第2.4节　　区间估计

一、区间估计的概念

二、正态总体数学期望的置信区间

三、正态总体方差的区间估计

四、两个正态总体均值差的区间估计

五、两个正态总体方差比的区间估计

六、单侧置信区间

七、非正态总体参数的区间估计

引例 某地区抽样调查表明成年男性的红细胞数（RBC）服从正态分布 $\sim N(\mu,\sigma^2)$.

现对150个人的抽血化验结果进行分析，测得红细胞数分别为（单位10^{12}个 / L）

$\boxed{\text{试估计红细胞数的均值}\mu.}$

```
[ 5.19,  4.89,  5.15,  4.74,  4.79,  5.15,   4.3,  4.47,  4.13,  5.14,  4.54,   4.1,  5.82,   4.5,  4.87]
[ 4.02,  5.23,  5.01,  3.89,  4.33,  4.69,  4.54,  4.22,  4.64,  4.89,   4.7,  4.83,  5.17,  4.61,  4.97]
[ 4.49,  5.19,   4.9,   5.2,  4.93,  4.69,  4.81,  4.64,  4.82,   4.4,   5.4,  4.39,  4.61,   4.5,   4.1]
[ 4.63,  4.46,   5.3,  5.13,  5.05,  5.19,  4.62,  4.12,  5.08,  3.96,  4.37,  4.71,  4.94,   4.3,   4.3]
[ 4.94,  4.86,  5.16,  4.75,  5.13,  3.82,  4.88,  4.74,  4.63,  5.57,   5.1,   4.9,  4.29,  4.35,  4.55]
[ 4.02,  4.33,  4.86,  4.72,  4.45,  4.53,  4.93,   4.5,  5.44,  4.48,  4.89,  4.35,  5.58,  4.66,   4.8]
[ 4.96,  4.17,  4.45,  3.66,  4.95,  4.19,  4.34,  5.71,  4.54,   4.8,  4.65,  4.62,  5.16,   4.0,  5.25]
[ 4.22,  5.16,  4.46,  5.01,  4.79,  4.58,  4.67,  5.25,  4.89,   5.0,  4.28,   4.9,   5.1,  5.02,  4.62]
[ 4.78,  4.75,  5.27,  3.79,  5.11,  5.04,  3.81,  3.65,  5.04,   4.8,  4.62,  3.94,  4.36,   4.7,  5.31]
[ 5.04,  4.73,  4.04,  3.73,  4.99,  5.11,  5.25,  4.94,  4.79,  4.35,  4.71,  5.21,  4.89,  5.06,  4.96]
```

X：成年男子的红细胞数（总体）$\sim N(\mu,\sigma^2)$

X_i：每个成年男子的红细胞数（样本）$\sim N(\mu,\sigma^2)$

总体均值 μ $\approx \dfrac{1}{150}\times\sum$

```
[ 5.19, 4.89, 5.15, 4.74, 4.79, 5.15,  4.3, 4.47, 4.13, 5.14, 4.54,  4.1, 5.82,  4.5, 4.87]
[ 4.02, 5.23, 5.01, 3.89, 4.33, 4.69, 4.54, 4.22, 4.64, 4.89,  4.7, 4.83, 5.17, 4.61, 4.97]
[ 4.49, 5.19,  4.9,  5.2, 4.93, 4.69, 4.81, 4.64, 4.82,  4.4,  5.4, 4.39, 4.61,  4.5,  4.1]
[ 4.63, 4.46,  5.3, 5.13, 5.05, 5.19, 4.62, 4.12, 5.08, 3.96, 4.37, 4.71, 4.94,  4.3,  4.3]
[ 4.94, 4.86, 5.16, 4.75, 5.13, 3.82, 4.88, 4.74, 4.63, 5.57,  5.1,  4.9, 4.29, 4.35, 4.55]
[ 4.02, 4.33, 4.86, 4.72, 4.45, 4.53, 4.93,  4.5, 5.44, 4.48, 4.89, 4.35, 5.58, 4.66,  4.8]
[ 4.96, 4.17, 4.45, 3.66, 4.95, 4.19, 4.34, 5.71, 4.54,  4.8, 4.65, 4.62, 5.16,  4.0, 5.25]
[ 4.22, 5.16, 4.46, 5.01, 4.79, 4.58, 4.67, 5.25, 4.89,  5.0, 4.28,  4.9,  5.1, 5.02, 4.62]
[ 4.78, 4.75, 5.27, 3.79, 5.11, 5.04, 3.81, 3.65, 5.04,  4.8, 4.62, 3.94, 4.36,  4.7, 5.31]
[ 5.04, 4.73, 4.04, 3.73, 4.99, 5.11, 5.25, 4.94, 4.79, 4.35, 4.71, 5.21, 4.89, 5.06, 4.96]
```

