Matematyka 1

skrypt do wykładów, WML WAT 2021/2022

Jerzy Różański
Instytut Matematyki i Kryptologii

20 czerwca 2022

Spis treści

1.1 Elementy teorii zbiorów

1.1.1 Indukcja matematyczna

TWIERDZENIE **1.1.1** (Zasada indukcji matematycznej). *Jeżeli podzbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ ma dwie własności:*

- $1 \in A$,
- *dla każdego $a \in A$ zachodzi implikacja:*

$$a \in A \implies a + 1 \in A,$$

to zachodzi równość zbiorów $A = \mathbb{N}$.

Dowód. Metodą reductio ad absurdum opiszemy ten dowód w kilku krokach. Dla zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ wykorzystamy własność, że jest on dobrze uporządkowany. Oznacza to, że dla dowlonego niepustego podzbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ istnieje element najmniejszy, czyli jeżeli $A \subseteq \mathbb{N}$ oraz $A \neq \emptyset$, to istnieje liczba $min(A) \in A$, taka że $min(A) \leq a$ dla wszystkich $a \in A$. Założymy, że $A \neq \mathbb{N}$, wtedy $\mathbb{N} \setminus A$ jest zbiorem niepustym. Dzięki dobremu uporządkowaniu istnieje najmniejszy element różnicy zbiorów $\mathbb{N} \setminus A$, który oznaczymy przez $min = min(N \setminus A)$. Ponieważ $1 \in A$, to $min > 1$. Ponieważ najmniejszy $min \in \mathbb{N} \setminus A$, stąd $(min - 1) \in A$. Ponieważ własność zbioru A wymaga, aby $(min - 1) + 1 \in A$ to otrzymujemy sprzeczność z założeniem. □

1.1.2 Prawa de Morgana

DEFINICJA. Równość dwóch zbiorów A oraz B, czyli sytuacja w której zbiory zawierają te same elementy oznacza:

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

TWIERDZENIE **1.1.2** (Prawa de Morgana). *Dla dowolnych trzech zbiorów A, B oraz C zachodzą dwie równości:*

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \tag{1.1}$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \tag{1.2}$$

Dowód. Dla pierwszej równości rozważmy definicję zbiorów równych - to znaczy należy wykazać, że

$$A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

oraz

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$$

Korzystając z praw logiki jeżeli $x \in A \setminus (B \cup C)$, to $x \in A$ oraz $(x \notin (B \cup C)$, czyli $x \notin B$ oraz $x \notin C$. Stąd wniosek $x \in A \wedge x \notin B$ oraz $x \in A \wedge x \notin C$, czyli $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. W ten sposób otrzymujemy główną część dowodu. □

Dla dowolnego podzbioru $A \subseteq X$ określimy jego dopełnienie $A' := X \setminus A$.

DEFINICJA (Ciało zbiorów). Rodzinę podzbiorów $\mathcal{F}$ ustalonej przestrzeni X nazywamy ciałem zbiorów, jeżeli spełnia warunki:

a) przestrzeń X należy do rodziny podzbiorów $\mathcal{F}$;

b) jeżeli $A, B \in \mathcal{F}$, to $A \cup B \in \mathcal{F}$;

c) jeżeli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$.

Uwaga: można wnioskować, że $\emptyset \subseteq \mathcal{F}$, z prawa de Morgana przecięcie $A \cap B \subseteq \mathcal{F}$; następnie różnica $A - B \subseteq \mathcal{F}$ oraz różnica symetryczna $A \ominus B \subseteq \mathcal{F}$.

TWIERDZENIE **1.1.3** (Prawa de Morgana). *Dla dowolnych dwóch zbiorów A, B w ciele zbiorów $\mathcal{F}$ zachodzą dwie równości:*

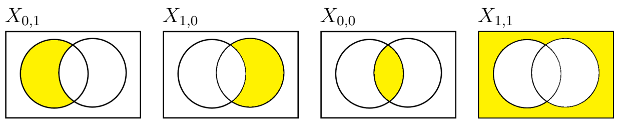
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \tag{1.3}$$
$$(A \cap B)' = A' \cup B' \tag{1.4}$$

Dowód. Rachunek w algebrze zbiorów dla pierwszej równości zaczniemy od zapisania lewej strony równania jako $(A \cup B)' = X \setminus (A \cap B)$. Dalej $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = A' \cap B'$. □

Drugi dowód przeprowadzimy z użyciem diagramów Venna.

Dowód. Rozważymy rodzinę dwóch zbiorów $\{X_1, X_2\}$, które są niezależne [1]. Oznaczymy dla dowolnego zbioru $X_i^0 := X_i$ oraz $X_i^1 := X_i'$, gdzie $i = 1$ lub $i = 2$. Utworzymy możliwe cztery niepuste przecięcia, czyli składowe jak w tabeli poniżej.

[1] B. Grunbaum, *Venn diagrams and Independent Families of Sets*, Mathematics Magazine, 48 (Jan-Feb 1975) 12-23



Dla pierwszej równości zapiszemy, że dowodzimy postaci $(X_1 \cup X_2)' = X_1' \cap X_2'$. Zaznaczymy lewą stronę z użyciem składowych $X \setminus (X_1 \cup X_2) = X \setminus [X_{0,1} \cup X_{1,0} \cup X_{0,0}$. Przekonujemy się na rysunku, że jest to obszar równy $X_{1,1}$. □

Pokażemy jeszcze jak zaznaczać odpowiednie obszary dla dowodów graficznych w sytuacji, gdzie są podane trzy zbiory.

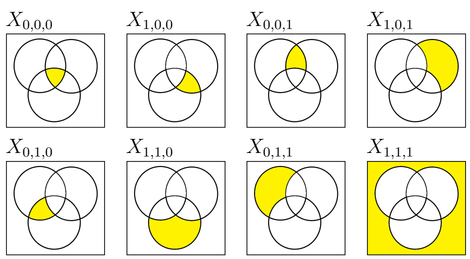
Twierdzenie **1.1.4.** *Dla dowolnych trzech zbiorów zachodzi równość:*

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

Dowód. Dla rodziny trzech zbiorów niezależnych $\{X_1, X_2, X_3\}$ w przestrzeni X i trzech liczb i, j, k z zakresu $\{0, 1\}$ określimy niepuste składowe jako

$$X_{i,j,k} := X_1^i \cap X_2^j \cap X_3^k.$$

W tabeli przedstawimy taką rodzinę niezależną.



Zapiszemy twierdzenie w notacji zbiorów niezależnych

$$X_1 \setminus (X_2 \setminus X_3) = (X_1 \setminus X_2) \cup (X_1 \cap X_3).$$

Graficzny dowód takiego prawa rachunku zbiorów zaczniemy od zapisania, czyli zaznaczenia lewej strony równości od zmiennych X_i

$$X_1 \setminus (X_2 \setminus X_3) = X_{0,0,0} \cup X_{0,1,0} \cup X_{0,1,1}.$$

Prawa strona może być zapisana, czyli zaznaczona odpowiednio

$$(X_1 \setminus X_2) \cup (X_1 \cap X_3) = X_{0,0,0} \cup X_{0,1,0} \cup X_{0,1,1}.$$

□

1.1.3 Zbiory skończone i nieskończone

Stwierdzimy, już bez dowodu, że dla zbioru skończonego liczba jego elementów jest określona jednoznacznie. Zapiszemy dla zbioru skończonego A liczbę jego elementów jako $|A|$. Nazwiemy zbiorem nieskończonym zbiór, który nie jest skończony.

Zasada włączeń i wyłączeń. Niech $A_1, A_2, ...A_n$ będą zbiorami skończonymi. Wtedy liczba elementów ich skończonej sumy mnogościowej:

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big| = \sum_{i-1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| +$$

$$+ \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$$

Sprawdzimy wzór tylko dla pierwszych dwóch przypadków. Dla $n = 2$ wzór $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ jest prawdziwy. Dla $n = 3$ wzór postaci $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Dla implikacji $n = 2 \implies n = 3$ zapisujemy $|(A \cup B) \cup C| = |(A \cup B)| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$. Wtedy prawa strona $|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$. Dalej $|A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|)$. Po uproszczeniu $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Twierdzenie **1.1.5** (Euklides 365 r.p.n.e.)**.** *Żaden skończony podzbiór liczb naturalnych $A \subseteq \mathbb{N}$ nie zawiera zbioru wszystkich liczb pierwszych, czyli $\mathbb{P} \nsubseteq A$.*

Dowód. Dla liczby naturalnej $n > 1$ określimy liczbę pierwszą jako najmniejszy dzielnik tej liczby, który jest różny od 1. Niech A będzie skończonym zbiorem liczb pierwszych. Niech p będzie iloczynem wszystkich liczb pierwszych z A. Wspólnym dzielnikiem p oraz $p + 1$ jest liczba 1. Zatem żadna liczba w zbiorze A nie jest dzielnikiem liczby $p + 1$. Ponieważ $p + 1 > 1$, to liczba $p + 1$ ma dzielnik d, który jest liczbą pierwszą, $d \notin A$. □

1.1.4 Przykłady

Zapis logiczny zbioru

Zapiszemy określony zbiór elementów używając podstawowych operacji algebraicznych na tych zbiorach. Należy przyjąć, że zbiory $A, B \subset X$ (przestrzeń).

1. $\{x \in X : x \in A \implies x \in B\}$ - elementy są w relacji inkluzji
2. $\{x \in X : x \in A \iff x \in B\}$

Dla zbioru w punkcie 1 otrzymamy $x \in A' \cup B$. Ponieważ równoważność jest implikacją w obie strony połączoną przez koniunkcję, to w punkcie 2 zapiszemy $(A' \cup B) \cap (A \cup B')$. Użycie diagramów Venna może być tutaj pomocne. Operacje podstawowe w teorii zbiorów to: suma, przecięcie oraz dopełnienie.

Działania algebraiczne

Uprościmy warunek dla trzech zbiorów A_1, A_2 oraz B.

$$(A_1 \cup B) \cap (A_2 \cup B) = B.$$

Trzeba zauważyć, że nie każde trzy zbiory spełniają podaną równość. Lewą stronę równania można zapisać jako $(A_1 \cap A_2) \cup B$ (prawo rozdzielności) skąd wynika odpowiedź:

$$(A_1 \cap A_2) \subset B.$$

Liczba elementów

Policzymy ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1000, które nie dzielą się przez: 3, 7 lub 13.

Oznaczymy A_3 zbiór liczb, które nie dzielą się przez 3 i są mniejsze niż 1000. Wtedy liczność $|A_3|$=999 − $\lfloor 1000/3 \rfloor$ = 666. Odpwiednio: $|A_7|$=857, $|A_{13}|$=923, $|A_{21}|$=952, $|A_{39}|$=974 , $|A_{91}|$=989 oraz $|A_{273}|$= 996. Wtedy z zasady włączeń i wyłączeń dla trzech zbiorów:

$$|A_3 \cup A_7 \cup A_{13}| = 527$$

1.2 Odwzorowania zbiorów

1.2.1 Przekształcenia zbiorów

Określenie par uporządkowanych:

- $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$
- $(a, b) \neq (b, a)$
- $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d)$
- $(a, b, c) := ((a, b), c)$

Definicja (Iloczyn kartezjański). Dla dowolnych zbiorów A, B określimy ich iloczyn kartezjański jako zbiór par uporządkowanych, czyli:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

Jeżeli zbiory A, B są skończone, to liczba elementów ich iloczynu kartezjańskiego wynosi $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Dowód. Liczba wszystkich par uporządkowanych jest wyznaczona na diagramie prostokątnym jako iloczyn. □

Definicja (Odwzorowanie). Niech A, B to niepuste zbiory. Przekształceniem zbiorów z A do B nazywamy podzbiór $f \subseteq A \times B$, taki że dla każdego elementu $a \in A$ istnieje dokładnie jeden element $b \in B$, że $(a, b) \in f$.

Dla przekształcenia, inaczej nazywanego odwzorowaniem, zachodzi

$$(a, b) \in f \wedge (a, b') \in f \Rightarrow b = b'.$$

Twierdzenie **1.2.1.** *Dla zbiorów skończonych A, B liczba wszystkich możliwych odwzorowań wynosi $|\mathcal{F}(A, B)| = |B|^{|A|}$.*

Dowód. Elementowi a_1 zbioru A można przyporządkować $|B|$ różnych elementów zbioru B. Dla elementu a_2 znowu $|B|$ różnych elementów itd. Wszystkich możliwości zatem jest $|B| \cdot |B| \cdot ... \cdot |B|$ dla $|A|$ razy. □

Niech $f : A \to B$ będzie przekształceniem między zbiorami.

Definicja (Obraz odwzorowania). Jeśli $A_1 \subseteq A$, to obrazem podzbioru A_1 pod działaniem f jest podzbiór $f(A_1) \subseteq B$:

$$f(A_1) := \{f(a) : a \in A_1\}.$$

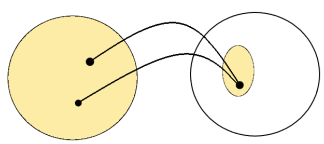
Definicja (Przeciwobraz odwzorowania). Dla danego podzbioru liczb $B_1 \subseteq B$ obrazem odwrotnym $f^{-1}(B_1)$ tego zbioru pod działaniem f jest

$$f^{-1}(B_1) := \{a \in A : f(a) \in B_1\}$$

Twierdzenie **1.2.2** (Zasada szufladkowa). *Dla zbiorów skończonych $|A| > |B|$ oraz dowolnego odwzorowania $f : A \to B$ istnieje taki element $b \in B$, że*

$$|f^{-1}(b)| \geq 2.$$

Na rysunku przedstawiamy proste wyjaśnienie zasady porządkowania przedmiotów do szuflady.



Definicja (Iniekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : A \to B$. Przekształcenie f jest różnowartościowe, jeżeli dla wszystkich elementów dziedziny $\forall\ a_1, a_2 \in A$ zachodzi implikacja:

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2).$$

Twierdzenie **1.2.3.** *Dla zbiorów skończonych A, B liczba wszystkich możliwych odwzorowań różnowartościowych wynosi*

$$|Inj(A, B)| = |B| \cdot (|B| - 1) \cdot ... \cdot (|B| - |A| + 1).$$

Dowód. Elementowi a_1 zbioru A można przyporządkować $|B|$ różnych elementów zbioru B. Dla elementu a_2 już $|B| - 1$ różnych elementów, bo jest to iniekcja. Wszystkich możliwości zatem jest $|B| \cdot (|B| - 1) \cdot ... \cdot (|B| - |A| + 1)$ dla $|A|$ razy. □

Definicja (Surjekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : A \to B$. Przekształcenie f jest na zbiór, jeżeli

$$\forall b \in B\ \exists a \in A : b = f(a).$$

Definicja (Bijekcja). Niech będzie dane odwzorowanie $f : A \to B$. Przekształcenie jest wzajemnie jednoznaczne, jeżeli jest jednocześnie różnowartościowe oraz na zbiór.

Definicja (Odwzorowanie odwrotne). Odwzorowanie $f^{-1} : B \to A$ jest odwrotne do $f : A \to B$, jeśli dla dowolnego elementu $a \in A$ zachodzi równość $f^{-1}(f(a)) = a$ oraz dla dowolnego elementu $b \in B$ zachodzi równość $f(f^{-1}(b)) = b$.

Definicja (Działanie wewnętrzne). Dla niepustego zbioru A przekształcenie $f : A \times A \to A$ nazywamy działaniem wewnętrznym w tym zbiorze.

1.2.2 Liczby naturalne. Przeliczalność zbioru

Niech zbiór pusty ma zero elementów, czyli $|\emptyset| = 0$. Powiemy, że dowolny zbiór S ma n elementów, jeżeli istnieje dla niego bijekcja do skończonego podzbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Definicja. Zbiór S jest skończony jeżeli jest pusty lub ma n elementów dla pewnej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy zbiorem nieskończonym.

Definicja (Symbol silnia). Dla ustalonej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N}$ określimy jej silnię jako iloczyn $n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

Twierdzenie **1.2.4** (O liczbie permutacji). *Dla zbioru akończonego A, który ma n elementów możliwe jest utworzenie $n!$ różnych permutacji tego zbioru. Jest to jednocześnie liczba wszystkich możliwych odwzorowań wzajemnie jednoznacznych $f : A \to A$.*

Dowód. Wynika z zasady indukcji matematycznej dla liczby n oraz tożsamości $(n+1)! = (n+1)n!$. □

Twierdzenie **1.2.5** (O liczbie wariacji). *Dla zbioru skończonego można utworzyć $V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$ ciągów k-elementowych.*

Dowód. Liczba wszystkich n-ciągów wynosi $n!$, natomiast $(n-k)$-elemntowych to $(n-k)!$. □

Definicja (Symbol Newtona). Określimy dla $0 \le k \le n \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Twierdzenie **1.2.6.** *Współczynnik dwumianowy* $\binom{n}{k}$ *jest liczbą naturalną.*

Dowód. Można zauważyć:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k}$$

Wtedy czynnik $n(n-1)$ dzieli się przez dwa, $\frac{(n(n-1)}{2}(n-2)$ dzieli się przez 3, itd. □

Twierdzenie **1.2.7** (O liczbie podzbiorów). *Symbol Newtona określa liczbę wszystkich k-elementowych podzbiorów dla zbioru n-elementowego, czyli:*

Dowód. Dla k-elementowych podzbiorów, w przeciwieństwie do ciągów, nie ma ustalonej kolejności elementów. Liczba różnych ciągów utworzonych z jednej kombinacji wynosi $k!$. Stąd dla zapisu $C(n,k) = \binom{n}{k}$ otrzymamy

$$C(n,k) = \frac{V(n,k)}{k!}.$$

□

Zauważymy, że:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Dwa zbiory są równoliczne wtedy i tylko wtedy gdy istnieje bijekcja pomiędzy nimi $f : A \to B$.

Definicja. Zbiór przeliczalny to zbiór skończony lub zbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalych $\mathbb{N}$.

Iloczyn kartezjański $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest zbiorem przeliczalnym. Funkcja numerująca ma następującą postać:

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m.$$

1.2.3 Zbiór liczb wymiernych

Twierdzenie **1.2.8** (O niewymierności $\sqrt{2}$). *Nie istnieje $r \in \mathbb{Q}$, takie że $r^2 = 2$.*

Dowód. Metodą sprowadzenia do sprzeczności. Założymy, że istnieje liczba wymierna postaci ułamka $\mathbb{Q} \ni r = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \neq 0 \in \mathbb{Z}$ oraz że $(\frac{p}{q})^2 = 2$. Możemy przyjąć uproszczenie, że p, q są dodatnie oraz nie mają wspólnego dzielnika różnego od 1. Teraz $p^2 = 2q^2$ i wnioskujemy, że p^2 oraz p są liczbami parzystymi, bo jeśli $p = 2k-1$ jest nieparzyste to $p^2 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$ też byłoby nieparzyste. Ponieważ p, q nie mają wspólnego dzielnika 2, to q musi być liczbą nieparzystą. Jeżeli p jest liczbą parzystą postaci $p = 2k$, wtedy $4k^2 = 2q^2$ stąd q^2 oraz q są liczbami parzystymi.
Otrzymaliśmy sprzeczność, że $q \neq 0$ jest nieparzystą i parzystą liczbą jednocześnie. □

Twierdzenie **1.2.9** (O przeliczalności liczb wymiernych). *Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Lemat. Następujące stwierdzenia są równoważne:

a) zbiór A jest przeliczalny;

b) istnieje przekształcenie $\mathbb{N}$ na zbiór A (surjekcja);

c) istnieje przekształcenie różnowartościowe ze zbioru A w zbiór $\mathbb{N}$.

