{AA^{(1)}}$。

分析　因为 $(AA^{(1)})^2=AA^{(1)}$，所以

$$\cos(\frac{\pi}{2}AA^{(1)})=I-\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2!}(AA^{(1)})^2+\frac{(\frac{\pi}{2})^4}{4!}(AA^{(1)})^4-\cdots$$

$$=I+(AA^{(1)})(-\frac{(\frac{\pi}{2})^2}{2!}+\frac{(\frac{\pi}{2})^4}{4!}-\frac{(\frac{\pi}{2})^6}{6!}+\cdots)$$

$$=I+(AA^{(1)})[\cos(\frac{\pi}{2})-1]$$

$$=I-(AA^{(1)})$$

$$\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_3+r_2,\ r_1+\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&2&0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&1&-1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&0&-1&1&1\end{array}\right)$$

即 $S=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$，$P=(e_1,e_3,e_2,e_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，

使得　$$SAP=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&1\\0&1&0&-1\\\hline 0&0&0&0\end{array}\right)$$

又因为　$(AA^{(1)})^2=AA^{(1)}$，所以

$$\sin(\frac{\pi}{2}AA^{(1)})=\frac{\pi}{2}AA^{(1)}-\frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!}(AA^{(1)})^3+\frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!}(AA^{(1)})^5-\cdots$$

$$=(AA^{(1)})(\frac{\pi}{2}-\frac{(\frac{\pi}{2})^3}{3!}+\frac{(\frac{\pi}{2})^5}{5!}-\frac{(\frac{\pi}{2})^7}{7!}+\cdots)$$

$$=(AA^{(1)})\sin(\frac{\pi}{2})=AA^{(1)}$$

故

$$A^{(1)}=P\left(\begin{array}{cc|c}1&0&0\\0&1&0\\\hline 0&0&k_1\\0&0&k_2\end{array}\right)S=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\-k_1&k_1&k_1\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\-k_2&k_2&k_2\end{pmatrix}$$

k_1,k_2 任意

$$A^{(1,2)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

例　设 $\|\bullet\|_a$ 是 $C^{n\times n}$ 上的矩阵范数，$P\in C_m^{m\times n}$。令

$$\|A\|_b=\|P^{(1)}AP\|_a\quad(\forall A\in C^{m\times m})$$

其中 $P^{(1)}$ 是 P 的一个 $\{1\}$-逆，证明 $\|\bullet\|_b$ 是 $C^{m\times m}$ 上的矩阵范数。

证　因为 $P\in C_m^{m\times n}$，所以 $PP^{(1)}=I$。

1）　$\|O\|_b=\|P^{(1)}OP\|_a=\|O\|_a=0$;

当 $A\neq O$ 时，$P^{(1)}AP\neq O$

（否则，若 $P^{(1)}AP=O$，则有 $A=PP^{(1)}APP^{(1)}=O$，矛盾），于是

$$\|A\|_b=\|P^{(1)}AP\|_a>0$$

2） $\|kA\|_b=\|P^{(1)}(kA)P\|_a=\|kP^{(1)}AP\|_a$

$=|k|\|P^{(1)}AP\|_a=|k|\|A\|_b$；

3） $\|A+B\|_b=\|P^{(1)}（A+B）P\|_a$

$\le\|P^{(1)}AP\|_a+\|P^{(1)}BP\|_a=\|A\|_b+\|B\|_b$

4） $\|AB\|_b=\|P^{(1)}ABP\|_a=\|P^{(1)}APP^{(1)}BP\|_a$

$\le\|P^{(1)}AP\|_a\|P^{(1)}BP\|_a=\|A\|_b\|B\|_b$

$$x=A^{(1)}b+(I-A^{(1)}A)y$$

$$=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-2&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

（y_1,y_2,y_3,y_4任意）

进一步可化简为

$$x=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}y_2+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}y_4\quad（y_2,y_4任意）$$

例 用广义逆矩阵方法判断线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=1\\2x_1+4x_2+x_3+x_4=5\\-x_1-2x_2-2x_3+x_4=-4\end{cases}$$

的相容性。若相容，求其通解。

解 该方程组的系数矩阵及右端向量为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&4&1&1\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}$$

前例已求得A的$\{1\}$-逆为

§3 Moore-Penrose逆

例 求下列矩阵的Moore-Penrose逆：

1） $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$；

解 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H=\frac{1}{14}(1,2,3)$

2） $A=\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\2&4&1&1\\-1&-2&-2&1\end{pmatrix}$；

解 因为

$$A\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&0&3&-3\\0&0&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\times\frac{1}{3}]{r_3+r_2}$$

$$A^{(1)}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad（取\ k_1=k_2=0）$$

容易验证 $AA^{(1)}b=A\begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}=b$

所以方程组相容，且通解为

$$\begin{pmatrix}1&2&-1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以A的满秩分解为

$$A=FG=\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

又有 $GG^H=\begin{pmatrix}6&-1\\-1&2\end{pmatrix},\quad F^HF=\begin{pmatrix}6&3\\3&6\end{pmatrix}$

且 $(GG^H)^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}2&1\\1&6\end{pmatrix},\quad(F^HF)^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}6&-3\\-3&6\end{pmatrix}$

从而

$$A^+ = G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{33}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -6 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

同理，由 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}(I \quad O)$ 得

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

而由 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ A \end{pmatrix}(O \quad I)$ 得 $\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix}$

3） $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$ 。

解 因为 $A = FG = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{m\times 1} (1 \quad \cdots \quad 1)_{1\times n}$

所以 $A^+ = G^{\mathrm{H}}(GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1} \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}(1 \quad \cdots \quad 1)_{1\times m} = \frac{1}{mn}A^{\mathrm{T}}$$