$=4.71$

估计

样本值

样本均值 $\overline{X}$

点估计法

X：成年男子的红细胞数（总体） $\sim N(\mu,\sigma^2)$

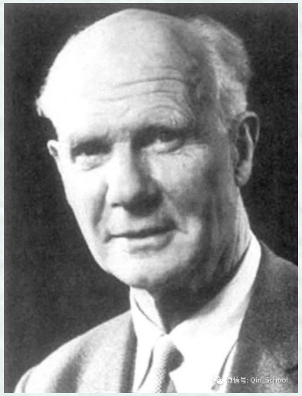
点估计 $\mu \approx 4.71$ ⇨ **区间估计**

$\mu \in [a,b]$?

置信区间

估计值与真实值的偏差有多大?

估计值有多大的可信度?



Egon Pearson
(1895-1980)

Fisher
(1890-1962)

Neyman
(1894-1981)

许宝騄
(1910-1970)

现代统计四位
开山立派的人物

Carl to Karl
数学、物理、机械学、热力学
……

Karl Pearson(1857～1936)
英国数学家，生物统计学家、统计学之父

1. 问题的提出

点估计法： 找一个统计量 $\hat{\theta}$ 来估计参数 θ,

$$\theta \approx \hat{\theta}_0 \quad (\hat{\theta}\text{的观察值})$$

不足之处：未给出估计值量 $\hat{\theta}_0$ 与参数真值 θ 的误差及估计的可靠程度.

例1 $E(X) = \mu$,

$\mu \approx \hat{\mu} = \bar{x}$ — 样本均值的观察值

问： 误差 $|\bar{x}-\mu|$ 多大？

用 $\overline{X}$ 估计 μ 的可靠程度如何？

即 给定 α： $0<\alpha\ll 1$ 很小

使 $P\{|\overline{X}-\mu|<\varepsilon\}=1-\alpha$ 较大

中的 $\varepsilon=?$

区间估计解决了上述问题，从而克服了点估计的不足之处.

一、基本概念

定义6.7 设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$，θ 为未知参数，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本. 如果存在**两个统计量** $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，**对于给定的** $\alpha\ (0<\alpha<1)$，使得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha.$$

置信下限　　置信上限　　置信度

则称区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$ 为参数 θ 的**置信度**为 $1-\alpha$ 的**置信区间**.

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是n)

每个样本值确定一个区 间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$,

每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,

当抽样次数充分大时，在这些区间中包含θ真值的

频率接近置信度 $1-\alpha$, 即

包含θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$,

不包含的约占$100\alpha\%$.

