La magia de los grafos

Félix García Merayo
Dr en Informática, UPM
Vicepresidente de ACTA

Todo pensamiento original nace de imágenes.

Schopenhauer

EL PROBLEMA ORIGEN

No es frecuente que la introducción de una noción matemática pase por la descripción de un primer problema que la ha dado a conocer. Con el paso del tiempo, frecuentemente, los desarrollos, simplificaciones y los perfeccionamientos sucesivos posteriores hacen que sea difícil reconocer la cuestión inicial de la teoría de base.

En el vértice opuesto a esta filosofía se sitúa la historia de los *Siete Puentes de Königsberg*, auténtico paso obligado para presentar la teoría de grafos. Han trascurrido ya dos siglos desde la aparición de esta historia y es difícil encontrar una obra o publicación sobre los grafos que no la mencione aunque no sea más que de pasada.

¿Cuál era esta historia? En la época del matemático suizo nacido en Basilea, Leonard Euler, nos estamos refiriendo al siglo XVIII, los habitantes de la ciudad de Königsberg, hoy de nombre Kaliningrado, en Rusia, discutían sobre la posibilidad de recorrer los siete puentes, Figura 1 (*a*), que la ciudad tenía sobre las aguas del río Pregel, iniciando el recorrido en un determinado punto, pasando una sola vez por cada uno de los puentes, en cualquier orden, y regresando al punto de inicio del paseo.

Leonard Euler, príncipe de las matemáticas, nace en Basilea, Suiza, en el año 1707. Está considerado por muchos como uno de los grandes matemáticos de todos los tiempos. A los 13 años comienza sus estudios de Teología en la Universidad de su ciudad natal; era hijo y nieto de pastores protestantes. No obstante decidió, contra la voluntad de su padre, dedicarse a las ciencias. Tuvo como tutor universitario a Juan Bernoulli, de quien recibió clases particulares habida cuenta de su notorio talento. En el año 1727 es llamado por Pedro el Grande para impartir docencia en la Academia de San Petersburgo. Ayudaron a conseguir esta plaza los hermanos Nicolás y Daniel Bernouilli, hijos del anterior. Se casa, tiene 13 hijos y trabaja incansablemente hasta su muerte. En 1736 publica el primer trabajo origen de la teoría de grafos y relacionado con el popular problema conocido como los *Siete Puentes de Königsberg*. Como matemático, fue un sabio en muchas ramas, como la teoría de números, teoría combinatoria, análisis matemático, música y arte naval. El interés por la teoría de números le llega cuando en 1729 Goldbach le transmite la conjetura de Fermat sobre los números primos: comienza a escribir sobre tales números al año siguiente, 1730. A lo largo de su vida, escribió más de 700 libros y artículos, de tal forma que se requerirían más de 75 volúmenes para poder contenerlos todos. Queda ciego 17 años antes de su fallecimiento lo que ocurre en el año 1783, en San Petersburgo. Durante ese período de ceguera, dicta sus trabajos a sus hijos y servidores.

Leonhard Euler (1707-1783), príncipe de las matemáticas.

Los siete puentes unían las cuatro partes de la ciudad asentada sobre ambas orillas y con dos islas situadas en el propio río, tal como indica el esquema de la figura.

Detrás del gráfico representativo hay otra idea que aparece nueva y que se convirtió en una rama importante de las matemáticas en el pasado siglo XX: se trata de la *topología*. La topología contempla las figuras sin tener en cuenta la medida, la forma real, los ángulos. Para la topología no importa si los puentes son rectos o curvos, si son largos o cortos, si los brazos del río son más o menos sinuosos o si una de las islas centrales es circular, elíptica o cuadrada. Entonces, contemplando el caso de los siete puentes desde la perspectiva de la topología, no hay lugar para las rectas, los círculos, los ángulos, los triángulos. Todas estas cuestiones, que habían sido indispensables para el pasado de la geometría, se convierten ahora en irrelevantes. Podemos cambiar una parte del dibujo esquemático anterior, rectas por curvas, círculos por elipses, sin alterar en absoluto la cuestión básica del recorrido planteado.

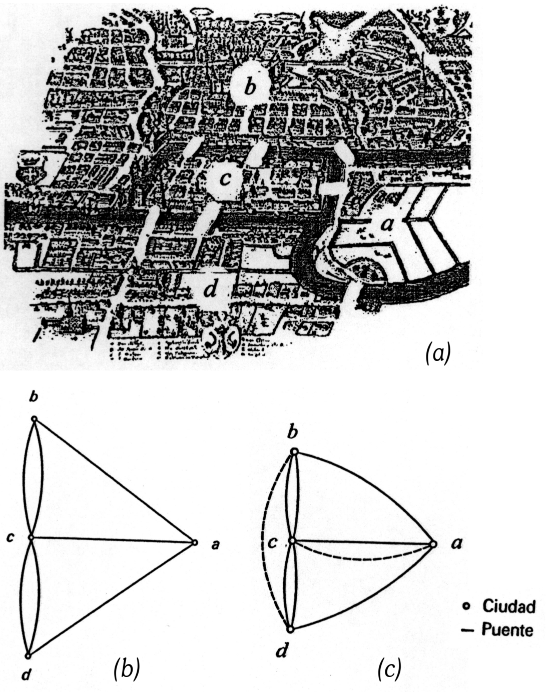


Figura 1. Los siete puentes de Königsberg, origen de la teoría de grafos

Según lo anterior, ¿cuál será la estructura matemática que nos va a permitir entender, de la manera más eficaz, la situación de los siete puentes? ¿Cuál será el esquema abstracto que abarca y resume todos los datos de la configuración topográfica de la ciudad de Königsberg? Ese esquema recibe el nombre de *grafo*. Cuando Euler resolvió el problema de los siete puentes, o más bien demostró la imposibilidad de encontrar una solución, creó, a su vez, la teoría de grafos, teoría que jugaría un papel importante en el siglo XX y, con la ayuda de la informática, también en el XXI.

El esquema o, mejor, el **grafo** correspondiente a la situación de los siete puentes de la Figura 1 (*a*), lo hemos representado en la Figura 1 (*b*). Las cuatro partes terrestres *a, b, c* y *d* de la primera representación, equivalen a los **vértices** del grafo que contienen las mismas denominaciones respectivas, y los siete puentes equivalen a los siete **lados** o **arcos** del grafo: *ab, ad,* por una parte, y *bc,* dos lados que indican los dos puentes que unen una de las orillas a la isla *c*, y *cd*, también dos puentes, desde la misma isla a la otra orilla. El lado *ac* es la representación del puente que enlaza las dos islas entre sí, es decir, que *relaciona* esas dos partes de la ciudad. La forma, tanto de las partes terrestres como de los puentes, no tiene importancia: el grafo es una ilustración de carácter topológico y no geométrico del problema en estudio. Por ello, el concepto de grafo no debe confundirse con el de gráfico.

Esta estructura tan simple, no definida hasta el siglo XVIII, se emplea hoy día en temas absolutamente variados: informática, teoría de juegos, investigación operativa, probabilidad, lingüística, literatura.

Como vemos, un grafo se compone de vértices y de lados: dos vértices son adyacentes entre sí cuando tienen un lado común que los une; un lado es incidente con un vértice, cuando el vértice es un extremo de ese lado.

El problema de los siete puentes de Königsberg, enunciado anteriormente, se formularía ahora, apoyándonos en el grafo construido, de la manera siguiente: ¿cómo sería posible, partiendo de uno cualquiera de los cuatro vértices, colorear la totalidad de los lados del grafo, sin pasar dos veces por el mismo lado, sin levantar el lápiz del grafo, y regresando al mismo vértice de partida? Lo que parece un juego, si fuéramos capaces de construir tal paseo, técnicamente se dice que se trata de un **circuito euleriano** y, como consecuencia, cuando un grafo contiene tal circuito, se dice que se trata de un **grafo euleriano**. Dicho de otra manera, y de una forma más general, ¿sería posible saber, de una manera sencilla, si en un grafo dado, sea el de los siete puentes o cualquier otro, existe un circuito euleriano?

LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA Y OTROS CASOS

La cuestión fue resuelta por el mismo Euler y, en la teoría de grafos actual, esa solución está contenida en un teorema que lleva su nombre. Podríamos enunciarlo así: **para que un grafo contenga un circuito euleriano, es necesario que en cada uno de sus vértices incida un número par de lados**. Solo así es posible llegar a un vértice cualquiera y poder salir de él sin volver a pasar por el mismo lado por el que se accedió.

El total de lados incidentes en un vértice de un grafo, se conoce como **grado del vértice**.

Aplicando el teorema al caso de los siete puentes descubrimos inmediatamente que, el problema del paseo no tiene solución: al observar el grafo de la Figura 1 (*b*), vemos que el total de lados incidentes en cada vértice, o grado de sus vértices, es siempre un número impar.