Dowód. $a) \implies b)$ dla zbioru skończonego A ponieważ istnieje bijekcja $f : \mathbb{N}_n \to A$, to możemy określić surjekcję $F : \mathbb{N} \to A$ za pomocą dodania wzoru, który $F(k) = f(n)$ dla $k > n$, czyli $F(k) := \begin{cases} f(k) \text{ dla } k \le n \\ f(n) \text{ dla } k > n \end{cases}$. Dla przeliczalnego zbioru A sprawa jest oczywista. $b) \implies c)$ Jeżeli F jest surjekcją $\mathbb{N} \to A$, to określimy $F_1 : A \to \mathbb{N}$ przez $F_1(a)$ będzie najmniejszym elementem zbioru $F^{-1}(a) := \{n \in \mathbb{N} : F(n) = a\}$. Pokażemy, że F_1 jest injekcją $A \to \mathbb{N}$: jeżeli $a, b \in A$ oraz $n_{ab} := F_1(a) = F_1(b)$, to $a = F(n_{ab}) = b$. $c) \implies a)$ Jeżeli F_1 jest injekcją $A \to \mathbb{N}$, to jest bijekcją A na podzbiór $F_1(A) \subseteq \mathbb{N}$. Ponieważ $F_1(A)$ jest zbiorem przeliczalnym to $A \subseteq F_1(A)$ tym bardziej. □

Teraz zajmiemy się dowodem głównym twierdzenia o przeliczalności liczb wymiernych.

Dowód. Wiemy, że zbiór $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ jest przeliczalny oraz istnieje surjekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Rozważmy funkcję $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$, która dla pary (m, n) przypisuje ułamek $\frac{m}{n}$. Ponieważ funkcja g jest surjekcją na zbiór $\mathbb{Q}^+$, to złożenie $g \circ f$ jest surjekcją zbioru $\mathbb{N}$ na zbiór $\mathbb{Q}^+$. Wynika z tego fakt, że $\mathbb{Q}^+$ jest zbiorem przeliczalnym. □

1.2.4 Działania w zbiorze liczb rzeczywistych

Dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ określimy symbol dla wielokrotnego iloczynu tego samego elementu

$$a^n := a \cdot ... \cdot a, \text{ (n razy)}.$$

oraz

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \ a^0 = 1, \ a \neq 0.$$

Definicja (Pierwiastek arytmetyczny)**.** Dla nieujemnej liczby rzeczywistej $a \in \mathbb{R}$ pierwiastkiem stopnia $n \geq 2$ nazywamy nieujemną liczbę rzeczywsitą $c \in \mathbb{R}$, taką że

$$c^n = a.$$

Uwaga: zapiszemy $c = \sqrt[n]{a}$ oraz udowodnimy istnienie rozwiązania dla $c \in \mathbb{R}$ w rozdziale o zupełnym, uporządkowanym ciele liczb rzeczywistych.

Twierdzenie **1.2.10.** *Dla liczb naturalnych $m, n \geq 2$ oraz liczb rzeczywistych $a, b \geq 0$ zachodzą własności:*

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, *gdzie* $b > 0$;
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Definicja (Potega wymierna)**.** Potęga o podstawie $a \geq 0$ oraz dodatnim wykładniku wymiernym $p/q > 0$ oraz ujemnym $r < 0$

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a}^p,$$

oraz

$$a^r := \frac{1}{a^{-r}}, \ a \neq 0.$$

Definicja (Pierwiastek liczby ujemnej)**.** Dla podstawy $a < 0$ pierwiastek stopnia nieparzystego n

$$\sqrt[n]{a} := -\sqrt[n]{-a}$$

Ponadto dla $a < 0$ i wykładnika wymiernego p/q, gdzie p, q względnie pierwsze oraz q to liczba nieparzysta

$$a^{\frac{p}{q}} := (-\sqrt[q]{-a})^p.$$

1.2.5 Przekształcenia algebraiczne

Dla liczby naturalnej $n \geq 2$ oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1}).$$

Dla nieparzystej liczby naturalnej $n \geq 3$ oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + ... + b^{n-1}).$$

Twierdzenie **1.2.11** (Wzór dwumianowy)**.** *Dla liczby naturalnej n oraz dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Dowód. Rozpiszemy iloczyn n czynników $(a+b)(a+b) \cdot ... \cdot (a+b)$. Każdy ze składników jest iloczynem n czynników, z których każdy jest równy albo a albo b. Liczba takich składników, w których wyraz a występuje k razy, a wyraz b występuje $n-k$ razy jest współczynnikiem przy wyrazie postaci $a^k b^{n-k}$. Liczba ta jest równa liczbie wyborów k z n czynników, w których znajduje się wyraz a, czyli $\binom{n}{k}$. □

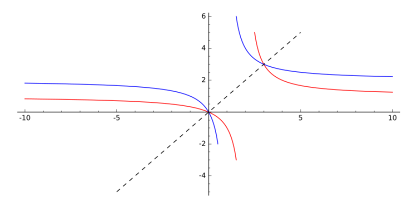
1.2.6 Przykłady

Odwzorowanie zbiorów

Zbadamy własności funkcji homograficznej $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

- $f(x)$ jest różnowartościowa
- funkcja odwrotna to $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$ dla $x \neq 2$
- $f : A \to B$ jest bijekcją dla $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ oraz $B = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2\}$

Wykresem funkcji i jej odwrotnych jest rysunek:



1.3 Funkcje i relacje

1.3.1 Własności zbioru liczb rzeczywistych

Niech A będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Definicja. Podzbiór A jest ograniczony z góry, jeżeli istnieje liczba $u \in \mathbb{R}$, taka że $a \leq u$ dla $\forall a \in A$.

Definicja (Supremum zbioru). Jeżeli $A \subset \mathbb{R}$ jest podzbiorem ograniczonym z góry, to liczba $u \in \mathbb{R}$ jest nazywana kresem górnym jeżeli:

- u jest ograniczeniem górnym zbioru A;
- jeśli v dowolnym ograniczeniem górnym, to $u \leq v$.

Definicja. Podzbiór A jest ograniczony z dołu, jeżeli istnieje liczba $w \in \mathbb{R}$, taka że $w \leq a$ dla $\forall a \in A$.

Definicja (Infimum zbioru). Jeżeli podzbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ograniczony z dołu, to liczba $u \in \mathbb{R}$ jest nazywana kresem dolnym jeżeli:

- w jest ograniczeniem dolnym zbioru A;
- jeśli v dowolnym ograniczeniem dolnym, to $v \leq w$.

Aksjomat zupełności. Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeżeli zbiór ma ograniczenie górne, to istnieje kres górny tego zbioru.

Twierdzenie **1.3.1** (Własność Archimedesa). *Jeżeli $x \in \mathbb{R}$, to istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, że $x < n$.*

Dowód. Na wykładzie. □

Twierdzenie **1.3.2** (Istnienie $\sqrt{2}$). *Istnieje rzeczywista liczba dodatnia x, taka że $x^2 = 2$.*

Dowód. W przygotowaniu. □

Twierdzenie **1.3.3** (O gęstości zbioru $\mathbb{R}$). *Jeżeli dwie liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniają $x<y$, to istnieje między nimi liczba wymierna $r \in \mathbb{Q}$, taka że*

$$x < r < y$$

Lemat. Jeżeli $\varepsilon > 0$, to istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, taka że $0 < 1/n < \varepsilon$.

Dowód. Wynika z faktu, że zbiór $A = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ ma kres dolny równy 0. Zauważmy, że $\varepsilon > 0$ nie może być dolnym ograniczeniem tego zbioru, czyli zawsze znajdę element mniejszy pochodzacy ze zbioru A. □

Lemat. Jeżeli $x > 0$, to istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, taka że $n - 1 \leq x \leq n$.

Dowód. Z własności Archimedesa wynika, że podzbiór $A := \{n \in \mathbb{N} : x < n\}$ nie jest pusty. Najmniejszy element tego zbioru oznaczymy przez $\min A$. Wiemy, że istnieje ponieważ mamy do czynienia ze zbiorem dobrze uporządkowanym. Wtedy $\min A - 1 \notin A$. Stąd $\min A - 1 < x$. Wtedy $\min A - 1 < x < \min A$. □

Zajmiemy się teraz dowodem głównym twierdzenia.

Dowód. Założymy, że $x > 0$, czyli $y - x > 0$. Istnieje liczba naturalna (lemat) $1/n < y - x$. Wtedy $nx + 1 < ny$. Dlatego (lemat) dla $nx > 0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$, że $m - 1 \leq nc \leq m$, stąd $nx < m < ny$. ułamek $r = m/n$ spełnia nierówności $x < r < y$. □

1.3.2 Własności funkcji

Niech będzie dana funkcja $f : A \to \mathbb{R}$.

Definicja (Funkcja ograniczona). Jeżeli obraz zbioru $f(A) = \{f(a), a \in A\}$ jest jako podzbiór liczb rzeczywistych ograniczony z góry, to mówimy że funkcja jest ograniczona z góry.

Zapiszemy używając kwantyfikatorów:

$$\exists\, b \in \mathbb{R}\ \forall\, a \in A : f(x) < b.$$

Twierdzenie **1.3.4.** *Dane są dwie funkcje ograniczone $f, g : A \to \mathbb{R}$ ze wspólną dziedziną. Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla wszystkich $x \in A$, to zachodzi nierówność dla ich supremum na dziedzinie:*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A} g(x)$$

Twierdzenie **1.3.5.** *Dane są dwie funkcje ograniczone $f, g : A \to \mathbb{R}$ ze wspólną dziedziną.. Jeżeli $f(x) \leq g(y)$ dla wszystkich $x, y \in A$, to zachodzi nierówność na dziedzinie:*

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \inf_{y \in A} g(y)$$

Dowód. Na wykładzie. □

Definicja. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest parzysta, jeżeli $\forall\ x \in D_f$ spełnione są warunki:

$$-x \in D_f \wedge f(-x) = f(x).$$

Uwaga: oś OY jest symetrią osiową wykresu.

Definicja. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta, jeżeli $\forall\ x \in D_f$ spełnione są warunki:

$$-x \in D_f \wedge f(-x) = -f(x).$$

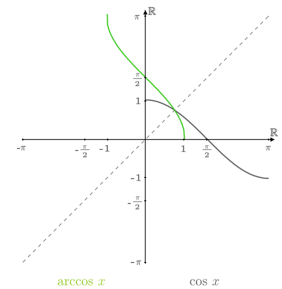
Uwaga: punkt (0,0) jest środkiem symetrii wykresu.

Definicja (Funkcja odwrotna). Funkcja $g : Y \mapsto X$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f : X \to Y$, jeśli dla dowolnego elementu $x \in X$ zachodzi równość $g(f(x)) = x$ i dla dowolnego elementu $y \in Y$ zachodzi równość $f(g(y)) = y$.

Twierdzenie **1.3.6** (Monotoniczność odwrotnej). *Funkcja odwrotna do funkcji rosnącej jest też funkcją rosnącą.*

Dowód. Oznaczmy w założeniu $f(x_1) = r_1$ oraz $f(x_2) = r_2$, funkcja jest silnie rosnąca gdy $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) = r_1 > f(x_2) = r_2$. Negujemy tezę $r_1 > r_2 \Rightarrow f^{-1}(r_1) < f^{-1}(r_2)$. Oznaczamy $\Rightarrow x_1 = f^{-1}(r_1) < x_2 = f^{-1}(r_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ co prowadzi do sprzeczności w założeniu. □

Stwierdzimy, że sposób wyznaczania funkcji odwrotnej powoduje istnienie symetrii wykresów względem przekątnej $y = x$. Na rysunku przedstawiamy funkcję $f(x) = \cos x$, która jest obcięta do podzbioru $[0, \pi]$.



1.3.3 Relacja równoważności

Dla zbioru wartości funkcji Y mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ indeksuje elementy zbioru Y indeksami ze zbioru X, czyli

- X to zbiór indeksów
- Y zbiór indeksowany przez funkcję f

W szczególności indeksowana rodzina zbiorów $A = (A_i)_{i \in I}$. Określimy odpowiednio operacje sumy i przecięcia.

Definicja (Przeliczalna liczba zbiorów). Niech będzie dana indeksowana rodzina zbiorów A. Wtedy sumę i przecięcie A określamy jako:

- $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I :\ x \in A_i.$
- $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I :\ x \in A_i.$

Dana jest relacja $\mathcal{R}$ jako podzbiór $X \times Y$.

Definicja (Relacja równoważności). Dla danej relacji $(x, y) \in \mathcal{R}$ określamy równoważność elementów jeżeli spełnione są własności:

a) relacja jest zwrotna $(x, x) \in \mathcal{R}$ lub $x \sim x$;

b) symetryczna $x \sim y \implies y \sim x$;

c) przechodnia $x \sim y \land y \sim z \implies x \sim z$.

Definicja (Podział na klasy). Dane są niepuste zbiory A_i dla $i \in I$ i wzajemnie rozłączne $A_i \cap A_k = \emptyset$ dla $i \neq k$. Jeżeli $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ wtedy rodzinę zbiorów $(A_i)_{i \in I}$ nazywa się podziałem zbioru B na klasy A_i, gdzie $i \in I$.

Twierdzenie **1.3.7** (Zasada abstrakcji). *Dana jest relacja równoważności w zbiorze A. Wtedy:*

a) każdy element a nalezy do klasy abstrakcji $[a]$ tego elementu;

b) element $a_1 \in [a_2]$ wtedy i tylko wtedy gdy $a_2 \in [a_1]$;

c) zbiór A jest sumą parami rozłącznych klas abstrakcji, czyli

$$A = \bigcup_{a \in A} [a].$$

Dowód. a) bo $a \sim a$; b) bo $a \sim b \implies b \sim a$; c) wystarczy pokazać, że $[a] \cap [b] \neq \emptyset \implies [a] = [b]$; dla $x \in [a] \cap [b]$ mamy $a \sim x \land x \sim b$; wtedy na mocy przechodniości $a \sim b$; również dla dowolnego $y \in [x]$ mamy $x \sim a$ oraz $x \sim b$, czyli $[a] \subseteq [b]$. Podobnie dowodzimy $[b] \subseteq [a]$, czyli równości zbiorów. □

1.3.4 Przestrzeń ilorazowa

Liczby całkowite

Dane są liczby naturalne $a, b, c, d \in \mathbb{N} \cup 0$. Określimy relację równoważności w zbiorze liczb naturalnych z zerem w sposób:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c.$$

Można w skrócie powiedzieć, że liczba całkowita jest skonstruowana jako zbiór wszystkich par liczb naturalnych, które dałyby ten sam wynik przy odejmowaniu. Na przykład liczba całkowita 2 to zbiór zawierający pary liczb naturalnych, których różnica wynosi 2, czyli:

$$\{(2,\ 0),\ (3,\ 1),\ (4,\ 2),\ (5,\ 3),\ \dots\}$$

Określimy teraz działania w zbiorze liczba całkowitych, gdzie $[(a,\ b)]$ oznacza klasę abstrakcji odpowiadającą parze liczb naturalnych $(a,\ b)$.

Działanie	Określenie
dodawanie	$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)]$
zero	$[(0, 0)]$
ujemna	$-[(a, b)] := [(b, a)]$
mnożenie	$[(a, b)] \cdot [(c, d)] := [(ac + bd, ad + bc)]$
jedynka	$[(1, 0)]$

Zapiszemy w notacji przestrzeni ilorazowej

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$$

Liczby wymierne

Dane są liczby całkowite $a, b \in \mathbb{Z};\ \ c, d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Określimy relację równoważności w zbiorze takich liczb całkowitych w następujący sposób:

$$(a, b) \backsim (c, d) \iff a \cdot c = b \cdot d.$$

Dla przykładu liczba wymierna $\frac{1}{2}$ to zbiór zawierający pary liczb całkowitych:

$$\{\dots, (-1, -2), (1, 2), (2, 4), (3, 6), \dots\}$$

Określimy teraz działania w zbiorze liczba wymiernych, gdzie $[(a,\ b)]$ oznacza klasę abstrakcji odpowiadającą parze liczb całkowitych $(a,\ b)$.

Działanie	Określenie
dodawanie	$[(a,b)] + [(c,d)] := [(ad+bc, bd)]$
zero	$[(0,1)]$
ujemna	$-[(a,b)] := [(-a,b)]$
mnożenie	$[(a,b)] \cdot [(c,d)] := [(ac, bd)]$
jedynka	$[(1,1)]$
odwrotna	$[(a,b)]^{-1} := [(b,a)]$ dla $a \neq 0$
porządek	$[(a,b)] < [(c,d)] \iff ad < bc$ dla $bd > 0$

Zapiszemy w notacji przestrzeni ilorazowej

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$$

1.3.5 Przykłady

Ograniczenie funkcji

Zbadamy ograniczenie funkcji wykładniczej $y = \exp(\frac{x}{2}) = e^{\frac{x}{2}}$.

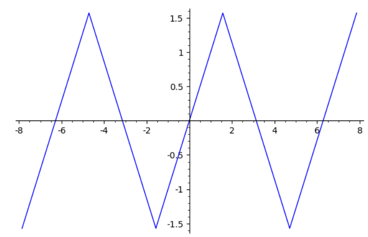
Funkcja jest ograniczona z dołu $\forall x \in \mathbb{R}$ zachodzi $e^{\frac{x}{2}} > 0$ (nierówność ostra), to wynika z określenia funkcji wykładniczej. Brak ograniczenia z góry można wykazać tak:

- po stronie wartości y jeśli wybierzemy dowolną liczbę $M > 0$, to zawsze istnieje argument x, dla którego wartość funkcji przekracza wartość M,
- czyli $x > 2\log_e M \implies e^{x/2} > e^{\log_e M} > M$.

Złożenie funkcji

Omówimy wykres funkcję $f(x) = \arcsin(\sin x))$. Podany poniżej wykres tej funkcji znaczy, że co prawda funkcja cyklometryczna $\arcsin(x)$ jest odwrotna do $\sin(x)$, ale złożenie $(\arcsin \circ \sin)x \neq x$ na całej dziedzinie. Jest tak na pewno na przedziale

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, czyli wykres $y = x$ na tym właśnie przedziale (i wszystkich przesuniętych o $2k\pi$ jak się okazuje, gdzie $k \in \mathbb{Z}$).



Rozpatrzymy $x' = x + \pi$, gdzie $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ natomiast x' przebiega przedział przesunięty na prawo o π, czyli $x' \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Możemy wtedy obliczyć $f(x') = \arcsin(\sin x')) = \arcsin(\sin x + \pi)) = \arcsin(-\sin x)) = -x = \pi - x'$. Wynika stąd, że złożenie na przedziale $x' \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ wygląda ja kawałek prostej

$$f(x') = \pi - x'.$$

Dla pozostałych możliwości pracuje już symetria.

Monotoniczność funkcji

Określimy monotoniczność funkcji $y = x^4 + x^2 + 1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$. Oczywiście z pomocą może przyjść wykres tej funkcji - zauważmy symetrię tego wykresu, że funkcja $f(x) = f(-x)$. Ograniczymy się zatem do rozważań dla $x < 0$ i założymy, że dowolne dwa argumenty są w porządku $x_1 < x_2$. Dalej:

- warto dla funkcji wielomianowej rozpisać różnicę $f(x_2) - f(x_1)$, która wynosi $x_2^4 + x_2^2 - x_1^4 - x_1^2$ i ze wzorów skróconego mnożenia

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)(x_2^2 + x_1^2 + 1)$$

- w tym przypadku wynika, że różnica $f(x_2) - f(x_1) < 0$ i funkcja jest malejąca dla $x < 0$.

Funkcja odwrotna

Wyznaczymy funkcję odwrotną do $y = 1 + \log_2(5x)$, gdzie $x > 0$. Zbiór wartości to wszystkie liczby $y \in \mathbb{R}$. Funkcja jest różnowartościowa i wzajemnie jednoznaczna (bijektywna). Odwrotna to $y = \frac{1}{10}2^x$, Trzeba zwrócić uwagę na zapis bo formalnie rzecz biorąc wychodzi $x = \frac{2^y}{10}$, a jednak podmienia się znaki. Dziedzina odwrotnej to $x > 0$.