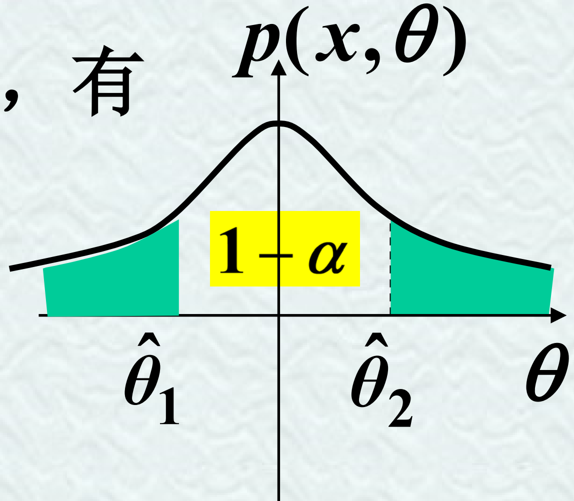
$$P\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le\theta\le\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\}=1-\alpha.$$

注

1、置信区间是一个随机区间

它以预先给定的高概率（置信度）覆盖未知参数，即对于任意的 $\theta\in\Theta$ ，有

$$P(\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2)=1-\alpha\,.$$



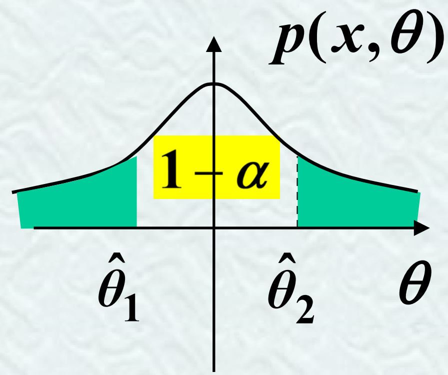
$\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$

2、置信度 1-α：反映了区间估计的**可靠度**.

给定置信度 $1-\alpha$，尽量寻找最短的置信区间.

3、置信区间的长度 $\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$ ：反映了区间估计的**精确度**.

置信区间	⟺	可靠度	⟺	精确度
长（短）		高（低）		低（高）



$$P\left\{\hat{\theta}_1\le\theta\le\hat{\theta}_2\right\}=1-\alpha\Rightarrow\left[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right]$$

由定义可见，

对参数θ作区间估计，就是要设法找出两个只依赖于样本的界限(构造统计量)

$$\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1,\ldots X_n)$$
$$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1,\ldots X_n)$$
$$(\hat{\theta}_1<\hat{\theta}_2)$$

一旦有了样本，就把θ估计在区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$内．这里有两个要求:

1. 要求 θ 以很大的可能被包含在区间 $[\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2]$ 内，就是说，概率 $P\{\hat{\theta}_1 \le \theta \le \hat{\theta}_2\}$ 要尽可能大. 即要求估计尽量可靠.

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度 $\hat{\theta}_2 - \hat{\theta}_1$ 尽可能短，或能体现该要求的其它准则.

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度.

一般步骤

1、构造一个样本和参数的函数$U(\theta)$，并确定其**分布（分布中不含有其它未知参数）**；

2、给定**置信度**$1-\alpha$，反解参数的**置信区间**；

$$P\{a<U<b\}=1-\alpha \Rightarrow P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=1-\alpha$$

3、给定**样本值**，求置信下限和置信上限的值，并写出置信区间。

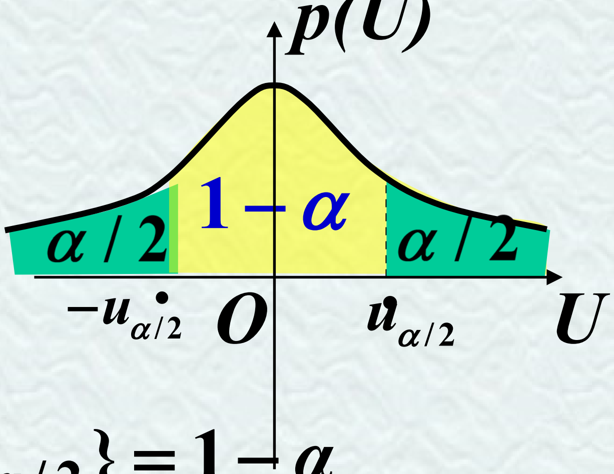
$$\theta_1(x_1,x_2,\ldots,x_n),\theta_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) \qquad [\theta_1,\theta_2]$$