Para poder efectuar el paseo propuesto, sería necesario agregar algunos puentes a la topografía existente, por ejemplo, un nuevo puente *ac* y el *bd*, grafo de la Figura 1 (*c*). Así, todos los vértices serían de grado par.

Al genio de Euler se debe, pues, el haber descubierto, apoyándose en la teoría de grafos por él formalizada, que el juego del paseo, tal como estaba planteado, y al que tanto tiempo dedicaron las gentes de aquel entonces, no tenía solución.

Existe una memoria de Euler, aparecida en Berlín en el año 1759 con el título *Solutio problematis ad Geometriam situs pertinentis*, en la que en 21 puntos o reglas se expone la teoría de los puentes de Königsberg, así como la discusión del problema para cualquier número de ellos.

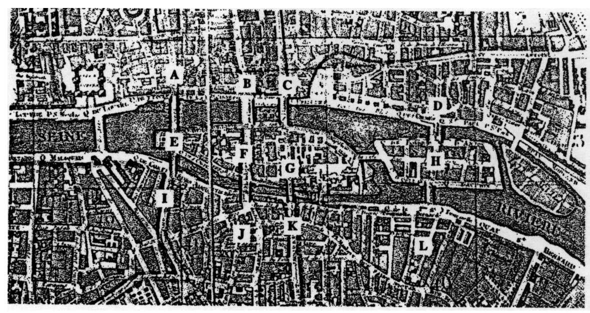


Figura 2. Los antiguos puentes de París

En la época de Euler, el centro de París estaba formado por varios distritos conectados los unos con los otros por medio de nueve puentes según se aprecia en la Figura 2 adjunta. ¿Se podría encontrar un camino que recorriera los nueve puentes una sola vez y volver al punto de partida? Dado que los vértices B, C, E, H, J y K son todos de grado impar en el grafo correspondiente, éste no es euleriano y, por lo tanto, el recorrido cerrado no podrá realizarse.

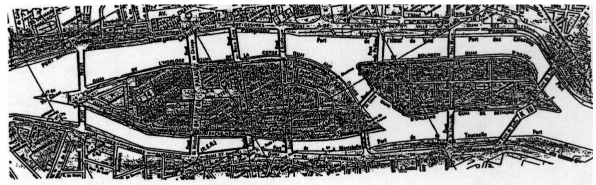


Figura 3. Los actuales puentes de París

Actualmente, el río Sena, a su paso por París, forma dos islas, la de la Cité y la de San Luis, además de las márgenes derecha e izquierda. Pero el total de puentes es ahora de quince, Figura 3. El grafo correspondiente tiene cuatro vértices, dos de grado 7, impar, y dos de grados 6 y 10, par. Por lo tanto, tampoco es euleriano.

Existen grafos que, aunque no eulerianos, alivian, sin embargo, las restricciones que imponen aquellos para recorrerlos de forma cerrada. Son los denominados grafos **recorribles**. Un grafo es de este tipo cuando puede recorrerse siguiendo un camino formado por lados consecutivos, sin repetir ninguno, comenzando en un vértice pero finalizando en otro distinto. Ese camino recibe el nombre de **recorrido de Euler**.

Para que un grafo contenga un recorrido euleriano basta con que posea exactamente dos vértices de grado impar. Entonces, el recorrido comienza en uno de esos vértices y finaliza en el otro.

Los actuales quince puentes de París pueden recorrerse de forma euleriana, comenzando en uno de los vértices de grado 7 y finalizando en el otro de ese mismo grado.

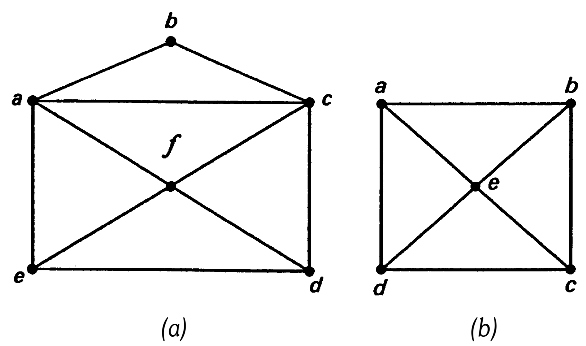


Figura 4. El problema del sobre abierto (a) y cerrado (b)

En la Figura 4 (*a*) representamos otro grafo: quiere ser un sobre de carta abierto. ¿Es euleriano? Podemos deducir inmediatamente que no lo es ya que contiene dos vértices, *d* y *e*, en los que inciden tres lados, es decir, son de grado impar. Los cuatro restantes son de grado par. Sin embargo, ya podemos asegurar que contiene un camino que comienza en uno de ellos y finaliza en el otro, pasando solo una vez por cada lado del grafo. El grafo (*a*), pues, es recorrible. Podemos partir de *d*, por ejemplo, para finalizar en el vértice *e*.

¿Será euleriano el grafo (*b*)? Puede deducirse, con la teoría expuesta, que no lo es. ¿Pero será posible recorrerlo pasando una sola vez por sus lados y *sin levantar el lápiz del papel*?

Las consideraciones anteriores pueden aplicarse, en general, al recorrido mediante un solo trazo de todas las figuras planas o espaciales de la Geometría y formadas por líneas rectas o curvas. Fácilmente, aplicando el teorema de Euler, se comprueba que puede recorrerse mediante un solo trazo toda figura constituida por un polígono convexo y todas sus diagonales y que posea un número impar de lados; el problema no tiene solución, sin embargo, para polígonos con un número par de lados, como el cuadrado que hemos propuesto más arriba, solo era recorrible, el hexágono, etc.

Así mismo, se puede recorrer con un solo trazo el conjunto de las aristas del octaedro regular mientras que no es posible para los otros poliedros regulares.

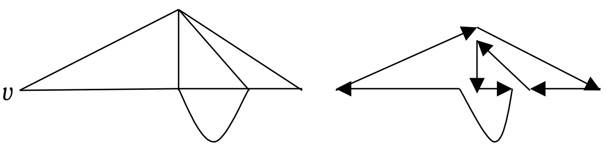


Figura 5. Grafo de una urbanización y un recorrido de vigilancia

Otro ejemplo de la vida real. Los viales de una pequeña urbanización tienen la topología de sus calles como se representa en el grafo de la Figura 5. En el vértice señalado con *v* está ubicado un puesto de control de donde parten los encargados de la seguridad para recorrer y vigilar las calles que están representadas por los lados del grafo. ¿Será posible hacer ese recorrido pasando una sola vez por cada vial? La respuesta es sencilla como puede apreciarse en el grafo con flechas y está justificada por la teoría de Euler.

El grafo de la Figura 6 contiene solo dos vértices impares. Aunque parezca complicado, ese grafo es recorrible comenzando en uno de los vértices de grado impar y finalizando en el otro, *a* y *z*.

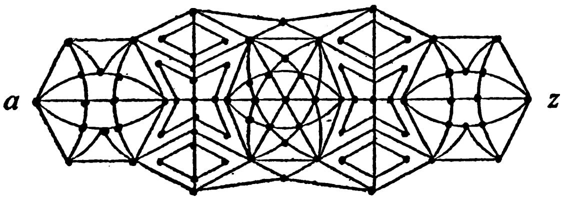
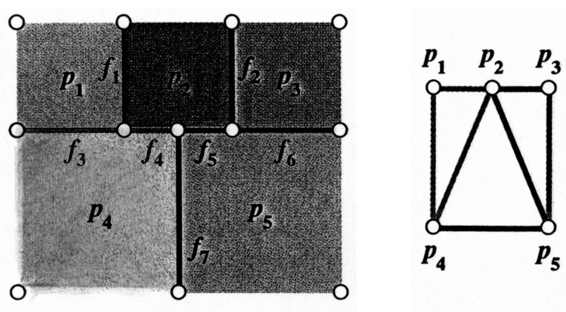


Figura 6. Grafo de Listing

El grafo anterior procede del tratado titulado *Vorstudien zur Topologie*, de Johann Benedict Listing. Esta obra fue comunicada al matemático y astrónomo francés Édouard Lucas, 1842-1891, por el también matemático Georg Cantor, profesor en aquel entonces en la Universidad de Heidelberg. Lucas era un apasionado por las curiosidades matemáticas y a él se debe el tratado *Récréations Mathématiques* publicado después de su muerte en cuatro volúmenes, entre los años 1892 y 1894. Se le considera el inventor del conocido juego de las *Torres de Hanoi* o torres de Brama.

Edouard Lucas

Imaginemos ahora cinco países, p_i, que poseen entre ellos las siete fronteras que se representan en la Figura 7 (*a*) y que hemos indicado con f_i. ¿Será posible iniciar una ruta partiendo de uno de los países, atravesar cada una de las fronteras una sola vez, y regresar al país de partida? (De *Tangente, 2002-2*).