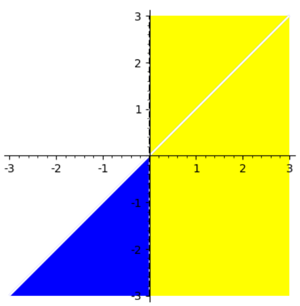
Suma przeliczalnej liczby zbiorów

Na płaszczyznie wyznaczymy zbiór dla $n \in \mathbb{N}$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq nx\}$$

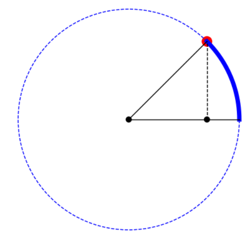
Zapisując szukaną sumę jako $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ warto narysować na płaszczyznie zbiory: $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) : y \leq x\}$ oraz $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2) : y \leq 2x\}$ i określić sytuację gdy n rośnie. Otrzymamy w odpowiedzi następujący zbiór (poniżej rysunek)

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2) : x > 0 \vee y \leq x\}$$



1.4 Funkcje trygonometryczne i wielomiany

1.4.1 Podstawowe określenia



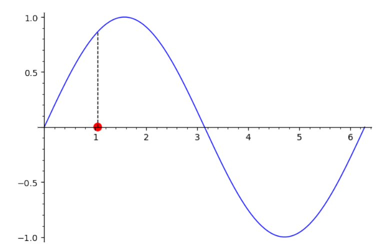
Dany jest okrąg jednostkowy. Punkt na okręgu X, zaznaczony kolorem czerwonym w rysunku, wyznacza kąt skierowany miary x. Skierowanie jest określone odwrotnie do ruchu wskazówek zegara.

Definicja. Określimy dwie funkcje trygonometryczne dla dowolnej liczby rzeczywistej x jako odwzorowania postaci:

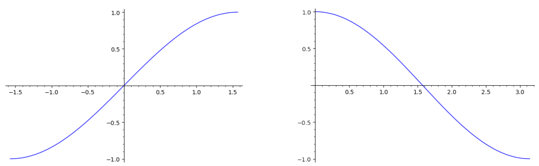
$$x \mapsto \cos x, \text{ oraz } x \mapsto \sin x,$$

gdzie współrzędne punktu $X = (\cos x, \sin x)$.

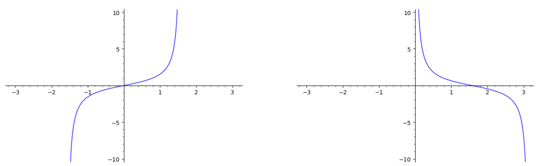
Wykresem funkcji $x \mapsto \sin x$ jest linia na rysunku, gdzie x wyznaczony jest z dokładnością do 2π.



Twierdzenie **1.4.1** (O monotoniczności). *Funkcje trygonometryczne są przedziałami monotoniczne:*



(a) sinus (b) cosinus



(a) tangens (b) cotangens

- *funkcja* $f(x) = \sin x$ *jest ściśle monotoniczna na wielu przedziałach* $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$*; dokładniej dla parzystych* k *jest ściśle rosnąca, natomiast dla nieparzystych* k *jest ściśle malejąca;*

- *funkcja* $f(x) = \cos x$ *jest ściśle monotoniczna na wielu przedziałach* $[k\pi, (k+1)\pi]$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$*; dokładniej dla parzystych* k *jest ściśle malejąca, natomiast dla nieparzystych* k *jest ściśle rosnąca;*

- *funkcja* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *jest ściśle rosnąca na wielu przedziałach* $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ *, gdzie* $k \in \mathbb{Z}$*;*

- *funkcja* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *jest ściśle malejąca na wielu przedziałach* $[k\pi, (k+1)\pi]$, *gdzie* $k \in \mathbb{Z}$.

TWIERDZENIE **1.4.2** (Parzystość i nieparzystość)**.** *Funkcja* $f(x) = \cos x$ *jest funkcją parzystą, Funkcje trygonometryczne:* $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$ *oraz* $f(x) = \operatorname{ctg} x$ *są nieparzyste.*

TWIERDZENIE **1.4.3** (Wzory redukcyjne)**.** *Zachodzą następujące równości dla* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sin(\frac{1}{2}\pi - x) = \cos x \tag{1.5}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \tag{1.6}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \tag{1.7}$$

TWIERDZENIE **1.4.4.** *Funkcje* $\sin(x)$ *oraz* $\cos(x)$ *są* 2π*-okresowe, czyli* $\forall x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x),\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

TWIERDZENIE **1.4.5.** *Funkcje* $\operatorname{tg}(x)$ *oraz* $\operatorname{ctg}(x)$ *są* π*-okresowe, czyli* $\forall x \in \mathbb{R}$*:*

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x),\ \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}(x).$$

TWIERDZENIE **1.4.6** (Jedynka trygonometryczna)**.** *Zachodzi równość* $\forall x \in \mathbb{R}$*:*

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

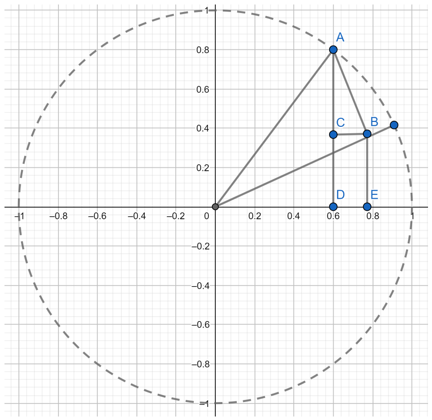
1.4.2 Tożsamości trygonometryczne

TWIERDZENIE **1.4.7** (Wartości dla sumy i różnicy kątów)**.** *Dla dowolnych* $x, y \in \mathbb{R}$ *zachodzą dwie równości:*

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \tag{1.8}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \tag{1.9}$$

Dowód. Dla rysunku na okręgu jednostkowym $x + y$ to miara kąta na promieniu najwyżej (punkt A), natomiast x niżej. Trójąty $\Delta OEB \sim \Delta ACB$ są podobne - cecha kąt/kąt.



Ułożymy zestaw równań dla długości odcinków

$$\begin{cases} \sin(x+y) = |AD| = |AC| + |BE| \\ \cos(x+y) = |OD| = |OE| + |BC| \end{cases}$$

oraz ich proporcji:

$$\begin{cases} |AC| = |AB| \cos x \\ |BE| = |OB| \sin x \\ |BC| = |AB| \sin x \\ |OE| = |OB| \cos x \end{cases}$$

$\square$

Wartości dla sumy i różnicy argumentów

suma kątów	różnica kątów
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$	$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$	$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$
$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$	$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}$

Wartości dla wielokrotności argumentów.

kąty podwojone	kąty potrojone
$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$	$\sin(3\alpha) = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$
$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\operatorname{tg}(3\alpha) = \frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$
$\operatorname{ctg}(2\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}(3\alpha) = \frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$

Postać iloczynowa dla sum i różnic wartości.

suma wartości	różnica wartości
$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$

Iloczyny wartości.

$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\Big)$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\Big)$
$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\Big)$

Wartości połówek kąta.

$\sin(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$	$\cos(\alpha/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$
$\mathrm{tg}(\alpha/2) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\mathrm{ctg}(\alpha/2) = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Rozszerzona tabela wartości.

	$\pi/12$	$\pi/10$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/5$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin(x)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(x)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}(x)$	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}(x)$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Wartości wszystkich funkcji trygonometrycznych dla argumentów postaci $\alpha = \frac{p}{q}\pi$, gdzie liczby $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_+$ można zapisać za pomocą wzoru skończonego z użyciem podstawowych działań arytmetycznych i pierwiastka kwadratowego wtedy i tylko wtedy, gdy po skróceniu ułamka $\frac{p}{q}$ liczba q jest iloczynem potęgi dwójki i różnych liczb pierwszych Fermata: 3, 5, 17, 257, 65537.

1.4.3 Wielomiany

Dana jest funkcja wielomianowa stopnia 2, nazywana funkcją kwadratową, w postaci:

$$x \mapsto f_2(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a \neq 0.$$

TWIERDZENIE **1.4.8** (Postać kanoniczna). *Wartości funkcji $f_2(x)$ można zapisać dla $\Delta := b^2 - 4ac$ w postaci:*

$$f_2(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}.$$

TWIERDZENIE **1.4.9** (Symetria wykresu). *Osią symetrii wykresu funkcji kwadratowej $f_2(x)$ jest prosta pionowa o równaniu $x = -\frac{b}{2a}$.*

TWIERDZENIE **1.4.10** (Obraz funkcji). *Obrazem funkcji kwadratowej $f_2(x)$ jest odpowiedni odcinek:*

- *jeżeli $a > 0$, to $f_2(\mathbb{R}) = \Big[\frac{-\Delta}{4a}, \infty\Big)$; również wtedy $\min f(\mathbb{R}) = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{\Delta}{4a}$;*
- *jeżeli $a < 0$, to $f_2(\mathbb{R}) = \Big(-\infty, \frac{-\Delta}{4a}\Big]$; również wtedy $\max f(\mathbb{R}) = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{\Delta}{4a}$;*

TWIERDZENIE **1.4.11** (Miejsca zerowe). *Jeżeli $\Delta \geq 0$, to:*

- *istnieją pierwiastki rzeczywiste: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *suma pierwiastków $x_1 + x_2 = -b/a$ oraz iloczyn $x_1 \cdot x_2 = c/a$;*
- *jeżeli dla pewnych liczb a,b spełniona jest nierówność $f(a) \cdot f(b) < 0$, to istnieje dokładnie jeden pierwiastek w przedziale (a, b).*

1.4.4 Przykłady

Dziedzina i zbiór wartości

Wyznaczymy dziedzinę funkcji oraz określ jej zbiór wartości dla wzoru

$$y = \frac{2}{1 + \cos x}$$

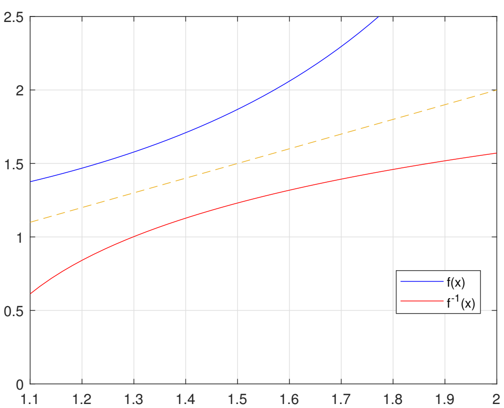
Oczywiście warunek dla dziedziny to $1 + \cos x \neq 0$, który trzeba rozwiązać. Natomiast po paru próbach można dla wartości funkcji ułożyć nierówność $\frac{2}{1+\cos x} \geq \frac{2}{2}$, którą trzeba udowodnić - tutaj trudno nie jest.

- dziedzina $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + 2k\pi\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$
- zbiór wartości $W_f = [1, \infty)$

Dodatkowo:

- można zauważyć, że funkcja nie jest różnowartościowa: $y = 2 = f(\pi/2) = f(-\pi/2)$;
- można roztrzygnąć symetrię $f(x) = f(-x)$ i określić przedziałami monotoniczność: dla $0 \leq x < \pi$ jest rosnąca (wynika z monotoniczności (malejąca) funkcji $\cos x$ na tym przedziale).

Wykres funkcji i odwrotnej:



1.5 Struktury algebraiczne

1.5.1 Grupa elementów

$$* : A \times A \to A$$

Definicja. Zbiór A z działaniem $*$ jest grupą, jeżeli $\forall a, b, c$

- $(a * b) * c = a * (b * c)$ - działanie jest łączne,
- istnieje element neutralny $e \in A$, że

$$e * a = a * e = a$$

- istnieje element odwrotny a^{-1}, że

$$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e.$$

Grupa jest przemienna, jeżeli $a * b = b * a$ dla dowolnych $a, b \in A$.

1.5.2 Własności algebraiczne liczb rzeczywistych

W zbiorze określone są dwie operacje, które spełniają następujące własności $\forall\ a, b, c \in \mathbb{R}$:

(D.1) $a + b = b + a$, czyli przemienność dodawania;

(D.2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, czyli łączność dodawania;

(D.3) istnieje element $0 \in \mathbb{R}$, taki że $a + 0 = a$;

(D.4) istnieje element odwrotny $-a \in \mathbb{R}$ taki, że $a + (-a) = 0$;

(M.1) $a \cdot b = b \cdot a$, czyli przemienność mnożenia;

(M.2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, czyli łączność mnożenia;

(M.3) istnieje element $1 \in \mathbb{R}$, taki że $a \cdot 1 = a$;

(M.4) istnieje element odwrotny $1/a$ taki, że $a \cdot (1/a) = 1$ dla $a \neq 0$;

(R) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, czyli rozdzielność mnożenia względem dodawania.

Na początek, wykażemy własność, że elementy 0 oraz 1, których istnienie założyliśmy w D3 oraz M3 są określone jednoznacznie.

TWIERDZENIE **1.5.1.** *Dla elementów neutralnych zachodzą trzy własności:*

a) jeżeli $x, a \in \mathbb{R}$ oraz $x + a = a$, to $x = 0$;

b) jeżeli $y, b \neq 0 \in \mathbb{R}$ oraz $yb = b$, to $y = 1$;

c) jeżeli $a \in \mathbb{R}$, to $a \cdot 0 = 0$;

Dowód. a) korzystając z D3, D4, D2 oraz założenia, to $x = x + 0 = x + (a + (-a)) = (x + a) + (-a) = a + (-a) = 0$.
b) korzystając z M3, M4, M2 oraz założenia, to $y = y \cdot 1 = y \cdot (b \cdot (1/b)) = (y \cdot b) \cdot 1/b = b \cdot 1/b = 1$
c) $a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 = a \cdot (1 + 0) = a \cdot 1 = a$ stąd korzystając z a) otrzymamy $a \cdot 0 = 0$. □

Podobnie można wykazać własności unikalności elementów odwrotnych, które zostały określone w D4 oraz M4.

TWIERDZENIE **1.5.2.** *Zachodzą własności:*

a) jeżeli $a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$ spełniają $a \cdot b = 1$, to $b = 1/a$.

b) Jeżeli $a,\ b \in \mathbb{R}$ oraz $a \cdot b = 0$, to $a = 0$ lub $b = 0$.

Dowód. a) Korzystając z M3 M4 oraz M2 i założenia otrzymamy $b = 1 \cdot b = (a \cdot 1/a) \cdot b = (a \cdot b) \cdot (1/a) = 1 \cdot (1/a) = 1/a$.
b) wystarczy pokazać, że $b = 0$ dla przypadku $a \neq 0$, czyli $(1/a) \cdot (a \cdot b) = ((1/a) \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b$. Z drugiej strony korzystając z założenia $a \cdot b = 0$ oraz poprzedniego twierdzenia $(1/a) \cdot (a \cdot b) = 1/a \cdot 0 = 0$, Stąd $b = 0$. □

Określimy teraz dobrze znane operacje.

DEFINICJA. Dla liczb rzeczywistych określimy odejmowanie oraz dzielenie:

- $a - b := a + (-b)$ dla $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
- $a/b := a \cdot (1/b)$ dla $a \in \mathbb{R}$ oraz $b \neq 0$.

1.5.3 Własności uporządkowania

Wyróżnimy podzbiór elementów $\mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}$, które spełniają warunki:

- $a, b \in \mathbb{R}_+ \implies a + b \in \mathbb{R}_+$
- $a, b \in \mathbb{R}_+ \implies a \cdot b \in \mathbb{R}_+$
- jeżeli $a \in \mathbb{R}$, to zachodzi jedna z możliwości (prawo trychotomii):

$$a \in \mathbb{R}_+,\ a = 0,\ -a \in \mathbb{R}_+$$

Używając znanego symbolu nierówności

$$a \in \mathbb{R}_+ \implies a > 0.$$

DEFINICJA. Niech $a, b \in \mathbb{R}$.

- Jeżeli $a - b \in \mathbb{R}_+$, to zapiszemy $a > b$.
- Jeżeli $a - b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$, to zapiszemy $a \geq b$.

Uwaga: prawo trychotomii zapiszemy teraz: dla dowlonych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi jedna z możliwości:

$$a > b,\ a = b,\ b > a.$$

TWIERDZENIE **1.5.3** (Reguły dla nierówności)**.** *Niech dowolne $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

- $a > b \wedge b > c \implies a > c.$
- $a > b \implies a + c > b + c.$
- $a > b \wedge c > 0 \implies ac > bc.$
- $a > b \wedge 0 > c \implies bc > ac.$

Dowód. a) Jeżeli $a - b \in \mathbb{R}_+$ oraz $b - c \in \mathbb{R}_+$, to $(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathbb{R}_+$, czyli $a > c$.
b) Jeżeli $a - b \in \mathbb{R}_+$, to $(a + c) - (b + c) = a - b \in \mathbb{R}_+$, to $a + c > b + c$.
c) Jeżeli $a - b \in \mathbb{R}_+$ oraz $c \in \mathbb{R}_+$, to $ca - cb = c(a - b) \in \mathbb{R}_+$, to $ca > cb$. □

TWIERDZENIE **1.5.4.** *W uporządkowanym zbiorze $\mathbb{R}$ zachodzą własności:*

- *dla dowlonego $a \in \mathbb{R}$ oraz $a \neq 0$ zachodzi nierówność $a^2 > 0$;*

- $1 > 0$;
- $n \in \mathbb{N} \implies n > 0$.

Dowód. a) z prawa trychotomii $a \in \mathbb{R}_+$ lub $-a \in \mathbb{R}_+$, w obydwou przypadkach $a \cdot a \in \mathbb{R}_+$ oraz $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}_+$.
b) ponieważ $1 = 1 \cdot 1 \in \mathbb{R}_+$.
c) korzystamy z zasady indukcji matematycznej: dla $n = 1$ to prawda; implikacja oczywiście zachodzi $k \in \mathbb{R}_+ \implies k+1 \in \mathbb{R}_+$. □

TWIERDZENIE **1.5.5** (O najmniejszej dodatniej)**.** *Jeżeli $a \in \mathbb{R}$, takie że $\varepsilon > a \geq 0$ dla każdej liczby $\varepsilon > 0$, to $a = 0$.*

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $a > 0$. Weźmy $\varepsilon = a/2$, wtedy $0 < \varepsilon < a$. Otrzymaliśmy sprzeczność, że $\varepsilon > a$ dla każdego $\varepsilon > 0$. □

TWIERDZENIE **1.5.6** (O iloczynie dodatnich)**.** *Jeżeli $ab > 0$, to*

- $a > 0 \wedge b > 0$ *lub*
- $a < 0 \wedge b < 0$

Dowód. Dla $ab > 0$ otrzymamy $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$. Z prawa trychotomii $a > 0$ lub $a < 0$. Jeżeli $a > 0$, to $1/a > 0$ i dlatego $b = (1/a)(ab) > 0$, Dla $a < 0$ otrzymamy $b < 0$. □

1.5.4 Oś liczbowa

Odległość liczb $a, b \in \mathbb{R}$ jest określona jako $|a - b|$.

DEFINICJA**.** Niech $a \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \ni \varepsilon > 0$. Otoczeniem epsylonowym liczby a nazywamy zbiór
$$V_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}.$$

TWIERDZENIE **1.5.7.** *Niech $a \in \mathbb{R}$. Jeżeli $x \in V_\varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$, to $x = a$.*

TWIERDZENIE **1.5.8** (Nierówność trójkąta)**.** *Dla wartości bezwzględnej zachodzi nierówność trójkąta $\forall a, b \in \mathbb{R}$*
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

TWIERDZENIE **1.5.9.** *Dla wartości bezwzględnej zachodzą nierówności $\forall a, b \in \mathbb{R}$*

- $||a| - |b|| \leq |a - b|$.
- $|a - b| \leq |a| + |b|$.
- $|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ *dla wszystkich* $a_i \in \mathbb{R}$.

