Matematyka

skrypt do wykładów - wersja robocza, WML WAT 2021/2022

Jerzy Różański
Instytut Matematyki i Kryptologii

15 czerwca 2022

Spis treści

1 Równania różniczkowe **1**
- 1.1 Równania różniczkowe zwyczajne . . . 1
  - 1.1.1 Określenia podstawowe . . . 1
    - Zbiór rozwiązań . . . 2
    - Zagadnienie początkowe . . . 5
    - Sampling warunków początkowych . . . 6
    - Pole kierunków i krzywe całkowe . . . 7
  - 1.1.2 Metody rozwiązywania równań . . . 8
    - Wzór Barrowa-Newtona . . . 8
    - Rozdzielenie zmiennych . . . 9
    - Metoda Eulera . . . 10
    - Odwzorowanie Picarda . . . 11
  - 1.1.3 Podstawowe twierdzenia . . . 13
    - Istnienie rozwiązania . . . 13
    - Jednoznaczność rozwiązania . . . 14
- 1.2 Wybrane typy równań różniczkowych . . . 15
  - 1.2.1 Równanie autonomiczne . . . 15
  - 1.2.2 Równanie w zmiennej ilorazowej . . . 18
  - 1.2.3 Równanie liniowe rzędu pierwszego . . . 20
    - Równanie liniowe jednorodne . . . 20
    - Metoda uzmiennienia stałej . . . 22
    - Metoda czynnika całkującego . . . 22
    - Rozwiązanie równania niejednorodnego . . . 23
    - Zagadnienie początkowe . . . 23
    - Metoda współczynników nieoznaczonych . . . 24
- 1.3 Równania liniowe rzędu drugiego . . . 25
  - 1.3.1 Zbiór rozwiązań . . . 25
  - 1.3.2 Zagadnienie początkowe . . . 26

1.3.3 Warunki brzegowe 28
1.3.4 Równanie liniowe jednorodne 28
Równanie o stałych współczynnikach 30
1.3.5 Równanie liniowe niejednorodne 32
Metoda uzmiennienia stałych 32
Metoda współczynników nieoznaczonych 34
1.3.6 Układ równań pierwszego rzędu 36

2 Całki wielokrotne **37**
2.1 Całki wielokrotne 37
2.1.1 Całka podwójna na prostokącie 37
2.1.2 Twierdzenia o całkowalności 40
2.1.3 Interpretacja geometryczna 40
2.1.4 Całki iterowane 41
2.1.5 Zamiana całki podwójnej na iterowaną 42
2.1.6 Całka podwójna po obszarze 43
Zbiory normalne 43
Zbiory regularne 45
Zbiory dowolne 46
2.1.7 Całka potrójna 47
2.1.8 Całki n-krotne 49
2.2 Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej 51
2.2.1 Macierz Jacobiego i grupa przekształceń 51
2.2.2 Współrzędne biegunowe i całka podwójna 53
2.2.3 Współrzędne cylindryczne 57
2.2.4 Współrzędne sferyczne 59
2.2.5 Przykłady i uogólnienia 61
Różnica kół z przesunięciem 61
Pierścień sferyczny 62
Różnica kul z przesunięciem 62
2.3 Zastosowania całek wielokrotnych 64
2.3.1 Całka podwójna 64
Pole obszaru regularnego 64
Objętość bryły 64
Pole płata 65
Masa obszaru 65
Momenty statyczne 66
Momenty bezwładności 68

2.3.2 Całka potrójna . . . 68
Objętość obszaru regularnego . . . 68
Masa obszaru przestrzennego . . . 69
Momenty statyczne . . . 70
Momenty bezwładności . . . 70

3 Rachunek prawdopodobieństwa 72
3.1 Elementy kombinatoryki . . . 72
3.1.1 Zliczanie zbiorów skończonych . . . 72
3.1.2 Ciągi n-wyrazowe . . . 74
3.1.3 Zliczanie funkcji . . . 76
3.1.4 Zliczanie podzbiorów. Współczynniki dwumianowe . . . 79
3.1.5 Permutacje i podziały . . . 82
3.2 Pojęcie i właściwości prawdopodobieństwa . . . 84
3.2.1 Przestrzeń zdarzeń . . . 84
3.2.2 Aksjomaty prawdopodobieństwa . . . 85
3.2.3 Przykłady przestrzeni probabilistycznych . . . 88
Zbiór przeliczalny lub skończony . . . 88
Euklidesowa przestrzeń jednowymiarowa . . . 90
Prawdopodobieństwo geometryczne . . . 92
3.3 Prawdopodobieństwo warunkowe . . . 93
3.3.1 Określenia podstawowe . . . 93
3.3.2 Prawdopodobieństwo całkowite . . . 98
3.4 Zmienne losowe . . . 100
3.4.1 Rozkład zmiennej losowej . . . 101
Dystrybuanta . . . 101
Niezależność zmiennych losowych . . . 102
Funkcja gęstości . . . 103
Parametry pozycyjne . . . 104
3.4.2 Momenty zmiennych losowych . . . 104
Wartość oczekiwana . . . 105
Momenty wyższych rzędów . . . 106
3.5 Rozkłady prawdopodobieństwa . . . 108
3.5.1 Rozkłady dyskretne . . . 108
Rozkład dwupunktowy . . . 109
Rozkład Poissona . . . 112
3.5.2 Rozkłady ciągłe . . . 113
Rozkład jednostajny . . . 113

Rozkład wykładniczy 115
Rozkład normalny 116
Kształt i symetria rozkładu 118

Rozdział 1

Równania różniczkowe

1.1 Równania różniczkowe zwyczajne

1.1.1 Określenia podstawowe

Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego dotyczy niewiadomej funkcji jednej zmiennej $y(x)$, która ma pochodną $y'(x)$ w pewnym przedziale (a, b). Równanie w postaci ogólnej oznacza:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Postać normalna takiego równania oznacza, że dla zadanej jednoparametrowej funkcji $f(x, y(x))$ mamy zależność, dla której po lewej stronie równania można wyodrębnić $y'(x)$, czyli:

$$y' = f(x, y).$$

Zapiszemy też dla równania jego postać różniczkową:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Przykład. Równanie w postaci ogólnej $xy' + y = \cos x$ ma postać normalną dla $x \neq 0$ jako

$$y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{y}{x}.$$

Natomiast postać różniczkowa może być zapisana jako

$$xdy + (y - \cos x)dx = 0.$$

Zbiór rozwiązań

DEFINICJA (Rozwiązanie równania)**.** Rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego nazywamy funkcję $y(x)$ różniczkowalną na przedziale (a,b), dla której to równanie spełnione jest tożsamościowo, czyli

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

PRZYKŁAD**.** Dla równania w postaci normalnej

$$y' = e^{x+y}$$

rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $y(x) = -\ln(1-e^x)$ na półprostej $x \in (-\infty, 0)$. Funkcja jest rozwiązaniem ponieważ:

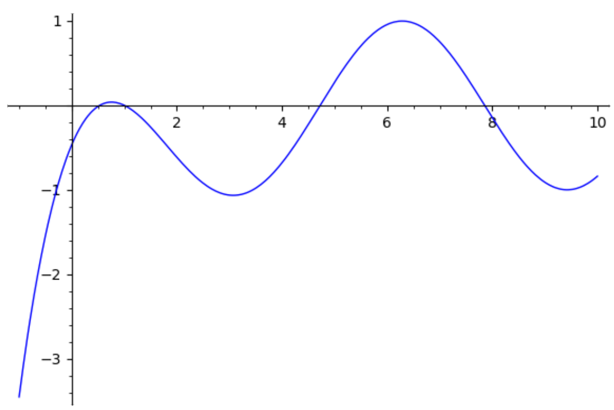
- pochodna $y' = -\frac{e^x}{e^x-1}$
- prawa strona $e^{x+y(x)} = e^{x-\ln(1-e^x)} = e^x e^{-\ln(1-e^x)} = \frac{e^x}{1-e^x}$.

Krzywą całkową nazywamy wykres rozwiązania $y(x)$.

PRZYKŁAD**.** Dla równania różniczkowego $y' + y = \cos(x) - \sin(x)$ pewnym rozwiązaniem jest

$$y(x) = -\cos(1)e^{1-x} + \cos(x).$$

Wtedy krzywa całkowa ma postać



UWAGA **1.1.1.** Możemy rozważać, bez specjalnych trudności, przedziały postaci $[a,b)$ lub $[a,\infty)$ czy tym podobne. Jeśli rozwiązanie $y(x)$ dla równania możemy określić tylko w pewnej postaci uwikłanej $\Phi(y,x) = 0$, to używamy precyzyjniej określenia całka równania. Oznacza to dokładnie, że każde rozwiązanie może być nazwane całką równania różniczkowego, ale nie odwrotnie.

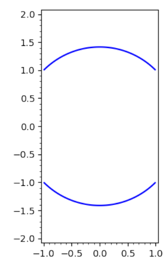
PRZYKŁAD. Równanie różniczkowe

$$yy' + x = 0$$

ma rozwiązanie $-\frac{1}{2}y^2(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ w przedziale $x \in (-1, 1)$ ponieważ względem pochodnej

$$-y(x)y'(x) = x,$$

czyli w postaci uwikłanej funkcja spełnia równanie $y^2(x) + x^2 = 2$.



DEFINICJA (Rozwiązanie ogólne równania). Rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego nazywamy wyrażenie postaci

$$y = \varphi(x, C)$$

które zależy od parametru C w sposób istotny, co oznacza że dla każdej wartości parametru C wyrażenie jest rozwiązaniem tego równania.

PRZYKŁAD. Dla równania $y' + 2xy^2 = 0$ przykładowymi sprawdzimy, że rozwiązaniami są:

- $y_1(x) = 0$ oraz $y' = 0$
- $y_2(x) = \frac{1}{x^2}$ oraz $y_2' = -2/x^3$
- $y_3(x) = \frac{1}{x^2+1}$ oraz $y_3' = -2x/(x^2+1)^2$
- $y_4(x) = \frac{1}{x^2-1}$ oraz $y_4' = -2x/(x^2-1)^2$
- $y_5(x) = \frac{2}{x^2}$ oraz $y_5' = -4/x^3$

Do pewnego rozwiązania ogólnego należą: $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$, przy czym rozwiązanie ogólne jest zapisywane w zależności od wartości parametru $C \in \mathbb{R}$ (nie zawsze kompletne!). Postacie rozwiązania ogólnego:

- uwikłana $\Phi(x,y,C) = \frac{1}{y} - x^2 - C = 0$ dla $y \neq 0$,
- jawna $y(x) = \varphi(x,C) = \frac{1}{x^2+C}$

Uwaga **1.1.2.** Parametryczna wektorowa postać rozwiązania dla przykładu powyżej może być zapisana jako

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t^2+C}\mathbf{j},$$

gdzie $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ i wtedy zachodzi równanie dla wektora i jego pochodnej

$$\mathbf{r}' + 2t\mathbf{r}^2 = 0.$$

Przyjęło się oznaczać takie równania przez $x' + 2tx^2 = 0$ lub $\dot{x} + 2tx^2 = 0$, gdzie x jest wektorem $[x_1, x_2]$ i pochodna jest brana po czasie, czyli parametrze t.

Przykład. Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego

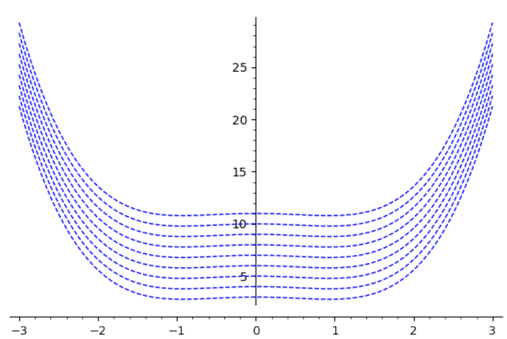
$$y' - x^3 + \sin x = 0$$

Uwagi:

- równanie w postaci normalnej $y' = f(x)$
- rozwiązanie ogólne czyli całka nieoznaczona

$$y = \int f(x)dx = \frac{x^4}{4} + \cos(x) + C$$

Wykres rozwiązania ogólnego $y(x) = \varphi(x,C)$ w zależności od wartości parametru $C \in \mathbb{R}$



Zagadnienie początkowe

DEFINICJA (Zagadnienie początkowe)**.** Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego oraz warunek postaci

$$y(x_0) = y_0$$

nazywamy zagadnieniem początkowym, inaczej zagadnieniem Cauchy'ego.

UWAGA **1.1.3.** Dla zagadnienia początkowego zapiszemy

$$y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0,$$

gdzie liczby x_0 oraz y_0 nazywamy wartościami początkowymi, a warunek nazywamy warunkiem początkowym.

DEFINICJA**.** Funkcję $y(x)$ nazywamy rozwiązaniem zagadnienia początkowego, jeżeli jest rozwiązaniem równania różniczkowego w pewnym przedziale, któy zawiera x_0 i spełnia warunek początkowy.

PRZYKŁAD**.** Zagadnienie początkowe

$$y' - e^{-x} = 0,\ \ y(0) = 1$$

ma rozwiązanie $y(x) = 2 - e^{-x}$ ponieważ:

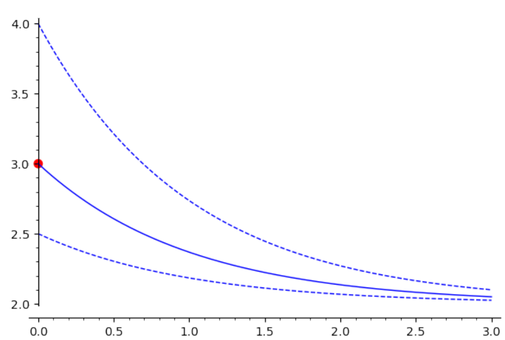
- $y(x) = C - e^{-x}$ jest rozwiązaniem ogólnym,
- warunek początkowy wyznacza stałą $C = 2$.

UWAGA **1.1.4.** Rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest krzywa całkowa ze wskazaniem na punkt (x_0, y_0), który powinien należeć do wykresu, jeżeli spełniony jest warunek początkowy.

PRZYKŁAD**.** Dla zagadnienia początkowego

$$y' + y - 2 = 0,\ \ y(0) = 3$$

rozwiązaniem równania jest funkcja $y = Ce^{-x} + 2$ oraz krzywa całkowa jest wyznaczona w sposó jednoznaczny



Sampling warunków początkowych

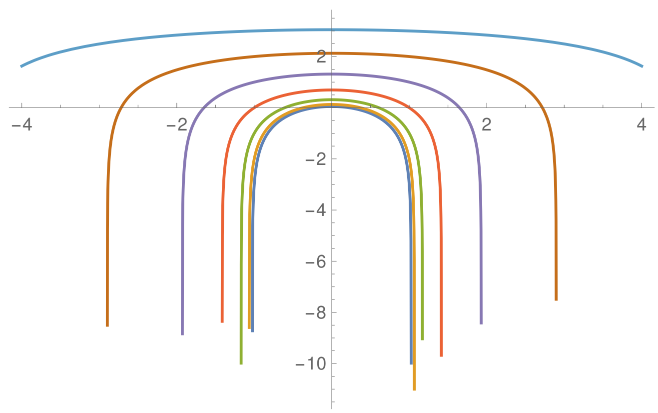
PRZYKŁAD. Dla równania różniczkowego pierwszego rzędu

$$y' = -2x/\exp(y)$$

metodą rozdzielenia zmiennych możemy otrzymać rozwiązanie ogólne dla $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = \ln(C - x^2).$$

Podanie zbioru siedmiu warunków początkowych postaci $y(0) = \{-3, -2, ..., 1, 2, 3\}$ można wykreślić w postaci



Dla zagadnienia początkowego (Cauchy'ego) możemy rozważyć odpowiednie równanie z parametrem $p \in \mathbb{R}$.

DEFINICJA (Sampling). Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu pierwszego oraz warunek początkowy z parametrem

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = p$$

nazywamy samplingiem zagadnienia początkowego.

PRZYKŁAD. Dla samplingu problemu Cauchy'ego

$$y' = -2x/\exp(y), \ y(0) = p$$

rozwiązaniem jest zbiór rozwiązań względem parametru postaci

$$y(x) = \ln(1 + e^p - x^2).$$

Pole kierunków i krzywe całkowe

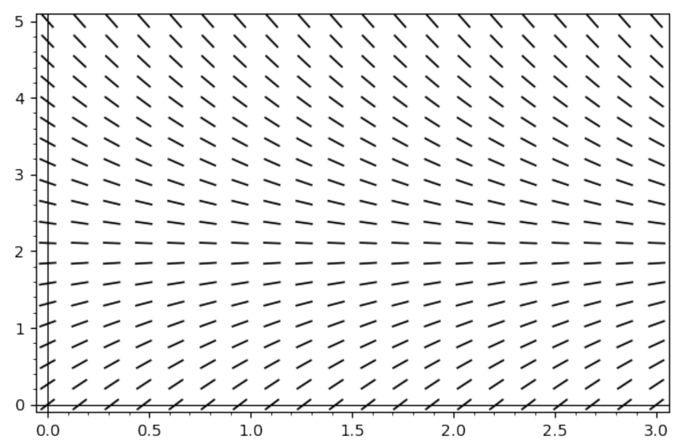
Dla funkcji po prawej stronie równania różniczkowego $y'(x) = f(x, y(x))$ założymy, że jest ciągła w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. W każdym punkcie tego obszaru mamy możliwość bezpośredniego obliczenia kąta nachylenia stycznej w punkcie (x_0, y_0) dla rozwiązania $y(x)$ ponieważ

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Pole kierunków oznacza, że mamy przyporządkowanie, gdzie każdemu punktowi odpowiada styczna:

$$(x_0, y_0) \mapsto y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

PRZYKŁAD. Pole kierunków dla funkcji $f(x, y) = y - 2$



UWAGA **1.1.5.** Dla krzywej całkowej $y(x)$ równania różniczkowego , która przechodzi przez punkt (x_0, y_0) to $y_0 = y(x_0)$ oraz

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0).$$

Oznacza to, że krzywa całkowa jest punkcie (x_0, y_0) styczna do kierunku równania różniczkowego.

UWAGA **1.1.6.** Rozpatrzymy krzywą w obszarze D, która w każdym swoim punkcie jest styczna do kierunku równania. Wtedy

$$y'(x) = f(x, y(x)).$$

Oznacza to, że $y(x)$ jest krzywą całkową tego równania. Geometrycznie rzecz ujmując: scałkować równanie różniczkowe, to znaleźć wszystkie krzywe całkowe w pewnym obszarze, które w każdym punkcie są styczne do kierunku równania.

1.1.2 Metody rozwiązywania równań

Wzór Barrowa-Newtona

Przypomnijmy, że rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego jest funkcja określona na przedziale, której wykresem jest krzywa całkowa. Rozwiązanie spełnia warunek początkowy $y(x_0) = y_0$ jeżeli krzywa całkowa przechodzi przez podany punkt (x_0, y_0). Rozważymy równanie w prostszej postaci $y' = f(x)$.

TWIERDZENIE **1.1.1.** *Dla funkcji ciągłej $f(x)$ na pewnym przedziale w otoczeniu x_0 rozwiązaniem równania z warunkiem początkowym*

$$y' = f(x),\ \ y(x_0) = y_0$$

jest funkcja postaci

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi,$$

gdzie całka jest obliczana po ślepej (niemej) zmiennej ξ.

Dowód. Sprawdzimy warunek początkowy, dla którego $y(x_0) = y_0$, czyli

$$y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(\xi)d\xi = y_0.$$

Oznaczymy przez $F(x) = \int f(x)dx$ ustaloną funkcję pierwotną dla funkcji $f(x)$, czyli $F'(x) = f(x)$. Wtedy

$$y'(x) = \left(y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(\xi)d\xi\right)' = 0 + F'(x) - F'(x_0) = f(x).$$

$\square$

PRZYKŁAD. Dla $y' - e^{-x} = 0$

- rozwiązanie w przypadku równania postaci $y' = f(x)$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau)d\tau$$

- dla warunków początkowych (0,1) otrzymamy

$$y(x) = 1 + \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-t}\Big|_0^x = 1 - (e^{-x} - e^0) = 2 - e^{-x}$$

Rozdzielenie zmiennych

Dla funkcji postaci $f(x, y) = g(x)/h(y)$, gdzie $h(y) \neq 0$, dane jest równanie różniczkowe postaci

$$y' = \frac{g(x)}{h(y)}$$

TWIERDZENIE **1.1.2.** *Jeśli funkcje $g(x)$ i $h(y)$ są ciągłe w pewnym otoczeniu punktu x_0 i odpowiednio y_0 oraz $h(y)$ nie przyjmuje tam wartości zero, to istnieje całka ogólna równania $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$ postaci:*

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C$$

Ponadto przez każdy punkt otoczenia (x_0, y_0) przechodzi jedna i tylko jedna krzywa całkowa tego równania.

Dowód. Równanie $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$ w postaci różniczkowej zapiszemy $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ skąd postać dla całek. Ponieważ funkcje $g(x), h(y)$ są ciągłe, to obydwie całki istnieją. □

TWIERDZENIE **1.1.3.** *Dla równania o zmiennych rozdzielonych $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$ funkcja $y(x)$ jest rozwiązaniem tego równania wtedy i tylko wtedy gdy istnieje takie $C \in \mathbb{R}$, że*

$$H(y(x)) = G(x) + C,$$

gdzie funkcje pierwotne $G(x) = \int g(x)dx$ oraz $H(x) = \int g(x)dx$.

Dowód. Implikacja $\Leftarrow$ wymaga jedynie obliczenia pochodnej dla obydwu stron równania $H(y(x)) = G(x)+C$. Implikacja $\Rightarrow$ dla rozwiązania $y(x)$ i równania $h(y(x))y'(x) = g(x)$ ma postać implikacji dla której z ostatniego równania mamy $H'(y(x))y'(x) = G'(x)$, czyli:

$$H'(y(x)) = G'(x),$$

skąd wynika $H(y(x)) = G(x) + C$. □

TWIERDZENIE **1.1.4** (metoda rozdzielonych zmiennych)**.** *Rozwiązanie $y(x)$ równania o zmiennych rozdzielonych $y'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$ istnieje i ma postać:*

$$y(x) = H^{-1}\left(G(x) + C\right),$$

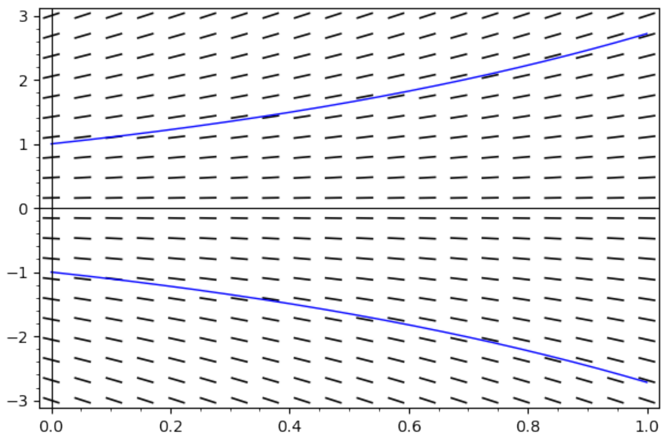
gdzie funkcje $g(x)$ i $h(y)$ są ciągłe na odcinkach oraz funkcje pierwotne $G(x) = \int g(x)dx$ oraz $H(y) = \int g(y)dy$.

Dowód. Ponieważ $H'(y) = h(y) \neq 0$, to funkcja $H(y)$ jest odwracalna, stąd teza. □

<u>PRZYKŁAD</u> **1.1.1.** Równanie różniczkowe $y' = y$ ma rozwiązanie ogólne postaci

$$y(x) = Ce^x.$$

Dla dwóch warunków początkowych a) $y(0) = 1$ oraz b) $y(0) = -1$ otrzymamy wykresy dla rozwiązań:



Metoda Eulera

Dla zagadnienie początkowego

$$y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0,$$

założymy, że funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w otoczeniu punktu (x_0, y_0).

Procedura numeryczna Eulera polega na tym, że dla podanego warunku początkowego $y(x_0) = y_0$ i Δx wyznaczamy punkt (x_{k+1}, y_{k+1}) dla podanego punktu poprzedniego (x_k, y_k) w następujący sposób:

0. pierwszym punktem jest x_0, y_0 z warunku początkowego, $k = 0$;

1. z równania różniczkowego wyliczymy nachylenie $f(x_k, y_k)$;

2. obliczymy punkt (x_{k+1}, y_{k+1}) wg wzorów:

$$x_{k+1} := x_k + \Delta x \ oraz\ y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)\Delta x.$$

3. $k := k + 1$ i wrócimy do 1.

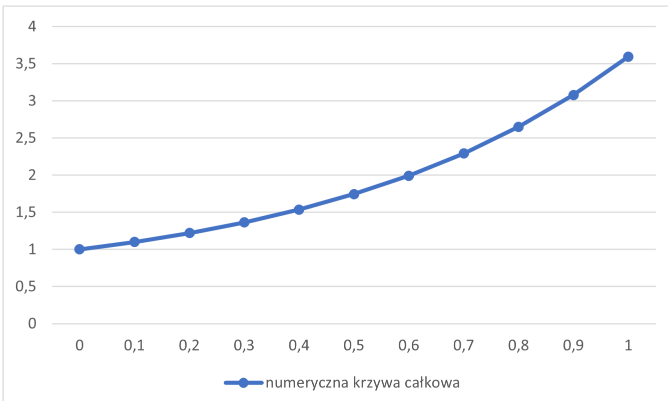
Przykład. Dla zagadnienia początkowego

$$y' = 2y - 1, y(0) = 1$$

wykonamy odpowiednie obliczenia.

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k) = 2y_k - 1$
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1,2
2	0,2	1,22	1,44
3	0,3	1,364	1,728
4	0,4	1,5368	2,0736
5	0,5	1,74416	2,48832

Umieszczając dane w tabelce możemy utworzyć wykres krzywej łamanej $y(x)$.



Odwzorowanie Picarda

Podane jest zagadnienie początkowe

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0.$$

Definicja. Odwzorowaniem Picarda nazywamy odwzorowanie P, które przeprowadza funkcję $y(x)$ w funkcję $Py(x)$, gdzie

$$Py(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi)) d\xi.$$

Uwaga **1.1.7.** Następujące stwierdzenia są równoważne:

- funkcja $y(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego;
- funkcja $y(x)$ jest punktem stałym odwzorowania Picarda, czyli $y(x) = P(y(x))$.