(*a*) (*b*)

Figura 7. Un problema de cruce de fronteras

Los vértices del grafo (*b*) corresponden a cada uno de los cinco países; los lados son la representación topológica de las fronteras. El problema equivalente a resolver es decidir si (*b*) es o no euleriano, si se pueden recorrer sus fronteras (lados) una vez y solo una. Y de no serlo, estudiar si existe, al menos, un camino de Euler. Efectivamente ese camino existe entre los vértices p_4 y p_5; pero el grafo no es euleriano, es decir, el problema propuesto no tiene solución.

Se cuenta que Mohamet trazaba su firma sobre la arena, de una sola vez, con el extremo de su cimitarra. La firma se componía de dos medias lunas opuestas, tal como se muestra en la Figura 8.

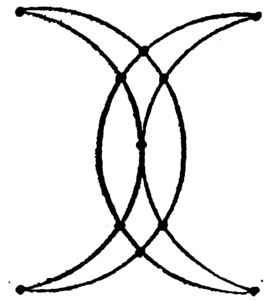


Figura 8. Grafo de la cimitarra

Se trata de un grafo euleriano ya que sus once vértices son todos de grado par. Por lo que es posible realizar tal firma sin levantar la cimitarra del suelo.

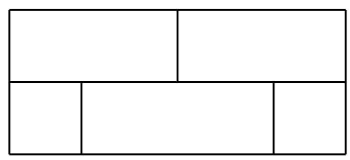


Figura 9. El grafo de Clausen

Por último, presentamos un nuevo juego, un nuevo grafo. Fue estudiado y expuesto por el astrónomo y matemático alemán Tomás Clausen, 1801-1885, en el número 494 de su obra *Astronomische Nachrichten*. Representa un fragmento de muro de fábrica en el que ocho de sus doce vértices son de grado impar. No cumple en absoluto el teorema de Euler. Para recorrerlo es necesario realizar cuatro paseos o tramos continuos distintos.

LA LLEGADA DE UN NUEVO JUEGO

En 1857, es decir, 122 años después de los trabajos de Euler, el matemático William Rowan Hamilton, nacido en Dublín en 1805, inventa y presenta su *Juego Icosiano*, *The Icosian Game*, y posteriormente una variante del anterior con los nombres de *Dodecaedro del viajero*, *Un viaje alrededor del mundo*, en los que de nuevo aparecen los grafos. Por lo tanto, es preciso esperar más de un siglo desde el inicio de la teoría de grafos, para que ésta volviera a la actualidad científica. De todas formas, decir que Hamilton ideó este juego intentando ilustrar un tipo curioso de cálculo el cual era muy similar a su teoría de los *cuaternios* o *cuaterniones*, precursora del moderno análisis vectorial.

Mientras que la cuestión de Euler había sido, ante todo, una cuestión lúdica, durante el siglo XIX se presenta un desarrollo de la teoría de grafos mucho más concreta. Veamos algunos ejemplos.

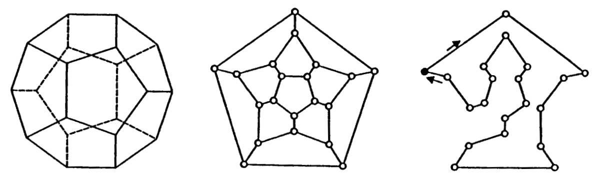
En 1847, Gustavo Kirchhoff se interesa, en sus trabajos sobre redes eléctricas, por la cantidad de corriente que circula por las diferentes ramas de un circuito eléctrico dando lugar a las leyes que llevan su nombre. Para ello, desarrolla la noción de *árbol*, tipo especial de grafo sin circuitos y que será presentado más adelante.

Diez años más tarde, en 1857, los grafos se aplican también a la química. Cayley, nacido en Richmond en el año 1821, estudia las diferentes estructuras posibles de una molécula con *n* átomos de carbono y $2n+2$ átomos de hidrógeno. Las substancias con igual número de átomos de cada clase en la molécula y con propiedades distintas, se conocen en química como isomería. Ejemplo de dos isómeros son el propano normal y el isopropano, ambos de fórmula química C_5H_{12}. Cayley representaba también esas fórmulas con la ayuda de grafos tipo árbol.

Finalmente, en 1869, Jordan redescubre los grafos así como los trabajos anteriores de Cayley que él no había conocido.

Volvamos al juego del dodecaedro de Hamilton. Este juego estaba compuesto esencialmente por un dodecaedro regular, de madera, provisto de un mango o asidero fijado en el centro de una de las caras del dodecaedro. En los vértices del poliedro se habían colocado clavos de cabeza ancha, bien de marfil o de metal, mientras que las treinta aristas del dodecaedro estaban marcadas por trazos negros representando las rutas por las que el viajero podía pasar para ir de una población a otra. Para realizar el paseo y recordar las diversas poblaciones atravesadas, se tomaba un bramante que se fijaba en el punto de partida y se iba enlazando en cada población, clavo, del recorrido.

El objetivo del juego es que un viajero visite los veinte vértices de ese poliedro regular, uno tras otro, una vez y solo una, y de tal forma que el vértice origen sea también el vértice destino. Figura 10 (*a*).



(a) (b) (c)

Figura 10. El juego del dodecaedro de Hamilton

De nuevo la topología nos ayuda a interpretar y solucionar este juego. El dodecaedro representado en (*a*), poliedro formado por doce caras pentágonos regulares, veinte vértices y treinta aristas, equivale topológicamente al grafo plano (*b*) que posee los mismos vértices y lados que vértices y aristas tenía el dodecaedro original. Entonces, el juego se puede plantear técnicamente así: se trata de encontrar en el dodecaedro un camino que, partiendo de un vértice cualquiera, vuelva a ese mismo vértice después de pasar, a través de sus aristas, por todos los demás vértices una sola vez. Tal recorrido se denominó más tarde en la teoría de grafos, **ciclo** y, en honor de su descubridor, **ciclo hamiltoniano**. Si el recorrido se hace sin cumplir el requisito de que inicio y final coincidan, es decir, de que no haya ciclo cerrado, recibe el nombre de **camino hamiltoniano**. Y por último, cuando un grafo posee un ciclo hamiltoniano, ese grafo se denomina **grafo hamiltoniano** o **de Hamilton**.

Los lados del grafo de Euler se han convertido ahora en los vértices del juego de Hamilton. Pero el objetivo de encontrar un ciclo hamiltoniano en un grafo es de solución mucho más complicada que el juego de los circuitos de Euler. Muchos investigadores se han encargado de establecer toda una teoría alrededor de los ciclos hamiltonianos, como Gabriel A. Dirac, Oystein Ore y otros.

El apellido Hamilton pertenece a uno de los linajes más antiguos e ilustres de Escocia cuyo tronco se establece en ese país hacia 1272. William Rowan Hamilton fue un niño prodigio: nace en 1805 en Dublín y a los tres años ya leía y poseía amplias nociones de aritmética avanzada. Aprendió latín, griego y hebreo cuando aún era un niño, a los 8 años. A los 17, se atrevió a revisar y de hecho detectó fallos en las teorías de Laplace relativas a la mecánica celeste. En esa época era un auténtico sabio en cálculo, astronomía y óptica. No había asistido a la escuela aún, cuando a los 18 años fue admitido en el Trinity College. Fijó su residencia en el Observatorio Astronómico de Dunsink y desde 1837 fue Presidente de la *Royal Irish Academy* donde desplegó una extraordinaria actividad como escritor, colaborando con las más prestigiosas publicaciones científicas de Inglaterra sobre matemáticas superiores, geometría y física. Es conocido su *Principio de Hamilton* que se encuentra en todos los tratados de Mecánica Analítica, así como sus *Lecciones sobre los cuaternios*, 1853. En cuanto a su vida sentimental, se casó tres veces, sufrió alcoholismo, viviendo recluido los últimos años de su vida. Muere en 1865 en Dunsink dejando gran cantidad de investigación sin publicar.

Sir William Rowan Hamilton, padre de los cuaternios y del Juego Icosiano.

En la versión original, Hamilton situó una ciudad en cada uno de los veinte vértices del dodecaedro, asignándole su letra inicial correspondiente: B, Bruselas, C, Cantón, D, Delhi, F, Frankfurt, G, Ginebra, y así sucesivamente hasta Z para Zanzíbar. La X servía para *Xerés*, Jerez. En (*c*) de la Figura 10, se ha representado una solución a este juego.

El *Juego Icosiano*, mencionado más arriba, estaba formado por una tablilla de madera sobre la que se había dibujado el dodecaedro plano, es decir, la Figura 10 (*b*). Los vértices estaban perforados con agujeros en los que se colocaban peones numerados o testigos del recorrido. Por lo demás, el juego no difiere del anterior.

El juego de Hamilton puede realizarse también con caminos trazados sobre las superficies del resto de poliedros regulares, como el cubo, el tetraedro, etcétera.