二、单个正态总体均值的区间估计

1、正态总体X的方差σ^2已知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，σ^2已知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

是来自总体X的一个样本



$$\boxed{P\{\hat{\mu}_1 \le \mu \le \hat{\mu}_2\} = 1-\alpha \quad \Rightarrow [\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2]?}$$

$$\because U = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

则 $P\{|U| \le u_{\alpha/2}\} = 1-\alpha$

其中 $u_{\alpha/2}$ 为标准正态分布的 $\alpha/2$ 上侧分位数 .

即 $$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\le u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\boxed{\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ的置信度为 $1-\alpha$的置信区间为:

$$\left[\overline{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

即 $P\left(\mu\in\left[\bar{X}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right)=1-\alpha$

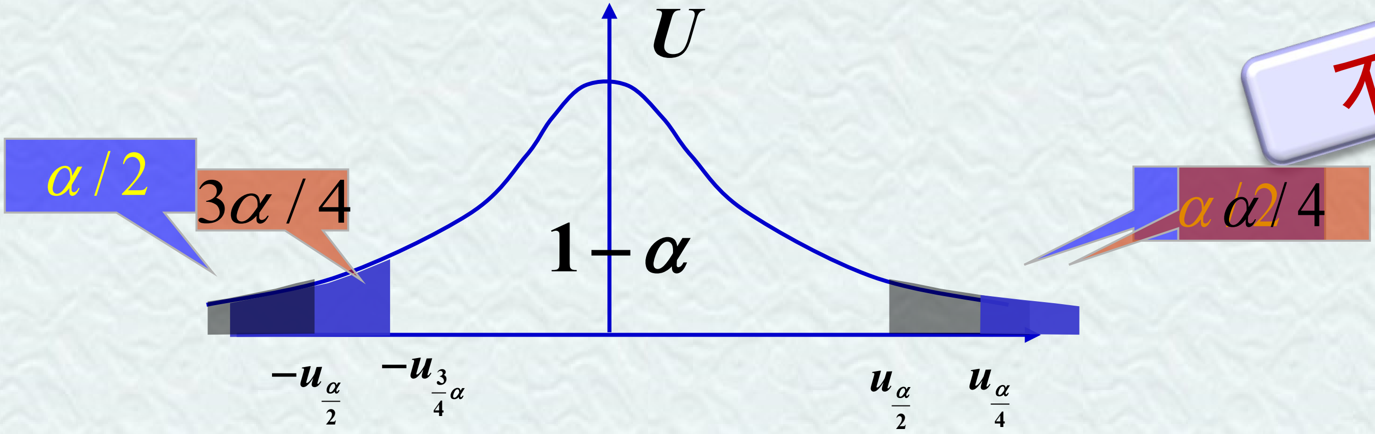
若给定 $\alpha=0.05$，查正态分布表得

$u_{0.025}=1.96$，于是得 μ 的**置信度为95%的置信区间为**：

$$\left[\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间:

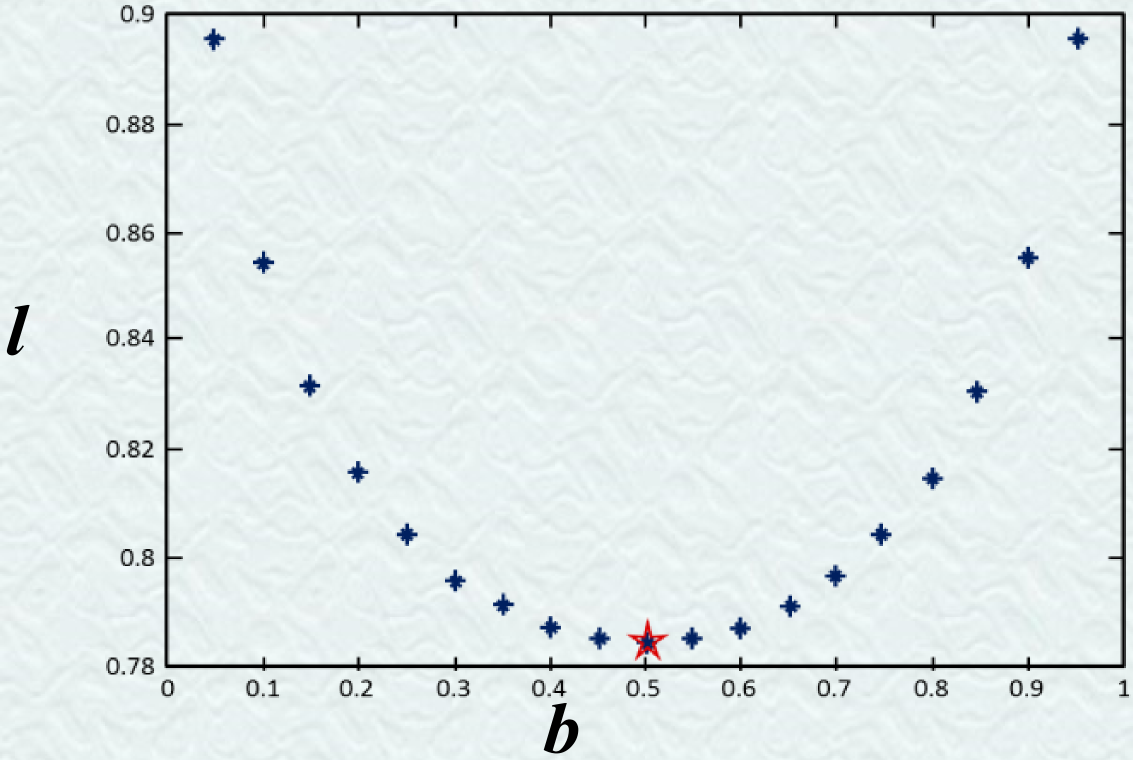
$$\bar{X}-u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



不唯一

$$\bar{X}-u_{\frac{3}{4}\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+u_{\frac{\alpha}{4}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

置信区间: $\bar{X} - u_{b\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + u_{(1-b)\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad 0 < b < 1$



$\sigma^2 = 4, n = 100,$

$\alpha = 0.05$

∴置信区间为对称区间

b=0.5时，区间长度l最短，精确度最高

例1 包糖机某日开工包了12 包糖,称得重量(单位:克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布,且标准差为$\sigma = 10$, 试求糖包的平均重量 μ 的$1-\alpha$置信区间 (分别取$\alpha = 0.10$ 和 $\alpha = 0.05$).

解 $\sigma = 10, \quad n = 12,$

计算得 $\bar{x} = 502.92,$

(1) 当$\alpha = 0.10$时,

查表得 $u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645,$

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=498.17,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=507.67,$$

即μ的置信度为90%的置信区间为

[498.17, 507.67].

(2) 当$\alpha=0.05$时,

查表得

$$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96,$$

同理可得μ的置信度为 95%的置信区间为

$$[497.26,\ \ 508.58].$$

从此例可以看出,

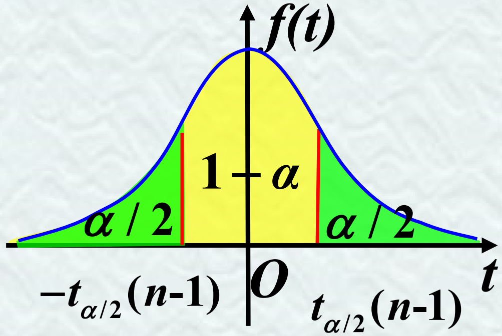
当置信度$1-\alpha$较大时,置信区间也较大;

当置信度$1-\alpha$较小时,置信区间也较小.