Utworzymy ciąg przybliżeń względem odwzorowania P dla warunku początkowego $y(x_0) = y_0$, czyli

$$y_0,\ P(y_0),\ P^2(y_0),\ ...,\ P^n(y_0),\ ...$$

Dla takiego ciągu przybliżeń będziemy wyznaczać granicę

$$\lim_{n\to\infty} P^n y(x_0).$$

Przykład. Dla zagadnienia początkowego $y' = y,\ y(0) = y_0$, mamy

$$y(0) = y_0,$$

$$P(y(0)) = y_0 + \int_0^x y_0 d\xi = y_0 + y_0 x = y_0(1 + x),$$

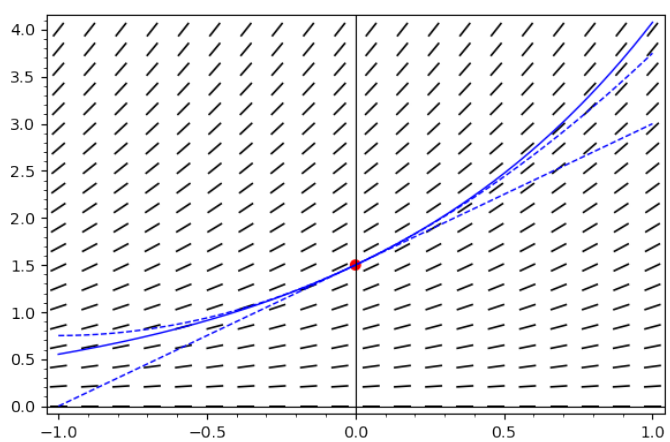
$$P^2(y_0) = y_0 + \int_0^x y_0(1 + \xi)d\xi = y_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right),$$

$$P^n(y_0) = y_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^n}{n!}\right),$$

i tak dalej. Wtedy granicę ciągu wyznaczymy jako

$$\lim_{n\to\infty} P^n y(x_0) = y_0 e^x.$$

Zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń możemy stwierdzić bezpośrednio. Dla wartości $y_0 = 3/2$ możemy otrzymać krzywą całkową oraz trzy pierwsze wyrazy ciągu przybliżeń: punkt, prostą i parabolę.



1.1.3 Podstawowe twierdzenia

Uwaga **1.1.8.** Może istnieć więcej niż jedno rozwiązanie zagadnienia początkowego. Oznacza to, że warunek początkowy nie określa w sposób jednoznaczny rozwiązania dla równania różniczkowego.

Przykład. Dla równania $y' = \sqrt{|y|}$ należy przyjąć $y(x) = 0$ jako rozwiązanie. Po przekształceniu $\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx$ otrzymujemy całkę ogólną postaci

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

gdzie $y \neq 0$ oraz $x + C \geq 0$. Dyskusja jednoznaczności oraz istnienia rozwiązań może wyglądać następująco:

- zagadnienie początkowe ma dwa rozwiązania gdy $y_0 = 0$

$$y(x) = 0 \vee y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x - x_0)^2 & x > x_0 \\ 0 \quad x \leq x_0 \end{cases} \quad ,$$

- zagadnienie początkowe nie ma rozwiązania gdy $y_0 < 0$,
- jeżeli $y_0 > 0$, to $C = 2\sqrt{y_0} - x_0$ oraz zagadnienie początkowe ma jedno rozwiązanie postaci:

$$y(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x + C)^2 & x > -C \\ 0 \quad x \leq -C \end{cases} \quad .$$

- w szczególności zauważymy, że dla $x_0 = 0$ oraz $y_0 = 0$ zagadnienie początkowe

$$y' = \sqrt{|y|}, \ y(0) = 0$$

ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Istnienie rozwiązania

Twierdzenie **1.1.5.** *Niech funkcja $f(x, y)$ będzie ciągła na pewnym obszarze prostokątnym. Jeżeli punkt (x_0, y_0) należy do tego obszaru, to istnieje $\varepsilon > 0$ oraz funkcja $y(x)$ określona na przedziale $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, która jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego postaci:*

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0.$$

Jednoznaczność rozwiązania

TWIERDZENIE **1.1.6.** *Niech funkcje: $f(x, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $f'_y(x, y)$ są ciągłe na pewnym obszarze prostokąta. Jeżeli punkt (x_0, y_0) należy do tego obszaru oraz $y_1(x), y_2(x)$ są dwoma rozwiązaniami zagadnienia początkowego dla równania różniczkowego zwyczajnego rzędu pierwszego postaci:*

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,$$

dla wszystkich x z przedziału $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, to

$$y_1(x) = y_2(x).$$

1.2 Wybrane typy równań różniczkowych

1.2.1 Równanie autonomiczne

W przypadku równania różniczkowego rzędu pierwszego postaci

$$y' = f(y),$$

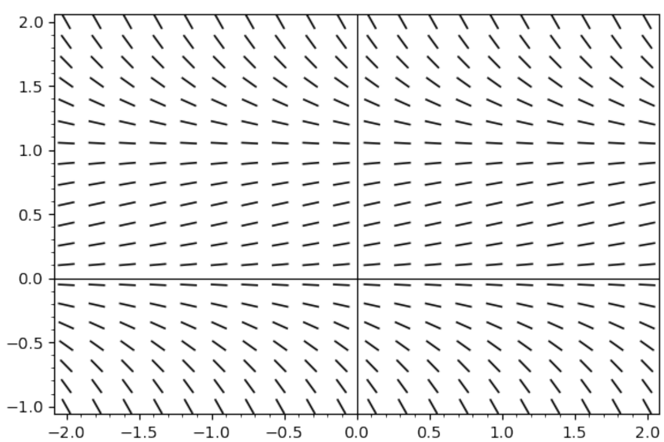
gdzie prawa strona nie zależy od zmiennej x otrzymujemy tzw. równanie autonomiczne. Pole kierunków dla takiego równania ma własność równych kierunków dla punktów położonych na tej samej linii poziomej $y = constans$, czyli

$$f(x_1, y) = f(x_2, y) = f(y).$$

Przykład. Dla równania

$$y' = y(1 - y)$$

otrzymamy pole kierunków, które analizujemy wzdłuż linii poziomych:



Uwaga **1.2.1.** Niech funkcja $y(x)$ będzie rozwiązaniem autonomicznego równania różniczkowego rzędu pierwszego postaci $y' = f(y)$, gdzie funkcja $f(y)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły dla wszystkich y. Wtedy:

1. jeżeli $f(y(0)) = 0$, to $y(0)$ jest punktem równowagi oraz $y(x) = y(0)$ dla wszystkich x;

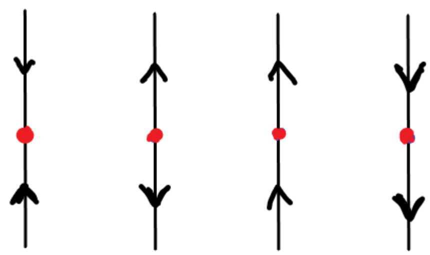
2. jeżeli $f(y(0)) > 0$, to $y(x)$ jest rosnąca dla wszystkich x oraz:

   – $y(x)$ dąży do najbliższego punktu równowagi, który jest większy niż $y(0)$

 - albo $y(x) \to \infty$ dla wszystkich rosnących x;

3. jeżeli $f(y(0)) < 0$, to $y(x)$ jest malejąca dla wszystkich x oraz:
   - $y(x)$ dąży do najbliższego punktu równowagi, który jest mniejszy niż $y(0)$
   - albo $y(x) \to -\infty$ dla wszystkich rosnących x.

Linia fazowa, jako odpowiedni wykres tych własności.



Przykład. Dla równania

$$y' = y(1-y)$$

zapiszemy jego postać różniczkową $\frac{dy}{y(1-y)} = dx$ i dla funkcji wymiernej

$$\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = \int dx,$$

gdzie $y(1-y) \neq 0$.

Rozwiązanie w postaci uwikłanej, czyli całka ogólna równania ma postać:

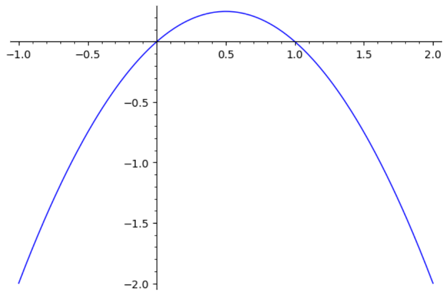
$$\ln(|y(x)|) - \ln|y(x) - 1|) = x + c.$$

Wtedy $\ln \frac{|y|}{|y-1|} = x + c$, czyli $\left|\frac{y}{y-1}\right| = e^{x+c}$.

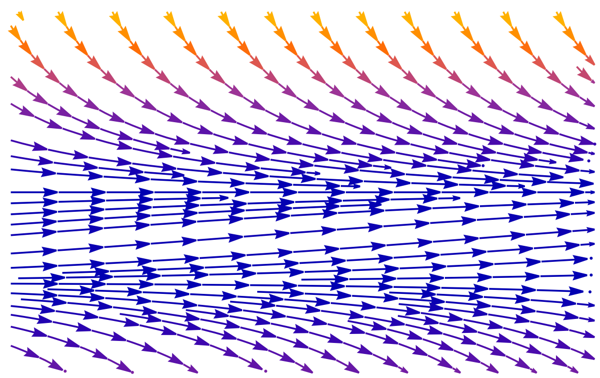
Dla przykładu zapiszemy w postaci rozwiązania ogólnego dla $C \in \mathbb{R}$ oraz $y(x) > 1$

$$y(x) = \frac{e^x}{e^x - C}$$

Ogólnie rzecz biorąc z drugiej strony równania $y' = y(1-y)$ funkcja ma postać na płaszczyznie $y, f(y)$



i można wyznaczyć znaki pochodnej $y'(x)$ w odpowiednich w trzech przedziałach $y < 0$ lub $0 < y < 1$ lub $y > 1$. Przedstawiamy te znaki na wykresie lini pionowej, który wnosi, że punkt równowagi $y = 0$ jest źródłem, natomiast $y = 1$ jest ściekiem. Trzeba sobie przypominieć, że znak $+$ dla pochodnej $y'(x)$ oznacza wzrost funkcji $y(x)$ (strzałka do góry).



Przykład. Zagadnienie początkowe dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$ postaci

$$y' = ky,\ \ y(0) = y_0$$

ma dosyć znane rozwiązanie, ponieważ jego postać różniczkowa dla $y \neq 0$

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

umożliwia podanie rozwiązania ogólnego $\ln|y(x)| = kx$, czyli

$$|y(x)| = Ce^{kx}.$$

dla $C > 0$. Ponieważ warunek początkowy oznacza $C = y_0$ stąd rozwiązanie zagadnienia początkowego przybiera znaną postać

$$|y(x)| = y_0e^{kx}.$$

PRZYKŁAD. Możemy podać zastosowanie przykładu powyżej. Zadanie znalezienia wartości x dla której $y(x) = \frac{1}{2}y_0$ polega na rozwiązaniu równania dla $k < 0$ (tzw. prawo zaniku lub rozpadu):

$$y_0 e^{kx} = \frac{1}{2}y_0.$$

Stąd

$$x_{1/2} = -\frac{\ln 2}{k}.$$

Na przykład dla równania gęstości powietrza w zależności od wysokości $\rho(h)$ względem pochodnej po zmiennej h

$$\rho' = k\rho$$

z warunkiem początkowym $\rho(0) = \rho_0 = 1,25$ kg$/m^3$ szacujemy w przybliżeniu $k \approx -\frac{4{,}256}{44300} \approx -9,6 \cdot 10^{-5}$ i otrzymujemy wysokość h, na której powietrze ma gęstość dwukrotnie mniejszą niż na poziomie morza:

$$h \approx 7214\mathrm{m}.$$

Dokładne rachunki można przeprowadzić w oparciu o empiryczne równanie dla gęstości atmosfery w zależności od wysokości w troposferze < 11000m postaci:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{44300}\right)^{4{,}256}.$$

Zatem sprawdzenie przybliżonych rezultatów dla równania autonomicznego polega na rachunku

$$\rho = 1,25\left(1 - \frac{7214}{44300}\right)^{4{,}256} \approx 0,586.$$

1.2.2 Równanie w zmiennej ilorazowej

Równanie postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

rozwiązujemy przez podstawienie $u = \frac{y}{x}$. Stąd $y = ux$ i $y' = u'x + u$ i wtedy

$$xu' = f(u) - u.$$

Otrzymujemy zatem równanie o zmiennych rozdzielonych, UWAGA **1.2.2.** Jeżeli $u_0 = f(u_0)$ dla pewnego u_0, to jednym z rozwiązań jest $y(x) = u_0 x$.

TWIERDZENIE **1.2.1.** *Jeżeli funkcja $f(u)$ jest ciągła na przedziale (a, b) i spełnia warunek $f(u) \neq u$, to dla dowolnych punktów (x_0, y_0), takich że $a < \frac{y_0}{x_0} < b$ zagadnienie początkowe*

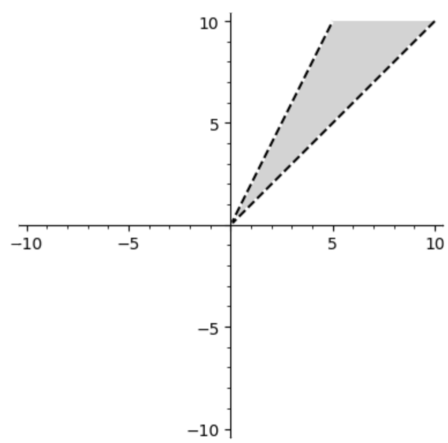
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \ y(x_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie.

UWAGA **1.2.3.** Dla dowolnego punktu (x_0, y_0) w obszarze wyznaczonym przez nierówności

$$ax < y < bx$$

mamy własność, że dla jedynej krzywej całkowej przechodzącej przez ten punkt, jest określenie przebiegu tej krzywej dla półprostej $x \in (0, \infty)$ gdy $x_0 > 0$.



PRZYKŁAD. Równanie z warunkiem początkowym

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{xy}, \ y(1) = -1$$

możemy przekształcić do postaci $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ i wyznaczyć $f(u) = u + \frac{1}{u}$. Stwierdzimy, że funkcja $f(u)$ jest ciągła na $(0, \infty)$ i równanie $f(u) = u$ nie ma żadnych rozwiązań. Warunek początkowy oznacza, że: $x \in (0, \infty)$ oraz $y \in (0, -\infty)$.

Możemy zapisać równanie jednorodne

$$xu' = \frac{1}{u}.$$

Rozdzielając zmienne $udu = \frac{1}{x}$ otrzymamy

$$\frac{1}{2}u^2 = \ln x + C.$$

Wtedy dla y mamy

$$\frac{y^2}{2x^2} = \ln x + C.$$

Ze względu na warunek początkowy mamy $x > 0$ oraz $y < 0$, czyli rozwiązaniem jest

$$y(x) = -x\sqrt{2(\ln x + C)}$$

Wartość parametru C wyznaczymy z warunku początkowego $y(1) = -1$, czyli $C = 1/2$. Wtedy rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego

$$y(x) = -x\sqrt{2\ln x + 1}$$

i ma sens dla $2\ln x + 1 \geq 0$, czyli dla $x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)$.

1.2.3 Równanie liniowe rzędu pierwszego

Definicja. Równaniem różniczkowym liniowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$y' + p(x)y = q(x)$$

dla podanych funkcji $p(x)$ oraz $q(x)$.

Równanie liniowe jednorodne

Twierdzenie **1.2.2.** *Równanie liniowe jednorodne postaci*

$$y' + p(x)y = 0$$

dla pewnej funkcji $p(x)$ ma rozwiązanie postaci

$$y(x) = C\exp(-P(x)) = Ce^{-P(x)}$$

dla ustalonej funkcji pierwotnej $P(x) = \int p(x)dx$ oraz $y \neq 0$.

Dowód. Metodą separacji zmiennych otrzymamy $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ dla $y \neq 0$. □

Przykład. Dla równania jednorodnego

$$y' - (\cos x)y = 0$$

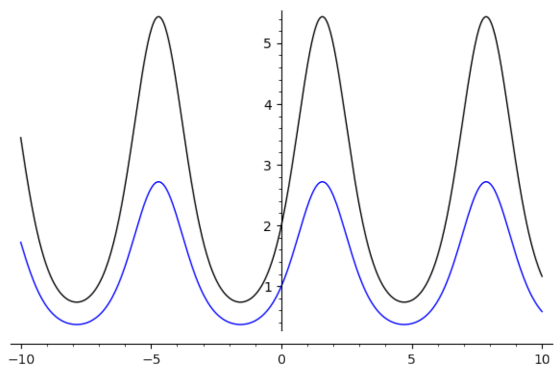
- równanie przekształcone

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \cos x \; dx$$

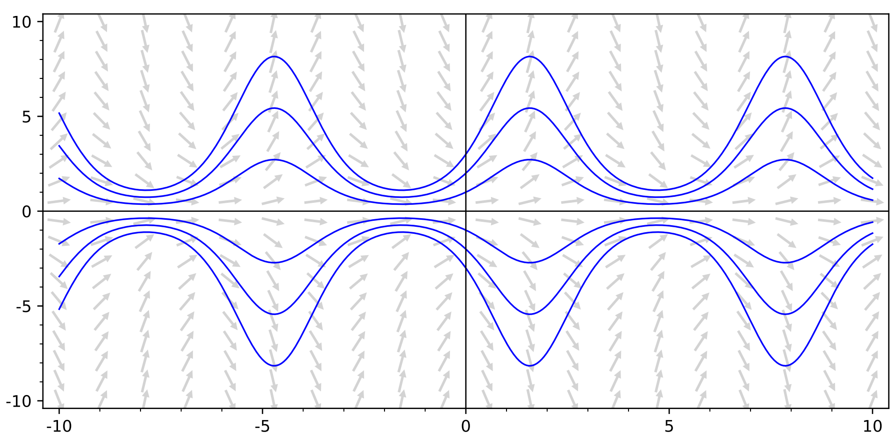
- znalezienie rozwiązania ogólnego, $C \in \mathbb{R}_+$

$$|y(x)| = Ce^{\sin x}$$

Wykresem rozwiązania szczególnego dla przykładowych dwóch wartości: $C = 1$ lub $C = 2$



Skalowanie krzywych całkowych polega na tym, że jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem, to też $\lambda y(x)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.



Metoda uzmiennienia stałej

Dla równania postaci $y' + p(x)y = q(x)$ rozwiązanie jest sumą rozwiązania ogólnego odpowiadającego równaniu różniczkowemu jednorodnemu i pewnego szczególnego rozwiązania równania.

Przykład. Dla równania różniczkowego liniowego

$$y' + 2y = e^x$$

możemy postępować wg metody:

- uzmiennienie współczynnika $y = C(x)e^{-2x}$ dla rozwiązania równania jednorodnego,
- równanie przekształcone w wyniku wstawienia do równania wyjściowego:
$$C'(x)e^{-2x} = e^x$$
- uzmienniona stała wynosi $C(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + D$, gdzie należy rozwiązać pomocniczo powyższe równanie różniczkowe;
- rozwiązanie ogólne dla parametru $D \in \mathbb{R}$
$$y(x) = \frac{1}{3}e^x + De^{-2x}.$$

Metoda czynnika całkującego

Przykład. Dla równania

$$y' - \frac{y}{x} = x\cos x$$

obliczymy tzw. czynnik całkujący $\exp\int p(x)dx = \exp\int -1/xdx = 1/x$ dla $x \neq 0$. Mnożąc równanie różniczkowe przez czynnik całkujący

$$y'/x - \frac{y}{x^2} = \cos x$$

wtedy równanie można zapisać

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = \cos x$$

Całka na obie strony pozwala obliczyć

$$\frac{y}{x} = \sin x + C,$$

czyli rozwiązanie ma postać $y(x) = x(\sin x + C)$.

Rozwiązanie równania niejednorodnego

TWIERDZENIE **1.2.3.** *Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego liniowego postaci*

$$y' + p(x)y = q(x),$$

gdzie funkcje $p(x)$ i $q(x)$ są ciągłe na pewnym odcinku, może być przedstawione za pomocą metod: uzmiennienia stałej lub czynnika całkującego, w postaci

$$y(x) = C\exp(-P(x)) + \exp(-P(x)) \int q(x)\exp(P(x))dx,$$

gdzie ustalona jest funkcja pierwotna $P(x) = \int p(x)dx$.

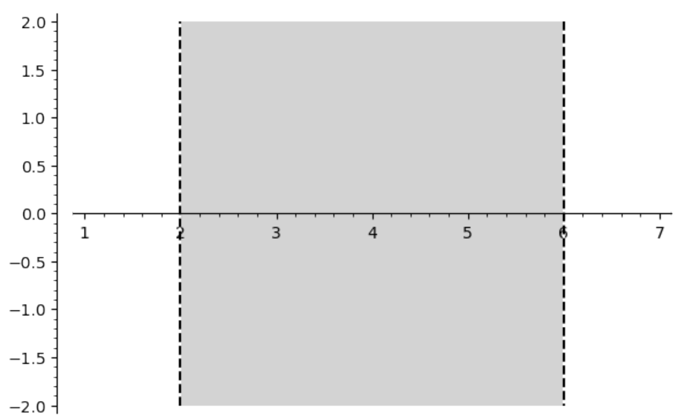
Zagadnienie początkowe

TWIERDZENIE **1.2.4.** *Jeżeli funkcje $p(x)$ oraz $q(x)$ są ciągłe na przedziale (a, b), to dla warunków początkowych $x_0 \in (a, b)$ oraz $y_0 \in \mathbb{R}$ zagadnienie początkowe*

$$y' + p(x)y = q(x), \;\; y(x_0) = y_0,$$

ma tylko jedno rozwiązanie $y(x)$ określone na przedziale (a, b).

UWAGA **1.2.4.** Geometryczna interpretacja twierdzenia polega na zauważeniu, że przez każdy punkt (x_0, y_0) należący do paska $(a, b) \times \mathbb{R}$ przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa.



Metoda współczynników nieoznaczonych

Sposób, który można stosować tylko w pewnych postaciach funkcji $h(x)$ po prawej stronie - nazywamy też metodą przewidywania rozwiązań.

Przykład. Dla równania

$$y' + 2y = e^x$$

metoda polega na:

- rozwiązaniu ogólnym równania jednorodnego postaci $y' + 2y = 0$

$$y_j(x) = Ce^{-2x},$$

- przyjęciu rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego w przewidywanej postaci $y = ae^{bx}$; wtedy warunki dla $a, b \in \mathbb{R}$

$$abe^{bx} + 2ae^{bx} = e^x$$

- obliczenie współczynników $b = 1$ oraz $a = 1/3$,
- Superpozycja rozwiązań: ogólnego dla równania jednorodnego oraz szczególnego dla równania niejednorodnego, to rozwiązanie ogólne dla $C \in \mathbb{R}$

$$y(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x.$$

1.3 Równania liniowe rzędu drugiego

Ogólną formą równania różniczkowego zwyczajnego rzędu drugiego jest

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Definicja (Postać normalna). Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego w postaci normalnej, to równanie postaci

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{1.1}$$

1.3.1 Zbiór rozwiązań

Rozwiązaniem równania na przedziale (a, b) nazywamy funkcję $y(x)$, która jest na tym przedziale dwukrotnie różniczkowalna i spełnia tożsamościowo to równanie, czyli

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)).$$

Przykład. Równanie postaci $y'' = f(x)$ ma rozwiązanie przez dwukrotne obliczenie całek dla dwóch równań postaci różniczkowej Na przykład równanie $y'' = x$ ma rozwiązanie $y' = x^2/2 + C$ oraz $y(x) = x^3/6 + Cx + D$. Ogólnie

$$\begin{cases} dy' = f(x)dx \\ dy = (F(x) + C)dx, \end{cases}$$

czyli

$$y(x) = F_2(x) + Cx + D,$$

gdzie rozwiązanie posiada dwie stałe całkowania.

Definicja (Rozwiązanie ogólne). Dla równania różniczkowego drugiego rzędu $y'' = f(x, y, y')$ rozwiązanie ogólne to wyrażenie zależne od dwóch parametrów $C, D \in \mathbb{R}$ postaci:

$$y = \varphi(x, C, D),$$

które jest rozwiązaniem tego równania różniczkowego dla każdej wartości parametrów (w pewnym zakresie).

Przykład. Równanie drugiego rzędu

$$y'' = x + y$$

ma rozwiązanie

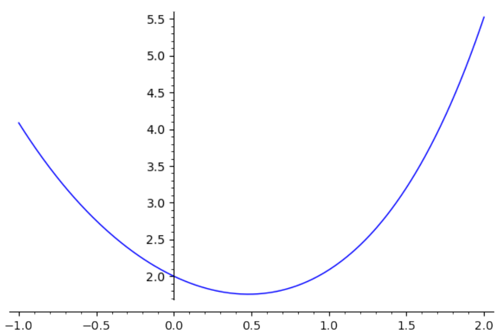
$$y(x) = C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x - x.$$

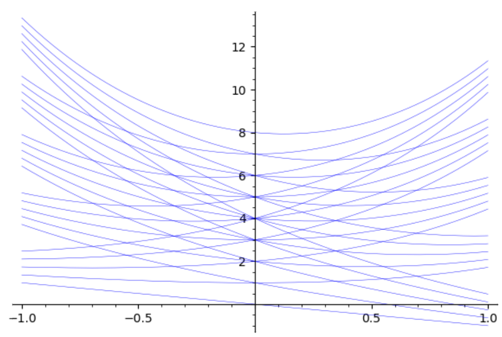
Ponieważ $y'(x) = -C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x - 1$ oraz $y''(x) = C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x$, wtedy sprawdzenie polega na

$$y''(x) = C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x = x + y = x + C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x - x.$$

Definicja (Krzywa całkowa). Wykres rozwiązania równania różniczkowego $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = y(x)\}$ nazywamy krzywą całkową.

Przykład. Dla poprzedniego równania, jeśli przyjąć $C_2 = C_1 = 1$, to otrzymamy dla przykładu wykres $y(x) = -x + 2\cosh(x)$ po lewej oraz dla $C_1, C_2 = 0, 2, .., 5$ zbiór 25 wykresów po prawej, który jest wyznaczany przez dwa parametry.





1.3.2 Zagadnienie początkowe

Definicja (Zagadnienie początkowe). Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego z dwoma warunkami:

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1,$$

nazywamy zagadnieniem początkowym.

Zagadnienie początkowe jest nazywane zagadnieniem Cauchy'ego. Liczby x_0, y_0 oraz y_1 to tzw. wartości początkowe, natomiast wymienione dwa warunki są nazywane warunkami początkowymi.

Definicja. Rozwiązaniem zagadnienia początkowego nazywamy funkcję $y(x)$, która jest rozwiązaniem równania różniczkowego w pewnym przedziale zawierającym punkt x_0 i spełniającym określone w definicji dwa warunki.

Uwaga **1.3.1.** Interpretacja geometryczna dla zagadnienia początkowego polega na wskazaniu krzywej całkowej, która przechodzi przez punkt (x_0, y_0) oraz współczynnik kierunkowy jej stycznej w tym punkcie jest równy y_1.

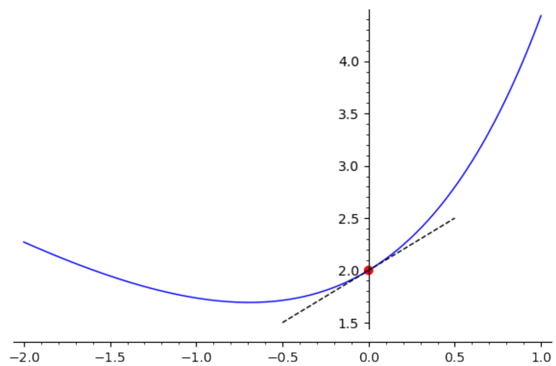
Przykład. Zagadnienie początkowe dla równania drugiego rzędu

$$y'' = x + y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

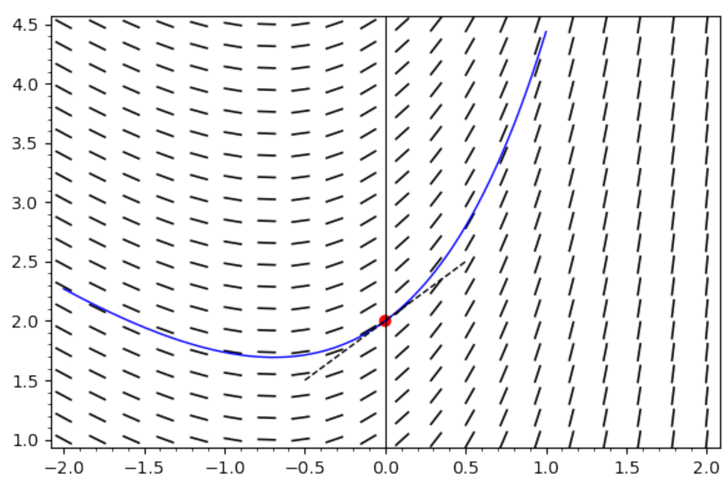
ma rozwiązanie

$$y(x) = 2e^x - x,$$

które wynika dla warunku początkowego z układu równań dla $y(x) = C_2 e^{(-x)} + C_1 e^x - x$. Krzywa całkowa jest postaci



Można teraz odtworzyć pole kierunków jako $y'(x) = 2e^x - 1$ dla podanego rozwiązania, czyli utworzyć wykres rozwiązania z polem kierunków



1.3.3 Warunki brzegowe

Definicja. Równanie różniczkowe zwyczajne rzędu drugiego z dwoma warunkami postaci

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2,$$

nazywamy zagadnieniem brzegowym.