Hamilton vende su juego en 1859 a un comprador en Londres por 25 libras; fue luego distribuido en diferentes versiones, tanto en Inglaterra como en otros países de Europa. Su biógrafo nos advierte que ése fue el único dinero que Hamilton recibió en su vida de forma directa por un descubrimiento o publicación.

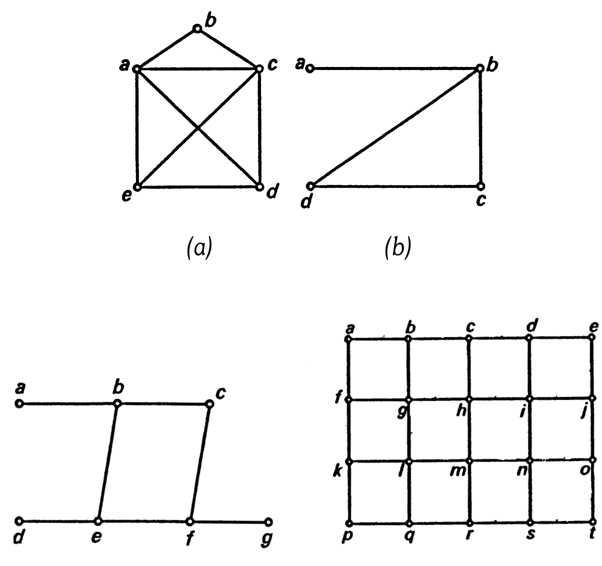


Figura 11. Nuevos grafos para estudiar

En la Figura 11 se representan varios grafos para dedicarles algunos minutos y deducir si son o no hamiltonianos. Alguno de ellos no lo es; otros sin serlo, admiten, sin embargo, caminos hamiltonianos.

MÁS ENIGMAS RESUELTOS CON GRAFOS

Existe una familia de grafos que merece la pena dedicarle algunas líneas. Son los grafos completos. Se dice que un grafo es **completo** cuando cada uno de sus vértices está conectado con todos los restantes. Equivale a decir que en cada vértice incide el mismo número de lados, es decir, todos los vértices tienen el mismo grado. Un grafo completo se designa por el total de vértices que posee así $\mathbf{K_n}$, que es un grafo completo de *n* vértices. En la Figura12 se muestran los grafos completos K_2 al K_5.

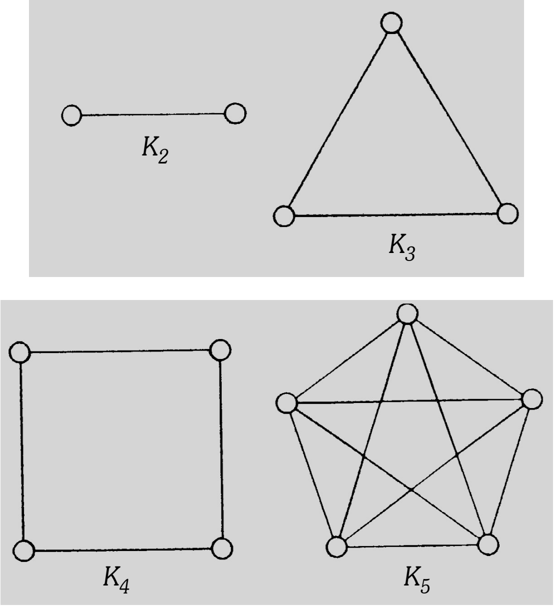


Figura 12. Cuatro grafos completos

Nos proponemos resolver el siguiente problema. Se trata de colocar las 7 letras, de la **A** a la **G,** en la rejilla mostrada en la Figura 13 (*a*), de tal forma que dos letras consecutivas del alfabeto nunca se sitúen en regiones contiguas de la rejilla. Se da la colocación de la primera de las letras, la **A**. Incluso el problema se puede aún limitar más: ¿dónde estará situada la letra G?

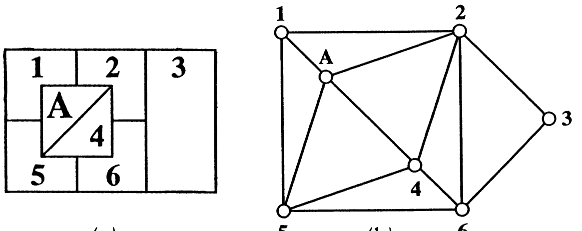


Figura 13. Las siete letras

Podemos jugar haciendo las variaciones necesarias hasta situar las seis letras que faltan cumpliendo la regla que se ha establecido. Pero ese no es el camino más eficiente. Aplicaremos los grafos para su resolución.

Dibujaremos el grafo de la Figura 13 (*b*), cuyos vértices representen las siete regiones A, 1, 2, 3, 4, 5 y 6. En este grafo, con 7 vértices y 13 lados, dos vértices estarán conectados por un lado si y sólo si las regiones que representan tienen una frontera común en el problema. Por ejemplo, existe el lado 1-2 porque las zonas 1 y 2 son contiguas. El problema equivalente ahora al propuesto será el de asignar a cada número una letra de forma que dos letras consecutivas del alfabeto no correspondan, en ningún caso, a dos vértices del grafo ligados por un lado. Para ello construiremos el **grafo complementario** del que acabamos de establecer, Figura 14, es decir, un grafo tal que dos de sus vértices estarán conectados por un lado si y sólo si no lo están en el grafo de partida. Por ejemplo, en el grafo complementario, el vértice 1 estará conectado con los 3, 4 y 6, con los que no está ligado en el grafo de partida. Obtendremos así un grafo con 7 vértices y 8 lados.

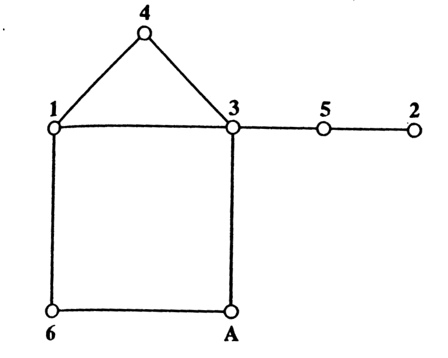


Figura 14. Grafo complementario

Por otra parte, y de un modo formal, puede observarse que este grafo complementario se obtiene añadiendo al primitivo todos los lados que le faltan para convertirlo en completo y después suprimiendo del mismo los lados iniciales que poseía.

En el grafo complementario existe una única posibilidad de formar la cadena de letras A-B-C-D-E-F-G pedida, recorriendo los lados de ese grafo pasando una vez y solo una por cada vértice, es decir, realizando un camino hamiltoniano. Pero de esto ya sabemos algo. Por ello, la solución es, A-6-1-4-3-5-2. ¿Existirán más posibilidades? No merece la pena malgastar el tiempo:

la solución es única y está representada en la Figura 15. La letra G estará en la región 2; la F, en la 5 y así sucesivamente.

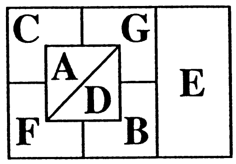


Figura 15. Solución para las siete letras

LA SOLUCIÓN DE SIRACUSA AL PROBLEMA DE COLLATZ

Hace más de sesenta años, Collatz inventa y da solución a un problema que ha circulado desde siempre en los medios matemáticos. Lo vamos a mostrar mediante un grafo especial que llamamos **organigrama**, herramienta empleada en informática, entre otras cosas, para representar la lógica de los programas de ordenador y, en general, para representar un algoritmo.

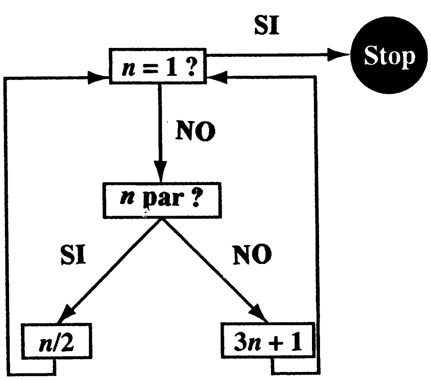


Figura 16. Grafo para representar el problema de Collatz

Este problema también se conoce con el nombre de problema de Syracusa, universidad americana que ha contribuido a su popularidad. Este es el problema.

1. Tomar un entero natural cualquiera. Si es par, dividirlo por dos; si es impar, triplicarlo y añadirle uno.
2. Tomar el número obtenido y repetir con él el proceso 1. Y así sucesivamente.

Practiquemos con este juego. Partamos del número entero **27**. Entonces, la sucesión que se obtiene es:

27 72 36 18 9 28 14 7 22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5 16 8 4 2 1

¿Y si el número inicial fuera el **15**? En este caso, obtendríamos

15 46 23 70 35 106 53 160 80 40 20 10 5 16 8 4 2 1

Se observa un resultado curioso: cualquiera que sea el entero de partida, se finaliza siempre con **... 4, 2, 1**. Tal resultado nunca ha sido demostrado, pero se cumple siempre.