1.5.5 Przykłady

Element odwrotny

Wyznaczymy element odwrotny do liczby $2+3\sqrt{2}$ względem mnożenia i wynik zapisz w postaci algebraicznej $a + b\sqrt{2}$. Wyznaczamy $(2+3\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{2+3\sqrt{2}}$. Doprowadzenie do postaci algebraicznej to po prostu usuwanie niewymierności. Używamy zwykle tzw. sprzężenia dla liczby w mianowniku:
$$\frac{1}{2+3\sqrt{2}} = \frac{1}{2+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2-3\sqrt{2}}{2-3\sqrt{2}}$$

Element neutralny

Dany jest podzbiór liczb rzeczywistych $G = \{g \in \mathbb{R} : g \neq -1\}$. Wyznacz element neutralny dla działania określonego wzorem:
$$g_1 * g_2 := g_1 + g_2 + g_1 g_2$$

Zauważmy, że działanie jest określone przez prawą stronę tego równania. Na przykład wbrew znanemu faktowi
$$2 * 2 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 = 8$$

Element neutralny tego mnożenia wyznaczamy tutaj przez wskazanie 0 jako pasującego do wzoru, czyli
$$\forall g \in G : \ g * 0 = 0 * g = g$$

Bijekcja jako permutacja

Sprawdzimy, że podana funkcja określa permutację podzbioru liczb naturalnych od zera: $0, 1, 2, ..., 24$, gdzie $E(x)$ to część całkowita z liczby $E(x) = \lfloor x \rfloor$.
$$f(x) = 3x + 3 - 25 \cdot E\left(\frac{x}{8}\right)$$

Zauważmy, że $f(0) = 3$, $f(1) = 3 + 3 - 25 \cdot 0 = 6$ itd. Tutaj trzeba sprawdzić całą tabelkę funkcji dla $x = 0, ..., 24$.

Mnożenie permutacji

Dana jest grupa permutacji pięciu elementów S_5 oraz ustalone dwa elementy tej grupy, które podane są w postaci tabelki funkcji: $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ oraz $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Obliczymy iloczyn tych elementów $\sigma_1 \cdot \sigma_2$. Wyznaczymy element odwrotny dla permutacji σ_1^{-1}.

Będziemy składać permutacje od lewej:

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Element odwrotny (można uporządkować górny wiersz)
$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

1.6 Liczby zespolone

1.6.1 Ciało liczb zespolonych

$$x^2 + x + 1 = 0 \tag{1.10}$$

Przykład. Rozważymy równanie kwadratowe z deltą ujemną $\Delta = -3$:

$$x^2 + x + 1 = 0 \tag{1.11}$$

Rozwiązaniami tego równania są *liczby niemożliwe* postaci

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Są to rozwiązania formalne - podstawiamy je do równania (1) i sprawdzamy, że je spełniają. Prostym zabiegiem umożliwiającym rachunek dla dowolnych ujemnych wartości delta jest przedstawienie $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\sqrt{-1}$. Wtedy rozwiązaniq $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{|\Delta|}\sqrt{-1}}{2a}$ nie zmieniają postaci algebraicznej, w której się je zapisuje.

Rozważymy zatem liczby w systemie zapisu $a + b\sqrt{-1}$, które będziemy dodawać i mnożyć. Są to obliczenia z użyciem elementu urojonego $i^2 = -1$. Czyli postać rozwiązań będziemy zapisywać jako

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ oraz } x_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Dodawanie dwóch liczb $a+b\sqrt{-1}$ oraz $a'+b'\sqrt{-1}$ wykonujemy po współrzędnych, czyli $(a + a') + (b + b')i$. Mnożenie liczb potraktujemy jak mnożenie nawiasów, czyli

$$(a + bi)(a' + b'i) = aa' + ab'i + ba'i + bb'ii = aa' - bb' + (ab' + ba')i$$

Definicja. Ciało liczb zespolonych $\mathbb{C}$ to pary liczb rzeczywistych $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ z dwoma działaniami określonymi następująco:

- dodawanie
$$(a, b) + (a', b') := (a + a', b + b')$$
- mnożenie
$$(a, b) \cdot (a', b') := (aa' - bb', ab' + a'b)$$

Uwagi dotyczące działań w liczbach zespolonych:

- dla dodawania element neutralny $(0,0)$
- dla dodawania element przeciwny $(-a,-b)$
- dla mnożenia jedynka $(1,0)$
- dla mnożenia element przeciwny $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Ścisłe identyfikacje elementu urojonego jako liczby zespolonej:

- $(a,b) = (a,0) + (b,0) \cdot (0,1)$
- $i^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$

Relacja porządku. Ciała liczb zspolonych nie da się uporządkować przez relację $\leq$. Dokłądnie oznacza to, że nie istnieje relacja, która spełnia cztery aksjomaty. Krótko mówiąc dla każdego elementu ciała a różnego od zera zachodzi własność $a^2 > 0$, Tutaj $-1 < 0$, ale też $-1 = i^2 > 0$, czyli sprzeczność.

1.6.2 Postacie liczb zespolonych

Wielomiany. Rozważymy liczby zespolone jako wielomiany a+bx stopnia ≤ 1. Zbiór $\mathbb{R}_1[x]$ oznacza wielomiany nad x stopnia mniejszego lub równego jeden.

Stwierdzimy, że zbiór $\mathbb{R}_1[i]$ dla elementu (zmiennej) $i^2 = -1$, jest izomorficzny z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$. gdzie izomorfizm (podobieństwo algebraiczne) określamy jako:

$$\mathbb{C} \ni (a,b) \to T(a,b) := a + bi \in \mathbb{R}_1[i]$$

Wtedy otrzymujemy reguły rachunkowe jak dla wielomianów:

- $w(i) + w'(i) = (a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$
- $w(i) \cdot w'(i) = (a + bi) \cdot (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$

Postać algebraiczna liczby zespolonej. Faktem jest, że każdą liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ możemy zapisać w postaci algebraicznej dla $a, b \in \mathbb{R}$:

$$z = a + bi$$

Nazwy stosowane: *realis* dla z to liczba a=Re(z) oraz *imaginalis* dla z to liczba b=Im(z).

Ponownie rozważymy działania algebraiczne dla liczb zespolonych w nowych oznaczeniach $z_1 = (a,b)$ oraz $z_2 = (c,d)$: Teraz:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi)(c + di) = ac + (bc + ad)i + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- w szczególności dzielenie:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) i.$$

Uwaga: rozdzielność mnożenia względem dodawania oznacza dokładnie równość:

$$(a + bi) \cdot [(a' + b'i) + (a'' + b''i)] = (a + bi) \cdot (a' + b'i) + (a + bi) \cdot (a'' + b''i)$$

Sprzężenie i moduł

Sprzężenie liczby zespolonej, które polega na wstawieniu minusa $a - bi$, dostarcza wielu użytecznych określeń. Zapiszmy to prostą definicją.

Definicja. Dla liczby zespolonej w postaci algebraicznej $z = a + bi$ liczba sprzeżona do niej to $\overline{z} = a - bi$.

Sprzężenie $\mathbb{C} \ni z \mapsto \overline{z} \in \mathbb{C}$ jest automorfizmem (samopodobieństwem) zbioru liczb zespolonych. Czyli dla sumy oraz mnożenia $\overline{(z_1 + z_2)}$ oraz $\overline{(z_1 \cdot z_2)}$ mamy spodziewane wyniki jako $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ oraz $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ odpowiednio.

Definicja. Określimy dwa odwzorowania Re oraz Im dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ (bez postaci algebraicznej):

- Re(z):=$\frac{1}{2}(z + \overline{z}) \in \mathbb{R}$ tzw. część rzeczywista liczby
- Im(z):=$\frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \in \mathbb{R}$ tzw. część urojona liczby

Stwierdzimy, że zachodzą następujące (proste) tożsamości:

1. Re$(a + bi)$=a, Im$(a + bi)$=b
2. z = Re(z)+Im$(z)\mathbf{i}$
3. Re$(z + z')$=Re(z)+Re(z') oraz Im$(z + z')$=Im(z)+Im(z')

Definicja. Moduł liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ to nieujemna liczba rzeczywista $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in [0, +\infty)$.

Moduł liczby zespolonej to po prostu odległość od początku układu współrzędnych na płaszczyznie zespolonej. Mamy następujące własności funkcji $|z|$:

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, czyli nierówność trójkąta
2. $|zz'| = |z||z'|$
3. $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$, $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$

Postać biegunowa i trygonometryczna

Dla $z \neq 0 \in \mathbb{C}$ istnieje jednoznaczny rozkład tej liczby postaci

$$z = ru, \text{ gdzie } r > 0, u \in \mathbb{C} : \ |u| = 1.$$

Definicja. Argumentem Arg(z)$\in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ nazywamy kąt ϕ, który jest (jedynym) rozwiązaniem układu równań:

$$\begin{cases} \cos\phi = \frac{\mathrm{Re}z}{|z|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\phi = \frac{\mathrm{Im}z}{|z|} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Stwierdzimy, że dla $z \neq 0$ otrzymujemy tożsamość nazywaną postacią trygonometryczną liczby zespolonej:

$$z = |z| \left(\cos(\mathrm{Arg}(z)) + i\sin(\mathrm{Arg}(z)\right) = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Dowód. Dla $z = a + bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$ □

Odwzorowanie $z \to (|z|, \mathrm{Arg}(z))$ jest bijektywne (wzajemnie jednoznaczne). Stwierdzimy, że jeśli $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r \in (0, \infty)$ oraz $\phi \in [0, 2\pi)$, to $|z| = r$ oraz $\mathrm{Arg}(z) = \phi$.

Mamy następujące własności funkcji Arg (z):

1. $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \pmod{2\pi}$
2. $\mathrm{Arg}(\frac{1}{z}) = \mathrm{Arg}(\overline{z}) = -\mathrm{Arg}(z)$

Dowód. Dla (3) mamy: $z_1z_2 = r_1r_2(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) = r_1r_2[(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2) + i(\sin\phi_1\cos\phi_2 + \cos\phi_1\sin\phi_2)] = r_1r_2[\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)]$ □

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Weźmiemy pod uwagę oznaczenie tzw. symbol Eulera

$$e^{i\phi} := \cos\phi + i\sin\phi$$

Wtedy wzory Eulera oznaczają reguły: $\cos\phi = \frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2}$; oraz $\sin\phi = \frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i}$

Twierdzenie **1.6.1.** *Każdą liczbę zespoloną $z \in \mathbb{C}$ możemy zapisać w postaci wykładniczej dla $r \geq 0, \phi \in \mathbb{R}$:*

$$z = re^{i\phi}$$

Dowód. Dla

$$z = re^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi) = (|z|(\cos\phi + i\sin\phi)) = \left(|z|(\frac{e^{i\phi}+e^{-i\phi}}{2} + i\frac{e^{i\phi}-e^{-i\phi}}{2i})\right)$$

czyli postać trygonometryczna liczby zespolonej. □

Odnotujmy, że najbardziej znanym wnioskiem jest formuła $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Zajmiemy się potęgowaniem liczby zespolonej. Potęgowanie można określić dla liczby naturalnej oraz dla liczby całkowitej. Oznacza to na przykład, że mają sens symbole: z^2 oraz z^{-2}.

Twierdzenie **1.6.2.** *(de Moivre'a). Dla dowolnej liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{Z}$ zachodzi wzór:*

$$z^n = (|z|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|^n(\cos n\phi + \sin n\phi).$$

Dowód. Jest to własność symbolu Eulera $(e^{i\phi})^n = e^{ni\phi}$ - własności funkcji $\mathrm{Arg}(z)$. □

Uwaga: twierdzenie można zapisać jeszcze na dwa sposoby:

- $|z^n| = |z|^n$ oraz $\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z)$ - z użyciem funkcji argument
- $z^n = |z|e^{i\phi^n} = |z|^n e^{ni\phi}$ - z użyciem symbolu Eulera

1.6.3 Zbiory na płaszczyźnie zespolonej

Podstawową obserwacją dla wielu konstrukcji geometrycznych jest fakt, że odległość dwóch punktów z_1 oraz z_2 na płaszczyźnie zespolonej wynosi $|z_1 - z_2|$. Dla puntu z_3, który będzie tworzył trójkąt z podanymi punktami z_1 oraz z_2 mamy znaną nierówność o sumie boków

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2|$$

Prosta. Na początek wyznaczymy symetralną odcinka pomiędzy dwoma punktami płaszczyzny zespolonej z_1 oraz z_2. Punkty $z \in \mathbb{C}$, które należą do tej symetralnej spełniają równanie

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

Okrąg. Dla okręgu punkty spełniają prostą zależność na odległość promienia R od podanego środka okręgu z_0. Jeśli punkt $z \in \mathbb{C}$ należy do takiego okręgu, to spełnia równanie

$$|z - z_0| = \mathrm{R}$$

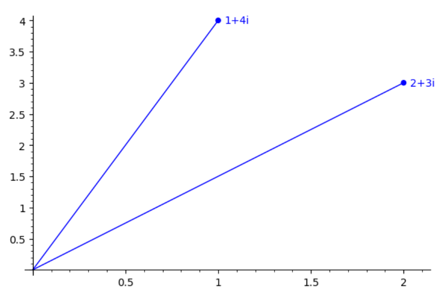
Przykład. Okrąg jednostkowy R=1 o środku w punkcie (0,0) ma równanie $|z| = 1$.

Zajmiemy się teraz ogólnym równaniem prostej postaci A·Re(z)+B·Im(z)+C=0. Wprowadzając postać algebraiczną $z = x + iy$ otrzymamy równanie ogólne prostej $Ax + By + C = 0$.

Sektor kątowy. Podamy dwa punkty z_1 oraz z_2 na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. Można zauważyć, że miarą kąta zorientowanego pomiędzy odcinkami Oz_1 oraz Oz_2

$$\angle(z_1, z_2) = \arg \frac{z_2}{z_1}$$

Przykład. Dane są liczby zespolone $z_1 = 2+3i$ oraz $z_2 = 1+4i$. Obliczymy liczbę $\frac{z_2}{z_1} = \frac{1+4i}{2+3i} = \frac{14}{13} + i\frac{5}{13}$. Wtedy $\arg \frac{z_2}{z_1} \simeq 0,34$, czyli kąt wynosi w przybliżeniu $19,65^o$. Sytuację przedstawimy na płaszczyźnie zespolonej



Podamy teraz zapis obszaru, który jest sektorem kątowym na płaszczyźnie zespolonej. Rozważymy liczby $z \in \mathbb{C}$, które spełniają równanie

$$\alpha \leq \arg z \leq \beta$$

Przykład. Wyznaczymy obszar na płaszczyźnie $\frac{\pi}{6} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$. Jest to sektor, który leży w pierwszej ćwiartce pomiędzy półprostymi nachylonymi odpowiednio 30^o oraz 60^o.

Określenie kąta. Wprowadzimy symbol logarytmu dla liczb zespolonych. Formalnie możemy obliczać go także dla ujemnych liczb rzeczywistych.

Dla liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ możemy określić obliczenia:

$$\ln z = \ln \left(|z| \cdot e^{i \cdot \arg z}\right) =$$

$$= \ln|z| + i \arg z = \ln|z| + i(\phi + 2k\pi) = \ln z = \ln \left(|z| \cdot e^{i \cdot \arg z}\right) = \ln|z| + i \arg z$$

Załóżmy dla $z \in \mathbb{C}$, że k jest dowolną liczbą całkowitą, $\ln|z|$ jest zwykłym logarytmem naturalnym z modułu liczby oraz ϕ to argument główny tej liczby. Wtedy funkcję logarytm z liczby zespolonej będziemy obliczać jako:

$$\ln z = \ln|z| + i(\phi + 2k\pi),$$

Przykład. $\ln 1 = 2k\pi i$ oraz $\ln i = \frac{4k+1}{2}\pi i$. Natomiast dla liczby ujemnej $\ln(-1) = (2k+1)\pi i$.

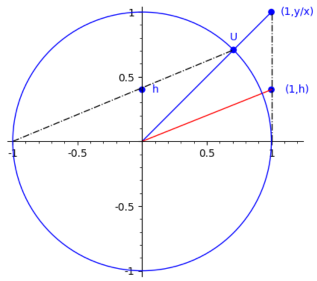
Inna miara kąta. Wykorzystamy teraz postać biegunową liczby do zastąpienia (w pewnym sensie) kąta przez liczbę. Liczba zespolona $(|z|, \phi)$ zostanie zastąpiona przez parę liczb rzeczywistych (r, h). Jest to szczególna forma postaci biegunowej, w której jak wiemy występuje para (r, u), czyli liczba rzeczywista oraz zespolona.

Rozważmy okrąg jednostkowy na płaszczyźnie zespolonej. Wszystkie liczby $u = x + iy$ leżące na okręgu mają jednostkowy moduł, czyli $|u| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Możemy podać parametryzację liczby u przez liczbę rzeczywistą $h \in \mathbb{R}$ wykorzystując odcinek łączący liczbę

$$u = \frac{1 - h^2}{1 + h^2} + i\frac{2h}{1 + h^2}$$

Dowód. Trzeba ułożyć dwa warunki: $\begin{cases} y = h(1+x) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ oraz rozwiązać wynikające z nich równanie kwadratowe: $(1 + h^2)x^2 + 2h^2x + h^2 - 1 = 0$. □

Teraz weźmiemy pod uwagę dwie linie wychodzące z początku układu współrzędnych. Linia pierwsza, która przechodzi przez punkt u oraz linia druga, która przechodzi przez punkt $(1, h)$. Zauważmy, że liczba rzeczywista h opisuje obrót, który dotyczy lini drugiej - jest to jej nachylenie.



Prosta wychodząca z początku układu współrzędnych i przechodząca przez punkt $(1.h)$ jest dwusieczną kąta. Można pokazać, że środek odcinka pomiedzy liczbą u a liczbą $(1,0)$ należy do tej prostej, czyli punkt $(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2})$ należy do prostej $y = hx$. Istotnie $y/2 = h\frac{1+x}{2}$, czyli

$$\frac{h}{1+h^2} = h\frac{1+\frac{1-h^2}{1+h^2}}{2}$$

Dla odwzorowania, który jest obrotem możemy zapisać

$$u = R^{\phi}(1,0) = 1 \cdot e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

Z drugiej strony dla elementu $\frac{(1,h)}{|(1,h)|} = R^h(1) = 1 \cdot \frac{(1+ih)}{|(1,h)|} = \frac{1+ih}{|(1,h)|}$, czyli

$$u = R^h(R^h(1,0)) = \left(1 \cdot \frac{(1+ih)}{|(1,h)|}\right) \cdot \frac{(1+ih)}{|(1,h)|} = \frac{(1+ih)^2}{|(1,h)|^2} = \frac{1-h^2}{1+h^2} + i\frac{2h}{1+h^2}$$

Zatem obrót na kole jednostkowym może być opisany jako dwukrotne mnożenie przez pewną liczbę zespoloną wyznaczoną przez $h \in \mathbb{R}$. Dla kompletu, chodzi o grupę obrotów, opiszemy jeszcze obrót odwrotny oraz identyczność (obrót o kąt zero) jako $R^0(u) = (1,0)(u)$:

$$(1,0) = R^{-h}(R^{-h}(u)) = \left(u \cdot \frac{(1-ih)}{|(1,h)|}\right) \cdot \frac{(1-ih)}{|(1,h)|} =$$

$$= \left(\frac{1-h^2}{1+h^2} + i\frac{2h}{1+h^2}\right) \cdot \frac{(1-ih)^2}{1+h^2} = \left(\frac{1-h^2}{1+h^2} + i\frac{2h}{1+h^2}\right) \cdot \left(\frac{1-h^2}{1+h^2} - i\frac{2h}{1+h^2}\right) = 1$$

Rozważmy teraz dowolny punkt płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C} \ni z = x + iy$. Dla liczby $\frac{z}{|z|} = \frac{x}{|x|} + i\frac{y}{|z|} = \frac{1-h^2}{1+h^2} + i\frac{2h}{1-h^2}$. Wynika to z faktu, że jest to liczba na okręgu jednostkowym.

Twierdzenie **1.6.3.** *Dla liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $y \neq 0$, pół-obrót jest wyznaczony przez*

$$h = \frac{|z| - x}{y}$$

1.6.4 Przykłady

Równanie Viete'a

Rozwiążemy przykładowe równanie postaci $\cos nx = \cos x$. Szukamy niewiadomej x dla której na przykład $n = 2$, czyli

$$\cos 2x = \cos x$$

Korzystając ze wzoru de Moivre'a możemy obliczyć znane ze szkoły zależności dla np. $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$ oraz $\cos 3\alpha$ itp. za pomocą wyrażeń zależnych od $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$. Rozpatrzymy wyraz $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2$. Wzory skróconego mnożenia oraz twierdzenie Moivre'a dają odpowiednio lewą i prawą stronę równania:

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

Stąd na przykład $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$. Dla części rzeczywistej otrzymujemy $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. Dla równania mamy $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos\alpha$ lub równanie kwadratowe postaci:

$$2\cos^2\alpha - \cos\alpha - 1 = 0$$

Rozwiązujemy to przez znaną metodę z deltą, gdzie podstawiamy $t = \cos\alpha$, czyli dla $-1 \le t \le 1$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

Otrzymujemy $t = 1$ oraz $t = -1/2$. Czyli w przedziale podstawowym $[0, \pi]$ istnieją dwa rozwiązania $x_0 = 0$ lub $x_0 = \frac{2\pi}{3}$. To są kąty dwóch przecinających się prostych, które mają rozważaną własność dla podwojonego kąta.