Uwaga **1.3.2.** Interpretacja geometryczna dla warunku brzegowego polega na wskazaniu krzywej całkowej, która przechodzi przez podane dwa punkty (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2).

1.3.4 Równanie liniowe jednorodne

Definicja. Równanie różniczkowe liniowe i jednorodne rzędu drugiego jest postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1.2}$$

gdzie funkcje $p(x), q(x)$ nazywamy współczynnikami tego równania.

Definicja (wyznacznik Wrońskiego). Dla podanych dwóch funkcji $y_1(x), y_2(x)$ różniczkowalnych na przedziale (a, b) wyznacznikiem Wrońskiego nazywamy wyrażenie $W(y_1, y_2) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, czyli

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_2'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Definicja (układ fundamentalny). Parę rozwiązań $y_1(x)$ oraz $y_2(x)$ równania liniowego jednorodnego określonych na przedziale (a, b) nazywamy układem fundamentalnym na tym przedziale, jeśli dla każdego $x \in (a, b)$ spełniony jest warunek dla wyznacznika $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Jeśli $W(y_1, y_2) \neq 0$, to układ funkcji $y_1(x), y_2(x)$ nazywamy też liniowo niezależnym. Rozwiązania równania liniowego jednorodnego tworzą strukturę przestrzeni liniowej.

Twierdzenie **1.3.1** (O liniowej kombinacji rozwiązań). *Niech $y_1(x), y_2(x)$ będą rozwiązaniami równania liniowego jednorodnego rzędu drugiego, takimi że wyznacznik Wrońskiego $W(y_1, y_2) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$. Wtedy każde rozwiązanie ogólne można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

gdzie $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Przykład. Równanie rzędu drugiego

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0$$

mają funkcje $y_1(x) = x^3$ oraz $y_2(x) = x^4$ jako układ fundamentalny ponieważ:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^4 \\ 3x^2 & 4x^3 \end{vmatrix} = -x^6,$$

jest różne od zera np. dla $x > 0$ oraz dla każdego rozwiązania można sprawdzić równanie wyjściowe

$$6x - \frac{6}{x}3x^2 + \frac{12}{x^2}x^3 = 0,$$

oraz

$$12x^2 - \frac{6}{x}4x^3 + \frac{12}{x^2}x^4 = 0,$$

Twierdzenie powyżej oznacza, że rozwiązaniem ogólnym jest dla $x > 0$

$$y(x) = C_1x^3 + C_2x^4$$

Jeżeli znamy jedno rozwiązanie równania, to możemy za pomocą specjalnego podstawienia obniżyć o jeden rząd równania różniczkowego.

Twierdzenie **1.3.2.** *Jeżeli $y_1(x)$ jest niezerowym rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego jednorodnego rzędu drugiego, to podstawienie*

$$y = y_1(x)\int z dx$$

sprowadza to równanie do równania liniowego jednorodnego rzędu pierwszego względem nowej zmiennej z.

Przykład. Równanie rzędu drugiego

$$y'' - \frac{6}{x}y' + \frac{12}{x^2}y = 0$$

ma funkcje $y_1(x) = x^3$ jako swoje rozwiązanie szczególne. Podstawiamy

$$y(x) = x^3\int z(x)dx,$$

dla pewnej nowej zmiennej z, wtedy

$$y' = 3x^2 \int z dx + x^3 z,$$

natomiast

$$y'' = 6x \int z dx + 3x^2 z + 3x^2 z + x^3 z' = 6x \int z dx + 6x^2 z + x^3 z'.$$

Dla równania wyjściowego

$$6x \int z dx + 6x^2 z + x^3 z' - \frac{6}{x}\left(3x^2 \int z dx + x^3 z\right) + \frac{12}{x^2}\left(x^3 \int z dx\right) = 0,$$

po uproszczeniu $x^3 z' = 0$. Rozwiązaniem tego równania jest $z = const$, czyli drugie rozwiązanie ma postać

$$y_2(x) = x^3 \int z dx = x^3 C x = C x^4.$$

Twierdzenie **1.3.3.** *Jeśli znane jest niezerowe rozwiązanie $y_1(x)$ równania różniczkowego liniowego jednorodnego rzędu drugiego, to drugie rozwiązanie jest postaci*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{\exp(-P(x))}{y_1^2(x)} dx,$$

gdzie $P(x)$ jest ustaloną funkcję pierwotną dla funkcji $p(x)$ i spełnia warunek wyznacznika $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Równanie o stałych współczynnikach

Definicja. Równanie postaci

$$y'' + py' + qy = 0,$$

gdzie $p, q \in \mathbb{R}$ są ustalonymi liczbami rzeczywistymi nazywamy jednorodnym równaniem liniowym drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Dla równania jednorodnego wprowadzimy równanie charakterystycze postaci

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

gdzie $p, q \in \mathbb{R}$, natomiast niewiadomą jest λ.

TWIERDZENIE **1.3.4** (O układzie fundamentalnym). *Niech λ_1 oraz λ_1 będą pierwiastkami równania charakterystycznego dla liniowego jednorodnego równania o stałych współczynnikach.*

- *Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2$ oraz $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to układ fundamentalny tworzą funkcje: $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ oraz $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ i rozwiązanie ogólne dla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ma postać*

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- *Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, to układ fundamentalny tworzą funkcje: $y_1(x) = e^{\lambda x}$ oraz $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ i rozwiązanie ogólne dla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ ma postać*

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

- *Jeżeli $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ oraz $\lambda_2 = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ gdzie $\beta > 0$, to układ fundamentalny tworzą funkcje: $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ oraz $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ i rozwiązanie ogólne ma postać*

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

PRZYKŁAD. Dla równania

$$y'' + 7y' + 10y = 0$$

jego równanie charakterystyczne to

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Rozwiązania to $\lambda_1 = -5$ oraz $\lambda_2 = -2$. Wtedy rozwiązanie ogólne

$$y(x) = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-2x}.$$

PRZYKŁAD. Zagadnienie początkowe dla równania

$$y'' + 7y' + 10y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -13.$$

Wtedy:

- Pochodna RO to $y'(x) = -5C_1 e^{-5x} - 2C_2 e^{-2x}$
- Warunki na stałe: $C_1 + C_2 = 2$ oraz $-5C_1 - 2C_2 = -13$
- Rozwiązaniem zagadnienia początkowego jest:

$$y(x) = 3e^{-5x} - e^{-2x}.$$

PRZYKŁAD. Przypadek dwóch pierwiastków zespolonych dla równania różniczkowego

$$y'' + 4y' + 13y = 0.$$

Jego równanie charakterystyczne to

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Rozwiązania sązespolone: $\lambda_1 = -2 + 3i$ oraz $\lambda_2 = -2 - 3i$.

Wtedy:

- Funkcja o wartościach zespolonych $y(x) = e^{(-2+3i)x}$ to

$$y(x) = e^{-2x}[\cos(3x) + i\sin(3x)]$$

- Rzeczywiste rozwiązanie ogólne jako liniowa kombinacja

$$y(x) = C_1 e^{-2x}\cos(3x) + C_2 e^{-2x}\sin(3x)$$

1.3.5 Równanie liniowe niejednorodne

Rozwiązanie niejednorodnego równania liniowego drugiego rzędu o stałych współczynnikach można opisać za pomocą równania jednorodnego.

TWIERDZENIE **1.3.5.** *Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego postaci*

$$y'' + py' + qy = h(x)$$

jest sumą rozwiązania ogólnego równania jednorodnego i rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego.

Metoda uzmiennienia stałych

Rozwiązanie ogólnym niejednorodnego równania liniowego drugiego rzędu można skonstruować na podstawie równania jednorodnego.

TWIERDZENIE **1.3.6** (metoda uzmiennienia stałych)**.** *Niech $y_1(x), y_2(x)$ tworzą układ fundamentalny rozwiązań równania różniczkowego liniowego jednorodnego dla*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x).$$

Ponadto niech $C_1(x)$ oraz $C_2(x)$ będą dwoma funkcjami, które spełniają układ równań:

$$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ h(x) \end{bmatrix}.$$

Wtedy funkcja $y_s(x)$ jest rozwiązaniem szczególnym wyjściowego równania niejednorodnego:

$$y_s(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Twierdzenie **1.3.7.** *Niech $y_s(x)$ będzie pewnym (szczególnym) rozwiązaniem równania postaci*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x).$$

Jego ogólne rozwiązanie może być przedstawione wzorem

$$y(x) = y_s(x) + a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x),$$

gdzie $y_1(x), y_2(x)$ są dwoma rozwiązaniami równania jednorodnego, takimi że wyznacznik $W(y_1, y_2) \neq 0$ oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Uwaga **1.3.3.** Układ równań na współczynniki C_1, C_2 ma rozwiązanie ponieważ wyznacznik macierzy Wrońskiego $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Przykład**.** Dla równania

$$y'' + y' - 2y = 2x,$$

rozwiązaniem jest dla stałych $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = D_2 e^{(-2\,x)} + D_1 e^x - x - \frac{1}{2}.$$

Poniżej pokażemy w jaki sposó powyższe rozwiązanie można uzyskać metodą uzmiennienia (wariacji) współczynników. Układamy równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{-2x} \\ e^x & -2e^{-2x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix}.$$

Obliczamy macierz odwrotną i mnożymy przez prawą stronę:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,e^{(-x)} & \frac{1}{3}\,e^{(-x)} \\ \frac{1}{3}\,e^{(2\,x)} & -\frac{1}{3}\,e^{(2\,x)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\,xe^{(2\,x)} \\ -\frac{2}{3}\,xe^{(2\,x)} \end{bmatrix}$$

Stąd

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{2}{3}xe^{2x} \\ C_2'(x) = -\frac{2}{3}xe^{2x} \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} C_1(x) = -\frac{2}{3}\,(x+1)e^{(-x)} \\ C_2(x) = -\frac{1}{6}\,(2\,x-1)e^{(2\,x)} \end{cases}$$

Możemy teraz przedstawić rozwiązanie szczególne równania niejednorodnego:

$$y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-2x} = -x - 1/2.$$

Na koniec otrzymujemy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego, gdzie użyjemy dla stałych kombinacji rozwiązań nowych liter (oznaczeń)

$$y(x) = y_s(x) + D_1 e^x + D_2 e^{-2x}.$$

Uwaga **1.3.4.** Rozwiązanie szczególne $y_s(x)$ niejednorodnego równania liniowego drugiego rzędu może być skonstruowane za pomocą wyznacznika. Niech $y_1(x), y_2(x)$ będą dwoma rozwiązaniami równania jednorodnego, takimi że wyznacznik Wrońskiego $W(x) = W(y_1, y_2) \neq 0$, czyli będą to tzw. rozwiązania fundamentalne. Rozwiązanie szczególne $y_s(x)$ równania postaci

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = h(x)$$

możemy otrzymac metodą uzmiennienia stałej:

$$y_s(x) = y_2(x)\int \frac{y_1(x)}{W(x)}h(x)dx - y_1(x)\int \frac{y_2(x)}{W(x)}h(x)dx.$$

Metoda współczynników nieoznaczonych

Dane jest równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach

$$y'' + py' + qy = h(x),$$

gdzie funkcja $h(x)$ jest postaci

$$h(x) = e^{\alpha x}\left[(a_0 + a_1 x + ... + a_k x^k)\cos\beta x + (b_0 + b_1 x + ... + b_l x^l)\sin\beta x\right].$$

Z postaci funkcji $h(x)$ wynika, że opisana poniżej metoda nie jest uniwersalna.

Definicja (zespolona liczba kontrolna)**.** Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\beta > 0$ liczbą kontrolną funkcji $h(x)$ o przedstawionej postaci nazywamy liczbę zespoloną

$$z = \alpha + i\beta$$

Przykład. Dla przykładowych liczb kontrolnych:

- jeżeli $z = 0$, to $h(x)$ jest wielomianem postaci
$$h(x) = a_0 + a_1x + ... + a_kx^k,$$
- jeżeli $z = \alpha$, to $h(x)$ jest iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej postaci
$$h(x) = e^{\alpha x}(a_0 + a_1x + ... + a_kx^k),$$

Twierdzenie **1.3.8** (metoda współczynników nieoznaczonych)**.** *Dane jest równanie różniczkowe liniowe rzędu drugiego o stałych współczynnikach*
$$y'' + py' + qy = h(x),$$
gdzie funkcja $h(x)$ jest postaci dla $k, l \in \mathbb{N}$:
$$h(x) = e^{\alpha x}\Big[(a_0 + a_1x + ... + a_kx^k)\cos\beta x + (b_0 + b_1x + ... + b_lx^l)\sin\beta x\Big].$$
Dla liczby kontrolnej $z = \alpha + i\beta$ oraz wielomianu charakterystycznego $w(\lambda)$ dla równania jednorodnego zachodzi:

- *jeżeli liczba z nie jest pierwiastkiem wielomianu $w(\lambda)$, to równanie niejedonorodne ma rozwiązanie szczególne postaci:*
$$y(x) = e^{\alpha x}\Big[(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)\cos\beta x + \\ + (B_0 + B_1x + ... + B_mx^m)\sin\beta x\Big],$$
- *jeżeli liczba z jest s-krotnym pierwiastkiem wielomianu $w(\lambda)$, to równanie niejedonorodne ma rozwiązanie szczególne postaci:*
$$y(x) = x^s e^{\alpha x}\Big[(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)\cos\beta x + \\ + (B_0 + B_1x + ... + B_mx^m)\sin\beta x\Big],$$
gdzie $m = \max\{k, l\}$. Współczynniki A_i, B_i są odpowiednio dobranymi współczynnikami rzeczywistymi dla każdego $0 < i \leq m$ za pomocą rozwiązania odpowiedniego układu równań, który wynika z porównania stron równania wyjściowego.

Przykład. Równanie różniczkowe rzędu drugiego

$$y'' - 7y' + 6y = 6x + 5$$

dla którego równanie charakterystyczne to

$$\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

ma dw rozwiązania rzeczywiste $\lambda = 1$ lub 6. Wyznaczanie RSRN metodą współczynników nieoznaczonych (metoda przewidywania) polega tutaj na zapisaniu propozycji rozwiązania w formie:

$$y_s(x) = A_0 + A_1 x.$$

Wtedy $y_s'(x) = A_1$ oraz wstawieniu $y_s(x)$ do wyjściowego równania:

$$-7A_1 + 6(A_0 + A_1 x) = 6x + 5.$$

Wtedy

$$\begin{cases} -7A_1 + 6A_0 = 5 \\ 6A_1 = 6. \end{cases}$$

czyli $A_1 = 1$ oraz $A_0 = 2$, stąd $y_s(x) = 2 + x$. Podsumowując rozwiązanie ogólne wyjściowegpo równania niejednorodnego to

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + 2 + x.$$

1.3.6 Układ równań pierwszego rzędu

Przykład.

$$y'' + 7y' + 10y = 0$$

- Podstawienie $v = y'(x)$
- Równanie macierzowe $\begin{bmatrix} y' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$
- Dla oznaczenia $Y = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$ równanie $Y' = \mathbf{A}Y$
- Wartości i wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ to: $C_1 = -5$ oraz $C_2 = -2$ oraz $v_1 = [1, -5]$ i $v_2 = [1, -2]$
- Stąd rozwiązanie ogólne RO

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = C_1 e^{-5x} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

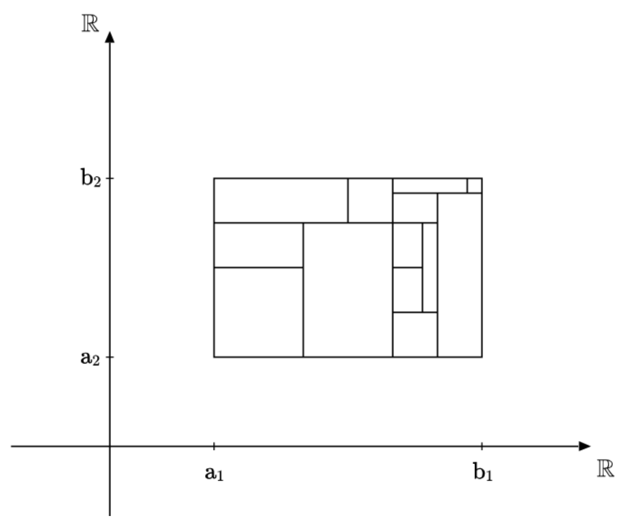
Rozdział 2

Całki wielokrotne

2.1 Całki wielokrotne

2.1.1 Całka podwójna na prostokącie

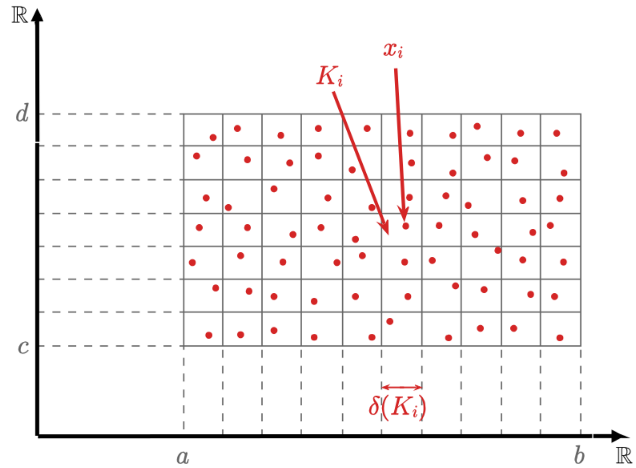
Podział prostokąta $K^2 \subset \mathbb{R}^2$ określamy jako zbiór prostokątów K_i, gdzie $i = 1, 2, ..., s$, które: wypełniają ten prostokąt oraz są parami rozłączne. Dla ustalonego prostokąta K_i przez Δx_i oraz Δy_i oznaczymy jego wymiary.



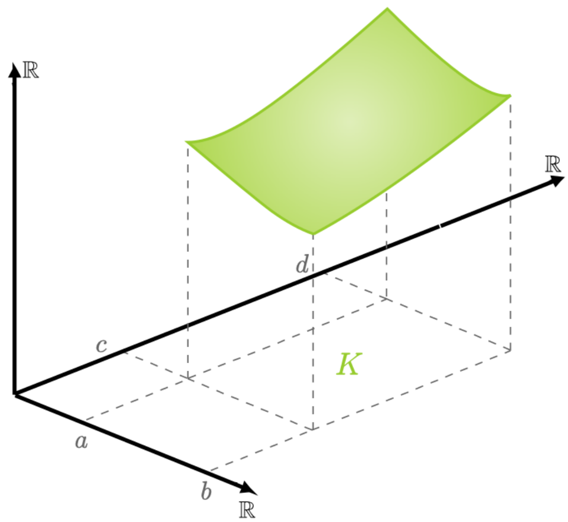
Dla ustalonego podziału $P = \left\{K^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{s} K_i \ \wedge \ K_i \cap K_j = \emptyset \ \forall i \neq j\right\}$, czyli

$$P = \{K_1, K_2, ..., K_s\}$$

określimy zbiór tzw. punktów pośrednich $p_1, p_2, ..., p_s$.



Rozważymy funkcje dwóch zmiennych $f(x, y)$ na prostokącie K^2, która ma ograniczony zbiór wartości, czyli $f : K^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz $f(K^2) \subset [c, d]$.



Definicja (Suma całkowa). Dany jest podział prostokąta $K^2 = \{K_1, \ldots, K_s\}$ oraz funkcja ograniczona $f : K^2 \to \mathbb{R}$. Suma całkowa dla funkcji $f(x, y)$, która odpowiada podziałowi P oraz wybranym punktom pośrednim $p_i = (x_i, y_i)$ dla $i = 1.2.,,,.s$, to liczba

$$\sum_{i=1}^{s} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_i.$$

Weźmy teraz pod uwagę normalny ciąg podziałów $P_n = \{P_1, P_2, \ldots\}$ prostokąta K^2, gdzie pojawia się warunek na średnicę podziałów. Dla każdego podziału P_j wybierzmy ciąg punktów pośrednich $p_1^j, p_2^j, \ldots, p_{s_j}^j$. Określimy sumę całkową $S(f, P_n, p_1^j, \ldots, p_{s_j}^j)$, która przy odpowiednich warunkach określa całkę podwójną.

Definicja (Całka dwukrotna). Niech $f : K^2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną na prostokącie K^2. Całkę podwójną dla funkcji $f(x, y)$ po tym prostokącie określamy wzorem

$$\iint\limits_{K^2} f(x,y)dxdy := \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta x_i \Delta y_i,$$

gdzie granica po prawej stronie jest właściwa i nie zależy od podziału oraz sposobu wyboru punktów pośrednich.

Czasami oznaczamy dla $K = K^2$ całkę podwójną w sposób:

$$\iint\limits_{K^2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{K} f(x,y)dK = \int\limits_{K} f(x,y)dK$$

Przykład. Dla kwadratu $0 \le x \le 1$ oraz $0 \le y \le 1$ podzielonego na n^2 równych części, gdzie element

$$K_{jk} = \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right] \times \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right],$$

gdzie $1 \le j \le n$ oraz $1 \le k \le n$.

Rozważymy funkcję $f(x, y) = x + y$ w punktach $\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right)$, gdzie przyjmuje wartość maksymalną $M_{jk} = \frac{j+k}{n}$. Wyznaczymy sumę całkową

$$S(f, P_n) = \sum_{j,k}^{n} |K_{jk}| M_{jk} = \sum_{j,k}^{n} \frac{1}{n^2}\frac{j+k}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j,k}^{n}(j+k) =$$
$$= \frac{1}{n^3}\left(\sum_{j}^{n} j \sum_{j}^{n} 1 + \sum_{k}^{n} k \sum_{k}^{n} 1\right) = \frac{1}{n^3} 2n \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{n+1}{n}.$$

Wtedy z definicji

$$\iint\limits_{K} (x+y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

2.1.2 Twierdzenia o całkowalności

Funkcja $f(x,y)$ jest całkowalna na prostokącie K jeżeli istnieje całka podwójna $\iint\limits_K f(x,y)dK$.

Twierdzenie **2.1.1** (O funkcji ciągłej)**.** *Funkcja ciągła dwóch zmiennych na prostokącie domkniętym jest całkowalna.*

Twierdzenie **2.1.2** (Całki górna i dolna)**.** *Całka podwójna* $\iint\limits_K f(x,y)dK$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy: istnieje całka górna, całka dolna oraz wszystkie trzy całki są sobie równe, czyli*

$$\iint\limits_K f(x,y)dK = \overline{\iint\limits_K f(x,y)dK} = \underline{\iint\limits_K f(x,y)dK}.$$

Twierdzenie **2.1.3** (Zbiory miary zero)**.** *Funkcja ograniczona na prostokącie jest całkowalna, jeżeli wszystkie punkty jej nieciągłości leża na skończonej liczbie krzywych postaci $y = f(x)$ lub $x = g(y)$.*

Twierdzenie **2.1.4** (o liniowości)**.** *Niech K^2 będzie prostokątem w $\mathbb{R}^2$ oraz $f(x,y)$ i $g(x,y)$ funkcjami całkowalnymi na K^2. Niech a, b będą stałymi rzeczywistymi. Wtedy*

$$\iint\limits_{K^2} (af(x,y) + bg(x,y))dxdy = a\iint\limits_{K^2} f(x,y)dxdy + b\iint\limits_{K^2} g(x,y)dxdy.$$

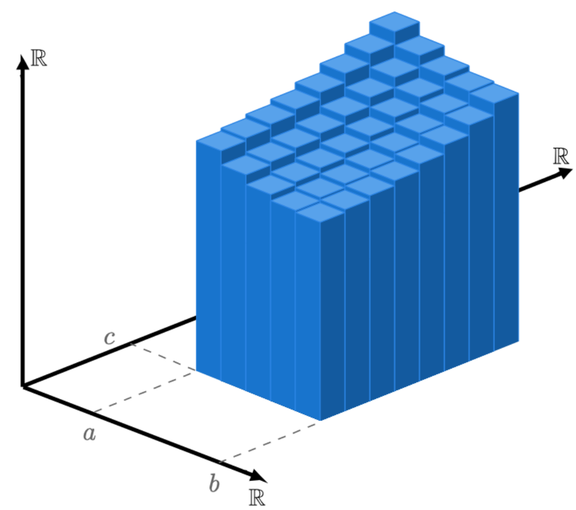
Twierdzenie **2.1.5** (addytywność całki)**.** *Niech K_1 i K_2 będą dwoma kostkami w $\mathbb{R}^2$ o rozłącznych wnętrzach. Wówczas dla każdej funkcji całkowalnej $f(x,y)$ na K_1, K_2 oraz $K_1 \cup K_2$ mamy*

$$\iint\limits_{K_1\cup K_2} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{K_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{K_2} f(x,y)dxdy$$

2.1.3 Interpretacja geometryczna

Niech funkcja $f(x,y)$ będzie całkowalna i nieujemna na prostokącie. Odpowiednia bryła, czyli obszar przestrzenny ma określoną objętość, która jest ograniczona przez całkę górną będącą miarą zewnętrzną tego zbioru. Podobnie miara wewnętrzna, która odpowiada całce dolnej określa liczbę, która szacuje objętość od dołu. Ponieważ obie całki: dolna i górna są sobie równe, to całka podwójna określa objętość bryły pod wykresem funkcji dwóch zmiennych:

$$|V| = \iint\limits_K f(x,y)dxdy.$$



2.1.4 Całki iterowane

Założymy, że ogrniczona co do wartości funkcja dwóch zmiennych jest określona na prostokącie: $a \leq x \leq b$ oraz $c \leq x \leq d$ i przy stałym y istnieje całka

$$\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Stwierdzimy, że jest to wyrażenie jako funkcja zależna od y.

Przykład. Dla funkcji $f(x,y) = x^2 y$ otrzymamy dla odcinka $x \in [0,1]$

$$\int\limits_0^1 x^2 y dx = y \int\limits_0^1 x^2 dx = y \left(\frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{3} y.$$

Jeżeli istnieje całka $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, to utworzymy iterowaną całkę postaci

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Przykład. Dla funkcji $f(x,y) = x^2 y$ otrzymamy odpowiednio dla odcinków $x \in [0,1]$ oraz $y \in [2,3]$

$$\int\limits_2^3 dy \int\limits_0^1 x^2 y dx = \int\limits_2^3 y dy \int\limits_0^1 x^2 dx = \int\limits_2^3 y dy \left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 \right) = \frac{1}{3} y^2/2 \Big|_2^3 = \frac{1}{3}(3^2/2 - 2^2/2).$$

2.1.5 Zamiana całki podwójnej na iterowaną

Twierdzenie **2.1.6** (o zamianie na całki iterowane). *Dla funkcji ciągłej w prostokącie $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ obie całki iterowane istnieją i są równe całce podwójnej:*

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Przykład. Policzymy całkę $\iint\limits_{K^2} (xy - y^2)\,dxdy$, gdzie $K^2 = [1,2] \times [3,4]$.