RAICES, ÁRBOLES Y... LABERINTOS

En los orígenes de la teoría de grafos, parte de las matemáticas que se ocupa de objetos finitos o, como decimos hoy día, de objetos discretos, aparece una figura significativa denominada **árbol**. Un árbol es un grafo conexo y sin ciclos. **Conexo** significa que es posible conectar cualquier pareja de vértices por medio de un camino, o para entenderlo más fácilmente, es posible pasar de un vértice a otro a través de uno o varios lados y sin levantar el lápiz del papel. Un **ciclo** en un grafo, es un camino compuesto por varios lados cuyos vértice origen y final coinciden.

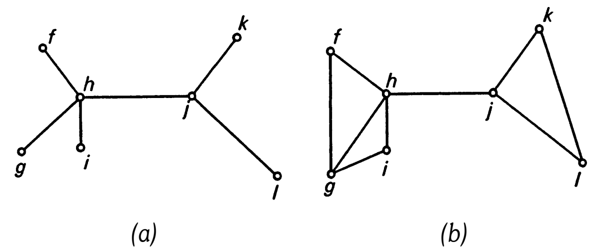


Figura 17. En (a) se representa un árbol. El grafo (b) no es un árbol

En un árbol existen vértices finales en los que solo incide un lado: tales vértices reciben el nombre de **hojas**. El árbol (*a*) de la Figura 17, tiene cinco hojas. Todo vértice hoja bloquea la circulación por el árbol. Cualquier árbol posee un vértice del que podría considerarse colgado: es el vértice **raíz**, el origen del árbol.

Arthur Caley, del que ya hemos hablado, utiliza este tipo de grafo, el árbol, para enumerar los diversos isómeros de los carburos saturados. Con la llegada de los computadores, los árboles se emplean en el estudio de las estructuras de datos, técnicas de clasificación, teoría de la codificación, inteligencia artificial, teoría de juegos y estrategia y, en general, en los problemas de optimización. Mediante un grafo árbol es posible representar las relaciones jerárquicas contenidas en las bases de datos.

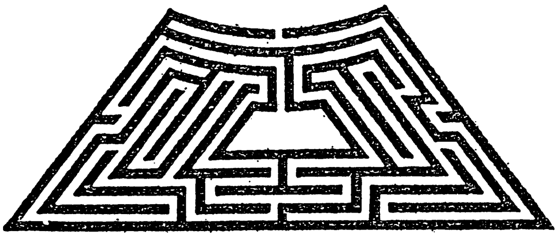


Figura 18. El laberinto del palacio de Hampton Court y su plano

Los laberintos constituyen un ejemplo de grafo cuyo origen se remonta a la noche de los tiempos, de forma que el tema ya resultó curioso e interesante para muchas civilizaciones: es muy popular la leyenda mitológica cretense de Teseo y el Minotauro. Cuando el joven Teseo entra en el laberinto de Creta, también conocido con el nombre de Dédalo, situado cerca de la ciudad Knosos, en busca del Minotauro, se conduce por tal laberinto desenrollando una cuerda de seda que le había dado Ariadna, de forma que pudiera regresar a la entrada de nuevo. Ello constituye, como veremos, un anticipo de cómo recorrer un laberinto completamente pudiendo regresar a su origen.

Herodoto también describe un laberinto egipcio con tres mil habitaciones, el del faraón Amenemhet. Muchas monedas de Knosos contienen simples laberintos y se han encontrado laberintos más complicados utilizados como decoración en los pavimentos de suelos romanos y de catedrales europeas.

En muchos casos, los laberintos se han concebido como lugares de diversión o esparcimiento como es el caso de uno de los más populares laberintos jardín: el de *Hampton Court*, en Inglaterra, ideado y realizado por el rey Guillermo III de Orange en 1690. Otros laberintos del mismo uso son: Villa Alteri en Roma y Alfarrás en Cataluña.

De nuevo, un laberinto es un problema de topología. Asimilando los pasillos de un laberinto a los lados de un grafo y sus cruces o encrucijadas a los vértices, la teoría de grafos permite salir de cualquier laberinto. ¡Si Teseo hubiera conocido la teoría de grafos!

El interés por un laberinto puede ser diverso: acceder a un punto determinado del mismo; visitar el laberinto completamente para encontrar un *tesoro*, un *secreto* y luego salir regresando al origen. La cuestión es cómo explorar el laberinto de forma sistemática o, lo que es lo mismo, cómo recorrer todas sus galerías sin dejar de visitar un solo rincón. Vamos a exponer varios métodos dado que esa exploración descansa sobre teorías desarrolladas en el pasado y más recientemente en los siglos XIX y XX.

Un primer método de exploración muy sencillo consiste en desplazarse por los pasillos del laberinto *ciñéndose* siempre a uno de los dos lados o paredes que los limitan, al derecho o al izquierdo. Así es posible entrar en el laberinto, recorrer todos sus pasillos y volver a la entrada o acceder a una salida diferente, aunque tal vez la ruta seguida no sea la más corta posible. Pero ese es otro problema. El procedimiento también sirve cuando se trata de alcanzar un objetivo situado dentro del propio laberinto, pero en este caso hay que dar por supuesto que no existe ningún otro camino por el que se pueda rodear el objetivo o meta y volver al punto de inicio. En este caso decimos que existe un islote y el procedimiento de ceñirse a un lateral no sirve.

Vamos a aplicar este procedimiento a un laberinto muy sencillo, como es el representado en la Figura 19 (*a*).

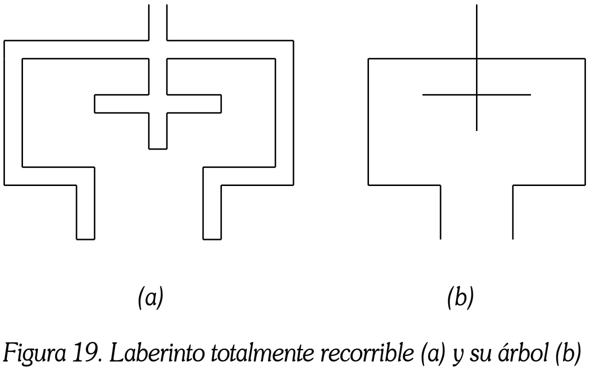
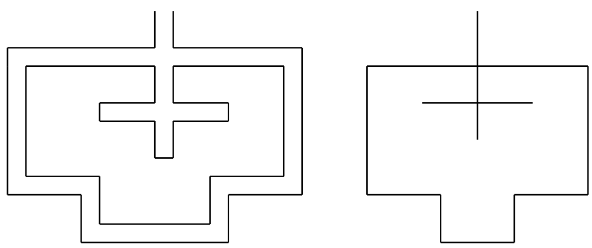


Figura 19. Laberinto totalmente recorrible (a) y su árbol (b)

Una vez situados en la entrada, podemos recorrerlo completamente ciñéndonos, por ejemplo, a la pared izquierda; al final, volveremos a salir por donde entramos. Es evidente que cada uno de sus pasillos será recorrido dos veces: a la ida y a la vuelta. En la parte (*b*) de la misma figura se ha trazado el grafo correspondiente al laberinto: cada lado del grafo corresponde a un tramo recto del pasillo del laberinto y cada vértice bien a un cambio de dirección o bien a un cruce de pasillos. Este grafo es un árbol con cinco vértices hoja: corresponden a los finales de pasillos donde ya no es posible proseguir con el recorrido.

Consideremos ahora otro laberinto también sencillo, pero con un islote. Figura 20 (*a*).



(a) (b)

Figura 20. Laberinto (a) con un islote y su grafo (b)

Al aplicar la regla anterior a este laberinto, ceñirse al lado izquierdo, por ejemplo, vemos que saldremos del mismo sin haber pasado por el islote en forma de cruz que existe en el interior, es decir, esa cruz queda aislada de nuestro recorrido. Esta particularidad se manifiesta en el grafo correspondiente (*b*): ahora ya no se trata de un árbol puesto que el grafo posee un ciclo coincidente con el recorrido efectuado. De aquí podemos extraer la regla siguiente: *si el grafo representativo del laberinto no es un árbol, no puede aplicarse la regla de ceñirse a un lateral.*

Otro ejemplo al que se le puede aplicar la regla anterior se representa en la Figura 21. Si construimos el grafo, veríamos que se trata de un árbol con cuatro vértices hoja que se corresponden con sendos finales de pasillo.