2. 正态总体X的方差σ^2未知，求μ的置信区间.

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2未知, 求总体均值 μ 的区间估计. 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n$来自总体 X 的一个样本，则有：

$$T=\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



从而对于给定的置信度，$1-\alpha$有

$$P\{|T| \le t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$$

其中 $t_{\alpha/2}(n-1$是自由度为 $n-1$ 的 t 分布关于 $\alpha/2$ 的上侧分位数

于是有 $$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}}\right| \le t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

反解

$$P\left\{\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}} \le \mu \le \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

故 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}, \overline{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}\right]$$

例2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 $\alpha = 0.05, \quad n-1 = 15,$

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{\frac{\alpha}{2}}(15) = t_{0.025}(15) = 2.1315,$

计算得 $\bar{x} = 503.75, \quad s_n^* = 6.2022,$

得μ的置信度为95%的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right) \text{ 即 } [500.4, \quad 507.1].$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%.

若依此区间内任一值作为μ的近似值,

其误差不大于 $\dfrac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \times 2 = 6.61$ (克).

这个误差的可信度为95%.

例3 (续例1)如果只假设糖包的重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 试求糖包重量 μ 的95%的置信区间.

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

解 此时σ未知, $n=12$,

$\alpha=0.05$, $\bar{x}=502.92$, $s_n^*=12.35$,

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(11)=2.201$,

于是 $\dfrac{s_n^*}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)=\dfrac{12.35}{\sqrt{12}}\times 2.201=7.85$,

得μ的置信度为95%的置信区间 [495.07, 510.77].

三、正态总体方差的区间估计

根据实际需要，只介绍 μ 未知的情况.

方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

推导过程如下:

因为 S_n^{*2} 是 σ^2 的最小方差无偏估计和相合估计,

根据第1章第三节定理1.12可知 $\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差σ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

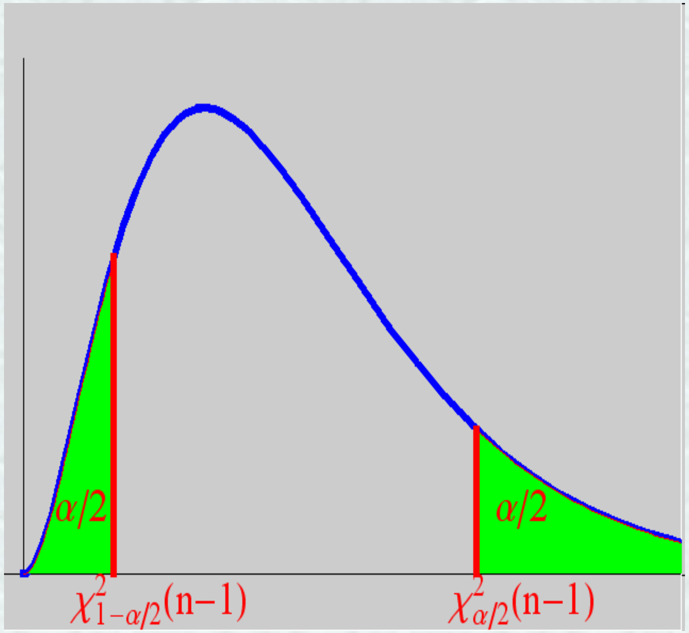
注　此置信区间长度并非最短

注意: 在密度函数不对称时,

如 χ^2 分布和 F分布,

习惯上仍取对称的分位点

来确定置信区间(如图).



例4 (续例2) 求例2中总体标准差σ的置信度为0.95 的置信区间.