例 设A是 n 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1} \\ A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix} 。$$

分析 因为 $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}(I \quad I)$， 故

$$\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}(2I)^{-1}(2A^{\mathrm{H}}A)^{-1}\left(A^{\mathrm{H}} \quad A^{\mathrm{H}}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}\frac{1}{2}I\cdot\frac{1}{2}A^{-1}(A^{\mathrm{H}})^{-1}\left(A^{\mathrm{H}} \quad A^{\mathrm{H}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}A^{-1}(I \quad I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1} \\ A^{-1} & A^{-1} \end{pmatrix}$$

例 设A是 n 阶可逆矩阵，O是 n 阶零矩阵，则

$$\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O & O \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}；\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}；$$

$$\begin{pmatrix} O & O \\ O & A \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A^{-1} \end{pmatrix} 。$$

分析 因为 $\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}(O \quad I)$

所以 $\begin{pmatrix} O & A \\ O & O \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix}I^{-1}(A^{\mathrm{H}}A)^{-1}\left(A^{\mathrm{H}} \quad O\right)$

$$= \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix}A^{-1}(I \quad O) = \begin{pmatrix} O & O \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$$

例 设A是$m\times n$矩阵，且A的Moore-Penrose逆为A^+，则

$$(A \mid A \mid A)^+ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} A^+ \\ A^+ \\ A^+ \end{pmatrix} 。$$

分析 设A的满秩分解为 $A = FG$，则

$$(A \mid A \mid A) = (FG \mid FG \mid FG) = F(G \mid G \mid G)$$

这是$(A \mid A \mid A)$的一个满秩分解。故

$$(A \mid A \mid A)^+ = \begin{pmatrix} G^{\mathrm{H}} \\ G^{\mathrm{H}} \\ G^{\mathrm{H}} \end{pmatrix}(3GG^{\mathrm{H}})^{-1}(F^{\mathrm{H}}F)^{-1}F^{\mathrm{H}}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H \\ G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H \\ G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} A^+ \\ A^+ \\ A^+ \end{pmatrix}$$

$$x = A^+b + (I - A^+A)y$$

$$=\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}+\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 3 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \\ -1 & -2 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

(y_1, y_2, y_3, y_4任意)

极小范数解为

$$x_0 = A^+b = \frac{1}{11}(5, 10, 8, -3)^T$$

§4 A^+的应用

例 用广义逆矩阵方法判断线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

是否相容？如果相容，求通解和极小范数解；如果不相容，求全部最小二乘解和极小范数最小二乘解。

解 该方程组的系数矩阵和右端向量为

例 已知

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1. 求A的满秩分解；
2. 求 A^+；
3. 用广义逆方法判断 $Ax=b$ 是否有解；
4. 求 $Ax=b$ 的极小范数解或极小范数最小二乘解（指出所求的是哪种解）。

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

前面已求得 $$A^+=\frac{1}{33}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -6 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

因为 $$AA^+b = A\cdot\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}=b$$

所以方程组 $Ax=b$ 相容，其通解为

解 1. 因为

$$A\xrightarrow[r_5-r_1]{\substack{r_2+r_1 \\ r_4+r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\substack{r_4+r_3 \\ r_5-r_3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以A的满秩分解为

$$A=FG=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. $A^+ = G^{\mathrm H}(GG^{\mathrm H})^{-1}(F^{\mathrm H}F)^{-1}F^{\mathrm H}$

$$= \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 8 & -8 & -8 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & 10 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

3. $AA^+b = A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\\-3\\3\end{pmatrix} \neq b$ $Ax=b$ 无解；

4. 极小范数最小二乘解 $x_0 = A^+b = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

例 已知 $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A^{(1,2)} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$。

分析 法1. 取 $S = I_3,\ P = (e_1, e_3, e_2)$, 则

$$SAP = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

从而

$$A^{(1,2)} = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

例 设 $x_1, x_2, \cdots, x_m\ (m>1)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两两正交的单位列向量，记 $A = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, 则 $A^+ = \begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}\\ \vdots \\ x_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}$。

分析 因为 $A = FG = (x_1, x_2, \cdots, x_m)I_n$, 所以

$$A^+ = (F^{\mathrm T}F)^{-1}F^{\mathrm T} = \left[\begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}\\ \vdots \\ x_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{pmatrix}\right]^{-1}\begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}\\ \vdots \\ x_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}$$

$$= I_m^{-1}\begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}\\ \vdots \\ x_m^{\mathrm T}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1^{\mathrm T}\\ \vdots \\ x_m^{\mathrm T}\end{pmatrix}$$

例 已知 $A = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A^{(1,2)} = \begin{pmatrix}\frac12&0&0\\\frac12&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$。

分析 法2.

$$A = FG = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^+ = \begin{pmatrix}1&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac12&0&0\\\frac12&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

例 设 $A \in \mathbf{C}_n^{m\times n}$, 证明 $\|AA^+\|_2 = 1$。

证 $\|AA^+\|_2 = \sqrt{(AA^+)^{\mathrm H}(AA^+)\text{的最大特征值}}$

但 $(AA^+)^{\mathrm H}(AA^+) = (AA^+)(AA^+) = AA^+$

记 $B = AA^+$, 注意 $B^2 = (AA^+)^2 = AA^+ = B$

设 $Bx = \lambda x$, 则有

$$\lambda x = Bx = B^2x = \lambda^2 x$$

由 $x \neq 0$ 得 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 0$ 是B的特征值。

由A列满秩知，当 $x \neq 0$ 时，$Ax \neq 0$, 于是

$$B(Ax) = AA^+(Ax) = Ax$$

即1是B的特征值，故

$$\|AA^+\|_2 = \sqrt{B\text{的最大特征值}} = 1$$