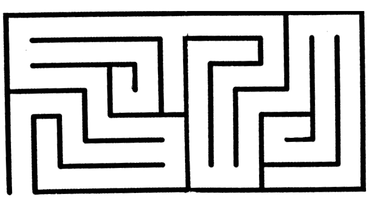


Figura 21. Laberinto con pasillos ciegos

Probemos con el laberinto de Hampton Court cuya planta se representaba en la Figura 18. Tal laberinto puede también asociarse a un árbol, aunque dada la complejidad de sus pasillos no sea fácil descubrirlo. Y como final para ejercitarse con la regla descrita representamos los laberintos de Amiens y el de *las siete calles.*

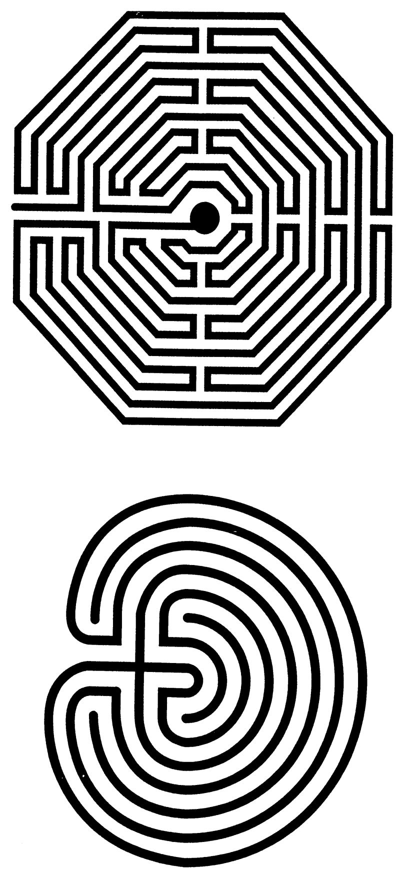


Figura 22. Laberinto de Amiens y de las siete calles

Gaston Tarry, 1843-1913, fue un matemático francés nacido en Villefranche de Panat e interesado por distintos temas de las matemáticas recreativas y, entre ellos, por los laberintos. En 1895 enuncia un método sistemático de exploración de laberintos de cualquier tipo. El método descansa en las dos reglas que siguen. (Reglas y esquemas, de *Tangente*, salvo adaptación).

Antes de describirlas, tendremos en cuenta que un pasillo comienza y acaba en los cruces; un cruce o encrucijada es el punto del laberinto donde se encuentran dos o más pasillos.

1. Se recorre cada pasillo exactamente dos veces, una vez en cada sentido, colocando una marca en la entrada del pasillo y otra en la salida del

mismo, de forma que al finalizar la exploración total del laberinto, cada pasillo habrá sido marcado dos veces en cada extremidad.

2. En cada cruce o encrucijada se impone la condición de no volver a tomar el pasillo por el que se ha descubierto o llegado a tal cruce (el pasillo por el cual nos encontramos con ese cruce por vez primera) más que como último recurso.

La segunda regla de este método permite efectuar numerosas exploraciones diferentes de un mismo laberinto, puesto que llegando a un cruce ya explorado, se puede hacer la elección entre las siguientes posibilidades: explorar un pasillo nuevo, tomar uno que ya ha sido recorrido una vez y hacerlo en otro sentido o bien volver hacia atrás por el pasillo de llegada al cruce.

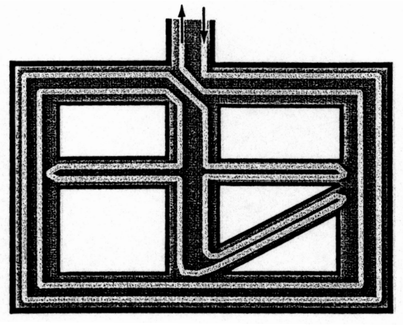


Figura 23. Recorrido completo de un laberinto por el método Tarry.

La Figura 23 muestra un laberinto recorrido exhaustivamente aplicando el método de Gaston Tarry. Podemos también dibujar su grafo correspondiente. No se trata de un árbol puesto que el laberinto presenta ciclos.

Gaston Tarry

En la misma época que Tarry, el ingeniero francés de telégrafos, Trémeaux, había comunicado al matemático E. Lucas, ya citado más arriba, un método muy similar, pero más preciso. Lucas lo describió después en el primer tomo de sus *Récréations Mathématiques*. Veamos las tres reglas por las que se rige este procedimiento.

1. Desde el punto de comienzo, se toma un camino cualquiera. Si se encuentra un punto sin salida, se retrocede por el pasillo ya recorrido. Si se llega a una encrucijada de pasillos, se toma uno cualquiera aún no explorado.

2. Si se llega a un cruce ya explorado, pero por una vía nueva, se retrocede por el pasillo al que se ha llegado al cruce hasta recorrerlo de nuevo completamente en sentido inverso.

3. Si se llega a una encrucijada ya explorada y por un pasillo ya recorrido en los dos sentidos, se elige, en primer lugar, un pasillo nuevo, y si esto no fuera posible, un pasillo explorado en un solo sentido.

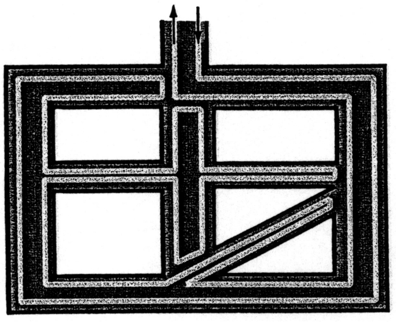


Figura 24. Recorrido completo de un laberinto por el método Trémeaux.

Los dos métodos anteriores permiten recorrer completamente cualquier laberinto a partir de su entrada o de cualquier otro lugar interno del mismo. Si se tratara de encontrar la salida de un laberinto en el que nos hubieran dejado abandonados o en el que nos hubiéramos perdido, podríamos aplicar el procedimiento debido a Oysten Ore, matemático americano nacido el pasado siglo, gran especialista en la teoría de grafos. Como veremos, el procedimiento es, en general, largo de aplicar.

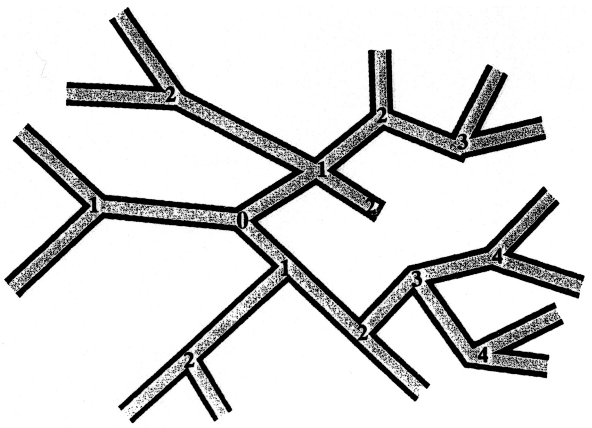


Figura 25. Grafo con el procedimiento de Ore

Se basa en el conocimiento, en todo momento, de la *distancia* entre el lugar en el que uno se encuentra y el punto de partida donde se supone que se está perdido, distancia medida, por ejemplo, en número de pasillos entre ambos lugares. Se marca el punto de inicio con **0**. Se exploran luego cada uno de los pasillos que se inician en ese origen **0** hasta llegar a un punto ciego o a un cruce, los cuales serán numerados con **1** (distan un pasillo del origen). Se vuelve hacia atrás marcando el pasillo en sus dos extremos y añadiendo una cruz cuando se trate de un pasillo sin salida.

La etapa siguiente consiste en explorar todos los pasillos que se inician en cada uno de los cruces **1**, excepto el pasillo que une ese cruce con el inicio **0** que ya está explorado en la etapa anterior, hasta alcanzar los cruces **2** que estarán situados a una distancia del origen, de dos pasillos. Luego se regresa al origen **0** marcando siempre cada pasillo dos veces, a la entrada y a la salida. Y así sucesivamente.

Al final, la exploración habrá sido total, alejándose regularmente del origen **0** en el sentido de la *distancia* definida en el laberinto.

EL ÁRBOL... EN SÍ MISMO

En las raíces de la teoría de grafos, materia que, al contrario que otras como el álgebra o el cálculo, se ocupa de objetos finitos y discretos, figuran como significativos, los árboles, que, a diferencia de otros grafos, son a la vez conexos y sin ciclos.

Lo dicho es un párrafo compuesto de frases. No hay información en él porque, de alguna manera, todo ya estaba dicho más arriba en este artículo. Lo original es que vamos a poner en forma de árbol el párrafo anterior que, de una forma muy simple, define el concepto **árbol** integrándolo en una teoría, la de grafos. Figura 26.