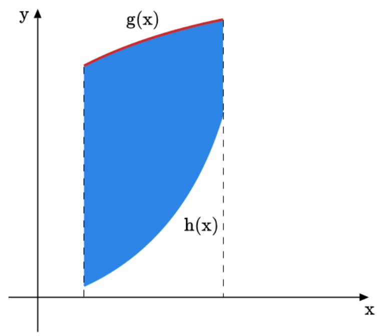
Nasza funkcja jest ciągła na prostokącie, zatem możemy zastosować twierdzenie Fubiniego. Otrzymamy

$$\iint\limits_{K^2} xy - y^2 dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_3^4 (xy - y^2)dy \;=\; \int\limits_1^2 \left((x\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3})\Big|_3^4 \right) dx$$

$$= \int\limits_1^2 \left(\frac{7x}{2} - \frac{37}{3} \right) dx \;=\; \left(\frac{7x^2}{4} - \frac{37x}{3} \right)\Big|_1^2 = -\frac{85}{12}.$$

2.1.6 Całka podwójna po obszarze

Zbiory normalne



zbiór normalny względem osi 0X

DEFINICJA. Niech $[a, b] \subset \mathbb{R}$ będzie odcinkiem oraz $g_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi na tym odcinku takimi, że $g_1(x) < g_2(x),\ x \in [a, b]$.

Wtedy zbiorem normalnym względem osi Ox nazywamy zbiór

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}.$$

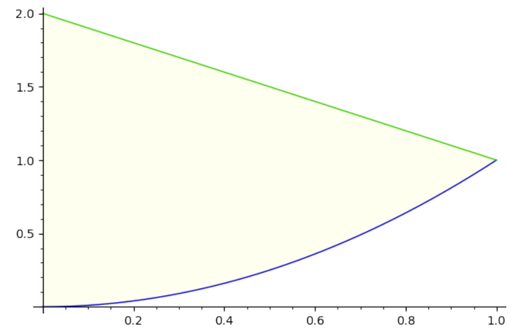
Podobnie określamy zbiór normalny względem osi Oy.

TWIERDZENIE **2.1.7** (Całka iterowana dla zbiorów normalnych). *Jeśli $f : A \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to istnieje całka iterowana oraz zachodzi równość dla całki podwójnej:*

$$\iint\limits_A f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dy,$$

gdzie A jest zbiorem normalnym na płaszczyźnie względem osi Ox.

PRZYKŁAD (Obszar normalny względem y). Rozważymy obszar A na płaszczyznie, który jest ograniczony przez: krzywą $y = \sqrt{x}$ oraz proste $y = 0$ oraz $x + y = 2$.



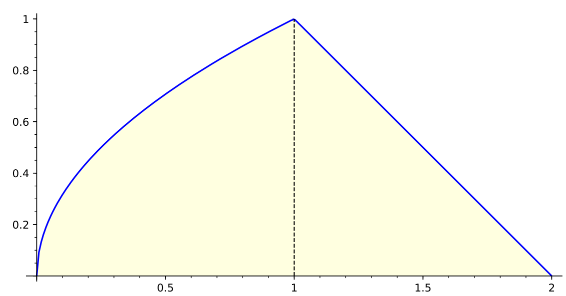
Zapiszemy A jako obszar normalny względem osi Oy - zbiór punktów $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, że:

$$A=\begin{cases} y^2\le x\le 2-y\\ 0<y<1\end{cases}$$

Wtedy całka podwójna z funkcji $f(x,y)=1$ na obszarze normalnym A

$$\iint\limits_A dxdy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{y^2}^{2-y}dx=\frac{7}{6}.$$

Przykład. Pole pod wykresem, czyli całka pojedyncza z funkcji $y=f(x)$. Ponownie obszar A na płaszczyznie jest ograniczony przez: krzywą $y=\sqrt{x}$ oraz proste $y=0$ oraz $x+y=2$.



Suma całek pojedynczych

$$P(A)=\int\limits_0^1\sqrt{x}dx+\int\limits_1^2(2-x)dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6}.$$

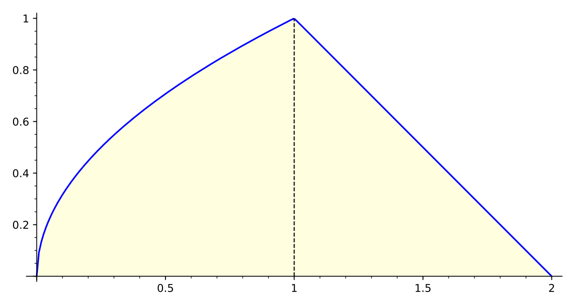
Zbiory regularne

DEFINICJA. Rozważymy płaski obszar ograniczony A, którego brzeg daje się podzielić na skończoną liczbę krzywych. Linie krzywe powinny być możliwe do przedstawienia w postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$ dla pewnych zakresów (odcinków) x lub y odpowiednio. Obszar określamy wtedy jako obszar regularny. Niektóre z tych linii brzegowych mogą redukować się do punktu.

TWIERDZENIE **2.1.8.** *Funkcja $f(x, y)$ ograniczona i ciągła w obszarze regularnym A jest całkowalna, czyli istnieje całka podwójna*

$$\iint\limits_A f(x,y)dA.$$

PRZYKŁAD. Obszar regularny względem x. Zapiszemy $A = A_1 \cup A_2$ jako sumę obszarów normalnych względem osi Ox.



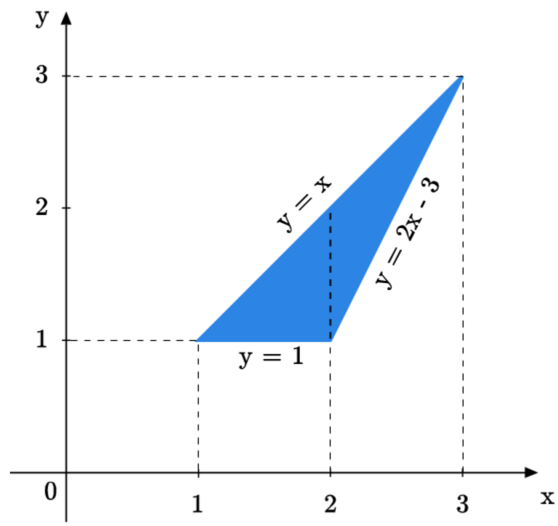
Wtedy

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \iint\limits_{A_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy.$$

Dla całki podwójnej z funkcji $f(x, y) = 1$

$$\iint\limits_A dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy = \frac{7}{6} = P(A).$$

PRZYKŁAD. Mamy trójkąt T_1 ograniczony prostymi: $y = x, y = 1, x = 2$, a drugi to trójkąt T_2 ograniczony prostymi: $y = x, y = 2x - 3, x = 2$. T jest więc zbiorem regularnym



$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_1} f(x,y)dxdy + \iint_{T_2} f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_1^2 dx \int_1^x x^2 y dy + \int_2^3 dx \int_{2x-3}^x x^2 y dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_1^x dx + \int_2^3 \int_{2x-3}^x \left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{2x-3}^x dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2(x^2-1)\right)dx + \int_2^3 \left(-\frac{3}{2}x^2(x^2-4x+3)\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{-3}{10}x^5 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^3\right)\Big|_2^3 = \frac{57}{10} + \frac{29}{15} = \frac{229}{30}$$

Zbiory dowolne

Dana jest funkcja $f(x,y)$ ograniczona na dziedzinie D, która to dziedzina jest zbiorem ograniczonym na płaszczyznie. Obszar dziedziny możemy wtedy ograniczyć prostokątem K^2 i rozszerzyć funkcję na cały prostokąt $f_0(x,y)$, tak żeby wynosiła zero we wszytkich punktach K^2, które nie należą do obszaru D.

Definicja. Całkę podwójną na dowolnym ograniczonym obszarze D określimy jako

$$\iint_D f(x,y)dxdy := \iint_{K^2} f_0(x,y)dxdy,$$

gdzie prostokąt ogranicza $D \subset K^2$ oraz $f_0(x,y) = f(x,y)$ na obszarze D i zero poza nim.

Stwierdzimy, że określenie całki podwójnej nie zależy od wyboru prostokąta ograniczającego K^2, który jest tutaj figurą domkniętą. Określimy mierzalność obszaru płaskiego i ograniczonego jako warunek na krzywą, która jest jego brzegiem.

TWIERDZENIE **2.1.9** (Pole obszaru)**.** *Pole obszaru D, który jest mierzalny, wyraża się całką podwójną*

$$|D| = \iint_D dxdy.$$

2.1.7 Całka potrójna

DEFINICJA (Obszar przestrzenny normalny)**.** Zbiór $D \subset \mathbb{R}^3$ jest normalny względem współrzędnej z, jeśli istnieje pewien zbiór normalny $A \subset \mathbb{R}^2$ zawarty w płaszczyźnie xy oraz istnieją dwie funkcje: $h_1, h_2 : A \to \mathbb{R}$ takie, że $h_1(x,y) < h_2(x,y)$ oraz

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ h_1(x,y) \ \le z \le h_2(x,y)\}.$$

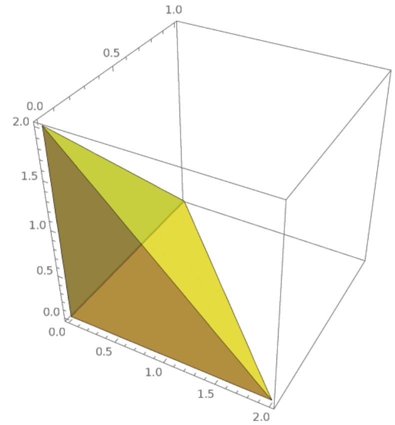
Podobnie określamy zbiór normalny względem pozostałych współrzędnych. Zbiorem normalnym będziemy nazywać zbiór normalny względem dowolnej współrzędnej. Zbiorem regularnym będziemy nazywać zbiór, który można podzielić na sumę zbiorów normalnych o rozłącznych wnętrzach.

TWIERDZENIE **2.1.10.** *Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to zachodzi równość*

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

gdzie D jest zbiorem normalnym w przestrzeni.

PRZYKŁAD**.** Całka podwójna z funkcji $z(x,y)$. Dany czworościan B_4 ograniczony w przestrzeni przez cztery płaszczyzny: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ oraz $z + 2y + x = 2$.



Obliczymy całkę podwójną

$$\iint_T z(x,y)dxdy = \iint_T (2-x-2y)dxdy,$$

gdzie trójkąt T jest odpowiednim obszarem na płaszczyznie XY powstałym z B_4 przez położenie $z=0$, czyli

$$T = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 < y < 1 - x/2 \end{cases}$$

Wtedy

$$\iint_T (2-x-2y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} (2-x-2y)dy \right) dx = \frac{2}{3} = V(B_4)$$

Przykład (Całka potrójna z funkcji $w(x,y,z)=1$). B_4 jako obszar normalny - bryła zbioru punktów $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, że

$$B_4 = \begin{cases} 0 \leq z \leq 2 - x - 2y \\ 0 \leq y \leq 1 - x/2 \\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

$$\iiint_{B_4} dxdydz = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} \left(\int_0^{2-x-2y} dz \right) dy \right) dx = \frac{2}{3} = V(B_4)$$

2.1.8 Całki n-krotne

Definicja. Kostką wielowymiarową w $\mathbb{R}^n$ będziemy nazywać zbiór

$$K^n := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n],$$

czyli iloczyn kartezjański przedziałów $[a_i, b_i], i = 1, \ldots, n$.

Uwaga **2.1.1.** Objętością kostki będziemy nazywać liczbą

$$vol(K^n) := (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n).$$

Liczbę $\delta(K^n) := \max\{(b_1 - a_1), \ldots, (b_N - a_N)\}$ czyli długość najdłuższego boku kostki nazwiemy jej średnicą $\text{diam}(K)$.

Podział kostki. Podzielmy kostkę na mniejsze kostki $K_1, \ldots, K_s$, o wnętrzach rozłącznych i takich, że $K = K_1 \cup \ldots \cup K_s$. Oznaczmy ten zbiór kostek $K_1, \ldots, K_s$ przez P. Określony zbiór P nazywamy podziałem kostki K. Liczbę $\delta(P) := \max\{\delta(K_1), \ldots, \delta(K_s)\}$ nazywamy średnicą podziału P.

Definicja. Ciąg podziałów $P_1, P_2, P_3, \ldots$ nazwiemy ciągiem normalnym, gdy $\lim_{j\to\infty} \delta_j = 0$, czyli gdy średnice kolejnych podziałów zmierzają do zera.

Zbiorem punktów pośrednich nazywamy różne punkty, które leżą na poszczególnych zbiorach podziału w liczbie, która odpowiada wybranemu podziałowi s, czyli dla punktow

$$(p_1^*, p_2^*, ..., p_s^*)$$

Definicja (Sumy całkowe). Dany jest podział kostki K^n w postaci $P = \{K_1, \ldots, K_s\}$ oraz funkcja ograniczona $f : K^n \to \mathbb{R}$. Suma całkowa funkcji $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, która odpowiada podziałowi oraz wybranym punktom pośrednim nazywamy liczbę

$$\sum_{i=1}^{i=s} f(p_i^*)\Delta p_i$$

Definicja (Całka n-krotna). Dla funkcji $f(x_1, ..., x_n)$ ograniczonej na kostce K^n całkę wielokrotną określamy jako granicę sum całkowych względem podziałów, czyli:

$$\int\limits_{K^n} f(x_1, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n := \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{i=1}^{i=s} f(p_i^*)\Delta p_i$$

Twierdzenie **2.1.11** (G. Fubini, 1907)**.** *Dla funkcji ciągłej $f : A\times B \to \mathbb{R}$ zachodzą równości:*

$$\iint\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)\,dx\right)\,dy,$$

gdzie A, B to w ogólności kostki wielowymiarowe, natomiast $f(x,\cdot)$ na zbiorze A oraz $f(\cdot,y)$ na zbiorze B to funkcje wielu zmiennych.

Uwaga **2.1.2.** Całki $\int\limits_A \left(\int\limits_B f(x,y)dy\right) dx$ i $\int\limits_B \left(\int\limits_A f(x,y)dx\right) dy$ nazywamy całkami iterowanymi. Będziemy zapisywać dla uniknięcia nawiasów

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

lub

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d \left(\int\limits_p^q f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)dz.$$

2.2 Zmiana zmiennych w całce wielokrotnej

2.2.1 Macierz Jacobiego i grupa przekształceń

Dane jest odwzorowanie ψ, które przekształca obszar regularny D' na płaszczyznie zmiennych (u, v), na obszar regularny D na płaszczyznie zmiennych (x, y), które zapiszemy jako:

$$x = \psi_1(u, v),\ y = \psi_2(u, v)$$

gdzie $(u, v) \in D$.

Definicja (Jakobian przekształcenia). Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem na płaszczyźnie oraz ψ odwzorowaniem pewnego obszaru dziedziny D' na D. Jakobianem przekształcenia $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ nazywamy wyznacznik macierzy jego pochodnej ψ':

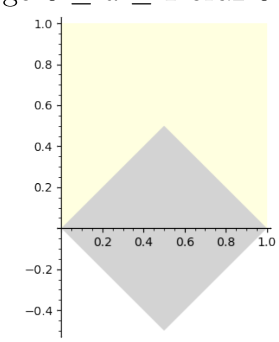
$$\det \psi' = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u}, & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u}, & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{bmatrix},$$

gdzie pochodna cząstkowa brana jest po zmiennych (u, v), które opisują pewien obszar D' jako dziedziny przekształcenia ψ. Zapiszemy też jakobian przekształcenia ψ jako: $\frac{D(\psi_1,\psi_2)}{D(u,v)}$ lub $\frac{\partial(\psi_1,\psi_2)}{\partial(u,v)}$ - obydwa oznaczenia są stosowane.

Przykład. Dla odwzorowania

$$\begin{cases} x = u + v = \psi_1(u, v) \\ y = u - v = \psi_2(u, v) \end{cases}$$

obszaru kwadratu jednostkowego $0 \leq u \leq 1$ oraz $0 \leq v \leq 1$ otrzymamy



$$\det \psi' = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2.$$

TWIERDZENIE **2.2.1.** *Dane jest ciągłe i różnowartościowe przekształcenie wnętrza obszarów regularnych* $\psi : D' \to D$ *które ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym* D'. *Założymy, że jakobian odwzorowania* $\det \psi'(u,v) \neq 0$ *jest różny od zera w punktach wewnętrznych* D'. *Wtedy zachodzi wzór dla całki podwójnej:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(\psi(u,v))|\det \psi'(u,v)|dudv = \iint\limits_{D'} f(\psi(u,v))|J|dudv,$$

gdzie $D = \psi(D')$.

Dowód. Szkic dowodu.
Lemat (wzór na podstawienie dla całki jednokrotnej). Dana jest funkcja $f(x)$ ciągła na zbiorze wartości funkcji $\psi(t)$. Założymy, że funkcja $\psi(t)$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha, \beta]$. Wtedy dla $a = \psi(\alpha)$ oraz $b = \psi(\beta)$ zachodzi wzór dla $x = \psi(t)$

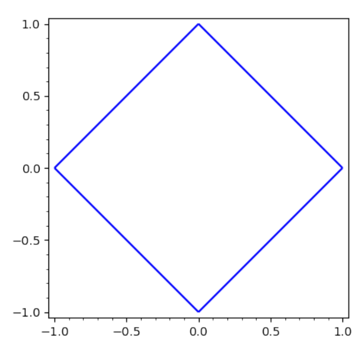
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)dt,$$

Z lematu wynika, że dla prostokąta $A \subset D$ oraz funkcji ciągłej $\psi(u,v)$ na prostokącie A' mającej ciągłą pochodną $\psi'(u,v)$ zachodzi wzór

$$\iint\limits_{A} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{A'} f(\psi(u,v))|\det \psi'(u,v)|dudv,$$

gdzie stosujemy zamianę całki podwójnej na całki iterowane $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$. Podzielimy obszar D na na prostokąty $D_1, D_2, ..., D_n$, które nie zachodzą na siebie i w sumie dają pole o różnicy $|D| - \sum |D_i| < \varepsilon$. $\square$

PRZYKŁAD. Na obszarze prostokąta A ograniczonego czterema prostymi: $x + y = 1, x + y = -1, x - y = 1$ oraz $x - y = -1$, czyli



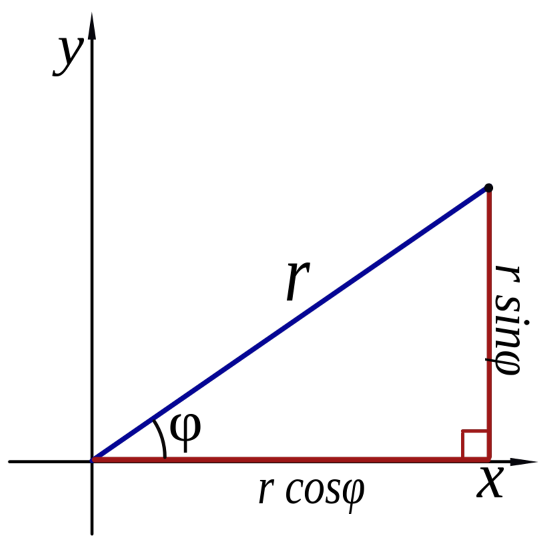
obliczymy przez zmianę $u = x + y$ oraz $v = x - y$ całkę $\iint\limits_A x^2 dxdy$. Wtedy zamiana na całki iterowane

$$\iint\limits_A x^2 dxdy = \iint\limits_{A'} (u+v)^2 \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-1}^{1} (u+v)^2 dv.$$

Obliczamy

$$\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{-1}^{1} (u+v)^2 dv = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} du \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{3}.$$

2.2.2 Współrzędne biegunowe i całka podwójna



Układ równań

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

Dla punktu o współrzędnych kartezjańskich (x, y) promień r wynosi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Jeśli $r \neq 0$ i $x \neq 0$, to z funkcji tangens:

$$\text{tg } \varphi = \tfrac{y}{x}$$

zatem amplituda φ tego punktu:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\tfrac{y}{x}\right),$$

i są możliwe ujemne wartości φ.

Natomiast aby otrzymać $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, należy rozważyć następujące przypadki:

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{gdy } x > 0 \text{ oraz } y \geqslant 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{gdy } x > 0 \text{ oraz } y < 0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{gdy } x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } x = 0 \text{ oraz } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{gdy } x = 0 \text{ oraz } y < 0 \end{cases},$$

gdzie arctg oznacza funkcję arcus tangens. W zakresie kątów $(-\pi, \pi)$ można ten zapis uprościć do

$$\varphi = \arccos\left(\tfrac{x}{r}\right) \cdot \operatorname{sgn}(y).$$

Wyznacznik macierzy Jacobiego:

$$|J| = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r.$$

TWIERDZENIE **2.2.2.** *Dane jest ciągłe i różnowartościowe przekształcenie wnętrza obszarów regularnych $\psi : D' \to D$, które ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym D'. Załóżymy, że jakobian odwzorowania $\det \psi'(r,\phi) \neq 0$ jest różny od zera w punktach wewnętrznych D'. Wtedy całka podwójna może być wyrażona wzorem:*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r,\phi)|J|drd\phi = \iint\limits_{D'} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi$$

UWAGA **2.2.1.** Dla obszaru D opisanego przez nieujemne funkcje: $g(\phi)$ oraz $h(\phi)$, które są ciągłe na przedziale $[\alpha, \beta]$ zawartym w przedziale $[0, 2\pi]$, w sposób

$$\alpha \leq \phi \leq \beta, \;\; g(\phi) \leq r \leq h(\phi)$$

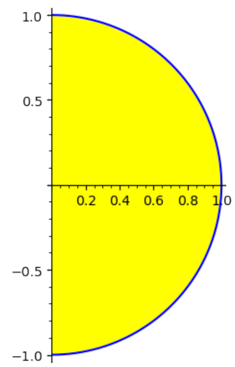
możemy zapisać całkę podwójną

$$\iint\limits_{D} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdrd\phi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\int\limits_{g(\phi)}^{h(\phi)} f(r\cos\phi, r\sin\phi)rdr \right) d\phi.$$

Czasami zapisujemy całkę iterowaną w bardziej praktyczny, krótki sposób

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\phi \int_{g(\phi)}^{h(\phi)} f(r,\phi) r dr.$$

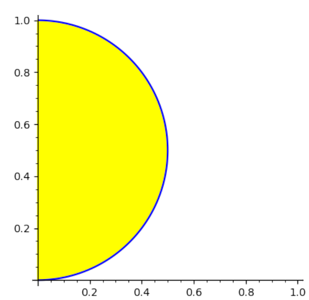
Przykład. Układ biegunowy dla półkola. Całka dla funkcji $f(x,y) = 1$, czyli $\iint\limits_A dxdy$ na obszarze połowy koła $A : x^2 + y^2 \leq 1$ dla $x \geq 0$.



$$\iint\limits_A dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r dr d\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

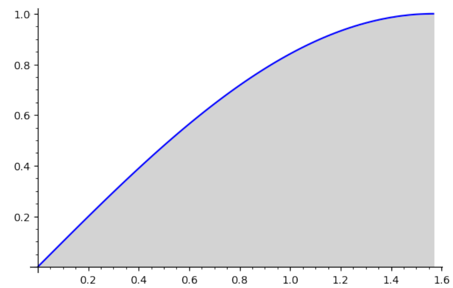
Przykład. Całka podwójna $\iint\limits_A dxdy$ dla obszaru $A \subset \mathbb{R}^2$, gdzie

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 + y^2 \leq y \\ x \geq 0. \end{cases}$$



Dla współrzędnych biegunowych otrzymamy obszar normalny względem osi $O\phi$

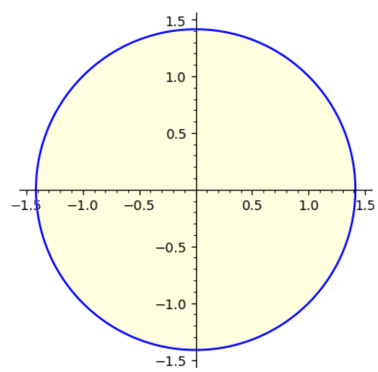
$$\begin{cases} 0 \le r \le \sin\phi \\ 0 \le \phi \le \pi/2 \end{cases}$$



Wtedy całka

$$\iint\limits_A dxdy = \iint\limits_{A'} rdrd\phi = \int\limits_0^{\pi/2} d\phi \int\limits_0^{\sin\phi} rdr = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2(\phi)d\phi = \frac{\pi}{8}.$$

Przykład. Całka dla obszaru $D = \{x^2 + y^2 \le 2\}$



$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint\limits_A e^{-r^2}rdrd\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2}rdr$$

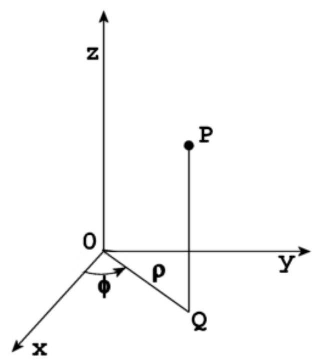
Pomocniczo dla $t = -r^2$ oraz $dt = -2rdr$

$$-\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^{-r^2}.$$

Wtedy

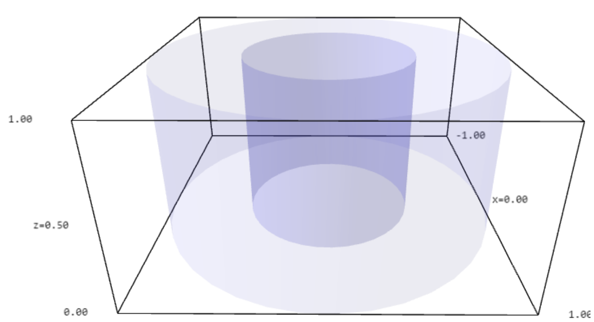
$$\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\sqrt{2}} e^{-r^2} r dr = 2\pi \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = -\pi(e^{-2} - e^0) = \pi\left(1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

2.2.3 Współrzędne cylindryczne



PRZYKŁAD. Całka $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$ obszaru przestrzennego D dla różnicy cylindrów o różnych promieniach o tej samej wysokości, czyli

$$D: \begin{cases} a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2 \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$



Wtedy obszar

$$D' : \begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \phi < 2\pi \\ 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

Przykładowa całka wynosi zatem

$$\iiint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2} dxdydz = \iiint\limits_{D'} r \cdot r dr d\phi dz$$

Obliczenia dla całek iterowanych

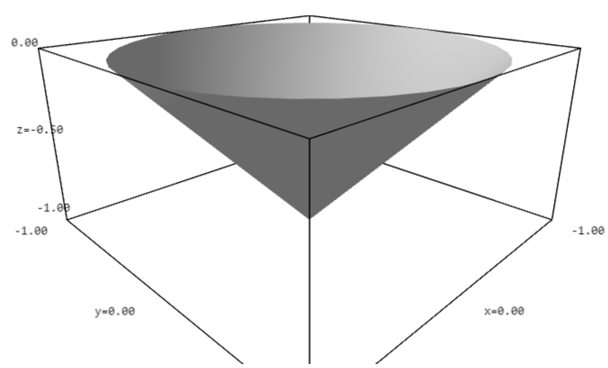
$$\iiint\limits_{D'} r^2 dr d\phi dz = \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_a^b r^2 dr = \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \int\limits_0^h dz \int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{2\pi}{3}(b^3 - a^3) \int\limits_0^h dz = \frac{2\pi}{3}(b^3 - a^3)h.$$

Przykład. Całka obszaru przestrzennego D dla stożka

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ h\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq h \end{cases}$$

obliczymy

$$\iiint\limits_{D} (x^2+y^2) dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{hr}^h r^2 r dz$$



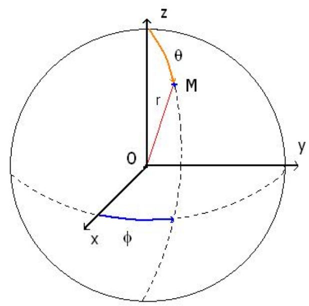
Dla współrzędnych cylindrycznych:

$$\begin{cases} 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ 0 < r \leq 1 \\ hr \leq z \leq h \end{cases}$$

Wtedy

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_{hr}^{h} r^2 r dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr(hr^3 - hr^4) = \int_0^{2\pi} d\phi(\frac{1}{20}h) = \frac{1}{10}\pi h.$$

2.2.4 Współrzędne sferyczne



$$\begin{cases} x = x(r,\theta,\phi) = r\ \sin\theta\ \cos\phi, \\ y = y(r,\theta,\phi) = r\ \sin\theta\ \sin\phi, \\ z = z(r,\theta,\phi) = r\ \cos\theta. \end{cases}$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta$$

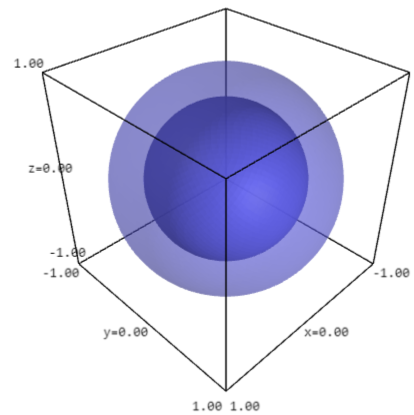
Przejście z układu kartezjańskiego na sferyczny jest zadana przez:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \arccos\frac{z}{r}, \\ \phi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Uwaga: funkcja arctg powinna być tak dobrana, aby wynik był w odpowiedniej ćwiartce y/x.