解 $\frac{\alpha}{2}=0.025,\quad 1-\frac{\alpha}{2}=0.975,\quad n-1=15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知：

$$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\qquad \chi^2_{0.975}(15)=6.262,$$

计算得 $s_n^*=6.2022,$ $\left(\frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ \frac{\sqrt{n-1}S_n^*}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$

代入公式得标准差的置信区间

$$[4.58,\ 9.60].$$

四、两个正态总体均值差的区间估计

设给定置信度为$1-\alpha$，并设$X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$为第一个总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$为第二个总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本，$\overline{X}, \overline{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值，$S_1^{*2}, S_2^{*2}$分别是第一、二个总体的修正样本方差.

本章将讨论两个总体均值差和方差比的估计问题.

(1) σ_1^2 和 σ_2^2 均为已知,

$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm u_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$$

推导过程如下:

因为 $\overline{X}$, $\overline{Y}$ 分别是 μ_1, μ_2 的无偏估计,

所以 $\overline{X} - \overline{Y}$ 是 $\mu_1 - \mu_2$ 的无偏估计,

由 $\overline{X}, \overline{Y}$ 的独立性及

$$\overline{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \qquad \overline{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$$

可知 $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$

或 $U = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1),$

于是得$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^{\,2}}{n_1}+\frac{\sigma_2^{\,2}}{n_2}}\right).$$

(2) $\sigma_1^{\,2}$和$\sigma_2^{\,2}$均为未知,

只要n_1和n_2都很大(实用上>50即可), 则有

$\mu_1-\mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的近似置信区间

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm u_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^{*2}}{n_1}+\frac{S_2^{*2}}{n_2}}\right).$$

(3) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知,

取 $$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

$\mu_1 - \mu_2$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right).$$

其中 $$S_w^2 = \frac{(n_1 - 1) S_{1n_1}^{*\,2} + (n_2 - 1) S_{2n_2}^{*\,2}}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

例5 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(m/s)$, 修正标准差 $s^*_{1n_1} = 1.10(m/s)$, 随机地取II型子弹20发, 得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(m/s)$, 修正标准差 $s^*_{2n_2} = 1.20(m/s)$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且由生产过程可认为它们的方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为 0.95的置信区间.

解 由题意, 两总体样本独立且方差相等(但未知),

$$\frac{\alpha}{2}=0.025, \quad n_1=10, \quad n_2=20, \quad n_1+n_2-2=28,$$

查 $t(n-1)$ 分布表可知：$t_{0.025}(28)=2.0484,$

$$S_w^{\ 2}=\frac{9\times 1.10^2+19\times 1.20^2}{28}, \quad S_w=\sqrt{S_w^{\ 2}}=1.1688,$$

于是得 $\mu_1-\mu_2$ 的一个置信度为0.95的置信区间

$$\left(\bar{x}_1-\bar{x}_2\pm S_w\times t_{0.025}(28)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{20}}\right)=(4\pm 0.93),$$

即所求置信区间为 [3.07, 4.93].

五、两个正态总体方差比的区间估计

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^{*2}}{S_2^{*2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

推导过程如下:

由于 $\dfrac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*\ 2}}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1)$, $\dfrac{(n_2-1)S_{2n_2}^{*\ 2}}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$,

且由假设知 $\dfrac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}}$ 与 $\dfrac{(n_2-1)S_{2n_2}^{*\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$ 相互独立,

根据F分布的结构, 知 $\dfrac{S_{1n_1}^{*\ 2}\big/\sigma_1^{\ 2}}{S_{2n_2}^{*\ 2}\big/\sigma_2^{\ 2}} \sim F(n_1-1, n_2-1)$,

即 $$F=\frac{S_{1n_1}^{*\ 2}\big/\sigma_1^{\ 2}}{S_{2n_1}^{*\ 2}\big/\sigma_2^{\ 2}}=\frac{\dfrac{(n_1-1)S_{1n_1}^{*\ 2}}{\sigma_1^{\ 2}}\Big/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_{2n_2}^{*\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}\Big/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\le\frac{S_{1n_1}^{*\,2}\big/\sigma_1^2}{S_{2n_2}^{*\,2}\big/\sigma_2^2}\le F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

$$P\left\{\frac{S_{1n_1}^{*\,2}}{S_{2n_2}^{*\,2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\le\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\le\frac{S_{1n_1}^{*\,2}}{S_{2n_2}^{*\,2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}$$

$$=1-\alpha,$$

于是得$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

$$\left[\frac{S_{1n_1}^{*\,2}}{S_{2n_2}^{*\,2}}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_{1n_1}^{*\,2}}{S_{2n_2}^{*\,2}}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right].$$