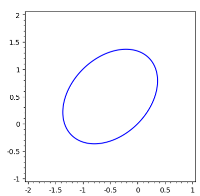
Elipsa na płaszczyznie zespolonej

Wyznaczymy zbiór na płaszczyznie zespolonej:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z+1| + |z-i| = 2\}$$

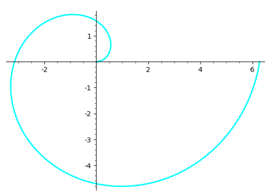
Geometrycznie ten warunek może być rozumiany jako: suma odległości punktu $z \in \mathbb{C}$ od punktów -1 oraz i jest równa 2. Jest to elipsa o tych dwóch ogniskach.

Jawne równanie tej elipsy możemy wyprowadzić przez podstawienie $z = x + iy$. Wtedy $|z+1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ oraz $|z-i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$. Wykresem otrzymanej realcji $-12x^2 + 8xy - 12y^2 - 16x + 16y = 0$ jest



Spirala Archimedesa

Przykład. Podamy warunek dla zbioru punktów, które spełniają $|z| = \phi$.



1.7 Wielomiany nad ciałem liczb

1.7.1 Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie **1.7.1** (Zasadnicze twierdzenie algebry)**.** *Każdy wielomian stopnia dodatniego nad ciałem liczb zespolonych ma pierwiastek w* $\mathbb{C}$.

Dowód można znaleźć w [3].

Zauważmy, że jeżeli $W(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ stopnia n, to zachodzi równość dla pewnych liczb $\alpha_i \in \mathbb{C}$, niekoniecznie różnych:

$$W(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \cdot ... \cdot (z - \alpha_n).$$

1.7.2 Rozwiązywanie równań

Dane będzie ciało $\mathbb{K}$, które na wykładach będzie zwykle $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

Równanie kwadratowe

Dla wielomianu stopnia drugiego nad ciałem liczb zespolonych w $\mathbb{C}[x]$ rozważymy równanie kwadratowe $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Określimy wyróżnik tego wielomianu dla dwóch pierwiastków x_1, x_2:

$$\Delta = a^2(x_1 - x_2)^2.$$

Przekształcimy wielomian do postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Stąd równanie kwadratowe można równoważnie zapisać dla wyróżnika wynoszącego $\Delta = b^2 - 4ac$ w postaci:

$$(2ax + b)^2 = \Delta$$

Podstawimy $y = 2ax + b$ i zapiszemy wyróżnik w postaci algebraicznej $\Delta = u + iv$ otrzymując równanie w postaci kanonicznej:

$$y^2 = u + iv$$

Twierdzenie **1.7.2** (Rozwiązania równania kanonicznego)**.** *Istnieją dwa rozwiązania równania kwadratowego w postaci kanonicznej dla* $\Delta = u + iv$ *oraz* $|\Delta| = \sqrt{u^2+v^2}$*:*

$$y = \pm\left(\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{|\Delta|+u}{2}} + i\sqrt{\frac{|\Delta|-u}{2}}\right).$$

Dowód. Pokażemy przez bezpośrednie sprawdzenie, że podnosząc do kwadratu otrzymane rozwiązania dla y otrzymamy równanie $y^2 = u+iv$. Dla postaci tych rozwiązań:

$$y^2 = \left[\pm\left(\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{|\Delta|+u}{2}} + i\sqrt{\frac{|\Delta|-u}{2}}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{|\Delta|+u}{2} + 2i(\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{|\Delta|+u}{2}}\sqrt{\frac{|\Delta|-u}{2}} + i^2\frac{|\Delta|-u}{2} =$$

$$u + 2i\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{|\Delta|^2-u^2}{4}} = u + 2i\operatorname{sgn}(v)\sqrt{\frac{u^2+v^2-u^2}{4}} = u + iv.$$

□

Rozważymy teraz sytuację gdy współczynniki wielomianu kwadratowego są rzeczywiste, czyli wielomiany w $\mathbb{R}[x]$.

Twierdzenie **1.7.3** (Rozwiązania równania)**.** *Dla współczynników rzeczywistych wielomianu* $ax^2 + bx + c$ *rozwiązania równania kwadratowego dla wyróżnika* $\Delta = b^2 - 4ac$ *są następujące:*

- *jeżeli* $\Delta > 0$ *istnieją dwa rozwiązania rzeczywiste:*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *jeżeli* $\Delta = 0$ *istnieje pierwiastek podwójny* $x = -\frac{b}{2a}$*;*

- *jeżeli* $\Delta < 0$ *istnieją dwa rozwiązania zespolone, które są wzajemnie sprzężone*

$$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Wzory Viete'a. Podobnie jak w zwykłym przypadku zachodzą wzory

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

oraz pierwiastki można użyć w rozkładzie wielomianu kwadratowego na czynniki

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Równanie stopnia trzeciego

Wielomian trzeciego stopnia będzie dany w $\mathbb{C}[x]$. Dla równania

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

określimy wyróżnik $\Delta = a^4(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ względem trzech pierwiastków x_1, x_2, x_3 tego równania.

Twierdzenie **1.7.4** (Sprowadzenie do postaci kanonicznej)**.** *Dla podstawienia* $y = x + \frac{b}{3a}$ *równanie stopnia trzeciego ma postać*

$$y^3 + py + q = 0$$

gdzie $p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$ *oraz* $q = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$.

Twierdzenie **1.7.5** (Równanie rozwiązujące Tartaglii)**.** *Istnieje pierwiastek* $y_0 = u_0 + v_0$ *równania w postaci kanonicznej*

$$y^3 + py + q = 0,$$

gdzie u_0^3 *oraz* v_0^3 *są rozwiązaniami zespolonymi równania kwadratowego postaci:*

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Dowód. Dla pierwiastka postaci $y = u + v$ otrzymamy

$$\begin{cases} p = -3uv \\ q = -u^3 - v^3 \end{cases}$$

bo $z^3 = v^3 + 3uv^2 + 3u^2v + u^3 = 3uv(u+v) + u^3 + v^3 = 3uvz + u^3 + v^3$. Dalej $z^3 - 3uvz - (u^3+v^3) = 0$. Teraz $(uv)^3 = -p^3/27$ oraz $u^3 + v^3 = -q$ i skorzystamy ze znanego faktu.

Lemat Viete'a. Jeżeli dwie liczby spełniają warunek $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = I \\ x_1 + x_2 = S \end{cases}$, to spełniają równanie kwadratowe $x^2 + Sx - I = 0$. □

Twierdzenie **1.7.6** (Metoda Cardano)**.** *Dla równania w postaci kanonicznej z istniejącym pierwiastkiem postaci* $y_0 = u_0 + v_0$ *pozostałe dwa pierwiastki można wyznaczyć za pomocą nietrywialnego pierwiastka sześciennego z jedynki* $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ *w następujący sposób:*

$$y_0 = u_0 + v_0,\ y_1 = \omega u_0 + \overline{\omega} v_0,\ y_2 = \overline{\omega} u_0 + \omega v_0.$$

TWIERDZENIE **1.7.7** (Casus irreducibilis)**.** *Istnieje pierwiastek rzeczywisty równania kanonicznego $y^3 + py + q = 0$, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$ dla $4p^3 + 27q^2 > 0$ w postaci nazywanej wzorem Cardano:*

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}},$$

gdzie $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$.

Rozważymy teraz sytuację gdy współczynniki wielomianu sześciennego są rzeczywiste, czyli wielomiany $w_3(y) \in \mathbb{R}[x]$. Niech będzie dane równanie w postaci kanonicznej, gdzie $p, q \in \mathbb{R}$:

$$y^3 + py + q = 0.$$

TWIERDZENIE **1.7.8** (Rozwiązania równania kanonicznego)**.** *Dla współczynników rzeczywistych wielomianu $y^3 + py + q$ rozwiązania równania sześciennego dla wyróżnika $\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ są następujące:*

- *jeżeli $\Delta > 0$ istnieje jedno rozwiązanie rzeczywiste postaci:*

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}.$$

- *jeżeli $\Delta = 0$ istnieją co najwyżej dwa pierwiastki rzeczywiste:*

$$y_1 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \text{ oraz } y_2 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}.$$

Uwaga: jeżeli $q \neq 0$, to równanie kanoniczne ma w liczbach rzeczywistych dokładnie dwa różne pierwiastki; jeden z nich jest podwójny.

- *jeżeli $\Delta < 0$ istnieją trzy różne pierwiastki rzeczywiste:*

$$y_0 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3}, \tag{1.12}$$

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} \tag{1.13}$$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}. \tag{1.14}$$

gdzie $\cos\varphi = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$.

TWIERDZENIE **1.7.9** (Rozwiązania trygonometryczne Viete'a)**.** *Dla równania w postaci kanonicznej $y^3 + py + q = 0$ rozwiązania są postaci dla $k = 0, 1, 2$:*

$$y_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2\pi k}{3}\right]$$

Dowód. Podstawimy $y = u\cos\alpha$ oraz skorzystamy z tożsamości trygonometrycznej $4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \cos(3\alpha) = 0$. Wybierzemy $u = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$,$u = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ i podzielimy równanie przez $\frac{u^3}{4}$. Wtedy

$$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha - \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}} = 0.$$

Wykorzystując tożsamość otrzymamy równanie w postaci zredukowanej, z którego wyciągniemy pierwiastki trzeciego

$$\cos(3\alpha) = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}.$$

Wtedy $\alpha = \left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{-3}{p}}\right) - \frac{2k}{3}\pi$. □

1.7.3 Rozkład wielomianu na czynniki

TWIERDZENIE **1.7.10.** *W zbiorze wielomianów $\mathbb{R}[x]$ jedynymi wielomianami nierozkładalnymi są tylko wielomiany stopnia pierwszego i trójmiany kwadratowe ax^2+bx+c, dla któych $\Delta < 0$.*

Lemat. Jeżeli liczba zespolona $w \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) \in \mathbb{R}[z]$, to liczba sprzężona $\overline{w}$ też jest pierwiastkiem tego wielomianu.

Dowód. Dla wielomianu $W(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ jeżeli $W(w) = 0$, to

$$0 = a_0 + a_1 w + ... + a_n w^n = \overline{0} = a_0 + a_1\bar{w} + ... + a_n\bar{w}^n = W(\bar{w}).$$

□

Zajmiemy się teraz dowodem głównego twierdzenia.

Dowód. Załóżmy, że $W(x) \in \mathbb{R}[x]$ jest nierozkładalny, wtedy ma stopnień ≥ 1. Istnieje (ZTA) zatem liczba $\alpha \in \mathbb{C}$, która jest pierwiastkiem tego wielomianu. dzięki twierdzeniu Bezouta dla $T(z) \in \mathbb{C}[z]$ mamy

$$W(x) = (x - \alpha) \cdot T(z). \tag{1.15}$$

Rozważymy jedną z dwóch możliwości $\alpha \in \mathbb{R}$ albo $\alpha \notin \mathbb{R}$.

Przypadek 1. Jeżeli $\alpha \in \mathbb{R}$, to wielomian jest postaci $T(x) \in \mathbb{R}[x]$, czyli ma współczynniki rzeczywiste (stwierdzenie). Korzystając z założenia $W(x)$ jest nierozkładalny, czyli $T(x)$ jest stopnia zero. Wniosek to: $W(x)$ ma stopnień jeden.

Przypadek 2. Jeżeli $\alpha \notin \mathbb{R}$, to

$$0 = W(\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha} - \alpha) \cdot T(\bar{\alpha}).$$

Druga równość wynika z równania 1.15. Stąd $T(\bar{\alpha}) = 0$, więc znowu z tw. Bezouta $T(x) = (x - \bar{\alpha})u(x)$. Zatem

$$W(x) = (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})u(x) = \left(x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}\right) \cdot u(x).$$

Wielomian $x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$ ma współczynniki rzeczywiste, zatem wielomian $u(x)$ też. Założenie nierozkładalności $W(x)$ skutkuje $\deg(u(x)) = 0$, czyli $u(x) = c$. Ostatecznie W(x) jest wielomianem kwadratowym z deltą $\Delta = c^2(\alpha+\bar{\alpha})^2 - 4c^2\alpha\bar{\alpha} = c^2(\alpha - \bar{\alpha})^2 = i^2 4c^2(\mathrm{Im}\ \alpha)^2$, czyli ujemnej wartości. □

1.8 Macierze i wyznaczniki

1.8.1 Określenie macierzy

Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczb, na przykład $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Skończony podzbiór liczb naturalnych oznaczamy jako $N_n := \{1, 2, ..., n\}$.

Definicja (Macierz prostokątna). Funkcja $\boldsymbol{A} : \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n \to \mathbb{K}$ nazywa się macierzą nad ciałem $\mathbb{K}$ o m wierszach oraz n kolumnach.

Oznaczenie macierzy elementów to $[a_{ij}]_{m\times n}$, gdzie wyrazy $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

Macierz często zapisujemy w postaci tablicy kolumn i wierszy, gdzie na przecięciu wiersza nr i oraz kolumny nr j stoi element a_{ij}. Stąd macierz $\boldsymbol{A}$ z definicji ma m wierszy i n kolumn, czyli

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Stosuje się też osobne oznaczenia dla n kolumn tej macierzy jako $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, ..., \boldsymbol{A}_n$, wtedy macierz może być rozpatrywana jako układ n pionowych wektorów. Jeśli zachodzi potrzeba można podobnie rozpatrywać tutaj m wierszy jako układ poziomych wektorów $\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m$.

Używa się następujących nazw dla poszczególnych rodzajów macierzy:

- macierz zerowa: każdy element macierzy wynosi zero.
- macierz przekątniowa: elementy na przekątnej macierzy kwadratowej rozmiaru n są różne od zera, poza przekątną każdy element jest równy zero - przykładem jest macierz jednostkowa $\boldsymbol{I}_n$., czyli np.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- macierz permutacji: powstała z macierzy jednostkowej przez dowolne przestawienie kolumn - $n!$ możliwości. Na przykład:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- macierz transponowana: obejmuje zamianę wszystkich kolumn na wiersze macierzy $\boldsymbol{A}$, tworzy macierz $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$. Dla wyrazów oznacza

$$[a_{ij}^{\mathrm{T}}]_{n\times m} = [a_{ji}]_{m\times n}.$$

Przykładem może być macierz 2×2

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

1.8.2 Algebra macierzy

Dodawanie macierzy. W zbiorze wszystkich macierzy prostokątnych ustalonego rozmiaru $m \times n$ możemy określić dla $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ oraz $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ dodawanie tych macierzy oraz mnożenie macierzy przez liczbę:

- $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ - dodawanie element po elemencie na swoim miejscu
- $\lambda\boldsymbol{A} = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$ - mnożenie przez liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ każdego elementu macierzy

Mnożenie macierzy. Określimy mnożenie wiersza przez kolumnę:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdot & \cdot & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n.$$

Zauważmy, że wiersz i kolumna mają taką samą liczbę elementów. Przy odpowiednich oznaczeniach otrzymamy:

$$\boldsymbol{A}^1\boldsymbol{B}_1 = \left[\sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1}\right]_{1\times 1}.$$

Definicja (Iloczyn macierzy). Dane są macierze: $\boldsymbol{A}$ rozmiaru $m\times p$ oraz $\boldsymbol{B}$ rozmiaru $p \times n$. Macierz iloczynu $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ rozmiaru $m \times n$ określamy następująco

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = [(ab)_{ij}]_{m\times n} := \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Oznacza to, że dla $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

Twierdzenie **1.8.1** (Własności mnożenia). *Dla dowolnych macierzy odpowiednich rozmiarów $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ oraz $\boldsymbol{C}$ zachodzą własności:*

- *prawo łączności* $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$,
- *obustronne prawo rozdzielności względem dodawania:*

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C},$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}.$$

- *mnożenie ogólnie nie jest przemienne* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$.

Przypomnijmy, że transpozycja (przestawienie) danej macierzy $\boldsymbol{A}$ polega na zamianie jej kolumn i wierszy miejscami (z zachowaniem kolejności) i jest oznaczana przez $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

Twierdzenie **1.8.2** (Mnożenie i transponowanie). *Dla transpozycji macierzy zachodzą dwie własności:*

- $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,
- $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$.

1.8.3 Operacje elementarne

Okresla się operacje elementarne na macierzy względem kolumn lub wierszy.

Definicja (Operacje elementarne). Dla dowolnej macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ ustalonego stopnia określamy działania na jej kolumnach:

- dodanie do k-tej kolumny macierzy kolumny i-tej pomnożonej przez liczbę różną od zera, czyli
$$E_{ki} : \boldsymbol{A}_k \mapsto \boldsymbol{A}_k + \lambda \boldsymbol{A}_i,$$
- zamiany miejscami dwóch kolumn, czyli permutację $P_{ij} : \boldsymbol{A}_i \leftrightarrow \boldsymbol{A}_j$.

Postać trójkątna macierzy. Określimy macierz górnotrójkątną $\boldsymbol{U}$ jako warunek dla jej wyrazów $u_{ij} = 0$ dla $i > j$. Podobnie macierz dolnotrójkątna $\boldsymbol{L}$ oznacza, że $l_{ij} = 0$ dla $i < j$. Przez macierz trójkątną $\boldsymbol{T}$ rozumiemy jeden z wymienionych przypadków $\boldsymbol{U}$ lub $\boldsymbol{L}$.

Rozważymy teraz pewien prosty przykład i ustalimy działanie wprowadzonych notacji $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot E_{12}$ dla macierzy 2×2 i operacji $\boldsymbol{A}_2 \mapsto \boldsymbol{A}_2 - 2\boldsymbol{A}_1$, czyli dla mnożenia z prawej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie **1.8.3** (O redukcji). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ za pomocą operacji elementarnych można utworzyć macierz postaci trójkątnej.*

Dowód. Zachodzi dla ciągu operacji elementarnych na kolumnach i stwierdzeniu, że iloczyn macierzy górnotrójkątnych jest tego samego typu, czyli macierz iloczynu też jest górnotrójkątna. □

Przypomnijmy, że grupa permutacji S_n dla zbioru n-elementów ma określenie dla pewnego elementu $\sigma \in S_n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Działanie zewnętrzne grupy permutacji na funkcje postaci $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ określimy jako
$$\sigma.f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}).$$

Jako przykład efektu działania możemy określić funkcje symetryczne względem zamiany dwóch argumentów, jako warunek $\sigma.f = f$ dla każdej permutacji $\forall\ \sigma \in S_n$, czyli
$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Definicja (Funkcja antysymetryczna). Określimy funkcję $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ jako antysymetryczną, jeżeli przy zamianie dwóch argumentów funkcja zmienia znak.

Twierdzenie **1.8.4** (O funkcji antysymetrycznej). *Jeżeli funkcja jest antysymetryczna, to $\sigma.f = \operatorname{sgn}(\sigma) f$, czyli*

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

1.8.4 Wyznacznik

Wyznacznik macierzy kwadratowej jest antysymetrycznym odwzorowaniem wieloliniowym. Istnieje dokładnie jedno takie odwzorowanie, które spełnia podane aksjomaty. Macierze zapisuje się w tej sytuacji zwykle jako układ kolumn lub wierszy. Oznaczymy zbiór macierzy kwadratowych z elementami ciała $\mathbb{K}$ jako $M_n(\mathbb{K})$.