En la teoría de grafos, el árbol anterior se dice que está **ordenado**. Entenderemos porqué. El árbol puede recorrerse, es decir, visitar, de acuerdo con unas reglas, todos y cada uno de sus vértices, donde se encuentran las frases correspondientes, y así reproducir el párrafo completo que nos ocupa. Existen varias reglas; la que vamos a aplicar da lugar a un **recorrido preorden** del árbol. Basta con comenzar por la frase situada en la raíz, ***En las raíces de la teoría de grafos***, e ir descendiendo por los lados del árbol siempre lo más a la izquierda posible hasta llegar a las dos hojas donde se encuentran las frases ***el álgebra*** y ***el cálculo***, para luego continuar con el subárbol aún no visitado y de más a la izquierda, en cuyo vértice raíz se encuentra la frase ***se ocupa de***

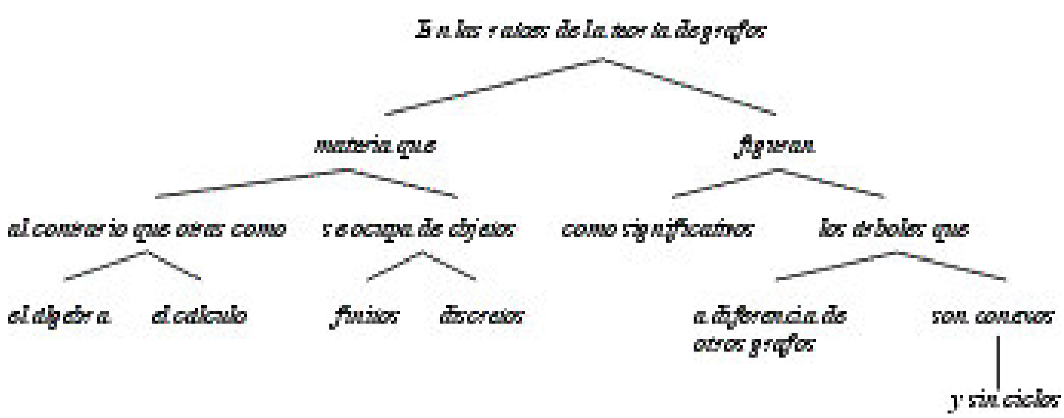


Figura 26. Un árbol para definir el concepto árbol

objetos. Y así sucesivamente. La conclusión es que, siguiendo el recorrido preorden del árbol, reproduciremos exactamente el párrafo enunciado.

La representación sintáctica en forma de árbol que hemos adoptado se denomina formalmente *árbol de dependencia sintáctica.* Esta noción fue desarrollada el siglo pasado por el lingüista francés Lucien Tesnière. Los nudos del árbol son palabras o frases y los lados, marcan las relaciones o dependencias entre esas palabras, para formar el párrafo.

Jan Lukasiewicz nació en Lvov, Galicia Austriaca, hoy Ucrania, en 1878. Galicia, territorio polaco, fue anexionada a Austria en 1772. Era hijo de un capitán del ejército del Austria de aquel entonces. Lukasiewicz siempre estuvo interesado por las matemáticas en la escuela. Estudió primero, se doctoró en 1906 y luego desarrolló su actividad docente en la universidad de su ciudad natal. Más tarde, terminada la Primera Guerra Mundial, se trasladó a Varsovia donde ocupó una plaza como profesor en su Universidad. Incluso fue Ministro de Educación de Polonia en 1919 y Rector de la Universidad de Varsovia dos veces. Su especialidad era la Filosofía y, particularmente, la Lógica. Ello le movió a fundar la Escuela de Lógica de Varsovia. Terminada la Segunda Guerra Mundial, marcha exiliado a Bélgica de donde más tarde se traslada a la Academia Real de Irlanda, en Dublín, donde continuó trabajando en el área de su especialidad, la Lógica. En la comunidad matemática y, más tarde, en informática se le conoce por su introducción de las expresiones algebraicas sin el uso del paréntesis, dando lugar a lo que él denominó *polish notation, notación polaca*. Esta técnica, a su vez, está basada en el recorrido de árboles ordenados. Fallece en Dublín en 1956.

Jan Lakasiewicz, padre de la notación polaca.

ÁRBOLES PARA LA ESTRATEGIA

... Se trata de un juego sencillo para dos jugadores, con unas reglas a seguir, también elementales. Daremos la idea pero luego ésta se puede complicar cuanto se quiera. El juego lo hemos encontrado en una publicación escolar francesa cuyo autor es Thierry de la Rue.

Utilizaremos un **árbol orientado**, es decir, un árbol en el que los lados tienen ahora *flechas.* Aunque realmente, si suponemos que uno de sus vértices sea el vértice raíz, el círculo más oscuro, no sería ya necesario el uso de las flechas: el árbol quedaría automáticamente orientado.

En primer lugar, describamos el tablero de juego. En cada uno de los vértices hoja escribiremos un número, por sencillez, entero, positivo o negativo, quedándonos una disposición como la indicada en la Figura 27. En nuestra versión se enfrentan dos jugadores y solo dispondrán de una *ficha* para los dos.

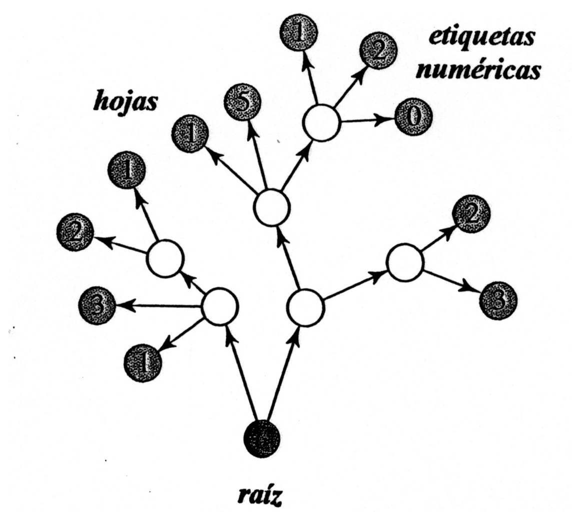


Figura 27. Un juego de estrategia sencillo

Las reglas del juego son las siguientes: se coloca la ficha sobre el vértice raíz; el jugador número 1, el primero en jugar, elige uno de los lados que parten de la raíz, desplazando la ficha hacia el vértice donde finaliza el lado elegido; a continuación, el otro jugador, jugador número 2, elige uno de los lados que parten de esa nueva posición y desplaza la ficha por ese lado hasta alcanzar un nuevo vértice. Continúan así, alternándose los dos jugadores, mientras sea posible: en cada turno de jugador, la ficha se aleja un poco más del vértice raíz hasta acabar en un vértice hoja. En ese momento la partida finalizará. Es el momento de hacer balance: el número que figura en ese vértice hoja alcanzado, será el total de puntos ganados por el jugador 1 que inició la partida.

Si se hubiera escrito un entero negativo en alguno de los vértices hoja, y ese nudo hubiera sido el final, el vencedor sería el jugador 2.

Variando la forma del árbol y las etiquetas asignadas a las hojas, se puede crear toda una variedad de juegos. Por ejemplo, el ajedrez, las damas, el *Nim*, pueden representarse de manera similar a la descrita: los vértices serán todas las situaciones posibles del juego, los lados las jugadas permitidas por las reglas y la raíz y las hojas, respectivamente, la posición inicial y las posiciones finales del juego.

Siempre existirán algunas limitaciones: el número de situaciones tiene que ser finito; no deberá estar autorizado el retorno, la marcha atrás, ya que ello crearía un ciclo en el árbol y éste dejaría de ser tal; en todo momento, los jugadores tienen que conocer las situaciones sin ambigüedad, cosa que non ocurre, por ejemplo, en el juego de las cartas; las jugadas las deciden los jugadores y no el azar.

El juego del ajedrez no encaja totalmente dentro de las reglas que acaban de darse para representarlo en forma de árbol, pues, en general, es posible volver a una posición de piezas que ya se dio anteriormente. En este sentido decir, para terminar, que los juegos de estrategia fueron estudiados por primera vez en 1912 por Zermelo, matemático alemán conocido también por su contribución al desarrollo de la teoría de conjuntos. Se le atribuye particularmente un análisis del juego del ajedrez.

John von Neumann, fue un matemático húngaro, nacido en 1903 en Budapest, y nacionalizado más tarde estadounidense. Enseñó en las Universidades de Berlín y Hamburgo. En 1933 es nombrado profesor de matemáticas en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Autor de importantes investigaciones en numerosos y diferentes campos científicos, como el desarrollo de la teoría de juegos, durante la segunda guerra mundial, con su publicación *Theory of Games and Economic Behavor*; famoso también por la desviación que hizo de la lógica clásica hacia el campo científico con la publicación en 1937, en colaboración con Garret Birkhoff, del artículo *The Logic of Quantum Machanics*; las matemáticas puras y aplicadas y la tecnología. Preconizó la utilización del sistema binario como medio de representación de la información y de ahí su importante contribución al diseño y construcción de la primera máquina de cálculo, auténtico computador electrónico, el *ENIAC*. Murió en Washington en 1957.