Przykład. Całka obszaru przestrzennego B dla różnicy kul $a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$ wg funkcji

$$\iiint_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz$$



Obszar B' zapiszemy we współrzędnych sferycznych

$$\begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

Wtedy całka

$$\iiint\limits_B \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dxdydz = \iiint\limits_{B'} \frac{1}{r^2} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

Za pomocą całek iterowanych

$$\iiint\limits_{B'} \sin\theta dr d\theta d\phi = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_a^b \sin\theta dr$$

możemy obliczyć

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_a^b \sin\theta dr = (b-a) \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = 2(b-a) \int\limits_0^{2\pi} d\phi = 4\pi(b-a).$$

Przykład. Całka obszaru przestrzennego D dla półkuli

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le R^2 \\ z \ge 0 \end{cases}$$

obliczymy całkę potrójną dla funkcji $f(x, y, z) = z$, czyli

$$\iiint\limits_D z dx dy dz.$$

Dla współrzędnych sferycznych:

$$\begin{cases} 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 < \theta \le \pi/2 \\ 0 < r \le R \end{cases}$$

Wtedy

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^R (r\cos\theta) r^2 \sin\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^R r^3 \sin\theta\cos\theta dr =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{4} R^4 \cos(\theta)\sin(\theta) = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{8} R^4 = \frac{1}{4}\pi R^4.$$

2.2.5 Przykłady i uogólnienia

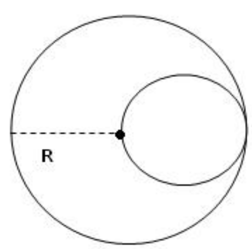
Różnica kół z przesunięciem

Przykład. Układ biegunowy dla różnicy kół. Okrąg o środku w punkcie (r_0, φ_0) i promieniu $R > 0$ jest opisany przez równanie

$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 = R^2.$$

W szczególnym przypadku gdy środek znajduje się w biegunie układu współrzędnych, powyższe równanie przybiera szczególnie prostą postać:

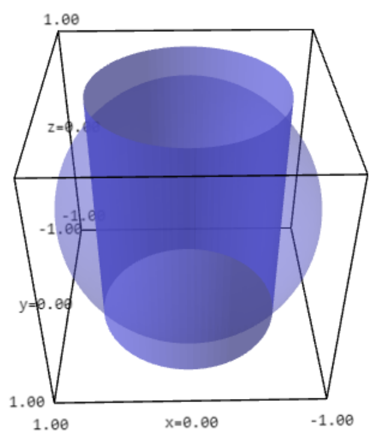
$$r = R.$$

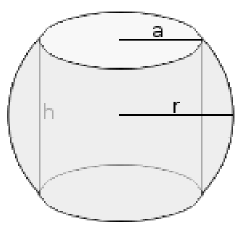


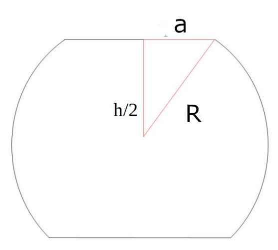
$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_{0}^{R} rdrd\varphi + \int_{0}^{\pi/2}\int_{R\cos\varphi}^{R} rdrd\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi}\int_{R\cos\varphi}^{R} rdrd\varphi = \frac{3}{4}\pi R^2$$

Pierścień sferyczny

Przykład. Układ cylindryczny dla pierścienia sferycznego



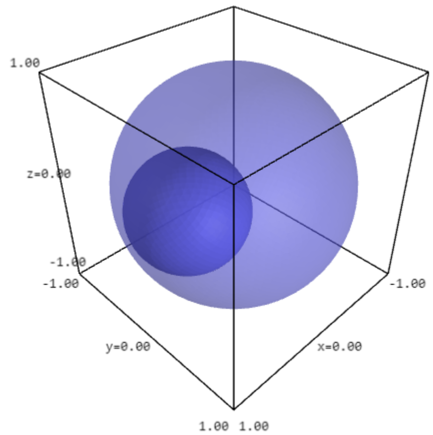




$$\int_{0}^{2\pi}\int_{a}^{R}\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}} rdzdrd\varphi = \frac{4}{3}\pi(R^2-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

Różnica kul z przesunięciem

Przykład. Układ sferyczny dla różnicy kul: większa z promieniem R, mniejsza przesunięta na jednej osi..



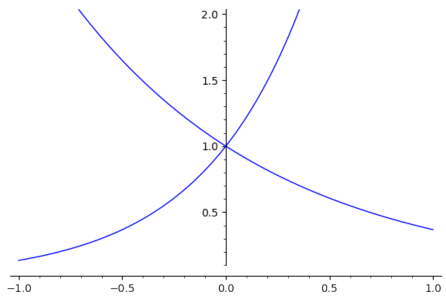
$$\int_0^{\pi}\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\int_0^{R} r^2\sin(\theta)drd\varphi d\theta+\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{R\cos\varphi\sin\theta}^{R} r^2\sin(\theta)drd\varphi d\theta+$$
$$+\int_0^{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_{R\cos\varphi\sin\theta}^{R} r^2\sin(\theta)drd\varphi d\theta=\frac{7}{6}\pi R^3$$

2.3 Zastosowania całek wielokrotnych

2.3.1 Całka podwójna

Pole obszaru regularnego

PRZYKŁAD. Pole obszaru regularnego D ograniczonego przez $y = e^{2x}, y = e^{-x}$ oraz $y = 2$.



$$|D| = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy.$$

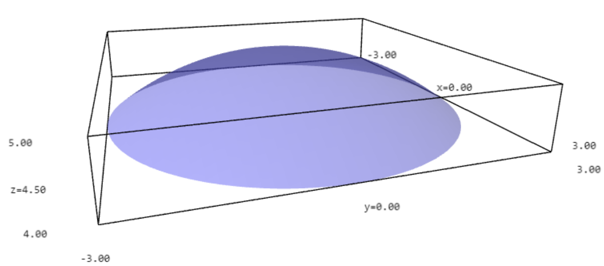
Dalej

$$\int\limits_{-\ln(2)}^{0} dx \int\limits_{e^{-x}}^{2} dy + \int\limits_{0}^{\ln(2)/2} dx \int\limits_{e^{2x}}^{2} dy = \int\limits_{-\ln(2)}^{0} (2 - e^{-x})dx + \int\limits_{0}^{\ln(2)/2} (2 - e^{2x})dx =$$

$$= 2\ln 2 - 1 + \ln 2 - 1/2 = 3\ln 2 - 3/2.$$

Objętość bryły

PRZYKŁAD. Objętość obszaru przestrzennego B ograniczonego przez powierzchnię $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ oraz płaszczyznę $z = 4$.



$$\iint\limits_B (\sqrt{25 - x^2 - y^2} - 1)dxdy$$

Dla współrzędnych biegunowych na wysokości z=4 mamy dla kąta $\phi \in [0, 2\pi]$

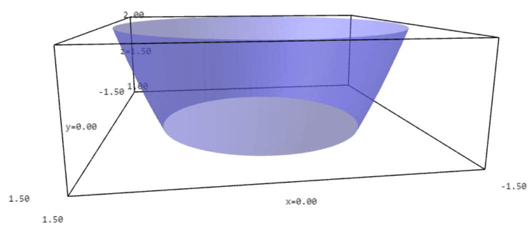
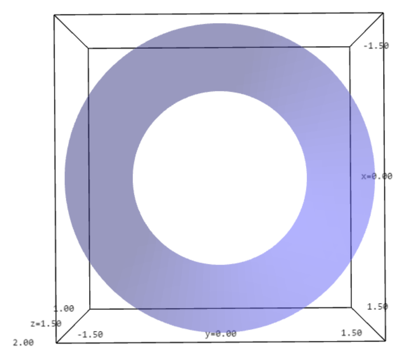
$$0 < r \leq 3.$$

Wtedy

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^3 (\sqrt{25 - r^2} - 3)rdr = \int\limits_0^{2\pi} \frac{7}{3} d\phi = \frac{14}{3}\pi.$$

Pole płata

Dla paraboloidy $z = x^2 + y^2$ ograniczonej dwoma płaszczyznami równoległymi $z = 1$ oraz $z = 2$

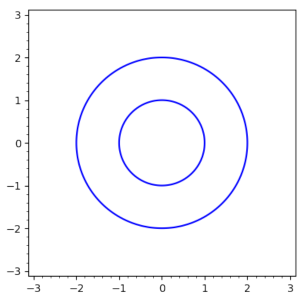



Pole powierzchni względem dziedziny D jako obszaru płaskiego - pierścienia

$$\iint\limits_D (\sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} dxdy$$

Masa obszaru

Przykład. Dla obszaru pierścienia oraz gęstości $\rho(x, y) = |x|$



$$m(D) = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_1^2 r\cos(\phi)\cdot r dr = \frac{7}{3}\int_0^{\pi/2}\cos(\phi)d\phi = \frac{7}{3}$$

Momenty statyczne

Przykład. Środek geometryczny trójkąta prostokątnego o podstawie a oraz wysokości h. Współrzędne środka geometrycznego (x_c, y_c) obliczymy poniżej, gdzie $P = \frac{1}{2}ah$.

$$P\cdot x_c = \iint_T x dx dy = \int_0^h dx \int_0^{-\frac{h}{a}x+h} x dy = \int_0^a dx\left(h - \frac{hx}{a}\right)x = \frac{1}{6}a^2h$$

oraz

$$P\cdot y_c = \iint_T y dx dy = \int_0^a dx \int_0^{-\frac{h}{a}x+h} y dy = \int_0^a dx\frac{a^2h^2 - 2\,ah^2x + h^2x^2}{2\,a^2} = \frac{1}{6}ah^2$$

Wynik oznacza położenie środka geometrycznego w miejscu

$$(x_c, y_c) = \left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}h\right).$$

Przykład. Środek geometryczny trójkąta równoramiennego o podstawie $2a$ oraz wysokości h Podobne obliczenia podają

$$(x_c, y_c) = \left(0, \frac{2}{3}h\right).$$

Dla współrzędnej pionowej

$$P\cdot y_c = \iint_T y dx dy = \iint_{T_1} y dx dy + \iint_{T_2} y dx dy,$$

gdzie cięcie następuje wzdłuż osi Oy mamy całki

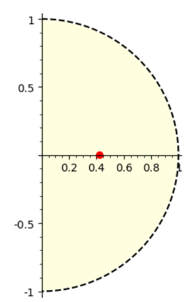
$$P \cdot y_c = \int\limits_{-a}^{0} dx \int\limits_{0}^{\frac{h}{a}x+h} ydy + \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{-\frac{h}{a}x+h} ydy = \frac{1}{3}ah^2.$$

Przykład. Środek geometryczny połowy koła. Całka po obszarze połowy koła A : $x^2 + y^2 \leq 1$ dla $x \geq 0$

$$\iint_A xdxdy$$

Obliczenia:

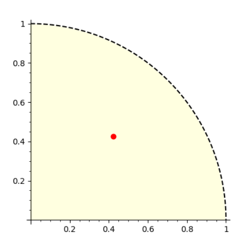
$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\cos(\varphi)\ rdrd\varphi + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \int_0^1 r\cos(\varphi)\ rdrd\varphi = \frac{2}{3}$$



Środek geometryczny połowy koła $x_0 = \frac{4}{3\pi}$ oraz $y_0 = 0$

Przykład. Środek geometryczny kwarty koła. Całka po obszarze połowy koła A : $x^2 + y^2 \leq 1$ dla $x \geq 0$ oraz $y \geq 0$, czyli trzeba obliczyć dwie całki $C_x = \iint_A xdxdy$ oraz $C_y = \iint_A ydxdy$.

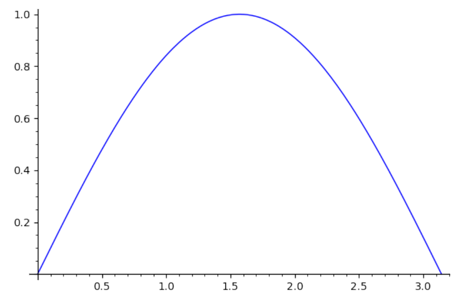
$C_x = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\cos(\varphi)\ rdrd\varphi = \frac{1}{3}$ oraz $C_y = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r\sin(\varphi)\ rdrd\varphi = \frac{1}{3}$



Środek geometryczny kwarty koła $x_0 = \frac{4}{3\pi}$ oraz $y_0 = \frac{4}{3\pi}$

Momenty bezwładności

PRZYKŁAD. Dla obszaru na rysunku



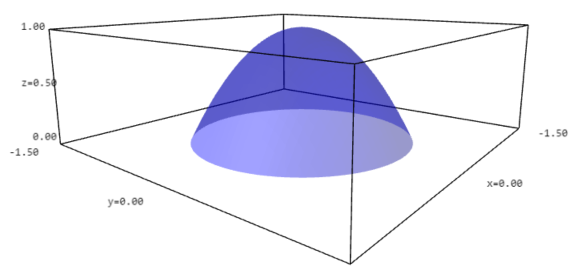
Moment bezwładności względem osi Ox

$$I_x = \frac{m}{2}\iint\limits_D y^2 dxdy = \frac{m}{2}\int\limits_0^\pi dx \int\limits_0^{\sin x} y^2 dy = \frac{m}{2}\int\limits_0^\pi dx \left(\frac{1}{3}\sin^3 x\right) = \frac{2}{9}m$$

2.3.2 Całka potrójna

Objętość obszaru regularnego

PRZYKŁAD. Dla obszaru przestrzennego wyznaczonego przez płaszczyznę Oxy i paraboloidę $z = 1 - x^2 - y^2$



$$|V| = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_V rdrd\phi dz,$$

gdzie obszar przestrzenny V we współrzenych cylindrycznych:

$$\begin{cases} 0 \le z \le 1 - r^2 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \end{cases}$$

Wtedy z twierdzenia dla obszarów normalnych

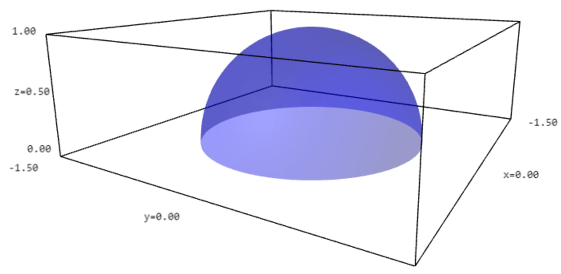
$$|V| = \iiint\limits_V r dr d\phi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{1-r^2} r dz$$

Obliczenia

$$\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^1 r(1-r^2) dr = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Masa obszaru przestrzennego

Przykład. Masa obszaru przestrzennego wyznaczonego przez płaszczyznę Oxy i półkulę ograniczoną przez $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ względem gęstości $\rho(x, y, z) = z$.



$$m(V) = \iiint\limits_V z dx dy dz = \iiint\limits_V (r\cos\theta) \cdot r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta = \iiint\limits_V r^3 \sin\theta \cos\theta dr d\phi d\theta,$$

gdzie bryła

$$\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Obliczenia

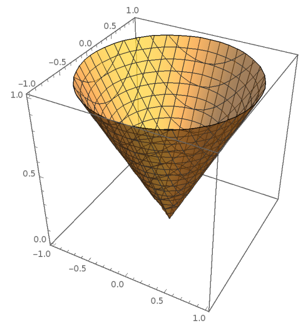
$$\iiint\limits_V r^3 \sin\theta \cos\theta dr d\phi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^1 r^3 \sin\theta \cos\theta dr = \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{4} \sin\theta \cos\theta =$$

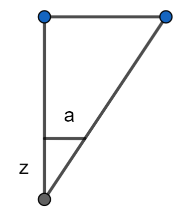
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Momenty statyczne

Przykład. Środek geometryczny stożka o wysokości h

Całka $\vec{r}_0 = \frac{1}{V} \iiint\limits_V \vec{r} dV = [0, 0, \frac{3}{4}h]$, gdzie $\vec{r} = [x, y, z]$.

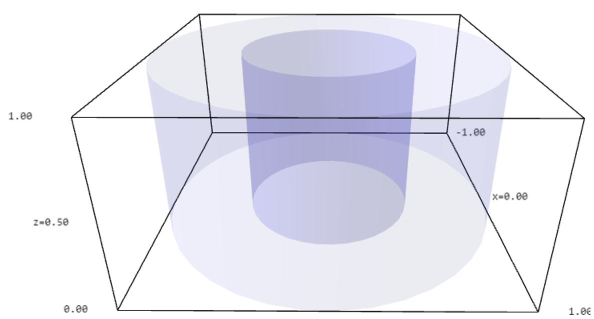




Środek geometryczny dla stożka na rysunku wynosi $z_0 = \frac{3}{4}h$ oraz $x_0 = y_0 = 0$

Momenty bezwładności

Przykład. Wydrążony cylinder o promieniu wewnętrznym a oraz zewnętrznym b oraz wysokości 1



Moment bezwładności wzdłuż osi I_z to

$$I_z = \frac{M}{\pi(b^2 - a^2)} \iiint\limits_B (x^2 + y^2) dxdydz = \frac{M}{\pi(b^2 - a^2)} \iiint\limits_B r^2 \cdot rdrd\phi dz,$$

gdzie

$$\begin{cases} a \le r \le b \\ 0 \le \phi \le 2\pi \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$$

Obliczenia

$$\frac{M}{\pi(b^2-a^2)}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_a^b dr \int\limits_0^1 r^3 dz = \frac{M}{\pi(b^2-a^2)}\int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_a^b r^3 dr =$$

$$= p(\frac{1}{4}\,b^4 - \frac{1}{4}\,a^4)\frac{M}{\pi(b^2-a^2)}\int\limits_0^{2\pi} d\phi = \frac{\pi}{2}M(a^2+b^2).$$

Rozdział 3

Rachunek prawdopodobieństwa

3.1 Elementy kombinatoryki

3.1.1 Zliczanie zbiorów skończonych

DEFINICJA. Zbiór A jest skończony, jeżeli jest pusty lub ma n elementów dla pewnej liczby naturalnej. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy zbiorem nieskończonym.

Stwierdzimy, już bez dowodu, że dla zbioru skończonego liczba jego elementów jest określona jednoznacznie. Zapiszemy dla zbioru skończonego A liczbę jego elementów jako $|A|$.

TWIERDZENIE **3.1.1** (Zasada dodawania). *Dla dwóch zbiorów A_1, A_2 skończonych i rozłącznych $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ zachodzi wzór:*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| \,.$$

Wniosek 3.1.1. *Dla pewnej liczby zbiorów $A_1, A_2 \ldots, A_n$, które są skończone i parami rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, zachodzi wzór:*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| \,.$$

Dowód. Wynika z: zasady indukcji oraz zasady dodawania. □

TWIERDZENIE **3.1.2** (Zasada włączeń i wyłączeń). *Dla skończonych zbiorów A_1, A_2 zachodzi wzór:*

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Dowód. Wynika z możliwości przedstawienia sumy zbiorów w postaci odpowiedniej sumy zbiorów rozłącznych np. na diagramie Venna. □

Wniosek 3.1.2. *Dla trzech zbiorów A_1, A_2, A_3 zachodzi wzór:*

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Dowód. Dla implikacji $n = 2$ do $n = 3$ zapisujemy

$$|(A \cup B) \cup C| = |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C|.$$

Wtedy prawa strona $|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$. Dalej $|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|)$. Po uproszczeniu $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. □

PRZYKŁAD. Policzymy ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1000, które nie dzielą się przez: 3, 7 lub 13.

Oznaczymy A_3 zbiór liczb, które nie dzielą się przez 3 i są mniejsze niż 1000. Wtedy liczność $|A_3|$=999 $-$ $\lfloor 1000/3 \rfloor$ = 666. Odpowiednio: $|A_7|$=857, $|A_{13}|$=923, $|A_{21}|$=952, $|A_{39}|$=974 , $|A_{91}|$=989 oraz $|A_{273}|$= 996. Wtedy z zasady włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów:

$$|A_3| + |A_7| + |A_{13}| - |A_3 \cap A_7| - |A_3 \cap A_{13}| - |A_7 \cap A_{13}| + |A_3 \cap A_7 \cap A_{13}|\,,$$

czyli takich liczb jest

$$|A_3 \cup A_7 \cup A_{13}| = 527.$$

TWIERDZENIE **3.1.3.** *Dla pewnej liczby zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, które są skończone zachodzi wzór dla $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right|$, która jest równa:*

$$\sum_{i-1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.$$

Dowód. Wynika z poprawności metody zliczania elementów, dowód zostanie podany w następnym paragrafie przy użyciu współczynnika dwumianowego. □

Iloczyn kartezjański zbiorów. Określenie par, trójek uporządkowanych:

- $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $(a, b) \neq (b, a)$ (wniosek)
- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$
- $(a, b, c) := ((a, b), c)$

Definicja. Dla dowolnych zbiorów A, B określimy ich iloczyn kartezjański jako zbiór par uporządkowanych, czyli:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Twierdzenie **3.1.4** (Zasada mnożenia)**.** *Dla skończonych zbiorów A i B zachodzi wzór:*

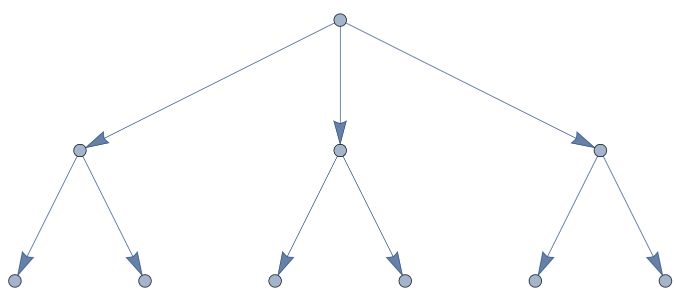
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Dowód. Liczba wszystkich par uporządkowanych może być wyznaczona na diagramie prostokątnym jako odpowiedni iloczyn. □

Uwaga **3.1.1.** Wszystkie pary (a, b), że $a \in A$ oraz $b \in B$ można je przedstawić graficznie jako drzewo, które ma $m \cdot n$ liści dla $m = |A|$ oraz $n = |B|$. PAry można też przedstawić na diagramie (wykresie) prostokątnym.

Przykład. Dla zbiorów $A = \{a_1, a_2\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ narysujemy drzewo i zliczymy wszystkie pary.

Przykład. Dla zbioru $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ rozważymy losowanie bez zwracania (schemat) i narysujemy drzewo. Zliczymy wszystkie pary. Specyfikacja zbioru B jest tutaj nieznana.



3.1.2 Ciągi n-wyrazowe

Definicja. Ciągiem n-wyrazowym nazywamy wszystkie funkcje określone na zbiorze skończonym $\{1, 2, \ldots, n\}$ postaci:

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to A,$$

gdzie wyrazy ciągu są utworzone z elementów zbioru A. Można taki ciąg zapisać jako element iloczynu $A \times A \times \ldots A$ czyli:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

TWIERDZENIE **3.1.5** (uogólnione o mnożeniu). *Liczba elementów iloczynu kartezjańskiego*

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k,$$

gdzie $|A_i| = n_i$ *dla każdego* $1 \leq i \leq k$.

UWAGA **3.1.2.** Podana w twierdzeniu liczba to ocena liczności różnych k-wyrazowych ciągów $(x_1, x_2, ..., x_k)$ takich, że wyraz x_i możemy wybrać odpowiednio na n_i sposobów dla $i = 1, 2, ..., k$.

PRZYKŁAD. Dla zbiorów $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ oraz $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ narysujemy drzewo i zliczymy wszystkie uporządkowane trójki (x_1, x_2, x_3), gdzie wybory są dokonywane w sposób: $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ oraz $x_3 \in C$.

DEFINICJA. Wariacją k-wyrazową z powtórzeniami ze zbioru A nazywamy każdą funkcję postaci:

$$f : \{1, 2, ..., k\} \to A.$$

TWIERDZENIE **3.1.6.** *Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru A, który ma $n = |A|$ elementów, jest równa*

$$A(n, k) = n^k.$$

Dowód. Wynika z twierdzenia o mnożeniu 3.1.5, gdzie wybór elementu jest z tego samego zbioru A, czyli dla $A(n, k)$ otrzymamy iloczyn k wyrazów:

$$n \cdot n \ldots \cdot n = n^k.$$

□

PRZYKŁAD. Rzut trzema monetami na raz ma 2^3 możliwych wyników. Identyfikujemy $A = \{O, R\}$.

PRZYKŁAD. Dwukrotne losowanie po sobie ze zwracaniem pierwszej karty dla talii 52 kart daje 52^2 możliwych wyników. Identyfikujemy $|A| = 52$.