例6(p71例2.31) 为了考察温度对某物体断裂强力的影响，在**70**度和**80**度分别重复做了**8**次试验，测得的断裂强力的数据如下(单位**Pa**):

70度：20.5, 18.8, 19.8, 21.5, 19.5, 21.0, 21.2

80度： 17.7, 20.3, 20.0, 18.8, 19.0, 20.1, 20.2, 19.1

假定$70^0 C$下的断裂强力用X表示，且服从$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$80^0 C$下的断裂强力用Y表示，且服从$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，试求方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信度为90%的置信区间.

解 $\overline{x} = 20.4,\ {s_{1n_1}^*}^2 = 0.8857, \overline{y} = 19.4,\ {s_{1n_2}^*}^2 = 0.8286,$

$$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.05}(7,7) = 3.79$$

$$F_{1-\alpha/2}(7,7) = F_{0.95}(7,7) = \frac{1}{F_{0.05}(7,7)} = \frac{1}{3.79} = 0.263$$

于是得$\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$的一个置信度为**0.90**的置信区间

$$\left([\frac{0.8857}{0.8286}\times 0.2639,\ \frac{0.8857}{0.8286}\times 3.79]\right) = (0.2821, 4.0512)$$

六、单侧置信区间

在以上各节的讨论中,对于未知参数θ, 我们给出两个统计量$\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, 得到θ的双侧置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$.

但在某些实际问题中, 例如, 对于设备、元件的寿命来说, 平均寿命长是我们希望的, 我们关心的是平均寿命$\boldsymbol{\theta}$的“下限”; 与之相反, 在考虑产品的废品率 $\boldsymbol{p}$时, 我们常关心参数 $\boldsymbol{p}$的“上限”, 这就引出了单侧置信区间的概念.

1. 单侧置信区间的定义

对于给定值α $(0<\alpha<1)$, 若由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定的统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对于任意$\theta\in\Theta$满足

$$P\{\theta>\hat{\theta}_1\}\geq 1-\alpha,$$

则称随机区间$(\hat{\theta}_1, \infty)$是θ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间, $\hat{\theta}_1$称为θ的置信度为$1-\alpha$的单侧置信下限.

又如果统计量 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$满足 $$P\{\theta < \hat{\theta}_2\} \geq 1-\alpha,$$

则称随机区间 $(-\infty, \hat{\theta}_2)$ 是θ的置信度为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间, $\hat{\theta}_2$称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2, (均为未知)

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本, 由 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S_n^*/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S_n^*}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

于是得μ的一个置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1),\infty\right),$$

μ的置信度为$1-\alpha$的置信下限 $\hat{\mu}=\bar{X}-\frac{S_n^*}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1).$

又根据 $\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$

有 $P\left\{\frac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha,$

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

于是得σ^2的一个置信度为$1-\alpha$的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right),$$

σ^2的置信度为$1-\alpha$的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^{*2}}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}.$$

注 其他结果可以参见p72表2.3.

例7(p73例2.32) 设从一批灯泡中, 随机地取10只作寿命试验,测得样本寿命均值(以小时计)为1500h ,样本的修正均方差为 20h, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信度为0.95的单侧置信下限.

解 $1-\alpha=0.95,\quad n=9,\quad \bar{x}=1500,\quad s_n^*=20,$

$$t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.833$$

μ的置信度为 0.95的置信下限

$$\underline{\mu}=\bar{x}-\frac{s_n^*}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1488.$$

Thank You!