考虑带阻力的动力方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t^2}+c\left\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}\right\|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{u}_i,$$

其中 m 为质量, c 为阻力系数, 即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}), \tag{1}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ \boldsymbol{v}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{40},\ \boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{p}_{10}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{v}_{10}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v}\\ m^{-1}(\boldsymbol{u}-c\|\boldsymbol{v}\|\boldsymbol{v})\end{pmatrix}.$$

易知质心 $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{X}),\|\boldsymbol{r}_i\|,\widehat{\boldsymbol{r}}_i,\varPhi$ 均为 Lipschitz 连续函数, 且初值条件满足

$$\min_{i\neq j}\|\boldsymbol{p}_i(0)-\boldsymbol{p}_j(0)\|>d_s>0.$$

由 Picard 定理可知方程 (1) 的解存在且唯一, 解为

$$\boldsymbol{X}(t)=\boldsymbol{X}(0)+\int_0^t\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}(s))\mathrm{d}s,$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i(t)&=\boldsymbol{v}_i(0)+\int_0^t\left[m^{-1}\boldsymbol{u}_i(\boldsymbol{X}(s))-\frac{c}{m}\|\boldsymbol{v}_i(s)\|\boldsymbol{v}_i(s)\right]\mathrm{d}s,\\ \boldsymbol{p}_i(t)&=\boldsymbol{p}_i(0)+\int_0^t\boldsymbol{v}_i(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

下面证明防撞性. 定义

$$\begin{aligned}\varPsi(d)&=k_r\exp\left\{-\frac{(d-d_s)^2}{2\sigma^2}\right\},\\ \varPhi(d)&=-\frac{\mathrm{d}\varPsi}{\mathrm{d}d}=\frac{k_r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{(d-d_s)^2}{2\sigma^2}\right\}(d-d_s),\\ E_{ij}(t)&=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}d_{ij}}{\mathrm{d}t}\right)^2+\psi(d_{ij}(t)),\end{aligned}$$

其中 $d_{ij}(t)=\|\boldsymbol{p}_i(t)-\boldsymbol{p}_j(t)\|$. 则系统能量为

$$\mathcal{E}(t)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}E_{ij}(t).$$

而

$$\frac{\mathrm{d}E_{ij}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}d_{ij}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2d_{ij}}{\mathrm{d}t^2}+\varPhi(d_{ij})\frac{\mathrm{d}d_{ij}}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2d_{ij}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{d_{ij}}\left[\|\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j\|^2+(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_j)\cdot(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j)-\left(\frac{\mathrm{d}d_{ij}}{\mathrm{d}t}\right)^2\right], \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{u}_i=\dot{\boldsymbol{v}}_i$. 对于 $\boldsymbol{u}_i$, 有

$$\boldsymbol{u}_i=\frac{1}{m}[-k_p(d_i-R^*)\widehat{\boldsymbol{r}}_i-k_dv_{r,i}\widehat{\boldsymbol{r}}_i-k_v(v_{\theta,i}-v_d)\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{i}}]+\frac{1}{m}\sum_{k\neq i}\varPhi(d_{ik})(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_k)=:\boldsymbol{u}_{i_1}+\boldsymbol{u}_{i_2}.$$

设 $\|\boldsymbol{u}_{i_1}-\boldsymbol{u}_{j_1}\|\leqslant L$. 取

$$k_r>L\sigma^2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\max\left\{\frac{1}{d_s},\frac{1}{\min\limits_{k\neq l}d_{kl}(0)}\right\},$$

则当 $d_{ij}\leqslant d_s+\sigma$ 时, 有

$$\|\boldsymbol{u}_{i_2}-\boldsymbol{u}_{j_2}\|>2L.$$

于是

$$(\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{p}_j)\cdot(\boldsymbol{u}_i-\boldsymbol{u}_j)\geqslant\|\boldsymbol{u}_{i_2}-\boldsymbol{u}_{j_2}\|d_{ij}-Ld_{ij}>Ld_{ij}.$$

代入 (2) 式有

$$\frac{\mathrm{d}E_{ij}}{\mathrm{d}t}\geqslant\frac{\mathrm{d}d_{ij}}{\mathrm{d}t}(L+\varPhi(d_{ij}))>0.$$

由此即知

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}\geqslant-\kappa\mathcal{E}(t),$$

其中 $\kappa>0$ 为常数. 而

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(0)\geqslant\sum_{i<j}\varPsi(d_{ij}(0))>\psi(d_s+\sigma)\cdot\binom{N}{2},\\
&\mathcal{E}(t)\geqslant\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\kappa t}>0,\\
&\varPsi(d_{ij}(t))\leqslant E_{ij}(t)\leqslant\mathcal{E}(t).
\end{aligned}$$

由 $\varPsi$ 严格单调递减可知

$$d_{ij}(t)\geqslant\varPsi^{-1}(\mathcal{E}(t))>\varPsi^{-1}(\mathcal{E}(0)\mathrm{e}^{-\kappa t}).$$

令 $t\to\infty$, 有

$$\varliminf_{t\to\infty}d_{ij}(t)\geqslant\varPsi^{-1}(0)=d_s.$$

故总是不会相撞.

下面讨论收敛性, 即讨论系统收敛至

$$\mathcal{S}=\{\|\boldsymbol{r}_i\|=R,\boldsymbol{v}_i\cdot\widehat{\boldsymbol{r}}_i=0,\|\boldsymbol{v}_i\|=v_d\}.$$

构造 Lyapunov 函数

$$V=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}[k_p(d_i-R)^2+\|\boldsymbol{v}_i-v_d\widehat{\boldsymbol{\theta}}_i\|^2]+\sum_{i<j}\varPsi(d_{ij}),$$

则

$$\dot{V}=-\sum_{i}k_dv_{r,i}^2-\sum_{i}k_v(v_{\theta,i}-v_d)^2-\sum_{i}c\|\boldsymbol{v}_i\|^3\leqslant0,$$

故方程渐进收敛至 $\mathcal{S}$.