DEFINICJA. Wariacją k-wyrazową bez powtórzeń ze zbioru A złożonego z n elementów, tak że $k \leq n$, nazywamy każdą funkcję różnowartościową postaci:

$$f : \{1, 2, ..., k\} \to A.$$

TWIERDZENIE **3.1.7.** *Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru A, który ma $n = |A|$ elementów, jest równa*

$$V(n, k) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1).$$

Dowód. Wynika z twierdzenia o mnożeniu 3.1.5 dla zbioru $|A_i| = n - i + 1$, gdzie przed losowaniem o numerze i usunięto ze zbioru $i - 1$ elementów. □

Przykład. Trzy różne bilety rozlosowane między 100 osób daje $100 \cdot 99 \cdot 98$ możliwości. Identyfikujemy $|A| = 100$.

Przykład. Dane jest pięć różnych połączeń dwóch ponumerowanych obiektów: 1 oraz 2. Możliwość połączenia 1-2-1 bez wracania tą samą ścieżką wynosi $5 \cdot 4$. Identyfikujemy $|A| = 5$ oraz dwie ponumerowane drogi $\{1 - 2, 2 - 1\}$.

Definicja (Symbol silnia). Dla ustalonej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ określimy jej silnię jako iloczyn $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

Uwaga **3.1.3.** Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń ze zbioru A, który ma $n = |A|$ elementów, jest równa

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Dowód. Ponieważ $V(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. □

Definicja. Dla zbioru A, który ma n elementów, jego k-elementową kombinacją, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór zbioru A.

Przykład. Dla zbioru $\{a, b, c\}$ możemy utworzyć 2-elementowe kombinacje postaci: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ oraz $\{b, c\}$.

Twierdzenie **3.1.8** (O liczbie kombinacji). *Dla zbioru skończonego, który ma n elementów, można utworzyć $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ podzbiorów k-elementowych.*

Dowód. Ponieważ $C(n,k) = V(n,k)/k! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, gdzie przestajemy rozróżniać $k!$ różnych ciągów. □

3.1.3 Zliczanie funkcji

Niech X, Y będą zbiorami niepustymi.

Definicja (Odwzorowanie). Przekształceniem zbiorów z X do Y nazywamy podzbiór $f \subseteq X \times Y$, taki że dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$, że $(x, y) \in f$.

Dla przekształcenia, inaczej nazywanego odwzorowaniem, zachodzi

$$(x,y) \in f \wedge (x,y') \in f \Rightarrow y = y'.$$

TWIERDZENIE **3.1.9** (O liczbie funkcji). *Dla zbiorów skończonych X, Y liczba wszystkich możliwych odwzorowań wynosi $|\mathcal{F}(X,Y)| = |Y|^{|X|}$.*

Dowód. Elementowi x_1 zbioru X można przyporządkować $|Y|$ różnych elementów zbioru Y. Dla następnego elementu $x_2 \in X$ znowu $|Y|$ różnych elementów itd. Wszystkich możliwości zatem jest $|Y| \cdot |Y| \cdot ... \cdot |Y|$ względem $|X|$ razy. □

Niech $f : X \to Y$ będzie ogólnie przekształceniem między zbiorami.

DEFINICJA (Obraz zbioru). Jeśli $A \subseteq X$, to obrazem podzbioru A pod działaniem f jest podzbiór $f(A) \subseteq Y$ określony w sposób:

$$f(A) := \{f(a) : a \in A\}.$$

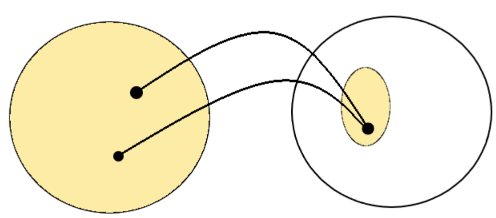
DEFINICJA (Przeciwobraz zbioru). Dla danego podzbioru $B \subseteq Y$ obrazem odwrotnym $f^{-1}(B)$ tego zbioru pod działaniem f jest zbiór w dziedzinie

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

TWIERDZENIE **3.1.10** (Zasada szufladkowa). *Dla zbiorów skończonych $|X| > |Y|$ oraz dowolnego odwzorowania $f : X \to Y$ istnieje taki element $y \in Y$, że liczność jego przeciwobrazu spełnia nierówność:*

$$|f^{-1}(y)| \geq 2.$$

Dowód. Na rysunku przedstawiamy proste wyjaśnienie zasady porządkowania przedmiotów do szuflady.



□

DEFINICJA (Injekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : X \to Y$. Przekształcenie f jest różnowartościowe, jeżeli dla wszystkich elementów dziedziny $\forall\ x_1, x_2 \in A$ zachodzi implikacja:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

TWIERDZENIE **3.1.11** (O liczbie injekcji). *Dla zbiorów skończonych X, Y liczba wszystkich możliwych odwzorowań różnowartościowych wynosi*

$$|Inj(X,Y)| = |Y| \cdot (|Y|-1) \cdot ... \cdot (|Y|-|X|+1) = \frac{|Y|!}{(|Y|-|X|)!}.$$

Dowód. Elementowi x_1 zbioru X można przyporządkować $|Y|$ różnych elementów. Dla elementu x_2 już $|Y|-1$ różnych elementów, bo jest to przekształcenie różnowartościowe. Wszystkich możliwości zatem jest $|Y| \cdot (|Y|-1) \cdot ... \cdot (|Y|-|X|+1)$ dla $|X|$ razy. □

DEFINICJA (Surjekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : X \to Y$. Przekształcenie f jest na zbiór, jeżeli

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x).$$

TWIERDZENIE **3.1.12** (O liczbie surjekcji). *Dla zbiorów skończonych X, Y liczba wszystkich możliwych odwzorowań na zbiór wynosi*

$$|Sur(X,Y)| = n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \ldots + -1^n \binom{n}{n}(n-n)^k,$$

gdzie $k = |X|$ oraz $n = |Y|$.

DEFINICJA (Bijekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : X \to Y$. Przekształcenie jest wzajemnie jednoznaczne, jeżeli jest jednocześnie różnowartościowe (injektywne) oraz na zbiór (surjektywne).

TWIERDZENIE **3.1.13** (O liczbie bijekcji). *Pomiędzy skończonymi zbiorami X i Y można określić liczbę bijekcji równą*

$$|Bij(X,Y)| = |X|!$$

gdzie $|X| = |Y|$.

PRZYKŁAD. Pięciu chłopaków i pięć dziewczyn może parami wykonać jeden taniec na 5! sposobów.

3.1.4 Zliczanie podzbiorów. Współczynniki dwumianowe

Rodzinę wszystkich podzbiorów o k-elementach oznaczamy przez $\mathcal{P}_k(X)$. Liczbę k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego oznaczamy współczynnikiem dwumianowym

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(\mathbb{N}_n)|.$$

Przykład. Policzymy $\binom{4}{2}$ przez wypisanie wszystkich 2-elementowych podzbiorów 4-elementowego zbioru $\mathbb{N}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Są to

$$\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\},$$

skąd $\binom{4}{2} = 6$.

Twierdzenie **3.1.14.** *Dla $n, k \in \mathbb{N}$ zachodzą równości:*

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1,$
- $\binom{n}{k} = 0,$ *dla* $k > n,$
- $\binom{n}{1} = n,$ *dla* $n > 0,$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$ *dla* $n \geqslant k \geqslant 0.$

Twierdzenie **3.1.15** (Rekurencyjna procedura obliczania współczynników dwumianowych)**.** *Dla* $0 < k \leqslant n$ *mamy równość:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Definicja. Kombinacją k-elementową zbioru Y złożonego z n, gdzie $0 \leq k \leq n$, nazywamy każdy podzbiór k elementów zbioru Y.

Twierdzenie **3.1.16.** *Liczba k-elementowych kombinacji zbioru Y złożonego z n elementów, jest równa*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dowód. Ustalmy pewien n-elementowy zbiór X, i wybierajmy po kolei k różnych jego elementów, tzn. utwórzmy injekcję $\mathbb{N}_k X$. Wiemy, ze takich injekcji jest $\frac{n!}{(n-k)!}$. W wyniku takiego wyboru, dostajemy wszakże pewien uporządkowany ciąg k elementów zbioru X. Wiele takich ciągów wyznacza ten sam k-elementowy podzbiór zbioru X. Ciągi takie różnią sie jedynie kolejnością elementów, a zatem jest ich tyle ile permutacji zbioru k-elemetowego, czyli k!. Zatem jest dokładnie

$$\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego. □

PRZYKŁAD. Liczba wszystkich połączeń między dwoma obiektami bez skierowania pośród 10 obiektów wynosi $\binom{10}{2}$.

PRZYKŁAD. Liczba wszystkich lini poprowadzonych pomiędzy siedmioma punktami, tak żeby trzy punkty nie leżały na jednej linii, wynosi $\binom{7}{2}$.

PRZYKŁAD. Rozdanie czterech biletów pomiędzy pięcioma osobami możliwe na $\binom{5}{4}$ sposobów.

PRZYKŁAD. Rozdanie remika dla 13 kart z talii 52 kart daje $\binom{52}{13}$ sposobów.

TWIERDZENIE **3.1.17.** *Liczba wszystkich podzbiorów $\mathcal{P}(n)$ zbioru zawierającego n elementów jest równa*

$$|\mathcal{P}(n)| = 2^n.$$

DEFINICJA (Symbol Newtona)**.** Określimy dla $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

TWIERDZENIE **3.1.18.** *Współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ jest liczbą naturalną.*

Dowód. Można zauważyć:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Wtedy czynnik $n(n-1)$ dzieli się przez dwa, $\frac{(n(n-1)}{2}(n-2)$ dzieli się przez 3, itd. □

TWIERDZENIE **3.1.19** (O liczbie podzbiorów)**.** *Symbol Newtona określa liczbę wszystkich k-elementowych podzbiorów dla zbioru n-elementowego, czyli:*

Dowód. Dla k-elementowych podzbiorów, w przeciwieństwie do ciągów, nie ma ustalonej kolejności elementów. Liczba różnych ciągów utworzonych z jednej kombinacji wynosi $k!$. Stąd dla zapisu $C(n,k) = \binom{n}{k}$ otrzymamy

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!}.$$

□

Zauważymy, że:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Zbiór potegowy, lub inaczej zbiór podzbiorów, zbioru X oznaczamy przez $\mathcal{P}(X)$.

Twierdzenie **3.1.20.** *Dla dowolnego, skończonego zbioru X liczba elementów jego zbioru potęgowego $\mathcal{P}(X)$ wynosi*

$$|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}.$$

Zasada włączeń i wyłączeń. Używając współczynników dwumianowych udowodnimy że procedura zliczenia jest poprawna.

Dowód. Dla pewnego elementu a rozważymy należenie dokładnie do m spośród zbiorów $A_1, A_2 \ldots A_n$. Zauważymy, że w sumie mnogościowej $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ element a ma być liczony tylko jeden raz.

Opis zliczenia dla elementu a, który:

- występuje w m zbiorach $A_1, A_2 \ldots A_n$,
- występuje w $\binom{m}{2}$ zbiorach postaci $A_i \cap A_j$ dla $1 \leq i < j <\leq n$,
- występuje w $\binom{m}{3}$ zbiorach postaci $A_i \cap A_j \cap A_k$ dla $1 \leq i < j < k <\leq n$,
- i tak dalej.

Liczba zliczeń pojedynczego elementu a jest zatem równa:

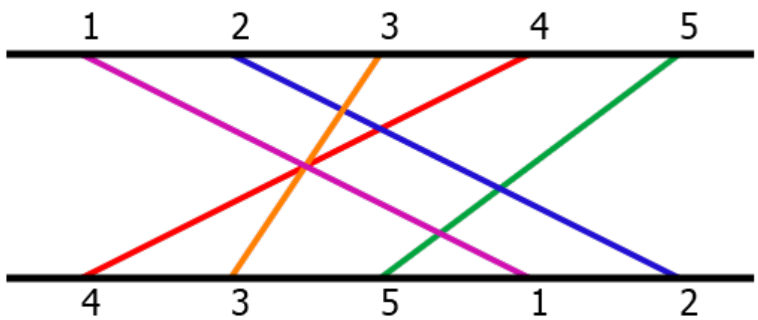
$$\begin{aligned} m - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m-1} + (-1)^{m+1} 1 = \\ = 1 - \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + (-1)^m \binom{m}{m-1} + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} = \\ = 1 - (1-1)^m = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

□

3.1.5 Permutacje i podziały

DEFINICJA. Dla zbioru $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ permutacją n-elementową nazywamy każdy ciąg n-wyrazowy utworzony z wszystkich elementów zbioru A.

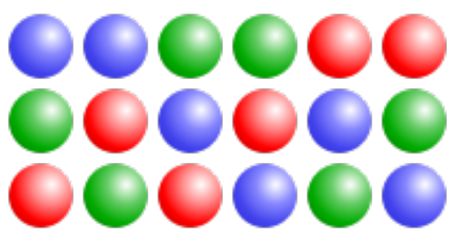
UWAGA **3.1.4.** Mając daną permutację jako ciąg 5-wyrazowy możemy utworzyć inny ciąg 5-wyrazowy przez przestawienia (łac. permutatio = zmiana, przestawienie).



TWIERDZENIE **3.1.21** (O liczbie permutacji)**.** *W ciągu n-elementowym można przestawić elementy na $n!$ różnych sposobów.*

Dowód. Wynika z zasady indukcji matematycznej dla liczby n oraz tożsamości $(n+1)! = (n+1)n!$. □

PRZYKŁAD. Dla ciągu 3-elementowego możemy utworzyć 6 różnych ciągów 3-wyrazowych, czyli $3 \cdot 2 \cdot 1$. Oczywiście trudno uznać, że przestawienie prowadzi do tego samego ciągu.



DEFINICJA. Dla zbioru k-elementów $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ permutacją n-elementową z powtórzeniami, w której elementy $a_1, a_2, ..., a_k$ powtarzają się odpowiednio $n_1, n_2, ..., n_k$ razy, tak by $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ nazywamy każdy ciąg n-wyrazowy, w której elementy a_i dla $i = 1, .., k$ powtarzają się podaną liczbę razy.

TWIERDZENIE **3.1.22.** *Liczba wszystkich permutacji z powtórzeniami wynosi*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}.$$

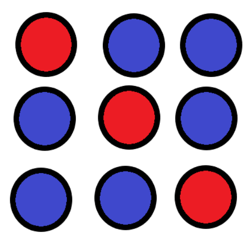
Dowód. Jest to wynik mnożenia wyborów dla podzbiorów spośród podanych powtórzeń w postaci

$$\binom{n}{n_1}\cdot\binom{n-n_1}{n_2}\cdot\ldots\cdot\binom{n-(n_1+n_2+\ldots+n_k)}{n_k}.$$

□

PRZYKŁAD. Dla zbioru $A = \{a, a, b, b, k\}$ można utworzyć $\frac{5!}{2!2!1!}$ różnych napisów 5-wyrazowych.

PRZYKŁAD. Dla zbioru kolorowych kul $A = \{Czerwona, Niebieska\}$ można utworzyć $\frac{3!}{2!1!}$ tylko trzy różne permutacje z powtórzeniami dla $k = 3$ oraz powtórzeń typu $(1, 2)$. Gdyby utworzyć ciągi czteroelementowe, to takich permutacji z powtórzeniami (1,3) jest 4 różne.



Sytuację można opisać tzw. multizbiorem A, dla którego można rozważać np. postać $A = \{C, N, N\}$, czyli nierozróżnialne elementy, które się powtarzają w ramach kolekcji. Powstaje w ten sposób pojemnik skąd brać kule do ustawień.

Podziały Zagadnienie, które można przedstawić tak: na ile sposobów można podzielić n-elementowy zbiór na k części, które zawierają odpowiednio $r_1, r_2, \ldots, r_k$ elementów, gdzie

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n.$$

PRZYKŁAD. Dla podziału $k = 2$ wybieramy r_1 elementów do pierwszej części na $\binom{n}{r_1}$ sposobów oraz $\binom{n-r_1}{r_2}$ sposobów do części drugiej. Stąd podzielenie zbioru na dwie części ma możliwości:

$$\binom{n}{r_1}\cdot\binom{n-r_1}{r_2}$$

3.2 Pojęcie i właściwości prawdopodobieństwa

3.2.1 Przestrzeń zdarzeń

Zdarzenie losowe wymaga podania modelu, schematu lub doświadczenia, czyli tzw. przestrzeni probabilistycznej. Oznaczony przez Ω zbiór nazywany przestrzenią zdarzeń elementarnych. Element $\omega \in \Omega$ to losowe zdarzenie elementarne. Dalej idąc trzeba podkreślić, że nie każdy podzbiór $A \subset \Omega$ uważamy za zdarzenie losowe. Wyróżnimy pewną rodzinę $\mathcal{S}$ podzbiorów przestrzeni Ω i zdarzeniami będziemy nazywać tylko elementy tej rodziny.

Przykład. Niepodzielne wyniki doświadczeń - elementy ω, które polegają na losowaniu karty spośród zbioru ponumerowych elementów, można opisać jako zbiór:

$$\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_{52}\},$$

gdzie ω_k oznacza wylosowanie karty o numerze k.

Przykład. Gdyby losować dwie karty jednocześnie ze zbioru 52 ponumerowanych elementów, to mielibyśmy $\binom{52}{2}$ możliwych zdarzeń elementarnych postaci:

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2\}, ..., \{\omega_1, \omega_{52}\}, ..., \{\omega_{51}, \omega_{52}\}\}.$$

Definicja (σ-algebra). Zdarzeniami nazywamy podzbiory przestrzeni Ω, które tworzą rodzinę $\mathcal{S}$ taką, że

- zbiór pusty $\emptyset \in \mathcal{S}$, gdzie $\emptyset$ to tzw. zdarzenie niemożliwe;
- jeżeli $A \subset \mathcal{S}$, to $A' \subset \mathcal{S}$, gdzie zdarzenie przeciwne $A' := \Omega \setminus A$;
- jeżeli dla dowolnego ciągu $A_i \subset \mathcal{S}$, to

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \ldots \subset \mathcal{S},$$

Rodzinę zbiorów $\mathcal{S}$ nazywamy σ-algebrą.

Uwaga **3.2.1.** Zauważymy, że $\Omega \subset \mathcal{S}$ ponieważ $\emptyset \subset \mathcal{S}$. Zdarzenie Ω nazwiemy zdarzeniem pewnym. Suma występująca w ostatnim punkcie może być skończona lub nieskończona czyli przeliczalna $\bigcup\limits_i A_i$. Znaczenie tej definicji polega na tym, że operacje na zdarzeniach elementarnych winny jako wynik zapewniać też zdarzenie.

Przykład. Maszyna działa, jeżeli spełnione są dwa warunki:

- działają dwa moduły spośród trzech dostępnych: A_1, A_2 oraz A_3,
- działa jeden moduł spośród dwóch dostępnych: B_1, B_2.

Zdarzenie D, że maszyna działa można zapisać:

$$D = (A_1 \cap A_2 \cup A_1 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3) \cap (B_1 \cup B_2).$$

Zdarzenie D', że maszyna nie działa można otrzymać wg praw de Morgana:

$$\begin{aligned} D' = (A_1 \cap A_2 \cup A_1 \cap A_3 \cup A_2 \cap A_3)' \cup (B_1 \cup B_2)' = \\ = (A_1' \cup A_2' \cap A_1' \cup A_3' \cap A_2' \cup A_3') \cup (B_1' \cap B_2'). \end{aligned}$$

Zdarzenie $\Omega = D \cup D'$ jest zdarzeniem pewnym.

Przykład. Dane są dwa zdarzenia losowe: A - deszcz dzisiaj, B - deszcz jutro. Możemy podać przykładowe zdarzenia: $A' \cap B'$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap B'$ oraz $A \setminus B \cup B \setminus A$.

Twierdzenie **3.2.1.** *Dla dowolnego ciągu $A_i \subset \mathcal{S}$ zbiór $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \ldots$ też jest zdarzeniem.*

Dowód. Wynika z praw de Morgana oraz własności σ-algebry. Część wspólna może dotyczyć przeliczalnej liczby zbiorów czyli $\bigcap\limits_i A_i$. □

Przykład. Opiszemy A_n jako zdarzenie: potrzeba n rzutów kostką do otrzymania szóstki. Zdarzenie elementarne to na przykład każdy ciąg n-elementowy utworzony ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dla pierwszych $n-1$ miejsc, gdzie na miejscu n jest zawsze 6. Również ciąg nieskończony może być zdarzeniem elementarnym. Wtedy zdarzenie: przekrój przliczalnej liczby zdarzeń $\bigcap\limits_n^\infty A_n$ oznacza, że szóstka nigdy nie wypadnie.

3.2.2 Aksjomaty prawdopodobieństwa

Definicja. Niech Ω to przestrzeń zdarzeń. Funkcja $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ nazywana jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\mathcal{S}$, jeśli spełnia trzy warunki (tzw. aksjomaty prawdopodobieństwa):

A1. $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$,

A2. $P(\Omega) = 1$,

A3. jeżeli $A_i \in \mathcal{S}$ dla $i = 1, 2, ...$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to dla przeliczalnej sumy ciągu zdarzeń zachodzi:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Uwaga **3.2.2.** Prawdopodobieństwo to wartość funkcji $p = p(A)$ dla zdarzenia A. Dwa zbiory $A, B \subset \mathcal{S}$, dla których zachodzi warunek $A \cap B = \emptyset$ nazywamy zdarzeniami wykluczającymi się. Założenie $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oznacza zbiory parami wykluczające się spośród ciągu A_n zbiorów. Dla iloczynów zdarzeń podobna własność do A3 ogólnie nie zachodzi, czyli:

$$P\left(A_1 \cap \ldots A_n\right) \neq P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Twierdzenie **3.2.2.** *(własności prawdopodobieństwa). Dla przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ zachodzą własności:*

W1. $P(\emptyset) = 0,$

W2. dla $A_i \cap A_j = \emptyset$, *gdzie* $i \neq j$ *oraz* $i, j \leq n$

$$P(A_1 \cup \ldots A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

W3. $P(A') = 1 - P(A),$

W4. $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A),$

W5. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B),$

W6. $P(A) \leq 1,$

W7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Uwaga **3.2.3.** Własność 7 dla prawdopodobieństwa może być uogólniona na dowolną liczbę zdarzeń dzięki zasadzie włączeń i wyłączeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j}^{n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n).$$

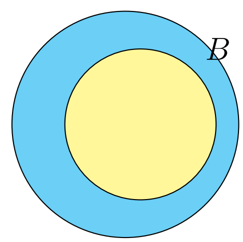
Dowód. W zależności od: aksjomatów prawdopodobieństwa oraz własności dowodzimy:

(WP1) $P(\emptyset) = 0$ wynika z warunku $P(\Omega) = 1$ bo dla $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum P(A_i)$, gdzie $A_i = \emptyset$, to dla P jako funkcji nieujemnej wynika teza;

(WP2) skończona addytywność zdarzeń wykluczających się wzajemnie dotyczy kolekcji $A_i = \emptyset$ dla $i \geq n$;

(WP3) $P(A') = 1 - P(A)$ bo $P(\Omega) = 1 = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$ i składniki sumy $\cup$ są rozłączne;

(WP4) $A \subset B \Rightarrow P(B \backslash A) = P(B) - P(A)$ bo $B = A \cup (B \setminus A)$ i składniki sumy są rozłączne, czyli $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$,

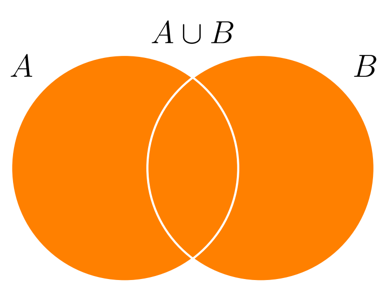


(WP5) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ bo z poprzedniego punktu $P(B) - P(A) = P(B \backslash A) \geq 0$;

(WP6) $P(A) \leq 1$ bo z poprzedniego punktu dla $B = \Omega$;

(WP7) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ bo dla rozłącznych trzech składników można utworzyć suma jako:

$$A \cup B = [A \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)].$$



□

Przykład. Dla podanych prawdopodobieństw rachunek pozostałych szans możemy obliczać w następujący sposób: dla podanych liczb

- $p(A) = 60\%$ szansa na zdarzenie A - deszcz dzisiaj
- $p(B) = 50\%$ szansa na B - deszcz jutro
- $p(A' \cap B') = 30\%$

możemy obliczyć następujące szanse:

- $p(A \cup B) = 70\%$ bo $P(A \cup B) + P((A \cup B)') = 1$
- $p(A \cap B) = 40\%$ bo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $p(A \cap B') = 20\%$ bo $P(A \cup B') + P(A \cap B) = P(A)$
- $p(A \setminus B \cup B \setminus A) = 30\%$ bo $P(A \cap B') + P(B \setminus A) = 20\% + P(B) - P(B \cap A)$

3.2.3 Przykłady przestrzeni probabilistycznych

Zbiór przeliczalny lub skończony

Niech zbiór zdarzeń $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym. Dla pojedynczych elementów funkcję prawdopodobieństwa określimy jako

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,$$

gdzie układ liczb $p_i \geq 0$ oraz $\sum_i^{\infty} p_i = 1$. Z aksjomatów wynika, że dla $A \subset \Omega$, gdzie $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots\}$ zachodzi

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots\}) = P(\{\omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup, \ldots\}) =$$

$$P(\{\omega_{i_1}\}) \cup P(\{\omega_{i_2}\}) \cup, \ldots = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots$$

W ten sposób otrzymujemy odpowiednią funkcję prawdopodobieństwa.

Twierdzenie **3.2.3** (klasyczna definicja prawdopodobieństwa). *Jeśli zbiór $\Omega = \{w_1, w_2, ...\}$ jest przeliczalny oraz $\forall i$ zbiór zdarzeń $w_i \in \mathcal{S}$ należy do σ-algebry, to dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$ otrzymujemy funkcję prawdopodobieństwa dla $i \in \omega_i \in A$ wzorem:*

$$P(A) := \sum_i p_i.$$

Uwaga **3.2.4.** Zwyczajowe nazwy w schemacie klasycznym:

zbiór A	zdarzenie
$\omega \in A$	zdarzenie elementarne ω sprzyjające A
$A \subset B$	zdarzenie A powoduje B
$\emptyset$	zdarzenie niemożliwe
Ω	zdarzenie pewne
$A \cap B$	zdarzenia wykluczające się
A'	zdarzenie przeciwne A
$A \cup B$	alternatywa zdarzeń
$A \cap B$	koniunkcja zdarzeń

Niech zbiór $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ będzie przestrzenią skończoną. Dla pojedynczych elementów funkcję prawdopodobieństwa określimy jako

$$P(\{\omega_i\}) = p_i,$$

gdzie układ liczb $p_i \geq 0$ oraz $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Z aksjomatów wynika, że dla $A \subset \Omega$, gdzie $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ zachodzi

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_k}\}) = P(\{\omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup, \ldots \omega_{i_k}\}) =$$

$$P(\{\omega_{i_1}\}) \cup P(\{\omega_{i_2}\}) \cup \ldots \cup P(\omega_{i_k}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}.$$

Jeżeli założyć dodatkowo $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \ldots = P(\omega_k) = \frac{1}{n}$, to

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots \omega_{i_k}\}) = P(\{\omega_{i_1} \cup \omega_{i_2} \cup, \ldots \omega_{i_k}\}) = \frac{k}{n}.$$

Dawniej określano ten wynik mianem klasycznej definicji prawdopodobieństwa oraz k nazywano liczbą zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A.