John von Neumann

JARDINERÍA DE ÁRBOLES

Hemos empleado en el juego anterior un **árbol con raíz**. La raíz era un vértice, en cierto modo, privilegiado. Todo el árbol nace de ese vértice y queda, por lo tanto, orientado. Para comprender las cuestiones que siguen, se hace necesario definir unos pocos conceptos más. Por ejemplo, un vértice que no sea ni el raíz ni un vértice hoja, recibe el nombre de **vértice interno**. Un determinado vértice interno tendrá otro adyacente que le sigue recorriendo el lado correspondiente. Ambos guardan una relación familiar: el primero es el **padre** del segundo y éste **hijo** del primero. Cuando el máximo de hijos que posee todo vértice interno es *m*, decimos que tenemos un árbol de **orden *m***. En particular, si cada vértice interno tiene dos hijos, como máximo, el árbol es de orden dos o **binario**. Además, si todo vértice interno tiene exactamente *m* hijos, el árbol es **completo** de orden *m*. Figura 28.

Para hacer el lenguaje de los árboles, considerados como grafos, más cercano al lenguaje de la jardinería, podríamos designar los lados con el nombre de **ramas**.

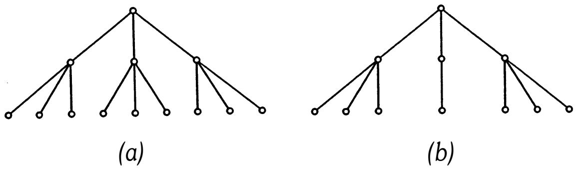


Figura 28. Árboles con raíz de orden 3

El árbol (*a*) de la figura 28 tiene v=13 vértices, uno de los cuales es el raíz, que está situado en la parte más alta del mismo; el total de ramas o lados es l=12, y es completo de orden 3 ya que de cada vértice parten tres ramas. El árbol (*b*) también es de orden 3 pero no es completo; tiene l=10 lados. En el primero, el total de hojas es h=9 y en el segundo es h=7.

Y aún podemos concebir otro concepto: la **altura** del árbol. Es el número de lados que tiene el camino más largo que pueda construirse desde la raíz hasta un vértice terminal. La altura de los árboles de la figura 28 es tres, *alt*=2.

Vamos a aprovecharnos, una vez más, de los grafos en forma de árbol para aplicarlos a estructuras de decisión. Supongamos dos jugadores ***a*** y ***b*** que participan en una cierta partida bajo las reglas de juego siguientes: gana la partida el primer jugador que vence dos veces consecutivas o bien un total de tres veces, aunque no sean consecutivas.

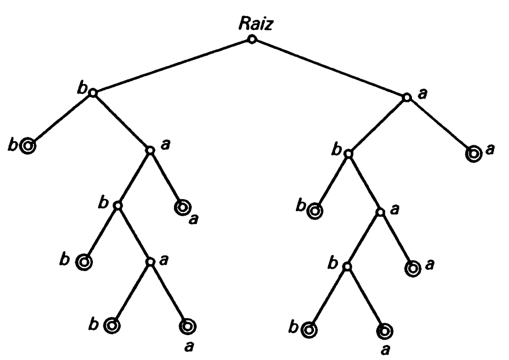


Figura 29. Árbol de todas las jugadas posibles

Las posibilidades de jugadas podrían representarse mediante el árbol con raíz, completo y binario, representado en la Figura 29. Cuando la etiqueta de un vértice hoja es ***a***, significa que la partida la ha ganado ese jugador; idéntico razonamiento para ***b***. En el nivel 1 se representan las únicas dos posibilidades de la estrategia del juego: gana ***b*** o gana ***a***, ambos en dos jugadas. En el nivel dos pueden darse cuatro posibilidades, dependientes dos a dos de lo que haya sucedido en el nivel uno. Y así sucesivamente.

Como podemos ver, el árbol de posibilidades tiene diez vértices hoja. Es fácil contarlos rápidamente. ¿Y qué hacer si el árbol es muy frondoso, es decir, es muy grande en ramas y vértices? Entonces, podemos aplicar una fórmula válida para árboles completos de cualquier orden m. El total de hojas para un árbol completo binario, es

$$h = [(m-1)v+1]/m = [(2-1)19+1]/2 = 10$$

¿Existe alguna fórmula semejante para obtener el total i de vértices internos? La respuesta es afirmativa. Esa fórmula, más sencilla que la anterior, es

$$i = (v-1)/m = (19-1)/2 = 9$$

En este resultado 9 se incluye también el vértice raíz. Sumando los dos resultados anteriores, total de hojas o vértices terminales y total de vértices internos, deducimos que se trata de un árbol con un total de 19 vértices, resultado al que también puede llegarse directamente, aplicando la fórmula,

$$\text{Total de vértices} = v = mi + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 19$$

Existen muchas otras fórmulas que relacionan entre sí vértices, vértices internos, hojas y otros elementos de un árbol. Todas ellas, como las expuestas, se demuestran en libros especializados en teoría de grafos. Por ejemplo, otra expresión para obtener el total de vértices en función del total de hojas h y del orden m del árbol, es

$$\text{Total de vértices} = v = (hm-1)/(m-1)$$

Y vamos a servirnos de esta última fórmula para presentar una última situación bien conocida. Supongamos que alguien inicia el envío de cartas a otras personas de forma que a todo destinatario se le pide que envíe, a su vez, la misma carta a otras 4 personas. Algunas de ellas cumplirán con la regla de este juego y otras no. Se quiere saber: a) Cuántas personas han leído la carta, incluyendo la que inició la cadena, suponiendo que nadie recibe más de una carta y que la cadena termina cuando 100 personas la hayan leído sin reenviarla de nuevo, y b) Cuánta gente envió la carta.

La cadena representativa de este juego es un árbol de orden m=4 con raíz que corresponde a la persona que inicia la partida, de forma que sus vértices internos representan aquellas otras personas que reenvían la carta, mientras que las hojas, y sus correspondientes vértices terminales, son aquellas personas que no lo hacen. De este tipo hay 100 personas.

Entonces, aplicando la última fórmula expuesta, tendremos para la primera cuestión:

Personas que leen la carta = $v = (hm-1) / (m-1) = (100 \cdot 4-1) / (4-1) = 133$

Para la segunda cuestión,

Personas que envían carta = $i = v-h = 133 - 100 = 33$

Y para finalizar, vamos a añadir algo sobre la altura del árbol. En principio nos limitaremos a los árboles binarios completos. La relación entre el total de vértices v y la altura *alt*, se determina fácilmente. En la altura 0, todo árbol solo tiene un vértice que es la raíz. A medida que ascendemos por el árbol, el número de vértices se duplica, dado que cada padre tiene siempre dos hijos. Por lo tanto,

$$\text{Total vértices} = v = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{alt} = 2^{alt+1} - 1$$

Con un sencillo cálculo, tomando logaritmos en la igualdad anterior, podremos conocer lo *alto* que es nuestro árbol binario en función del número de vértices que posee:

$$\text{Altura} = alt = \log_2 (v+1) - 1$$

En general, si se trata de un árbol completo de orden m, se sabe que es: $alt = \lceil \log_m h \rceil$.

Y en particular, si se tratara de un árbol binario, podríamos aplicar una fórmula más sencilla que la anterior para calcular su altura: $alt = \log_2 h$. Por ejemplo, con $h=8$ vértices terminales, tendría una altura de $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

UNIR EL PRINCIPIO CON EL FINAL

Acabaremos volviendo a la reflexión de Schopenhauer que escribimos al principio, añadiendo que si él hubiera conocido la teoría de grafos, la hubiera empleado para sostener su tesis. La representación de un problema por medio de un dibujo, de un plano, de un esquema, contribuye frecuentemente a su comprensión. El lenguaje de los grafos está construido sobre este principio. Numerosos métodos, propiedades y procedimientos, han sido pensados, cuando no descubiertos, a partir de un esquema, para luego ser formalizados y desarrollados.

Bajo el epígrafe de *teoría de grafos* se reúnen problemas de distinta índole y todos ellos con la característica común de poderlos visualizar y comprender fácilmente: puntos que representan individuos, objetos, situaciones, unidos por líneas que simbolizan las relaciones existentes entre ellos.

La lectura no da sabiduría al hombre;
le da únicamente conocimiento.

W. Somerset Maugham

BIBLIOGRAFÍA

Berge, C., *Théorie des Graphs et ses Applications*, Dunod, 1958.

Cayley, A. *On the mathematical theory of isomers,* Phil. Mag., Vol. 47, 1874.

Euler, L., *Solutio problematis ad Gkeometriam situs pertinentis*, Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol., Vol. 8, 1736.

García Merayo, F., *Matemática Discreta,* Paraninfo, 2001.

Gardner, M., *Mathematical Puzzles and Diversions*, Pelican Book, 1968.

Gardner, M., *More Mathematical Puzzles and Diversions*, Pelican Book, 1967.

Gratz, W. M., *Enigmas, Entretenimientos y Curiosidades Matemáticas*, Ediciones Ibéricas.

PARIS Atlas, *Repertoire des rues*, Michelin, nº 11, 1981.

Publicación periódica francesa *Tangente, l'aventure mathématique*: *Les graphes*, 2002-2 HS nº 12.