Definicja (Wyznacznik). Wyznacznikiem macierzy $\det \boldsymbol{A}$ nazywamy funkcję $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, która spełnia trzy warunki:

1. $\det \boldsymbol{I}_n = 1$ dla każdego n;
2. jeżeli w macierzy $\boldsymbol{A}$ do kolumny dodamy inną jej kolumnę pomnożoną przez liczbę, to wyznacznik tej macierzy się nie zmieni;
3. jeżeli w macierzy $\boldsymbol{A}$ dowolną kolumnę pomnożymy przez liczbę $\lambda \in \mathbb{K}$, to wyznacznik tej macierzy jest równy iloczynowi $\lambda \det \boldsymbol{A}$.

Z trzeciej własności wynikają dwa fakty.

Twierdzenie **1.8.5.** *Dla każdej macierzy kwadratowej zachodzi:*

- *Jeżeli pewna kolumna macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ składa się z samych zer, to jej wyznacznik jest równy zeru.*
- *Macierz diagonalna ma wyznacznik równy iloczynowi wyrazów na przekątnej.*

Twierdzenie **1.8.6** (Wyznacznik macierzy trójkątnej). *Jeżeli $\boldsymbol{T}$ jest macierzą trójkątną: górną lub dolną, to jej wyznacznik jest równy iloczynowi wyrazów na przekątnej, czyli:*
$$\det \boldsymbol{T} = t_{11} t_{22} \cdots t_{nn} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

Dowód. Użyjemy zasady indukcji względem rozmiaru macierzy n dla macierzy górnotrójkątnej $\boldsymbol{U}$. Dla $u_{11} \neq 0$ odejmujemy odpowiednie wielokrotności kolumny pierwszej od pozostałych otrzymując $a_{1i} = 0$ dla $i > 1$. Dla podmacierzy $\boldsymbol{U}'$ rozmiaru $n-1$ powstałej z pominięcia pierwszej kolumny i wiersza wyznacznik z założenia indukcyjnego ma postać iloczynu. Skorzystamy z faktu, że wyznacznik macierzy blokowej $\det \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{U}' \end{array}\right]$ wynosi $\det \boldsymbol{U}'$. □

TWIERDZENIE **1.8.7.** *Dla każdej macierzy kwadratowej zachodzi:*

- *Jeżeli jednokrotnie zamienimy dwie kolumny macierzy miejscami, to wyznacznik zmieni znak.*
- *Jeżeli dwie kolumny macierzy są sobie równe, to wyznacznik tej macierzy wynosi zero.*

Dowód. Dla kolumn $\boldsymbol{A}_1$ oraz $\boldsymbol{A}_2$ □

TWIERDZENIE **1.8.8.** *Działanie permutacji na układ kolumn macierzy kwadratowej* $\sigma.\boldsymbol{A}$ *powoduje*

$$\det(\boldsymbol{A}_{\sigma(1)}, \boldsymbol{A}_{\sigma(2)}, \dots, \boldsymbol{A}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n).$$

TWIERDZENIE **1.8.9** (Wyznacznik iloczynu)**.** *Dla dowolnych macierzy kwadratowych* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *ustalonego stopnia n zachodzi wzór dla wyznacznika iloczynu:*

$$\det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A}) \det(\boldsymbol{B}).$$

TWIERDZENIE **1.8.10** (O wyznaczniku iloczynu)**.** *Zachodzi:*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = (\det \boldsymbol{A}) \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}.$$

Istnieje funkcja wyznacznik, którą możemy obliczyć dla wszystkich permutacji S_n zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Oznaczymy przez $\operatorname{sgn}(\sigma)$ znak permutacji $\sigma \in S_n$, czyli jej liczbę inwersji. Wtedy dla wyznacznika otrzymamy $n!$ składników.

TWIERDZENIE **1.8.11** (Obliczenie wyznacznika)**.** *Dla macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ stopnia n wartość wyznacznika wynosi* $\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$, *czyli:*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Każda z własności wyznacznika w terminach kolumn ma swój odpowiednik w terminach wierszy.

TWIERDZENIE **1.8.12** (Wyznacznik macierzy transponowanej)**.** *Dla wyznacznika zachodzi równość*

$$\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\boldsymbol{A}).$$

Dowód. $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ □

DEFINICJA (Macierz dopełniająca)**.** Dla macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ macierzą dopełniającą elementu a_{ij} nazywamy macierz $\boldsymbol{A}_{ij}$ powstałą przez usunięcie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny. Przez $|\boldsymbol{A}_{ij}|$ oznaczymy wyznacznik tej podmacierzy.

TWIERDZENIE **1.8.13** (Rozwinięcie Laplace'a)**.** *Dla dowolnej macierzy kwadratowej* $\boldsymbol{A}$ *ustalonego stopnia $n > 1$ zachodzą dwa wzory dla względem i-tego wiersza lub j-tej kolumny:*

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\boldsymbol{A}_{ij}|, \tag{1.16}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\boldsymbol{A}_{ij}|. \tag{1.17}$$

Dowód. Druga równość jest wynikiem transpozycji macierzy w pierwszej równości. Dla j-tej kolumny $\boldsymbol{A}_j = a_{1j}\boldsymbol{e}_1 + a_{2j}\boldsymbol{e}_2 + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{e}_n$ oraz dla macierzy $\boldsymbol{A}$ wyznacznik $\det(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_j, \cdots, \boldsymbol{A}_n)$ wynosi

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_j, \cdots, \boldsymbol{A}_n).$$

Dla k-tego wyrazu w j-tej kolumnie mamy:

$$a_{kj} \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & 1 & \cdots & a_{k,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} = (-1)^{j-1}(-1)^{k-1} \det \boldsymbol{A}'.$$

Ponieważ wyznacznik dla macierzy blokowej wynosi det $\boldsymbol{A}'$ w postaci macierzy:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \boldsymbol{A}' \end{array}\right]$$

□

TWIERDZENIE **1.8.14** (Wzór rekurencyjny)**.** *Jeżeli funkcja $f : \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$ spełnia podane niżej warunki, to jest wyznacznikiem, czyli $f(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$.*

- *Jeśli $n = 1$ to $f(\boldsymbol{A}) = a_{11}$.*
- *Jeśli $n > 1$, to $f(\boldsymbol{A}) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} f(\boldsymbol{M}_{i,j})$.*

Dowód. Rzadko spotykany. □

1.8.5 Przykłady

Obroty na płaszyznie

Dla punktu $(x, y) \in \mathbb{R}$ opiszemy obrót wokół początku układu współrzędnych o kąt α. Wtedy

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Gdyby powtózyć obrót o kąt β, to można opisać złożenie jako:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta, & -\sin\beta \\ \sin\beta, & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Podstawiając współrzędne dla primów prawa strona przekształca się do postaci:

$$\begin{bmatrix} \cos\beta, & -\sin\beta \\ \sin\beta, & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha, & -\sin\alpha \\ \sin\alpha, & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Korzystając z łączności mnożenia macierzy od lewej

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\beta)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Stosując wzory dla tożsamości trygonometrycznych

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta), & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta), & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

W zapisie dla operatorów rotacji możemy zapisać przy uwzględnieniu przemienności obrotów (szczególny przypadek)

$$\mathbf{R}_\beta \circ \mathbf{R}_\alpha [x, y]^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}_{\alpha+\beta} [x, y]^{\mathrm{T}}.$$

Liczby zespolone

Każda liczba zespolona $a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ może być przedstawiona jako macierz $\begin{bmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{bmatrix}$. Wtedy

$$\begin{bmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Sprawdzimy dla porządku, że

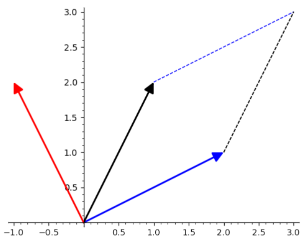
$$\begin{bmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{bmatrix}.$$

Moduł liczby zespolonej $|z| = \det \begin{bmatrix} a, & -b \\ b, & a \end{bmatrix} = a^2 + b^2.$

Na koniec zanotujemy, że dopuszczając w reprezentacji macierzowej $a, b \in \mathbb{C}$ otrzymamy liczbę kwaternionową oraz odpowiednią algebrę kwaternionów.

Wyznacznik 2×2

Postawmy na płaszczyznie dwa punkty (a, b) oraz (c, d) wraz z odpowiednimi wektorami $\vec{u}, \vec{v}$.



Równoległobok utworzony dla dwóch wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ z kątem α między nimi ma pole dwóch trójkątów, czyli $|u|h$ lub inaczej:

$$|u||v| \sin \alpha.$$

Wtedy dla wektorów we współrzędnych $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ oraz $\vec{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ otrzymamy:

$$|u||v| \sin \alpha = |u^{\perp}||v| \sin(90^\circ - \alpha) = |u^{\perp}||v| \cos(90^\circ - \alpha) = \vec{u^{\perp}} \circ \vec{v} = \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -bc + ad.$$

Wyznacznik macierzy $[\vec{u}, \vec{v}]$ wynosi

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc.$$

Zauważmy własności wyznacznika:

- dodawanie na każdej kolumnie:

$$\det \begin{bmatrix} a & b + b' \\ c & d + d' \end{bmatrix} = a(d + d') - (b + b')c = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix},$$

- mnożenie na każdej kolumnie:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{bmatrix} = \lambda(ad - bc),$$

- zero pole

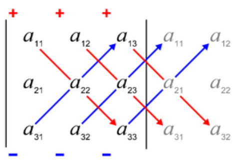
$$\det \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix} = 0.$$

Wyznacznik 3×3

Wzór permutacyjny. Dla wyznacznika mamy 3! składników postaci, gdzie używa się znaku permutacji przed iloczynem 3 elementów:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Metoda Sarrusa. Mnemotechniczny sposób prawidłowego obliczenia wartości wyznacznika. Dopisujemy dwie kolumny po prawej lub dwa wiersze u dołu i mnożymy po 3! liniach ze znakiem:



Rozwinięcie Laplace'a. Dla wyznacznika macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ mamy:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{(1+1)} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+2)} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{(1+3)} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Wyznacznik 4×4

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Wzór permutacyjny. Wyznacznik zawiera 4! wyrazów, czyli:

$$\det \boldsymbol{A} =$$
$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$$
$$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$$
$$+a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

1.9 Macierz odwrotna. Rząd macierzy

1.9.1 Grupa macierzy

DEFINICJA (Macierz odwrotna). Niech $\boldsymbol{A}$ będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierz $\boldsymbol{A}$ jest odwracalna, jeśli istnieje taka macierz $\boldsymbol{A}^{-1}$, że zachodzi:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_n \text{ oraz } \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n.$$

Wyznacznik macierzy jednostkowej $\boldsymbol{I}$ jest z definicji równy 1. Zatem, jeśli $\boldsymbol{A}$ jest macierzą odwracalną, to

$$1 = \det \boldsymbol{I} = \det(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Możemy zauważyć, że jeśli macierz jest odwracalna, to

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}.$$

Jeżeli macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ ma wyznacznik równy zeru, to będziemy mówili że jest osobliwa.

TWIERDZENIE **1.9.1** (Warunek konieczny i wystarczający). *Kwadratowa macierz $\boldsymbol{A}$ ma macierz odwrotną wtedy i tylko wtedy gdy $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, czyli gdy macierz jest nieosobliwa.*

TWIERDZENIE **1.9.2** (O grupie macierzy). *Zbiór wszystkich odwracalnych macierzy kwadratowych ustalonego stopnia n nad ciałem liczbowym $\mathbb{K}$ tworzy grupę ze względu na mnożenie macierzy, czyli:*

- *mnożenie macierzy jest łączne: $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$,*
- *istnieje element neutralny; $\boldsymbol{I}$ jest macierzą odwracalną oraz $\boldsymbol{I}^{-1} = \boldsymbol{I}$; tzw. macierz jednostkowa to element neutralny mnożenia*

$$\boldsymbol{AI} = \boldsymbol{IA} = \boldsymbol{A},$$

- *istnieje element odwrotny; jeśli $\boldsymbol{A}$ jest odwracalna, to $\boldsymbol{A}^{-1}$ też jest odwracalna oraz $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$; w szczególności odwrotność oznacza mnożenie*

$$\boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I},$$

TWIERDZENIE **1.9.3** (Własności macierzy odwracalnych). *Dla dowolnych macierzy odwracalnych $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ ustalonego stopnia zachodzą własności:*

- $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$,
- *jeśli $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ są odwracalnymi macierzami, to $\boldsymbol{AB}$ też jest odwracalna oraz zachodzi wzór*
$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}.$$
- $(\lambda \boldsymbol{A})^{-1} = \lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ *dla* $\lambda \in \mathbb{K}$,
- $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$.

TWIERDZENIE **1.9.4** (Banachiewicz 1938[2]). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej ustalonego stopnia zachodzi rozkład na iloczyn macierzy trójkątnych: dolnotrójkątnej oraz górnotrójkątnej, czyli:*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{U}$$

Dowód. Skorzystamy z faktu, że ciąg operacji elementarnych w układzie kolumnowym macierzy powoduje

$$\boldsymbol{A} \cdot E_{ij} = \boldsymbol{U}.$$

Ponieważ operacje elementarne są z natury operacjami odwracalnymi, to zachodzi również

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot {E_{ij}}^{-1}.$$

Wystarczy zauważyć, że macierz odwrotna do macierzy dolnotrókątnej jest też dolnotrójkątna i utrzymamy rozkład typu $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{L}$. W układzie wierszowym otrzymuje się ten znany wynik - niektóre źródła podają, że ten pomysł został przedstawiony dla przypadku macierzy symetrycznej $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^{\mathrm{T}}$ przez Banachiewicza i Choleskiego w 1941 r. □

Z tego rozkładu wynika interesujący wzór na wyznacznik macierzy. Wynika z niego, że w pewnym sensie wyznacznik może być przedstawiony jako iloczyn wyrazów na przekątnej.

TWIERDZENIE **1.9.5** (Wzór na wyznacznik). *Dla dowolnej macierzy $\boldsymbol{A}$ stopnia n zachodzi wzór:*

$$\det \boldsymbol{A} = \pm \prod_{i=1}^{n} l_{ii} \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{ii}.$$

[2]T. Banachiewicz, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 1938, Seria A 393

1.9.2 Macierz dołączona

Przypomnijmy, że minor $\boldsymbol{M}_{ij}$ jest wyznacznikiem kwadratowej podmacierzy stopnia $n-1$, która powstała z usunięcia i-tego wiersza oraz j-ej kolumny dla kwadratowej macierzy $\boldsymbol{A}$ stopnia n.

Definicja (Dopełnienie elementu). A_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$, który obliczamy jako iloczyn znaku oraz minora, czyli:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\boldsymbol{M}_{ij}$$

Macierz dopełnień cof$\boldsymbol{A}$ rozumiemy jako macierz kwadratową postaci:

$$\operatorname{cof}\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Opiszemy sposób obliczenia macierzy odwrotnej $\boldsymbol{A}^{-1}$ przez wyznaczenie macierzy dołączonej $\boldsymbol{A}^{D}$, która powstaje przez transponowanie macierzy dopełnień algebraicznych:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}} = [A_{ij}]^{\mathrm{T}} = [A_{ji}].$$

Twierdzenie **1.9.6.** *Macierzą odwrotną do nieosobliwej macierzy kwadratowej* $\boldsymbol{A}$ *jest macierz*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}}$$

Dowód. Wynika z pomnożenia $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{D}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{D}} \cdot \boldsymbol{A} = (\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$. □

1.9.3 Rząd macierzy

Minory macierzy. Minorem stopnia k macierzy $\boldsymbol{A}$ stopnia n nazywamy wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez skreślenie jakichkolwiek $n-k$ wierszy oraz kolumn. Możemy utworzyć w ten sposób

Definicja (Rząd macierzy). Rzędem rk $\boldsymbol{A}$ dowolnej macierzy $\boldsymbol{A}$ jest maksymalny stopień jej niezerowego minora.

Twierdzenie **1.9.7.** *Każdy minor o niezerowym wyznaczniku ma stopień mniejszy równy k wtedy i tylko wtedy gdy* rk $\boldsymbol{A} \le k$.

Dowód. Reductio ad absurdum. □

1.9.4 Przykłady

Wyznaczenie rzędu macierzy

Obliczymy rząd dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$

Metoda jest rekurencyjna względem stopnia:

- wykonamy operacje elementarne $w_3 \mapsto w_3 - 10w_4$ oraz $w_2 \mapsto w_2 - 4w_4$ otrzymując $A' = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$
- wtedy możemy zapisać

$$\operatorname{rank}\ A = 1 + \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -52 & -130 & -13 \end{bmatrix}$$

- wykonując $w_2 = w_2 + 5w_1$ oraz $w_3 = w_3 + 13w_1$ otrzymamy

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- zapiszemy

$$\text{rank } A = 1 + 1 + \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Macierz dołączona

Wypiszemy kofaktory dla macierzy $\boldsymbol{A}$ rozmiaru 3

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Możliwości:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \; A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \; A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \; A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \; A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \; A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \; A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix},$$

Macierz kofaktorów

$$\text{cof}\,\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz dołączona:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd macierz odwrotna

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\frac{1}{\det \boldsymbol{A}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{D}} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 10 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Odwracanie macierzy elementarnie

$$\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \boxed{-3} & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 5/3 & 0 & -7/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \end{array}\right] \sim$$

i przestawiając wiersze do postaci macierzy jednostkowej po lewej:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7/3 & 2 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/3 & -1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] = I|A^{-1}.$$

czyli ciąg operacji elementarnych powoduje $f(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}) = \boldsymbol{I}|\boldsymbol{A}^{-1}$.

1.10 Układy równań liniowych

1.10.1 Podstawowe określenia

Definicja (Układ równań). Układem równań liniowych o współczynnikach rzeczywistych ze zmiennymi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ nazywamy układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

gdzie a_{ij} oraz b_i są liczbami rzeczywistymi $\forall\ 1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Układ równań liniowych można przedstawić w trzech różnych postaciach:

1. w zapisie z klamrą jak w definicji powyżej;

2. jako kombinację liniową kolumn $x_1\boldsymbol{A}_1 + x_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{A}_n = b$, czyli:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

3. w postaci macierzowej dla $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ oraz $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, czyli:

$$\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b}.$$

Stwierdzimy, że dla $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:

- niewiadome $x_1, x_2, ..., x_n$ spełniają układ 1
- niewiadome $x_1, x_2, ..., x_n$ spełniają równanie 2
- wektor $[x_1, x_2, ..., x_n]^T$ spełniają równanie macierzowe 3

Dowód. Równoważność 1 i 2 oczywista, 1 i 3 też; dla 2 i 3 dodatkowe obliczenia: $Ax = A\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i [a_{1i}, ..., a_{mi}]^T$. □

Definicja (Układ jednorodny). Układ równań liniowych nazywamy jednorodnym jeżeli
$$b_1 = b_2 = ... = b_m = 0.$$

Definicja (Rozwiązania układu). Rozwiązaniem układu nazywamy układ liczb $s_1, s_2, ..., s_n$, który po podstawieniu za zmienne spełniają wszystkie równania układu, czyli $\forall\ 1 \le i \le m$:
$$a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + ... + a_{in}s_n = b_i.$$

Definicja (Układ sprzeczny). Układ równań liniowych nazywamy sprzecznym jeżeli nie ma rozwiązania. Mówimy też, że układ jest niesprzeczny jeżeli jego zbiór rozwiązań nie jest pusty.

Metoda rozwiązywania układów równań zwykle polega na zastąpieniu go przez układ prostszej postaci, który ma ten sam zbiór rozwiązań.

Definicja (Układy równoważne). Jeżeli dwa układy równań liniowych mają ten sam zbiór rozwiązań, to nazywamy je równoważnymi. Stosujemy czasami oznaczenie $U_1 \sim U_2$.

1.10.2 Metoda rugowania zmiennych

Operacje, które przeprowadzają w układ równoważny:

1. dodanie do równania innego równania pomnożonego przez liczbę, czyli tzw. dodawanie stronami,
2. zamiana miejscami równań w układzie,
3. pomnożenie równania przez liczbę różną od zera.

Definicja (Operacje elementarne). Dla układu równań liniowych operacje wymienione powyżej jako 1,2,3 nazywamy operacjami elementarnymi.