Przykład. Rzuty kostką 1..6 mają opis:

- przestrzeń zdarzeń $\Omega = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}$
- pusty zbiór dla zdarzenia $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$
- $p(\Omega) = 1 = p(\{1\}) + p(\{2\}) + p(\{3\}) + p(\{4\}) + p(\{5\}) + p(\{6\})$
- $p(\{1\}) = \frac{1}{6}$

Przykład. Szanse wyborcze mogą być przedstawione w modelu:

- przestrzeń zdarzeń wyborczych $\Omega = A \cup B \cup C \cup D$
- wektor szans $p(A, B, C, D) = [20\%, 40\%, 30\%, 10\%]$
- pusty zbiór dla wyboru $A \cap B = \emptyset$

Wtedy:

$$p(A \cup B) = 60\%$$

Przykład. Umieszczamy n kul w n szufladach. Liczba wszystkich rozmieszczeń wynosi n^n. Rozważymy zdarzenie A: jedna szuflada jest pusta. Zdarzenia sprzyjające $\omega \in A$ dla ponumerowanych kul mają trzy wspólne własności:

- pewna (jedna) szuflada jest pusta oraz
- w pewnej (jednej) szufladzie są dokładnie dwie kule oraz
- w pozostałych $n - 2$ szufladach jest dokładnie po jednej kuli.

Liczb zdarzeń sprzyjających $|A|$ możemy obliczyć jako

$$|A| = n \left[\binom{n}{2} (n-1) \right] (n-2)! = n! \binom{n}{2},$$

gdzie kolejność trzech wyrazów w iloczynie odpowiada opisowi powyżej.

Euklidesowa przestrzeń jednowymiarowa

Określimy pomocniczo funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywaną dystrybuantą, która ma trzy własności:

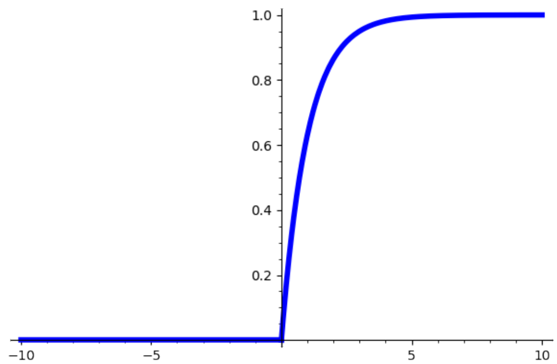
- funkcja F jest niemalejąca,
- granica w punktach niewłaściwych:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F(x) = 1,$$

- funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła

Przykład. Funkcja określona jako

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$



Przykład. Można określić dystrybuantę $F(x)$ przez podanie funkcji gęstości

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du,$$

gdzie $f(u) \geq 0$ oraz $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$.

Warunek, że funkcja jest niemalejąca oznacza nieujemność

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(u)du \geq 0$$

Definicja. Funkcję prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ określimy za pomocą dystrybuanty dla każdego $a < b$ wzorem

$$P([a,b)) := F(b) - F(a).$$

Twierdzenie **3.2.4.** *Przy zadanej funkcji $F(x)$ wzór $P([a,b)) := F(b) - F(a)$ określa funkcję prawdopodobieństwa na zbiorze wszystkich przedziałów postaci $[a,b)$. Ponadto rozkład funkcji prawdopodbieństwa może być w sposób jednoznaczny rozszerzony na całe ciało $\mathcal{S}$ zbiorów na prostej.*

Twierdzenie **3.2.5.** *Jeżeli funkcja $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$, to funkcja $F(x)$ określona wzorem*

$$F(x) := P((-\infty, x)),$$

ma trzy własności funkcji dystrybuanty.

Prawdopodobieństwo geometryczne

Dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określimy podzbiór $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, który ma miarę skończoną $0 \leq \mu(\Omega) < \infty$. Dla zdarzenia jako podzbioru $A \subset \Omega$ określimy prawdopodobieństwo, które nazywamy geometrycznym, wzorem

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

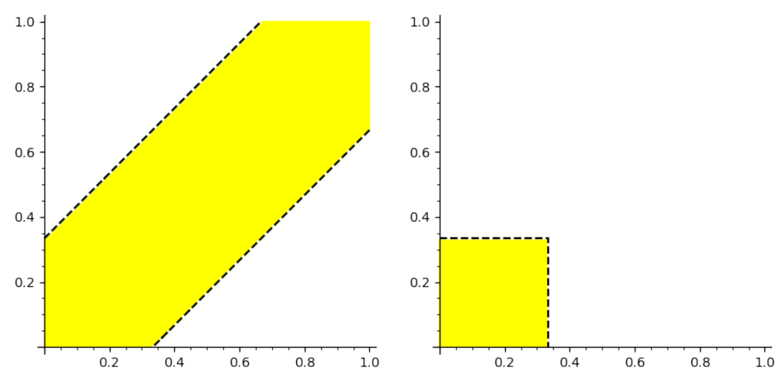
Przykład. Niech $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ będzie podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Dla liczby $0 \leq p \leq 1$ możemy utworzyć dwa zdarzenia

$$A = \{|x - y| \leq p\}$$

oraz

$$B = \{\min(x, y) \leq p\}.$$

Na rysunku $p = 1/3$



Wtedy prawdopodobieństwa tych zdarzeń wynoszą odpowiednio

$$P(A) = P(B) = \frac{1 - (1 - p)^2}{1}$$

3.3 Prawdopodobieństwo warunkowe

3.3.1 Określenia podstawowe

Prawdopodobieństwo zdarzenia A, które obliczamy przy założeniu, że zdarzenie B nastąpiło.

Przykład. Rzucamy kostką 1..6. Prawdopodobieństwo zdarzenia A dla wyrzucenia oczek nieparzystych wynosi

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}.$$

Natomiast zdarzenie B określimy jako wyrzucenie liczby oczek mniejszej od czterech. Wtedy

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{3}.$$

Przykład. Czarne kule pochodzą z dwóch pojemników (urn, bębnów itp.). Zdarzenie A to wylosowanie białej kuli, natomiast zdarzenie B oznacza pochodzenie kuli z pierwszego pojemnika. Podamy liczby:

$$P(A \cap B) = \frac{a}{n},\ P(A \cap B') = \frac{c}{n},\ P(A' \cap B) = \frac{b}{n},\ P(A' \cap B') = \frac{d}{n},$$

co oznacza $n = (a + b) + (c + d)$ dla dwóch pojemników kul: (białe+czarne). Wtedy otrzymamy:

$$P(A) = \frac{a+c}{n},\ P(B) = \frac{a+b}{n},\ P(A') = \frac{b+d}{n},\ P(B') = \frac{c+d}{n}.$$

Iloraz

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{a/n}{(a+b)/n} = \frac{a}{a+b},$$

oznacza nałożenie warunku B na zdarzenie A, który można interpretować jako zagadnienie gdzie a+b kul z bębna pierwszego zawiera a białych, czyli szansa wylosowania to

$$P(A|B) = \frac{a}{a+b}.$$

Dla kompletu obliczymy pozostałe prawdopodobieństwa warunkowe:

$$P(A'|B) = \frac{b}{a+b},\ P(A|B') = \frac{c}{c+d},\ P(A'|B') = \frac{d}{c+d}.$$

Definicja (prawdopodobieństwo warunkowe). Prawdopodobieństwo $P(A|B)$ zajścia zdarzenia A pod warunkiem wystąpienia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$ nazywamy liczbę

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Uwaga **3.3.1.** Zdarzenie B jest ustalone, natomiast zmienną jest zdarzenie A, które należy do algebry $\mathcal{S}$.

Twierdzenie **3.3.1.** *Wzór na $P(A|B)$ spełnia aksjomaty dla funkcji prawdopodobieństwa.*

Dowód. Wzór musi określać poprawnie funkcję rozkładu prawdopodobieństwa, czyli spełniać aksjomaty:

- nieujemna wartość prawdopodobieństwa $P(A|B) \geq 0$,
- zdarzenie pewne $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$,
- dla zdarzeń rozłącznych $A_1, A_2, ..., A_n$ parami oraz parami $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset$ dla każdego $i \neq j$ otrzymamy

$$P(\bigcup_i A_i|B) = \sum_i P(A_i|B).$$

□

Można zapisać wzór dla koniunkcji zdarzeń, jeżeli znamy prawdopodobieństwo warunkowe:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

Dla iloczynu trzech zdarzeń, przy założeniu $P(A \cap B) \neq 0$ otrzymamy:

$$P(A \cap B \cap C) = P(C|A \cap B)P(A \cap B) = P(C|A \cap B)P(B|A)P(A).$$

Przykład. Prawdopodobieństwo wskazania pojemnika z kulami wynosi odpowiednio: 3/4 oraz 1/4 dla danych dwóch pojemników. W pierwszym pojemniku są kule (2,1) oraz w drugim (1,2) dla układu kul (biała, czarna). Obliczymy szansę, że A wylosujemy kulę białą po B sięgnięciu do pierwszego pojemnika, czyli $P(A|B)$. Mamy $P(A|B) = 2/3$ oraz $P(A) = 3/4$, wtedy

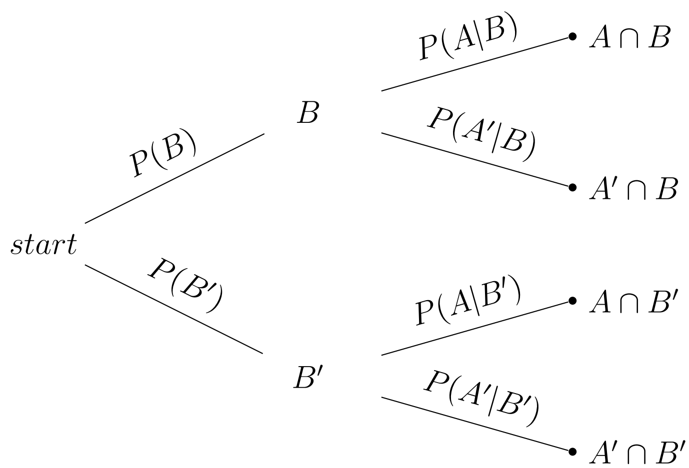
$$P(A \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Przykład. Jeżeli szansa wygranej wynosi 5%, to zdarzenie losowe A: przynajmniej jeden wygrywa na trzy, można opisać przez zdarzenie, że żaden nie wygrywa, czyli $A' = A_1' \cap A_2' \cap A_3'$. Wtedy

$$P(A') = P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') = P(A_1')P(A_2'|A_1')P(A_3'|A_1' \cap A_2') = \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \approx 0,85$$

Stąd $P(A) \approx 0,15$

Uwaga **3.3.2.** Drzewo prawdoopodobieństw może być opisane w sposób ogólny dla dowolnych zdarzeń A, B oraz C.



Dla drugiego poziomu otrzymamy cztery iloczyny wzgledem dwoch zdarzen A oraz B, czyli czterech lisci:

1. $P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$
2. $P(B \cap A') = P(A'|B) \cdot P(B)$
3. $P(B' \cap A) = P(A|B') \cdot P(B')$
4. $P(B' \cap A') = P(A'|B') \cdot P(B')$

Dla trzeciego poziomu (bez rysunku) otrzymamy osiem iloczynow wzgledem trzech zdarzen A, B oraz C, czyli osmiu lisci:

1. $P(B \cap A \cap C) = P(C|A \cap B) \cdot P(A \cap B) = P(C|A \cap B) \cdot P(A|B) \cdot P(B)$

2. $P(B \cap A \cap C') = P(C'|A \cap B) \cdot P(A \cap B) = P(C'|A \cap B) \cdot P(A|B) \cdot P(B)$
3. $P(B \cap A' \cap C) = P(C|A' \cap B) \cdot P(A' \cap B) = P(C|A' \cap B) \cdot P(A'|B) \cdot P(B)$
4. $P(B \cap A' \cap C') = P(C'|A' \cap B) \cdot P(A' \cap B) = P(C'|A' \cap B) \cdot P(A'|B) \cdot P(B)$
5. $P(B' \cap A \cap C) = P(C|A \cap B') \cdot P(A \cap B') = P(C|A \cap B') \cdot P(A|B') \cdot P(B')$
6. $P(B' \cap A \cap C') = P(C'|A \cap B') \cdot P(A \cap B') = P(C'|A \cap B') \cdot P(A|B') \cdot P(B')$
7. $P(B' \cap A' \cap C) = P(C|A' \cap B') \cdot P(A' \cap B') = P(C|A' \cap B') \cdot P(A'|B') \cdot P(B')$
8. $P(B' \cap A' \cap C') = P(C'|A' \cap B') \cdot P(A' \cap B') = P(C'|A' \cap B') \cdot P(A'|B') \cdot P(B')$

TWIERDZENIE **3.3.2** (prawdopodobieństwo warunkowe trzech zdarzeń)**.** *Dla zdarzeń A, B oraz C, gdzie $P(C) > 0$ zachodzą własności:*

- $P(\emptyset|C) = 0$
- $P(A|C) \leq 1$
- $P(A'|C) = 1 - P(A|C)$
- $P(A \setminus B|C) = P(A|C) - P(A \cap B|C)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A|C) \leq P(B|C)$.

TWIERDZENIE **3.3.3.** *Dla koniunkcji n zdarzeń zachodzi wzór*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \dots P(A_2|A_1)P(A_1),$$

jeśli założymy że $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Dowód. Wynika z zasady indukcji matematycznej, □

DEFINICJA**.** Zdarzenia A i B są statystycznie niezależne gdy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

czyli $P(A|B) = P(A)$.

UWAGA **3.3.3.** Zdarzenia rozłączne $A \cap B = \emptyset$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$.

Przykład. Niezależność trzech zdarzeń A, B, C polega na spełnieniu czterech warunków:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),\ P(A \cap C) = P(A)P(C),\ P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

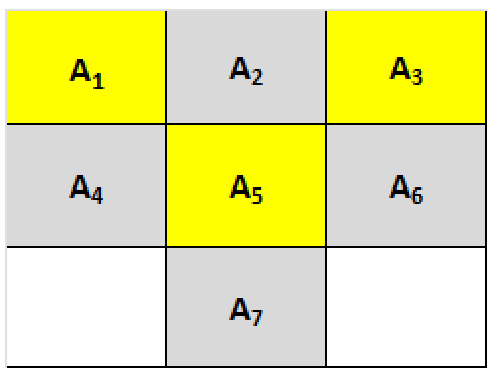
$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Definicja. Zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_1})...P(A_{i_k})$ dla $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_k \leq n$ oraz $k = 2, 3, ..., n$.

Uwaga **3.3.4.** Sprawdzenie niezależności dla n zdarzeń wymaga sprawdzenia $2^n - n - 1$ warunków (odpowiednich równości).

Wniosek 3.3.1. *Jeżeli zdarzenia $A_1, ..., A_n$ są niezależne, to również są niezależne zdarzenia $B_1, ..., B_n$, gdzie $B_i = A_i$ lub $B_i = A_i'$ dla $i = 1, 2, ..., n$.*

Przykład. Dla przestrzeni $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ określamy siedem zdarzeń $A_1, ..., A_7$ wg rysunku.



Określimy czy są niezależne zdarzenia $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B = A_1 \cup A_4 \cup A_7$ oraz $C = A_3 \cup A_6 \cup A_7$ są niezależne. Obliczymy $P(A) = \frac{1}{9}$, $P(B) = \frac{1}{9}$ oraz $P(C) = \frac{1}{9}$. Wtedy

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{27},$$

gdzie A, B, C są zależne. Natomiast warto odnotować

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{9}$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{9}$$

3.3.2 Prawdopodobieństwo całkowite

DEFINICJA. Rozbiciem przestrzeni Ω nazywamy rodzinę zdarzeń $\{H_i\}$, które:

- wzajemnie się wykluczają $H_i \cap H_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
- ich suma jest równa całej przestrzeni, czyli

$$\bigcup_i H_i = \Omega.$$

TWIERDZENIE **3.3.4.** *Jeżeli $\{B_1, ..., B_n\}$ to rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dla dowolnego zdarzenia A*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

UWAGA **3.3.5.** Zdarzenia B_i nazywa się hipotezami podkreślając alternatywny charakter rozbicia dla zdarzenia pewnego Ω.

TWIERDZENIE **3.3.5.** *Niech H_i to rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie. Zachodzi wzór na prawdopodobieństwo całkowite*

$$P(A|B) = \sum_{i\in I} P(A|B \cap H_i)P(H_i|B).$$

Reguła Bayesa Przypuśćmy, że znamy prawdopodobieństwo $P(A|B)$, ale chcemy obliczyć $P(B|A)$, wtedy korzystając ze wzoru $P(A|B)P(B) = P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$ otrzymamy regułę dla $P(A) \neq 0$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

TWIERDZENIE **3.3.6.** *Niech H_i to przeliczalne rozbicie przestrzeni Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie oraz $P(A) > 0$. Dla dowolnego $j \in I$ zachodzi tzw. wzór Bayesa*

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j)P(H_j)}{\sum\limits_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i)}.$$

UWAGA **3.3.6.** W statystyce używa się nazw: prawdopodobieństwa a priori dla $P(H_i)$ oraz prawdopodobieństwa a posteriori dla $P(H_i|A)$. Rodzinę zbiorów można określić w tym kontekście jako układ zupełny zdarzeń.

Przykład. W trzech pojemnikach U_1, U_2 oraz U_3 znajduje się po 100 kul. Białych kul mamy odpowiednio: 75, 60,45. Zdarzenie B oznacza, że wylosowano białą kulę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że pochodzie z pierwszego pojemnika, czyli $P(U_1|B)$. Zauważymy, żę znane są prawdopodobieństwa: $P(B|U_1)$, $P(B|U_2)$ oraz $P(B|U_3)$, które wynoszą odpowiednio 75%, 60% oraz 45%. Wtedy ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite

$$P(B) = P(B|U_1)P(U_1) + P(B|U_2)P(U_2) + P(B|U_3)P(U_3) = 60\%,$$

jeżeli założyć prosty model $P(U_i) = 1/3$.

Obliczymy teraz za pomocą reguły Bayesa

$$P(U_1|B) = \frac{P(B|U_1) \cdot P(U_1)}{P(B)} = \frac{0.75 \cdot \frac{1}{3}}{0.6} = \frac{5}{12}.$$

Przykład. Zdarzenie B polega na wylosowaniu wadliwej części, które pochodzą z trzech dostaw wg wektora braków $[0,5\%; 0,7\%; 1\%]$. Szacujemy szansę, że część pochodzi z drugiej dostawy. Dla każdej z dostaw określamy $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$. Dla zdarzenia B zapiszemy wektor wad jako

$$P(B|A_1) = 0,005 \; P(B|A_2) = 0,007 \; P(B|A_3) = 0,01.$$

Wtedy $P(B) = \frac{1}{3}(0,005 + 0,007 + 0,01)$ oraz

$$P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}0,007}{\frac{1}{3}0,022} = \frac{7}{22}.$$

3.4 Zmienne losowe

Funkcję określoną na skończonym zbiorze zdarzeń Ω o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ nazywamy zmienną losową. Zwykle zapisujemy ją np. X, Y lub $X_1, X_2, ...$

Przykład. Dla rzutu dwoma monetami otrzymamy $\Omega = \{OO, OR, ..., RR\}$. Zmienna losowa X to liczba reszek dla każdego zdarzenia, wtedy $X = \{0, 1, 2\}$.

Rozkładem zmiennej losowej X nazywamy zbiór par (x_i, p_i), gdzie x_i to wartość zmiennej losowej oraz prawdopodobieństwo $p_i = P(X = x_i)$.

Przykład. Dla rzutu dwoma monetami:

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$
$$P(X = 1) = \frac{2}{4}$$
$$P(X = 2) = \frac{1}{4}$$

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X o rozkładzie (x_i, p_i), i=1,2,...,n nazywamy liczbę

$$EX = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n.$$

Twierdzenie **3.4.1.** *Dla zmiennej losowej skokowej X określonej na skończonym zbiorze zdarzeń zachodzą wzory:*

1. $E(cX) = cEX$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$
2. $E(1) = 1$
3. $E(X + Y) = EX + EY$

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę $D^2X = E(X - EX)^2$. Można wykazać, że liczymy ją też przez $D^2X = EX^2 - (EX)^2$.

Przykład. Gra jest sprawiedliwa jeżeli zmienna losowa, która opisuję grę ma wartość oczekiwaną równą zero. Rzucamy trzema monetami. Jeżeli wypadną 3 orły to wygrywamy 10 zł, w przeciwnym przypadku przegrywamy 5 zł. Można podać rozkład zmiennej losowej oraz określić czy gra jest sprawiedliwa czyli:

$$\{(-5, 7/8), (10, 1/8)\}$$

oraz wartość oczekiwana

$$EX = (-5) \cdot 7/8 + 10 \cdot 1/8 = -25/8.$$

Określimy teraz podstawowy wynik rozkładu dla liczby sukcesów p w schemacie n prób Bernoulliego (doświadczenie losowe).

Twierdzenie **3.4.2.** *Jeżeli zmienna losowa ma rozkład Bernoulliego z dwoma parametrami n, p, czyli*

$$\{(k, \binom{n}{k} p^k q^{n-k})\}, \ k = 0, 1, ..., n, \ p + q = 1,$$

to wartość oczekiwana i wariancja wynoszą:

$$EX = np, \ D^2X = npq.$$

3.4.1 Rozkład zmiennej losowej

Definicja. Zmienna losową nazywamy funkcję określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, która przyjmuje wartości rzeczywiste, czyli

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

spełniającą warunek bycia zdarzeniem dla każdego $x \in \mathbb{R}$ postaci:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{S}.$$

Definicja (rozkład prawdopodobieństwa). Funkcją rozkładu zmiennej losowej skokowej X nazywamy funkcję $P(X = x_i) = p_i$, gdzie $\sum\limits_i p_i = 1$ dla $i = 1, 2, ...$

Dystrybuanta

Definicja (dystrybuanta). Funkcja określona wzorem

$$F(x) = P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$$

nazywana jest dystrybuantą.

Przykład. Dla rzutu dwoma monetami dystrybuanta jest kumulacją prawdopodobieństwa, czyli:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x < 0 \\ \frac{1}{4} \text{ dla } 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} \text{ dla } 1 \leq x < 2 \\ 1 \text{ dla } x \geq 2 \end{cases}$$

TWIERDZENIE **3.4.3.** *Funkcja $F(x)$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy*

- *funkcja $F(x)$ jest niemalejąca,*
- *granice $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,*
- *funkcja $F(x)$ jest lewostronnie ciągła*

UWAGA **3.4.1.** Dla wymienionych zdarzeń można określić prawdopodobieństwa przy pomocy dystrybuanty:

#	zdarzenie	skrót	prawdopodobieństwo
1	$\{\omega : X(\omega) \le x\}$	$X \le x$	$P(X \le x) = F(x^+)$
2	$\{\omega : X(\omega) > x\}$	$X > x$	$P(X > x) = 1 - F(x^+)$
3	$\{\omega : X(\omega) \ge x\}$	$X \ge x$	$P(X \ge x) = 1 - F(x)$
4	$\{\omega : X(\omega) = x\}$	$X = x$	$P(X = x) = F(x^+) - F(x)$
5	$\{\omega : X(\omega) \in [a, b]\}$	$a \le X \le b$	$P(a \le X \le b) = F(b^+) - F(a)$
6	$\{\omega : X(\omega) \in [a, b)\}$	$a \le X < b$	$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$
7	$\{\omega : X(\omega) \in (a, b]\}$	$a < X \le b$	$P(a < X \le b) = F(b^+) - F(a^+)$
8	$\{\omega : X(\omega) \in (a, b)\}$	$a < X < b$	$P(a < X < b) = F(b) - F(a^+)$

Niezależność zmiennych losowych

DEFINICJA. Zmienne losowe X oraz Y są niezależne, jeżeli dla dowolnych x, y zachodzi wzór

$$PX < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y) = F(x)G(y),$$

gdzie $F(x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej X, natomiast $G(y)$ dystrybuantą zmiennej losowej Y.

DEFINICJA. Ciąg $X_1, X_2, ..., X_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych, jeżeli dla dowolnych liczb x_i zachodzi

$$P(\{X_1 < x_1\} \cap \{X_2 < x_2\} \cap ... \cap \{X_n < x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i),$$

gdzie $F_i(x) = P(X_i < x)$ są dystrybuantami zmiennych losowych X_i.

UWAGA **3.4.2.** Dla zmiennych losowych skokowych warunek niezależności

$$P(X = x_i, Y = y_i) = P(X = x_i)P(Y = y_i).$$

Funkcja gęstości

Zmienne losowe typu ciągłego. Rozważymy ciągłe dystrybuanty $F(x)$, które można przedstawić w sposób

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx,$$

gdzie f(x) jest funkcją nieujemną dla $x \in \mathbb{R}$.

Definicja (funkcja gęstości prawdopodobieństwa). Jeśli dystrybuanta $F(x)$ zmiennej losowej ciągłej X ma pochodną $F'(x)$ w całym przedziale zmienności, to pochodną $F'(x)$ nazywamy funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f(x) = F'(x)$.

Twierdzenie **3.4.4.** *Funkcja $f(x)$ jest gęstością pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- $f(x) \geq 0$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Uwaga **3.4.3.** Funkcja gęstości nie musi być określona jednoznacznie - jej wartości w skończonej liczbie punktów mogą być ustalone w dowolny sposób (całka).

Twierdzenie **3.4.5.** *Jeżeli dla danej dystrybuanty $F(x)$ istnieje funkcja gęstości f(x), to w punktach różniczkowalności dystrybuanty wyraża się wzorem $f(x) = F'(x)$.*

Przykład. Dla funkcji $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x \text{ dla } x \in [0, b] \\ 0 \text{ dla pozostałych } x \end{cases}$$

dystrybuanta F(x) jest określona przez warunek

$$\int_{0}^{b} a\cos x dx = 1.$$

Stąd $a \sin b = 1$ oraz

$$f(x) \geq 0 \iff b \in [0, \pi/2] \wedge a \geq 0.$$

Twierdzenie **3.4.6.** *Dla danej funkcję gęstości $f(x)$ prawdopodobieństwa zmiennej losowej ciągłej można wyznaczyć wzorami:*

- *wartość dystrybuanty* $F(x_0) = P(X < x_0) = \int\limits_{-\infty}^{x_0} f(x)dx$*,*
- *prawdopodobieństwo* $P(a < x < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$*.*

Parametry pozycyjne

Definicja. Kwantylem rzędu p, gdzie $p \in [0,1]$ dla rozkładu zmiennej losowej X nazywamy wartość zmiennej losowej x_p spełniającą dwie nierówności:

$$P(X \leq x_p) \geq p \text{ oraz } P(X \geq x_p) \geq 1 - p.$$

Mediana Me to kwantyl rzędu $p = 1/2$. Kwartyle otrzymujemy odpowiednio dla $p = 1/4$ oraz $3/4$ i możemy określić odchylenie ćwiartkowe $Q = \frac{1}{2}(x_{3/4} - x_{1/4})$.

Przykład. Określimy $P(X = k) = 1/6$ dla $k = 1, 2, ..., 6$, wtedy $Me \in (3,4)$ i czasami zapisujemy $Me = \frac{3+4}{2}$. Natomiast kwartyle wynoszą $x_{3/4} = 2$ oraz $x_{1/4} = 5$ stąd $Q = 3/2$.

Przykład. Zmienna X ma rozkład wg dystrybuanty

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} \text{ dla } x > 0 \end{cases}$$

Dla kwantyla rzędu p ogólnie mamy równanie

$$1 - e^{-x} = p$$

stąd $x_p = -\ln(1 - p)$.

3.4.2 Momenty zmiennych losowych

Nadzieja matematyczna to wartość wokół której skupiają się realizacje zmiennej losowej w wyniku wielokrotnego powtarzania eksperymentów.

Wartość oczekiwana

Definicja (wartość oczekiwana). Dla zmiennej losowej ciągłej X o dystrybuancie $F(x)$ liczba określona wzorem:

$$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

nazywana jest wartością oczekiwaną, o ile całka jest bezwzględnie zbieżna. W sytuacji gdy zmienna losowa jest dyskretna to wzór określony jest przez

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i.$$

i trzeba wymagać bezwzględnej zbieżności szeregu. Suma może być skończona.

Uwaga **3.4.4.** Jeżeli zmienna losowa X ma gęstość $f(x)$, która jest niezerowa na pewnym odcinku (a,b), to wartość oczekiwana EX istnieje. Podobnie dla zmiennej losowej dyskretnej, jeżeli zmienna X ma tylko skończoną liczbę wartości x_i, to wartość oczekiwana EX istnieje.

Przykład. Dany jest rozkład jednostajny na odcinku

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in [0,1] \\ 0 \end{cases}$$

Wartość oczekiwana

$$EX = \int\limits_{0}^{1} xdx = 1/2.$$

Twierdzenie **3.4.7.** *Jeżeli istnieją wartości oczekiwane EX oraz EY, to dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równanie:*

$$E(aX + bY) = aEX + bEY.$$

Twierdzenie **3.4.8.** *Jeżeli zmienne losowe są niezależne, to zachodzi równanie*

$$E(X \cdot Y) = EX \cdot EY.$$

Momenty wyższych rzędów

DEFINICJA. Momentem rzędu k zmiennej losowej X jest wartość oczekiwana jej k-tej potęgi, czyli $m_k = EX^k$. Otrzymujemy zatem dla zmiennej losowej typu ciągłego o gęstości $f(x)$

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx,$$

gdzie całka musi być bezwzględnie zbieżna. Dla zmiennej losowej skokowej

$$m_k = EX^k = \sum_{i}^{\infty} x_i^k p_i,$$

gdzie szereg musi być bezwzględnie zbieżny.

TWIERDZENIE **3.4.9.** *Jeżeli istnieje moment $m_k = EX^k$, to istnieje również moment m_l dla $\forall\ l < k$.*

PRZYKŁAD. Dla zmiennej losowej zero-jedynkowej

$$m_k = 0^k q + 1^k p.$$

PRZYKŁAD. Dla zmiennej losowej o rozkłądzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$

$$m_k = \int_{0}^{1} x^k dx = \frac{1}{1+k}.$$

DEFINICJA (moment centralny). Dla zmiennej losowej X momentem centralnym rzędu k nazywamy

$$c_k = E(X - EX)^k.$$

DEFINICJA (wariancja). Miara rozproszenia wartości zmiennej losowej X wokół wartości oczekiwanej EX to wariancja:

$$D^2X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - EX)^2 p_i$$

Dla zmiennej losowej typu ciągłego wariancję obliczamy jako

$$D^2X = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - EX^2.$$

Odchyleniem standardowym nazywamy pierwiastek wariancji, czyli $DX = \sqrt{D^2X}$.

TWIERDZENIE **3.4.10.** *Niech X, Y będą zmiennymi losowymi o skończonych wariancjach. Wtedy*

$$D^2(aX) = a^2 D^2 X.$$

TWIERDZENIE **3.4.11.** *Niech X, Y będą zmiennymi losowymi niezależnymi o skończonych wariancjach. Wtedy*

$$D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y.$$

Można też zapisać $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

Dowód. Ponieważ $D^2X = E(X^2 - 2XEX + (EX)^2) = E(X^2 - 2m_1X + m_1^2)$ to

$$D^2X = EX^2 - 2m_1EX + m_1^2 = m_2 - 2m_1^2 + m_1^2 = m_2 - m_1^2.$$

□

TWIERDZENIE **3.4.12.** *Jeżeli istnieje wariancja D^2X, to zachodzi równość*

$$D^2X = EX^2 - (EX)^2.$$

Dowód. Ponieważ $P(X = x_0) = 1$, to $m_1 = x_0$ oraz $m_2 = x_0^2$, czyli $D^2X = 0$. □

TWIERDZENIE **3.4.13.** *Wariancja $D^2X = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa X przyjmuje wartość stałą z prawdopodobieństwem równym jeden, czyli dla pewnej wartości x_0 zachodzi $P(X = x_0) = 1$.*

3.5 Rozkłady prawdopodobieństwa

3.5.1 Rozkłady dyskretne

Skokowy (dyskretny) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X da się opisać przez podanie wszystkich przyjmowanych przez nią wartości, wraz z prawdopodobieństwem przyjęcia każdej z nich. Funkcja przypisująca prawdopodobieństwo do konkretnej wartości zmiennej losowej jest nazywana funkcją rozkładu prawdopodobieństwa.

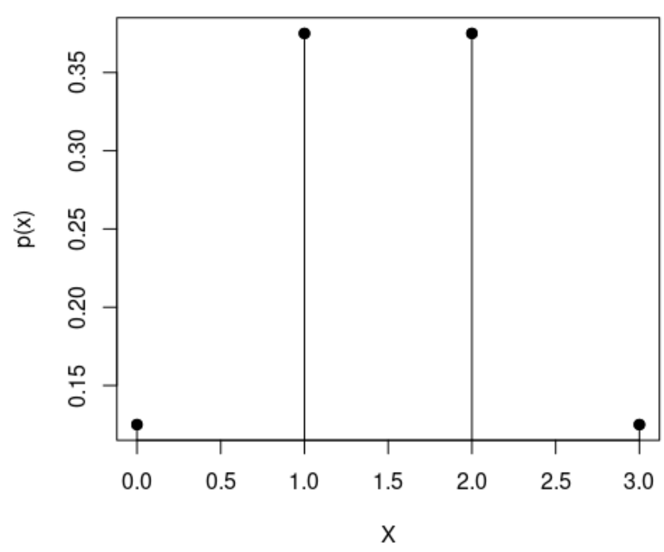
Dla zmiennej o charakterze dyskretnym zachodzi wzór:

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1,$$

gdzie x_i przebiega zbiór możliwych wartości zmiennej losowej X.

Uwaga **3.5.1.** Zbiór wszystkich wartości, które przyjmuje dyskretna zmienna losowa z niezerowym prawdopodobieństwem może być przeliczalny. Wtedy $\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$, gdzie $i \in \mathbb{N}$. Należy zauważyć przy okazji, że suma nieprzeliczalnie wielu dodatnich liczb rzeczywistych (prawdopodobieństw) jest zawsze nieskończona.

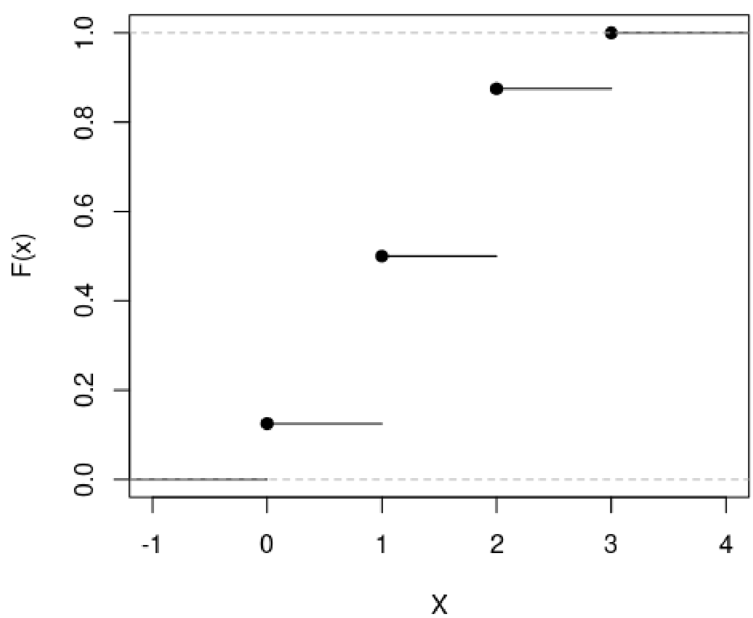
Przykład **3.5.1.** Typowy rozkład prawdopodobieństwa dla rzutów monetą, gdzie zmienna $X = 0, 1, 2, 3$ oznacza liczbę orłów (albo reszek) wygląda na wykresie



UWAGA **3.5.2.** Dyskretną zmienną losową można również zdefiniować jako zmienną losową, której dystrybuanta jest tzw. funkcją schodkową, czyli dla wszystkich $x_i \in S$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F(x_i) - \lim_{x \to x_i^-} F(x) \right) = 1.$$

PRZYKŁAD. Typowa dystrybuanta jako funkcja o wyglądzie schodków dla trzech rzutów monetą i zmiennej losowej X - liczba orłów



Rozkład dwupunktowy

DEFINICJA (rozkład dwupunktowy). Zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy, jeśli prawdopodobieństwo przyjmuje tylko dwie wartości dla różnych argumentów:

$$P(X = x_1) = p \text{ oraz } P(X = x_2) = q,$$

gdzie $p + q = 1$

UWAGA **3.5.3.** Należy zauważyć, że rozkład dwupunktowy ma dwa parametry: x_1 oraz x_2 przy założeniu $x_1 \neq x_2$. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa ma dokładną postać

$$P(x) = \begin{cases} p & \text{dla } x = x_1 \\ 1-p & \text{dla } x = x_2 \end{cases}$$

TWIERDZENIE **3.5.1.** *Dla rozkładu dwupunktowego zmiennej losowej X momenty wynoszą odpowiednio*

- *wartość oczekiwana* $EX = x_1p + x_2q = x_1p + x_2(1-p)$,
- *moment zwykły rzędu* k *wynosi* $m_k = x_1^kp + x_2^kq$,
- *wariancja* $D^2X = (x_2 - x_1)^2pq = (x_2 - x_1)^2p(1-p)$.

Rozkład zero-jedynkowy. Szczególnym przypadkiem rozkładu dwupunktowego, dla którego zmienna losowa X przyjmuje tylko wartości: 0 i 1 jest rozkład zero-jedynkowy. Można zapisać

$$P(X = 1) = p, \; P(X = 0) = q.$$

UWAGA **3.5.4.** Nośnikiem rozkładu jest zbiór dwuelementowy $\{0, 1\}$. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa dokładnie ma postać

$$P(x) = \begin{cases} p & \text{dla } k = 1 \\ 1-p & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

UWAGA **3.5.5.** Można równoważnie podać funkcję dystrybuanty jako określającą ściśle rozkład zero-jedynkowy

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } k < 0 \\ 1-p & \text{dla } 0 \leq k < 1 \\ 1 & \text{dla } k \geq 1. \end{cases}$$

TWIERDZENIE **3.5.2.** *Dla rozkładu zero-jedynkowego zmiennej losowej X momenty wynoszą odpowiednio*

- *wartość oczekiwana* $EX = p$
- *wariancja* $D^2X = p(1-p)$.

Rozważmy teraz ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_n$, o tym samym rozkładzie zero-jedynkowym, czyli dla każdego i

$$P(X_i = 1) = p \text{ oraz } P(X_i = 0) = q = 1 - p$$

TWIERDZENIE **3.5.3.** *Dla zmiennej losowej $X = X_1 + ... + X_n$ mamy:*

- $EX = np$,
- $D^2X = npq$,

gdzie dla każdego i zmienna losowa X_i ma rozkład zero-jedynkowy.

Rozkład dwumianowy Dyskretny rozkład prawdopodobieństwa opisujący liczbę k sukcesów w ciągu n niezależnych prób, z których każda ma stałe prawdopodobieństwo sukcesu równe p nazywamy rozkładem dwumianowym.

UWAGA **3.5.6.** Parametrami rozkładu można uznać liczby n oraz p. Nośnikiem byłby zbiór $1..n$. Funkcja rozkładu prawdopodobieństwa to $\{k, \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\}$.

TWIERDZENIE **3.5.4.** *Dla rozkładu dwumianowego zmiennej losowej X momenty wynoszą odpowiednio*

- *wartość oczekiwana $EX = np$*
- *wariancja $D^2X = np(1-p)$.*

TWIERDZENIE **3.5.5** (o rozkładzie dwumianowym)**.** *Zmienna losowa $X = X_1 + ... + X_n$ mam rozkład*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

gdzie dla każdego $i = 1, 2, .., n$ zmienna losowa X_i ma rozkład zero-jedynkowy oraz $0 \leq k \leq n$.

UWAGA **3.5.7.** Zmienną losową X można interpretować jako liczbę sukcesów (jedynek) w ciągu niezależnych doświadczeń, które określamy nazwą prób Bernouliego: prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p, natomiast porażki $q = 1 - p$.

Rozkład Poissona

Rozkład Poissona to dyskretny rozkład prawdopodobieństwa, wyrażający prawdopodobieństwo szeregu wydarzeń mających miejsce w określonym czasie, gdy te wydarzenia występują ze znaną średnią częstotliwością i w sposób niezależny od czasu jaki upłynął od ostatniego zajścia takiego zdarzenia.

Zmienne losowe wyrażające, między innymi, liczbę dyskretnych zdarzeń, które odbywają się w przedziale czasu, o określonej długości mają oczekiwaną liczbą zdarzeń w tym przedziale jako λ. Prawdopodobieństwo, że jest dokładnie k wystąpień jest równe $p(k,\lambda) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$,

Definicja (rozkład Poissona). Zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ, jeśli przyjmuje wartość k z prawdopodobieństwem

$$P(X = k) := \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

dla $k = 0, 1, 2, ...$

Uwaga **3.5.8.** Sprawdzimy, że prawdopodobieństwa sumują się do jedynki

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Uwaga **3.5.9.** Parametrem rozkładu jest liczba λ. Nośnikiem zbiór dyskretny $0, 1, 2, ..., n$.

Twierdzenie **3.5.6** (Poisson,). *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, *to*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{B}(n, k, p) = \mathbf{Pois}(k, \lambda).$$

Twierdzenie **3.5.7.** *Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład Poissona z parametrem λ, to wartość oczekiwana wynosi $EX = \lambda$ natomiast wariancja $D^2X = \lambda$.*

Dowód.

$$EX = \lim_{n\to\infty} np = \lambda,$$

oraz

$$D^2X = \lim_{n\to\infty} np(1-p) = \lim_{n\to\infty} \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \lambda.$$

□

3.5.2 Rozkłady ciągłe

Jednowymiarowy rozkład prawdopodobieństwa P nazywamy rozkładem ciągłym, jeżeli istnieje funkcja całkowalna $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego zdarzenia, czyli podzbioru σ-algebry $A \subset \mathbb{R}$:

$$P(A) = \int_A f(x)\,dx,$$

gdzie $\int_A f(x)\,dx$ oznacza całkę Riemanna po zbiorze A z funkcji $f(x)$. Funkcję podcałkową $f(x)$ nazywamy wówczas gęstością rozkładu prawdopodobieństwa P.

Rozkład jednostajny

Określmy rozkład zmiennej losowej typu ciągłego, dla którego gęstość prawdopodobieństwa przedstawia w zależności od parametru c przedstawia się:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla } a \leq x < b \\ 0 & \text{dla } x < a \text{ lub } x \geq b \end{cases}$$

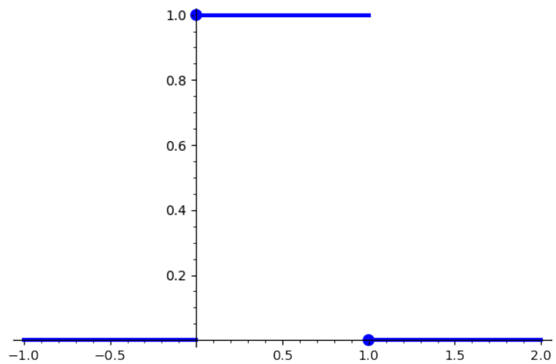
Uwzględniając warunek na unormowanie funkcji gęstości $f(x)$ mamy:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \ c\int\limits_{a}^{b} dx = \ c(b-a) \ = 1.$$

Definicja (rozkład jednostajny). Zmienna losowa określona na przedziale $X \in [a, b)$ ma rozkład równomierny, jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa określona jest wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} \text{ dla } x \in [a, b) \\ 0 \text{ dla } x \notin [a, b). \end{cases}$$

Przykład. Dla nośnika $[0, 1)$ rozkład równomierny



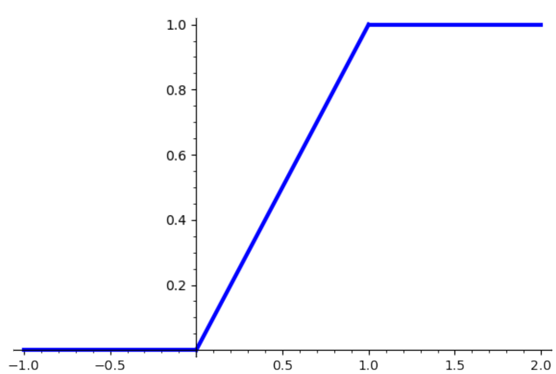
Uwaga **3.5.10.** Należy rozumieć, że rozkład prawdopodobieństwa dla pewnego odcinka zawartego w $[a', b') \subset [a, b)$ obliczamy według $P([a', b')) = \int_{a'}^{b'} f(x)\, dx$ i dla podanej funkcji gęstości ma postać

$$P([a', b')) = \frac{b' - a'}{b - a} \text{ dla } x \in [a', b')$$

Uwaga **3.5.11.** Dystrybuanta dla rozkładu jednostajnego może być obliczona jako:

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b \\ 0 \quad \text{dla } x < a \\ 1 \quad \text{dla } x \geq b \end{cases}$$

Przykład. Dla nośnika $[0, 1)$ rozkład równomierny ma dystrybuantę postaci:



Twierdzenie **3.5.8.** *Dla rozkładu jednostajnego zmiennej losowej X*

- *wartość oczekiwana* $EX = \frac{a+b}{2}$
- *momenty rzędu* k *wynoszą*

$$m_k = \frac{1}{b-a}\int x^k dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(b-a)(k+1)}.$$

- *na odcinku* $[0,1]$ *momenty upraszczają się do* $m_k = \frac{1}{(k+1)}$ *i wariancja wynosi wtedy:*

$$\sigma = m_2 - m_1^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Rozkład wykładniczy

Definicja. Rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ ma funkcję gęstości określoną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ dla } x \geq 0 \\ 0 \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

Uwaga **3.5.12.** Możemy obliczy dystrybuantę tego rozkładu jako

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} \text{ dla } x \geq 0 \\ 0 \text{ dla } x < 0. \end{cases}$$

Twierdzenie **3.5.9.** *Dla rozkładu wykładniczego momenty zwykłe wynoszą:*

- $m_1 = \lambda \int\limits_0^\infty x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$
- $m_2 = \lambda \int\limits_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$

Twierdzenie **3.5.10** (o braku pamięci)**.** *Jeżeli* T *jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, to*

$$P(T > t + t_0 | T > t_0) = P(T > t).$$

Uwaga **3.5.13.** Można wykazać, że tylko rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci.

Dowód. Ponieważ $\{T > t + t_0\} \subset \{T > t_0\}$ oraz $P(T > t) = 1 - F(t) = e^{t/\tau}$, to

$$P(T > t + t_0 | T > t_0) = \frac{P(T > t + t_0)}{P(T > t_0)} = e^{-(t+t_0)/\tau} e^{t_0/\tau} = e^{t/\tau} = P(T > t)$$

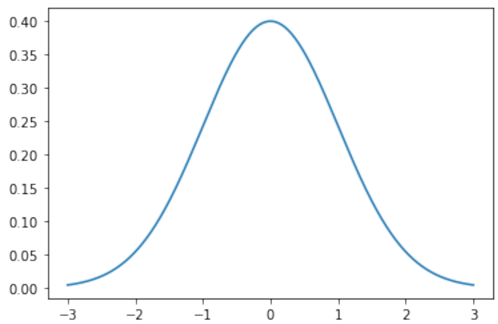
$\square$

Rozkład normalny

DEFINICJA (rozkład normalny). Zmienna losowa X określona dla wszystkich wartości $x \in \mathbf{R}$ ma rozkład normalny, jeżeli funkcja gęstości prawdopodobieństwa określona jest wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Wykres funkcji gęstości $f(x)$ pokazuje krzywą o tzw. kształcie dzwonu (ze zmianą wypukłości)

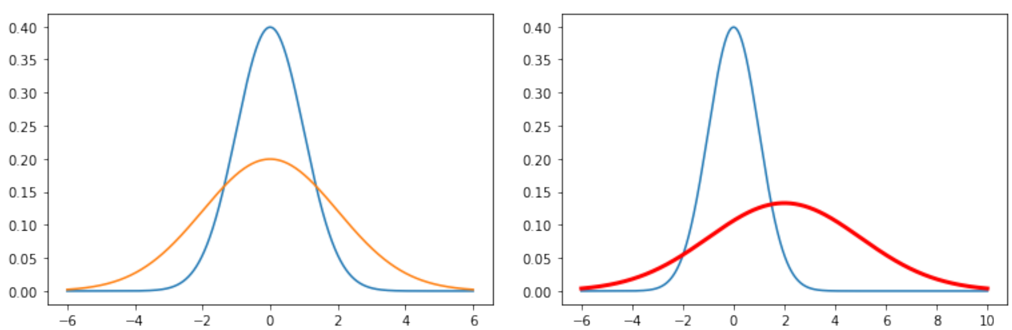


UWAGA **3.5.14.** Dla zmiennej X, która ma rozkład normalny przez przekształcenie tej zmiennej

$$Y = \sigma X + m$$

otrzymamy inny rozkład normalny oznaczony przez $Y \sim N(m, \sigma)$. Funkcja gęstości rozkładu ma wtedy postać

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$



Na odwrót można sprawdzić, że tzw. standaryzacja zmiennej $Z := \frac{X-m}{\sigma}$ ma rozkład normalny $Z \sim N(0,1)$.

Twierdzenie **3.5.11.** *Dla rozkładu normalnego $X \sim N(0,1)$ wartość oczekiwana oraz wariancja wynoszą odpowiednio:*

- $E(X) = 0$ *oraz* $D^2X = 1$, *jeżeli* $X \sim N(0,1)$,
- $E(X) = m$ *oraz* $D^2X = \sigma^2$, *jeżeli* $X \sim N(m,\sigma)$.

W ten sposób rozkład normalny $N(m,\sigma)$ jest całkowicie opisany przez dwa parametry: $m = EX$ oraz $\sigma = \sqrt{D^2X}$.

Uwaga **3.5.15.** Dla zmiennej losowej $Y \sim N(m.\sigma)$ obliczmy dystrybuantę rozkładu normalnego jako

$$\Phi(y) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y e^{-u^2}du\right),$$

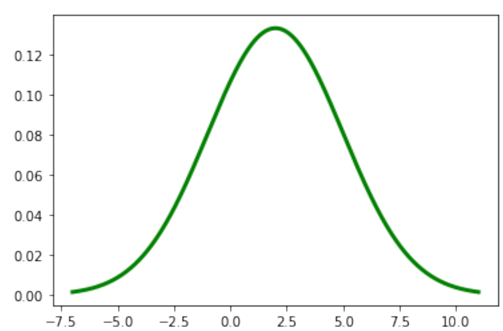
gdzie $u = \frac{y-m}{\sigma\sqrt{2}}$.Ze względu na wzór $X = \sigma Y + m$ wartość dystrybuanty rozkładu $Y \sim N(m,\sigma)$ można otrzymać z wartości dystrybuanty $\Phi(x)$ dla zmiennej $X \sim N(0,1)$.

Twierdzenie **3.5.12.** *Dla ciągu n zmiennych losowych $X_1, X_2, ..., X_n$, które mają swój rozkład normalny $X_i \sim N(m_i,\sigma_i)$ zmienna $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$ ma rozkład $X \sim N(m,\sigma)$, gdzie*

$$m = m_1 + ...m_n, \ \sigma^2 = \sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2.$$

Twierdzenie **3.5.13** (reguła trzech sigm)**.** *Jeżeli zmienna losowa mam rozkład normalny $X \sim N(m,\sigma)$, to zachodzi nierówność*

$$P(|X-m| > 3\sigma) < \frac{1}{100}.$$



Dowód. Dla zmiennej $P(Z > x) = 1 - \Phi(x) = \Phi(-x)$, to

$$P(|X - m| > 3\sigma) = P(|\frac{X - m}{\sigma}| > 3) = 2(1 - \Phi(3)) = 2 \cdot 0.00135 = 0.0027 < 0.01$$

□

Wniosek 3.5.1. *Zachodzi nierówność*

$$P(X \in (m - 3\sigma, m + 3\sigma)) > 0.99$$

Kształt i symetria rozkładu

Miarą zakresu, do którego występują wartości odstające jest kurtoza.

TWIERDZENIE **3.5.14.** *Dla rozkładu normalnego wartość kurtozy wynosi zero.*

UWAGA **3.5.16.** Kurtoza dodatnia wskazuje, że w danych istnieje więcej dodatnich wartości odstających niż w przypadku rozkładu normalnego. Kurtoza ujemna wskazuje, że w danych istnieje mniej dodatnich wartości odstających niż w przypadku rozkładu normalnego.

Miarą asymetrii rozkładu jest skośność.

TWIERDZENIE **3.5.15.** *Dla rozkład normalnego wartość skośności wynosi zero.*

UWAGA **3.5.17.** Rozkład z dużą skośnością dodatnią ma długi ogon prawostronny, gdy współczynnik skośności jest ujemny, rozkład ma długi kraniec z lewej strony. Dla wartości skośności przekraczającej dwukrotnie swój błąd standardowy zwykle uważamy, że oznacza to odstępstwo od symetrii rozkładu.

Bibliografia

[1] R. Leitner i J. Zacharski, *Zarys matematyki wyższej dla studentów*, tom 3. PWN Warszawa 2017.

[2] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy (ze wstępem do równań różniczkowych)*, PWN Warszawa 2021 (wyd. 17).

[3] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN 1970.

[4] A. Plucińska i E. Pluciński, *Probabilistyka*, PWN WNT, Warszawa 2021 (wyd. 1).

[5] M. Stark, *Geometria analityczna ze wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN 1974.

[6] W. Żakowski, G. Decewicz i W. Kołodziej: *Matematyka*, części 1 i 2.

Indeks alfabetyczny

całka dwukrotna, 39
całka n-krotna, 49
całka potrójna
  na obszarze normalnym, 47
ciąg n-wyrazowy, 74

iloczyn kartezjański, 74

krzywa całkowa, 26

metoda
  Eulera, 10
  rozdzielonych zmiennych, 9
  uzmiennienia stałych, 32
  współczynników nieoznaczonych, 35

obszar
  normalny, 43
  regularny, 45
obszar przestrzenny
  normalny, 47
odwzorowanie Picarda, 11

permutacja, 82
permutacja z powtórzeniami, 82
podział normalny, 49
problem Cauchy'ego, 26

równanie różniczkowe
  postać normalna, 25
  rozwiązanie ogólne, 25

suma całkowa, 38

twierdzenie
  Fubiniego, 50
  o liczbie bijekcji, 78
  o liczbie funkcji, 77
  o liczbie injekcji, 78
  o liczbie kombinacji, 76, 79
  o liczbie surjekcji, 78
  o zmianie zmiennych, 51
  uogólnione o mnożeniu, 75

wzór Bayesa, 98

zagadnienie początkowe, 26
zasada mnożenia, 74