Rozważmy układ równań liniowych U' postaci:
$$U' = \begin{cases} x_{j_1} = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_1 \\ \vdots \\ x_{j_k} = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + \cdots + c_{kn}x_n + d_k \end{cases}$$
gdzie $j_1 < j_2 < ... < j_k$ oraz zmienne $x_{j_1}, ..., x_{j_k}$ nie występują po prawej stronie.

Definicja (Rozwiązanie ogólne). Mówimy, że układ postaci U' jest rozwiązaniem ogólnym dla dowolnego układu równoważnego $U \sim U'$.

Definicja (Zmienne zależne). Dla układu postaci U' zmienne $x_{j_1}, ..., x_{j_k}$ nazywamy zmiennymi zależnymi. Pozostałe zmienne są niezależne, czasami nazywane są parametrami.

Niech $\boldsymbol{A}$ będzie zapisana jako układ wierszy $(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m)$.

Definicja (Wierszowe operacje elementarne). Dla macierzy układu rónań liniowych operacje elementarne na wierszach macierzy to:

1. dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę, czyli np.
$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m) \mapsto (\boldsymbol{A}^1 + \lambda\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m);$$
2. zamiana dwóch wierszy miejscami, czyli np.
$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^n) \mapsto (\boldsymbol{A}^2, \boldsymbol{A}^1, ..., \boldsymbol{A}^m);$$
3. pomnożenie wiersza przez liczbę różną od zera, czyli np.
$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m) \mapsto (\lambda\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m).$$

Dana jest macierz rozszerzona $\boldsymbol{A}|b = (\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m, \vec{b})$ układu równań liniowych dla n zmiennych (niewiadomych). Następujące operacje nie zmieniają zbioru rozwiązań tego układu:

1. dowolna permutacja wierszy:
$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m, b) \mapsto (\boldsymbol{A}^{\sigma(1)}, \boldsymbol{A}^{\sigma(2)}, ..., \boldsymbol{A}^{\sigma(m)}, b^{\sigma(i)});$$

2. mnożenie poszczególnych wierszy przez przez liczby $\lambda_i \neq 0$ dla $i \leq m$, czyli

$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^n, b) \mapsto (\lambda_1 \boldsymbol{A}^1, \lambda_2 \boldsymbol{A}^2, ..., \lambda_m \boldsymbol{A}^m, \lambda_i b);$$

3. dodanie ustalonego wiersza $\boldsymbol{A}_j$ pomnożonego przez różne liczby λ_j, czyli

$$(\boldsymbol{A}^1, \boldsymbol{A}^2, ..., \boldsymbol{A}^m, b) \mapsto (\boldsymbol{A}^1 + \lambda_1 \boldsymbol{A}^j, \boldsymbol{A}^2 + \lambda_2 \boldsymbol{A}^j, ..., \boldsymbol{A}^m + \lambda_m \boldsymbol{A}^j, b^i + \lambda_j b^j).$$

Stwierdzimy bez dowodu, że wierszowe operacje elementarne E_1, E_2, E_3 są odwracalne i tego samego typu co wymienione wyżej.

Twierdzenie **1.10.1** (O macierzy rozszerzonej)**.** *Elementarne operacje wierszowe na macierzy rozszerzonej układu równań liniowych $\boldsymbol{A}|b$ nie zmieniają rozwiązań tego układu.*

Dowód. $\boldsymbol{A}x = b \iff E_i(\boldsymbol{A})x = E_i(b)$ oraz $E_i(\boldsymbol{A}|b) = E_i(\boldsymbol{A})|E_i(b)$. □

Definicja (Macierz schodkowa)**.** Macierz jest w postaci schodkowej jeżeli spełnione są dwa warunki:

- żaden wiersz zerowy nie poprzedza wiersza niezerowego,
- pierwsze niezerowe wyrazy (schodki) kolejnych niezerowych wierszy stoją w kolumnach o rosnących numerach.

Można też określić inaczej, że macierz $\boldsymbol{A}$ jest w postaci schodkowej jeżeli dla $0 \leq i \leq m$:

- każdy wiersz zerowy znajduje się poniżej niezerowego,
- dla każdego $i > 1$ pierwszy od lewej niezerowy wyraz w wierszu $\boldsymbol{A}^i$ znajduje się w kolumnie stojącej na prawo od pierwszego niezerowego wyrazu wiersza $\boldsymbol{A}^{i-1}$.

Twierdzenie **1.10.2** (O redukcji)**.** *Dowolna macierz może być sprowadzona do postaci schodkowej operacjami elementarnymi na wierszach tej macierzy.*

Metoda eliminacji. Analiza układów równań liniowych jest oparta na twierdzeniu powyżej. W związku z tym tzw. metoda eliminacji może być ogólnie rozumiana jako:

- niech $\boldsymbol{A}x = b$ będzie układem m równań z n niewiadomymi;

- zgodnie w twierdzeniem macierz rozszerzoną $\boldsymbol{A}|b$ można zredukować do postaci schodkowej $\boldsymbol{A}'|b'$, przy czym oba układy są równoważne;
- należy ustalić, czy układ $\boldsymbol{A}'|b'$ jest niesprzeczny;
- jeżeli układ równań jest niesprzeczny, to wyznaczyć wszystkie rozwiązania.

Opiszemy ogólnie metodę Gaussa dla macierzy kwadratowej. Weźmiemy pod uwagę układ równań postaci $\boldsymbol{A}x = b$. Utworzymy macierz rozszerzoną tego układu $\boldsymbol{A}|b$.

1. Wykonując wierszowe operacje elementarne sprowadzimy macierz rozszerzoną do postaci górnotrójkątnej $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{A}|b \sim \boldsymbol{A}'|b' = \boldsymbol{U} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdot & \cdot & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdot & \cdot & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$$

2. Po rozwiązaniu równania w wierszu k dla niewiadomej x_k trzeba wykonać tzw. podstawienie wsteczne do równania w wierszu wyżej $k-1$ otrzymując rozwiązanie dla niewiadomej x_{k-1}:

$$x_i = \frac{1}{a'_{ii}} \left(b'_i - \sum_{j=i+1}^{k} a'_{ij} x_j \right)$$

1.10.3 Twierdzenie Kroneckera-Capelliego

Macierz rozszerzona układu równań liniowych oznacza tablicę z dołączoną kolumną z prawej strony równań, czyli:

$$\boldsymbol{A}|b = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdot & \cdot\ \cdot & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \\ a_{m1} & \cdot & \cdot\ \cdot & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Twierdzenie **1.10.3.** *Układ równań ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rzędy macierzy układu oraz macierzy rozszerzonej są równe, czyli rank(A) = rank(A|b).*

▶ Dowód: dla kombinacji kolumn teza jest oczywista ◀

1.10.4 Wzory Cramera

Niech macierz $\boldsymbol{A}$ układu równań liniowych będzie kwadratowa.

Twierdzenie **1.10.4.** *Układ równań liniowych z macierzą $\boldsymbol{A}$ ustalonego stopnia n ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy wyznacznik głowny jest niezerowy, czyli* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. *Rozwiązanie ma postać dla $i = 1, ..., n$:*

$$x_i = \frac{\det_i \boldsymbol{A}}{\det \boldsymbol{A}}$$

gdzie wyznacznik macierzy $\det_i \boldsymbol{A}$ powstał z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez zastąpienie i-tej kolumny przez kolumnę wyrazów wolnych $[b_1, b_2, ..., b_n]^T$.

Dowód. Dla $b = \sum x_i \boldsymbol{A}_i$ mamy $\det_i \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, .., \sum x_i \boldsymbol{A}_i, .., \boldsymbol{A}_n)$. Wtedy $n-1$ czynników sumy daje zerowy wyznacznik i zostaje tylko odpowiednia kolumna:

$$\det_i \boldsymbol{A} = x_i \det \boldsymbol{A}.$$

□

1.10.5 Przykłady

Macierz rozszerzona i operacje elementarne

Rozwiążemy układ równań z użyciem macierzy roszerzonej. Można podsumować operacje elementarne jako działanie $f(A|b) = I|A^{-1}b$. Trzeba zauważyć, że w tym przykładzie dla macierzy układu jej odwrotna $\boldsymbol{A}^{-1}$ istnieje.

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 4 & 2 \\ \boxed{1} & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{2} & 5/3 & 1/3 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{-1/3} & -1/3 \\ 0 & 2 & 5/3 & 1/3 \\ -2/5 & 0 & 7/15 & -1/15 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/5 & 0 & -4/15 \\ -2/7 & 0 & 0 & -8/21 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = I|A^{-1} \cdot b$$

Wyznaczenie odwrotnej przez macierz dołączoną

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ czyli } \boldsymbol{A}x = b$$

$$x = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot b = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Użycie wzorów Cramera

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ czyli } \boldsymbol{A}x = b$$

Wtedy $\det(\boldsymbol{A}) = -3; \det(\boldsymbol{A}_1) = -4; \det(\boldsymbol{A}_2) = 2; \det(\boldsymbol{A}_3) = -3$

$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} = (-4)/(-3)$ $x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}} = 2/(-3)$ $x_3 = \frac{\det \boldsymbol{A}_3}{\det \boldsymbol{A}} = (-3)/(-3)$

Rozwiązanie układu: $x = [x_1, x_2, x_3]^T = [4/3, -2/3, 1]^T$.

Zastosowanie minorów. Rozwiązania ogólne

$$\begin{cases} x_1 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -x_1 - x_5 &= -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - 2x_3 + x_4 \\ 3 + 2x_3 - x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 + 2\lambda_1 - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

wtedy $x_1 = \frac{\det A'_1}{\det A'} = (-3)/(-1)$ $x_2 = \frac{\det A'_2}{\det A'} = (2\lambda_1 - \lambda_2 + 2)/(-1)$ $x_3 = a$ $x_4 = b$ $x_5 = \frac{\det A'_3}{\det A'} = 2/(-1)$, czyli rozwiązanie:

$x = [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^T = [3, -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2, \lambda_1, \lambda_2, -2]^T]$

Wyznaczenie macierzy schodkowej

$$\begin{cases} x_1 + x_5 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ -x_1 - x_5 &= -1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

czyli $x = [3, -2\lambda_1 + \lambda_2 - 2, \lambda_1, \lambda_2, -2]^T$

1.11 Przestrzenie wektorowe

1.11.1 Określenie przestrzeni liniowej

Definicja. Zbiór elementów V nazywamy przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$ jeśli określono: dwuliniową operację dodawania $V \times V \to V$, dla wektorów $(v_1, v_2) \to v_1 + v_2$ oraz operację mnożenia wektora przez liczbę $\mathbb{R} \times V \to V$, czyli $(a, v) \to av$, dla których spełnione są warunki:

- $(V, +)$ to grupa przemienna; $-v$ to wektor przeciwny; element neutralny to wektor 0;
- mnożenie przez skalar jest łączne w sensie $a(bv) = (ab)v$ oraz unitarne $1v = v$ dla każdego $v \in V$ oraz $\forall a, b \in \mathbb{R}$
- dodawanie oraz mnożenie spełniają prawa rozdzielności $\forall v_1, v_2 \in V$

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2; \qquad oraz\ (a + b)v = av + bv.$$

Zwykle podaje się jako wnioski proste własności, które obowiązują dla każdego wektora $v \in V$ i każdej liczby $a \in \mathbb{R}$:

- $0 \cdot v = 0$
- $a \cdot 0 = 0$
- $(-1)v = -v$
- $a \cdot v = 0 \Longrightarrow a = 0$ lub $v = 0$

1.11.2 Liniowa niezależność wektorów

Kombinacją liniową wektorów nazywamy sumę wektorów i współczynników:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

Definicja. Zbiór wektorów $\{v_i\}_{i \in I}$ jest liniowo niezależny jeśli dla każdej kombinacji liniowej zachodzi:

$$a_1 v_1 + ... + a_n v_n = 0 \Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$$

Stwierdzimy dwie znane własności dla (nie)zależności.

- Niech $v_1, ...v_n$ będzie układem liniowo niezależnym. Wtedy każdy jego podukład jest też liniowo niezależny.
- Wektory $v_1, ...v_n$ są liniowo zależne $\iff$ jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych.

1.11.3 Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Definicja. Zbiór B$\subset V$ nazywamy bazą p.w. V jeżeli każdy wektor daje się jednoznacznie przedstawić jako kombinacja liniowa wektorów bazy. Jeśli B=$\{v_i\},\ i \in \mathbb{N}$ to dla każdego wektora $v \in V$ zachodzi

$$v = \sum_{i \in I} a_i v_i$$

Liczby a_i to współrzędne wektora w bazie natomiast $\mathcal{B}$ tzw. zbiór rozpinający

Zbiór $\mathcal{B}$ jest bazą p.w. V $\iff$ $\mathcal{B}$ jest zbiorem wektorów liniowo niezależnych generującym V. Każda baza przestrzeni jest n-elementowa.

Definicja. Wymiarem przestrzeni wektorowej $\dim V$ nazywamy liczbę elementów bazy.

Twierdzenie **1.11.1.** *Każdy zbiór liniowo niezależny można rozszerzyć do bazy przestrzeni wektorowej.*

1.11.4 Podprzestrzenie wektorowe

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem $\mathbb{R}$. Załóżmy, że W jest niepustym podzbiorem zbioru V.

Definicja. Podzbiór W nazywamy podprzestrzenią wektorową przestrzeni V, jeśli dla każdych $v, w \in W$ i $a \in \mathbb{R}$ zachodzi: $v + w \in W$ oraz $av \in W$.

Omówimy teraz tzw. warunki liniowe, które są często używane w celu określenia podprzestrzeni:

- W to podprzestrzeń wektorowa w V:
  - $W \subset V$ podgrupa względem dodawania
  - mnożenie przez skalary nie wyprowadza poza W

- warunki określające przynależność wektorów z V do W; dla $a_1...a_n \in \mathbb{R}$

$$(x_1, ..., x_n) \in W \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$$

Twierdzenie **1.11.2.** *Dowolna podprzestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest zadana skończoną liczbą warunków podanej wyżej postaci.*

Dla przestrzeni wektorowych V nad $\mathbb{R}$ rozważymy przestrzeń liniową $Fun(V, \mathbb{R})$, czyli z definicji: $(f + g)(v) := f(v) + g(v)$ oraz $(af)(v) := af(v)$

Definicja. Funkcję $f \in V^*$ nazywamy (formą) liniową jeżeli $f(v+w) = f(v)+f(w)$ oraz $f(av) = af(v)$ dla każdego v, w

Stwierdzimy, że formy liniowe tworzą podprzestrzeń liniową oznaczaną jako V^*.

Dowód.

$$(f_1 + f_2)(v + w) = (f_1 + f_2)(v) + (f_1 + f_2)(w)$$

oraz

$$(af)(v + w) = (af)(v) + (af)(w)$$

□

Uwaga: warunek liniowości dla funkcji jest de facto *warunkiem liniowym*

Twierdzenie **1.11.3.** *Jeżeli W_1 i W_2 są podprzestrzeniami wektorowymi przestrzeni V, to ich iloczyn mnogościowy $W_1 \cap W_2$ jest też podprzestrzenią wektorową.*

Dowód. Istotnie, 0 należy do W_1 i W_2 a zatem $W_1 \cap W_2$ jest niepusty. Dalej, jeśli $v, w \in W_1 \cap W_2$, to obydwa te wektory należą do W_1, a więc ich suma należy do W_1, a także należą do W_2, a więc ich suma należy do W_2. Czyli $v + w \in W_1 \cap W_2$. Podobnie, jeśli $a \in \mathbb{R}$ i $v \in W_1 \cap W_2$, to av należy zarówno do W_1 jak i do W_2. Wobec tego $av \in W_1 \cap W_2$. □

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 |\ u \in W_1, w \in W_2\}$$

Twierdzenie **1.11.4.** *Niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni skończenie wymiarowej przestrzeni wektorowej V. Zachodzi wtedy wzór*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Definicja. V jest sumą prostą swoich podprzestrzeni U i W, jeśli V=U +W oraz $U \cap W = \{0\}$. Oznaczenie $V = U \oplus W$.

Jeżeli $V = U \oplus W$, to każdy wektor $v \in V$ można jednoznacznie przedstawić jako sumę wektorów przestrzeni U i W.

Uwagi:

- mając sumę prostą $V = U \oplus W$ możemy zdefiniować rzutowania. Mianowicie, niech $v \in V$. Wtedy v rozkłada się jednoznacznie na sumę v=u+w, gdzie $u \in U$ oraz $v \in V$. Odwzorowanie $P_U : V \longrightarrow V$, które wektorowi v przyporządkowuje u z powyższego rozkładu, nazywamy rzutowaniem na podprzestrzeń U w kierunku podprzestrzeni W (lub rzutowaniem na U równoległym do W). Podobnie definiuje się rzutowanie P_W na W w kierunku U.
- Jeżeli $V = U \oplus W$, to W nazywamy dopełnieniem algebraicznym do U. Oczywiście U jest wtedy dopełnieniem algebraicznym do W

1.11.5 Rozwiązania układu niejednorodnego

Liniowe zadania cramerowskie. Układy równań liniowych dla których macierz jest kwadratowa mająca niezerowy wyznacznik nazywamy zadaniami cramerowskimi.

Definicja. Układy liniowe są *jednorodne* jeśli $b = 0 = [b_1, b_2, ..., b_n]^T$ a zbiór ich rozwiązań tworzy podprzestrzeń wektorową.

Stwierdzimy, że zadanie jednorodne o macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ ma rozwiązanie niezerowe $\iff$ $\det(\boldsymbol{A}) = 0$. ► Dowód: > jeśli $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ to jedyne rozwiązanie to wektor zerowy. ◄

Założymy teraz, że układ równań liniowych jest rozwiązywalny.

Stw. Niech x_0 będzie jednym z rozwiązań układu równań liniowych. Wtedy:

- $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, b) = \{x_0\} + \mathrm{R}(\boldsymbol{A}, 0)$

* dim $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}, 0)$ = n - rank($\boldsymbol{A}$)

► Dowód: oczywiste, że $\{x_0\} + R(A,0) \subset R(A,b)$ i odwrotnie: niech $x \in R(A,b)$, wtedy podstawiając $x - x_0$ do zadania 3 mamy $x - x_0 \in R(A,0)$, czyli $x \in \{x_0\} + R(A,0)$. ◄

Fakt. Rozwiązanie układu równań liniowych sprowadza się do:

- znalezienia pewnego rozwiązania
- rozwiązania zadania jednorodnego

1.11.6 Podprzestrzeń rozwiązań

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie **1.11.5.** *Rząd macierzy* $\boldsymbol{A}$ *jednorodnego układu równań liniowych wyznacza wymiar podprzestrzeni w ciele* $\mathbb{K}^n$ *złożonej z rozwiązań:* $[x_1, .., x_n]^T$ *(lub* $[x_1, .., x_m]^T$*) i wyznaczonej warunkiem:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{A}_i = 0 \quad (\text{lub} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i \boldsymbol{A}^i = 0)$$

1.11.7 Przykłady

Podprzestrzeń wektorowa rozwiązań

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \end{cases} \text{gdzie macierz } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Wtedy wyznacznik } \det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

Otrzymujemy tutaj inne rozwiązanie jako możliwość kombinacji liniowej dla rozwiązań szczególnych:

- $x = [2, 3, -4]^T$, $x' = [1, 3/2, -2]^T$,
- $x + x' = [3, 9/2, -6]^T$, $2x + x' = [5, 15/2, -10]^T$ itd.

Wszystkie otrzymane wektory są rozwiązaniami.

Opis podprzestrzeni przez wektory rozpinające

$$x \in \ker A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = & 2x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ x_2 = & -5x_3 + \frac{7}{2}x_4 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2x_3 - \frac{3}{2}x_4 \\ -5x_3 + \frac{7}{2}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x \in V = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania szczególne i ogólne

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 & = 1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases} \text{oraz } x_0 = [1, 1/2, -1]^T$$

pomocniczo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & \boxed{-2} & 0 \\ 3/2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rozwiązania URL:
$x = x_0 + \lambda[1, 3/2, -2]$

1.12 Przekształcenia liniowe

DEFINICJA. Niech V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$ i niech $F : V \longrightarrow W$ będzie odwzorowaniem. Odwzorowanie F jest liniowe, jeśli spełnione są następujące warunki:

- $F(u + v) = F(u) + F(v)$ - addytywność $\forall u, v \in V$
- $F(av) = aF(v)$ - jednorodność $\forall a \in \mathbb{R}$ i $v \in V$

Uwagi:

- operator liniowy to sytuacja $T : V \to V$
- jako odwzorowanie może nie być iniekcją lub surjekcją

TWIERDZENIE **1.12.1.**
- *Złożenie odwzorowań liniowych jest odwzorowaniem liniowym.*
- *zawsze T(0)=0*
- *Jeśli odwzorowanie liniowe jest bijekcją, to odwzorowanie odwrotne jest też liniowe, wtedy*
$$TT^{-1} = T^{-1}T = I$$

Dowód: $T^{-1}(\lambda w + \mu w') = T^{-1}(\lambda T(v) + \mu T(v')) = T^{-1}(T(\lambda v + \mu v')) = \lambda v + \mu v' = \lambda T^{-1}(w) + \mu T^{-1}(w')$.

1.12.1 Macierz odwzorowania liniowego

Niech dane będą przestrzenie wektorowe V i W nad ciałem $\mathbb{R}$ oraz odwzorowanie liniowe $f : V \longrightarrow W$.

Niech $e_1, ..., e_n$ będzie bazą przestrzeni wektorowej V, zaś $e'_1, ..., e'_m$ bazą przestrzeni W. Dla odwzorowania liniowego f mamy dla pewnych skalarów $a_{ij}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$

$$f(e_1) = a_{11}e'_1 + ... + a_{m1}e'_m,$$

$$f(e_2) = a_{12}e'_1 + ... + a_{m2}e'_m,$$

$$.$$

$$.$$

$$f(e_n) = a_{1n}e'_1 + ... + a_{mn}e'_m.$$

Inaczej zapisując $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i$ dla każdego j=1,...,n.

TWIERDZENIE **1.12.2.** *Jeśli A jest macierzą odwzorowania $f : V \longrightarrow W$ przy pewnych bazach przestrzeni V i W, to $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} f$.*

Niech $f, h : V \longrightarrow W$ będą dwoma odwzorowaniami liniowymi. Wiemy, że suma tych odwzorowań jest odwzorowaniem liniowym. Przy danych bazach $e_1, ..., e_n, e'_1, ..., e'_m$ przestrzeni V i W odpowiednio, macierz odwzorowania f+h jest sumą macierzy $A_f + A_h$, gdzie A_f jest macierzą odwzorowania f a A_h macierzą odwzorowania h.

- dodawanie macierzy odpowiada dodawaniu odwzorowań liniowych.
- mnożeniu macierzy przez skalar odpowiada mnożenie odwzorowania liniowego przez skalar.

1.12.2 Wartości własne i wektory własne

DEFINICJA. Skalar λ jest wartością własną macierzy $A \in M_n(\mathbb{R})$ stopnia n, jeśli istnieje niezerowy wektor $v \in \mathbb{R}^n$ taki, że $Av = \lambda v$. Każdy taki wektor v nazywamy wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej λ.

W powyższej równości $Av = \lambda v$ wektor v jest traktowany jako 1-kolumnowa macierz.

TWIERDZENIE **1.12.3.** *Jeżeli $\lambda_1, ..., \lambda_k$ są różnymi między sobą wartościami własnymi endomorfizmu f i $v_1, ..., v_k$ są wektorami własnymi odpowiadającymi tym wartościom własnym, to wektory $v_1, ..., v_k$ są liniowo niezależne.*

TWIERDZENIE **1.12.4.** *Skalar λ jest wartością własną odwzorowania f wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\det(f - \lambda I) = 0$$

gdzie I jest odwzorowaniem identycznościowym przestrzeni V.

1.12.3 Przykłady

Macierz odwzorowania

Wyznaczyć macierz odwzorowania $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, danego wzorem

$$F((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1 + 3x_2 - 2x_3,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

Dla baz standardowych (kanonicznych):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

lub takie obliczenia:
$f(e_1) = f((1, 0, 0, 0)) = (1, 1)$, $f(e_2) = f((0, 1, 0, 0)) = (3, -1)$,
$f(e_3) = f((0, 0, 1, 0)) = (-2, 1)$, $f(e_4) = f((0, 0, 0, 1)) = (0, -1)$.
W bazach niestandardowych:
$u_1 = (2, 0, 1, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0, 3)$, $u_3 = (0, 1, 1, 0)$, $u_4 = (1, -1, 2, 3)$
oraz $v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (-1, 0)$
otrzymujemy $f(u_1) = f((2, 0, 1, 0)) = (0, 3)$, $f(u_2) = f((-1, 1, 0, 3)) = (2, -5)$,
$f(u_3) = f((0, 1, 1, 0)) = (1, 0)$, $f(u_4) = f((1, -1, 2, 3)) = (-6, 1)$.
stąd

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Miejsce zerowe przekształcenia

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 & = 0 \\ 2x_2 + 10x_3 - 7x_4 & = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 + 4x_4 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \\ 5 & \boxed{1} & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -8 & 0 & 16 & -12 \\ \boxed{-6} & 0 & 12 & -9 \\ -10 & 0 & 20 & -15 \\ 5 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-6} & 0 & 12 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -7/2 \end{bmatrix}$$

$$\ker A' = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 12 & -9 \\ 0 & 1 & 5 & -7/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 & = 0 \\ 2x_2 + 10x_3 - 7x_4 & = 0 \end{cases}$$

Wartości własne macierzy

$$
\begin{aligned}
w_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 3-\lambda & -1\\ 0 & 2 & -\lambda\end{bmatrix}\right)\\
&= -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2\\
&= -(\lambda-2)(\lambda-1)^2.
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że wartościami własnymi macierzy A są liczby 2 i 1.

Wartości i wektory własne odwzorowania

Rozważmy odwzorowanie liniowe $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem

$$F(x,y,z) = (x-y+2z, x-z, x+y+2z)$$

Niech $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ będą wektorami bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^3$. Macierzą odwzorowania w bazie kanonicznej jest macierz

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Wartości i wektory własne macierzy F są także wartościami własnymi odwzorowania F. Wielomian charakterystyczny macierzy **F** dany jest wzorem:

$$
\begin{aligned}
w_F(\lambda) &= \det(F-\lambda I)\\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2\\ 1 & -\lambda & -1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}\right)\\
&= -\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+6\\
&= -(\lambda-3)\left(\lambda^2+2\right).
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że liczba 3 jest jedyną wartością własną odwzorowania F w przypadku, gdy $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rozważając $\lambda_1 = 3$ otrzymujemy układ $(A-\lambda_1 I)(x,y,z)^T = (0,0,0)^T$, czyli

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & 2\\ 1 & -\lambda_1 & -1\\ 1 & 1 & 2-\lambda_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix},$$

który po podstawieniu odpowiednich wartości przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2\\ 1 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Rozwiązaniami pierwszego układu są wektory postaci $r(1,0,1)$, gdzie $r \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

1.13 Geometria analityczna

1.13.1 Iloczyn skalarny. Przestrzeń euklidesowa

DEFINICJA (Iloczyn skalarny). W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy iloczyn skalarny dla dwóch wektorów $v = [v_1, ...v_n]$ oraz $w = [w_1, ..., w_n] \in \mathbb{R}^n$ jako:

$$v \circ w := v_1w_1 + ... + v_nw_n = \sum_{i=1}^{n} v_iw_i.$$

Iloczyn jest często oznaczamy w inny sposób $\langle v, w\rangle = v \circ w$.

DEFINICJA (Norma wektora). W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy normę dla wektora $v = [v_1, ...v_n]$ jako

$$|v| := \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + ... + v_n^2} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2.$$

DEFINICJA (Metryka). W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy metrykę dla dwóch wektorów $v = [v_1, ...v_n]$ oraz $w = [w_1, ..., w_n] \in \mathbb{R}^n$ jako

$$d(v, w) := |v - w| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + ... + (v_n - w_n)^2}.$$

TWIERDZENIE **1.13.1.** *Dla dowolnych dwóch wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$ zachodzą dwa wzory: polaryzacyjny oraz prawo równoległoboku:*

1. $|v + w|^2 - |v - w|^2 = 4\langle v, w\rangle$,
2. $|v + w|^2 - |v - w|^2 = 2(|v|^2 + |w|^2)$.

TWIERDZENIE **1.13.2** (Własności iloczynu skalarnego). *Dla dowolnych wektorów v_1, v_2 oraz $w \in \mathbb{R}^n$ oraz dowolnej liczby $a \in \mathbb{R}$ zachodzą własności:*

- $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$,
- $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$,
- $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$,
- $\langle v, v\rangle \geq 0$ *dla* $v \neq 0$.

Mówimy, że odwzorowanie $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$ jest symetryczną formą dwuliniową na przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

DEFINICJA (Przestrzeń euklidesowa). Przestrzeń liniową V z określonymi: iloczynem skalarnym, normą oraz metryką, nazywamy przestrzenią euklidesową.

TWIERDZENIE **1.13.3** (Nierówność Schwarza). *Dla dowolnych wektorów v, w zachodzi nierówność:*

$$\langle v, w\rangle \leq |v||w|.$$

Dowód. Wynika z nierówności dla współrzędnych:

$$\sum_{i=1}^{n} v_iw_i \leq \sum_{i=1}^{n} |v_iw_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i^2}.$$

□

Wniosek. Zachodzi tzw. nierówność trójkąta dla dowolnych wektorów $v, w \in \mathbb{R}^n$:

$$|v + w| \leq |v| + |w|.$$

Dowód. Z nierówności Schwarza $\langle v, w\rangle \leq |v||w|$, czyli $|v + w|^2 = \langle v + w, v + w\rangle = \langle v, v\rangle + 2\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle \leq |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$. □

TWIERDZENIE **1.13.4** (Własności normy). *Odwzorowanie $v \mapsto |v|$ spełnia własności:*

- $|0| = 0$ *oraz* $|v| > 0$ *jeśli* $v \neq 0$,
- $|av| = |a||v|$ *dla* $a \in \mathbb{R}$,
- $|v + w| \leq |v| + |w|$.

1.13.2 Miara kąta

DEFINICJA (Miara kąta). Jeśli wektory v, w są niezerowe, to liczbę rzeczywistą $\alpha \in [0, 2\pi)$ spełniającą podany warunek nazywamy kątem między wektorami v i w:

$$\cos\alpha = \frac{\langle v, w\rangle}{|v||w|}.$$

TWIERDZENIE **1.13.5** (Pitagoras). *Jeśli wektory v, w są do siebie prostopadłe, czyli $\langle v, w\rangle = 0$, to*

$$|v + w|^2 = |v|^2 + |w|^2.$$

Dowód. Mamy $|v + w|^2 = \langle (v + w), (v + w)\rangle = |v|^2 + 2v \cdot w + |w|^2$ □

Wniosek. Zachodzi nierówność trójkąta $\leq |v|^2 + 2|v \cdot w| + |w|^2 \leq |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 = (|v| + |w|)^2$

1.13.3 Ortogonalność wektorów i podprzestrzeni

Dwa wektory v_1, v_2 są do siebie prostopadłe jeśli $g(v_1, v_2) = 0$.

Stwierdzimy, że sla wektora v zbiór wektorów ortogonalnych jest podprzestrzenią liniową $v^\perp$ wymiaru $n-1$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + ... + v_nx_n = 0$$

Podprzestrzeń nazywa się dopełnieniem ortogonalnym dla v.

Podprzestrzenie $W_1, W_2 \subset V$ są ortogonalne jeśli $g(w_1, w_2) = 0$ dla $\forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$

Definicja. Niech $W \subset \mathbb{R}^n$ będZie podprzestrzenią liniową wymiaru k. Wówczas zbiór $W^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n : x \perp w \quad \forall w \in W\}$ nazywamy dopełnieniem ortogonalnym W.

Twierdzenie **1.13.6.** *(rozkład ortogonalny) Zachodzą wzory:*

$$W \cap W^\perp = \{0\}, \qquad \dim W + \dim W^\perp = n$$

Stwierdzimy, że $(W^\perp)^\perp = W$ dla każdej podprzestrzeni W.

Definicja. Układ wektorów jest *ortogonalny* jeśli $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ jeśli dwa dowolne wektory są ortogonalne. Ponadto możemy każdy taki wektor unormować do jedynki tworząc układ nazywany *ortonormalnym*.

Twierdzenie **1.13.7** (Gram-Schmidt)**.** *Każda przestrzeń V ustalonego wymiaru ma bazę ortonormalną.*

Dowód. Za pomocą indukcji ze względu na wymiar przestrzeni $n = \dim V$:

- dla $k = 1$ prawda
- założymy że k-wymiarowa ma bazę orto;
- niech V ma wymiar k+1; $\{w_i\}_{i=1,..k+1}$ jakaś baza
- $w'_{k+1} := w_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (w_{k+1}|v_i)v_i$
- biorąc $v_{k+1} := \frac{w'_{k+1}}{|w'_{k+1}|}$ otrzymujemy bazę ortonormalną w V wymiaru $k+1$.

□

1.13.4 Rzut prostopadły

Twierdzenie **1.13.8** (Rzut ortogonalny)**.** *Niech $W \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią wektorową. Istnieje odwzorowanie liniowe $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*

- *$P(w) = w$ dla każdego wektora $w \in W$,*
- *$(v - P(v)) \perp W$ dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^n$.*

Dowód. Rozważymy układ ortogonalny $(w_1, ..., w_m)$ rozpinający podprzestrzeń W. Wtedy:

$$P(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 + \cdots + \frac{\langle v, w_n\rangle}{\langle w_m, w_m\rangle} w_m$$

□

Twierdzenie **1.13.9.** *Dla objętości zachodzą:*

- *Jeżeli n=1, to miarą wektora v_1 jest jego długość $|v_1|$.*
- *Jeżeli określona już jest miara układów n-elementowych, to miarą układu $v_1, ..., v_n, v$ jest liczba zdefiniowana wzorem*

$$\mathrm{vol}(v_1, ..., v_n, v) = d(v, \mathrm{lin}\{v_1, ..., v_n\})\mathrm{vol}(v_1, ..., v_n).$$

1.13.5 Objętość n-równoległościanu

Definicja. Dla dowolnej bazy $(e_1, e_2, ..., e_n)$ przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$ określamy macierz Grama $G[i,j] := \langle e_i, e_j\rangle$, czyli:

$$\begin{bmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle, & ..., & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle, & \langle e_n, e_2\rangle, & ..., & \langle e_n, e_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Możemy obliczyć iloczyn skalarny za pomocą $\langle v, w\rangle = v^TGw$

Twierdzenie **1.13.10.** *Wyznacznik macierzy Grama dowolnego układu wektorów jest zawsze większy lub równy zeru. Jest równy zeru wtedy i tylko wtedy, gdy układ wektorów jest liniowo zależny.*

Przykład dla macierzy Grama.
$v_1 = [1,0,1,0], \quad v_2 = [1,-2,3,-4], \quad v_3 = [1,-1,1,0], \quad v_4 = [0,-1,2,1]$

$$G(v_1,v_2,v_3,v_4) = \det \begin{bmatrix} v_1\cdot v_1 & v_1\cdot v_2 & v_1\cdot v_3 & v_1\cdot v_4 \\ v_2\cdot v_1 & v_2\cdot v_2 & v_2\cdot v_3 & v_2\cdot v_4 \\ v_3\cdot v_1 & v_3\cdot v_2 & v_3\cdot v_3 & v_3\cdot v_4 \\ v_4\cdot v_1 & v_4\cdot v_2 & v_4\cdot v_3 & v_4\cdot v_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 30 & 6 & 4 \\ 2 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix} = 100$$

DEFINICJA (Równoległościan). Dla układu wektorów $(v_1,...,v_m)$ równoległościanem rozpiętym na tym układzie nazywamy zbiór

$$R := \{t_1v_1 + t_2v_2 + ... + t_mv_m\},$$

gdzie $t_i \in [0,1]$ dla każdego $i \in 1,2,,,m$.

DEFINICJA (Objętość). Dla dowolnego układu m wektorów $v_1,...,v_m$ określimy jego objętość:

$$\mathrm{vol}(v_1,...,v_m) := \sqrt{\mathrm{G}(v_1,...,v_m)}.$$

TWIERDZENIE **1.13.11** (Wyznacznik jako objętość). *Dla macierzy $\boldsymbol{A}$ ustalonego stopnia n zachodzi równość względem jej układu kolumn:*

$$\mathrm{vol}\ (\boldsymbol{A}_1,...,\boldsymbol{A}_n) = \det \boldsymbol{A}.$$

TWIERDZENIE **1.13.12** (O wyznaczniku odwzorowania). *Niech F będzie operatorem liniowym w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Wtedy zachodzi równość:*

$$\mathrm{vol}\ (Fv_1,...,Fv_n) = |\det F|\,\mathrm{vol}\ (v_1,...,v_n).$$

DEFINICJA (Iloczyn mieszany). Dla dowolnej trójki wektorów $(uvw) \in \mathbb{R}^n$ określimy iloczyn, który jest równy objętości równoległościanu $R(u,v,w)$:

$$[\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{v}] := \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{v})$$

Przykład. Dla wektorów $u = [1,0,1], \quad v = [1,-1,1], \quad w = [0,1,3]$

$$\mathrm{vol}\{u,v,w\}^2 = G(u,v,w)$$

$$= \det \begin{bmatrix} u\cdot u & u\cdot v & u\cdot w \\ v\cdot u & v\cdot v & v\cdot w \\ w\cdot u & w\cdot v & w\cdot w \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix} = 9$$

TWIERDZENIE **1.13.13** (Własności iloczynu mieszanego). *Zachodzą wzory dla iloczynu mieszanego:*

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

1.13.6 Orientacja przestrzeni

DEFINICJA (Iloczyn wektorowy). Dana jest baza $(e_1,e_2,...,e_n)$, która wyznacza orientację przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Dla układu $n-1$ wektorów $(v_1,v_2,...,v_{n-1})$ iloczynem wektorowym nazywamy wektor $w = v_1\times ...\times v_{n-1}$, który spełnia warunki:

- dla wektorów liniowo zależnych $w = 0$,
- $w \in \mathrm{lin}\ (v_1,v_2,...,v_{n-1})^\perp$,
- $|w| = \mathrm{vol}\ (v_1,v_2,...,v_{n-1})$,
- układ wektorów $(v_1,v_2,...,v_{n-1},w)$ ma zgodną orientację.

TWIERDZENIE **1.13.14** (Obliczanie iloczynu wektorowego). *Dana jest macierz $\boldsymbol{A}$ oraz jej przestrzeń kolumnowa $C(\boldsymbol{A})$. Dla dowolnego układu kolumn $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_{n-1}$ jeżeli $w = \boldsymbol{A}_1\times\boldsymbol{A}_2\times ...,\boldsymbol{A}_{n-1}$, to*

$$w_i = (-1)^{i+n}\det_i \boldsymbol{A}'$$

gdzie wyznacznik $\det_i \boldsymbol{A}'$ powstaje przez pominięcie (skreślenie) i-tego wiersza w macierzy $n-1$ kolumn $\boldsymbol{A}' = [\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_{n-1}]$.

Długość iloczynu wektorowego $|v \times w|$ to z określenia pole powierzchni równoległoboku o bokach będących tymi wektorami.

TWIERDZENIE **1.13.15.** *Iloczyn wektorowy można obliczyć w $\mathbb{R}^3$ tzw. wyznacznikiem symbolicznym:*

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Wniosek. Tabelka mnożenia dla wersorów osi w $\mathbb{R}^3$:

- $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
- $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$
- $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$

1.13.7 Przykłady

Odległość wektora od podprzestrzeni

Niech $u_1 = [1,0,1], u_2 = [2,2,1]$ oraz $v = [2,-3,-1]$. Obliczę $d(v,U)$, gdzie U=lin$\{u_1,u_2\}$

- liczba $d(v,U)$ jest z definicji równa $||v'||$, gdzie $v' \in U^{\perp}$ jest składową wektora w w rozkładzie przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na sumę prostą $U \oplus U^{\perp}$.
- wystarczy znaleźć bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której wektory należą do $U \cup U^{\perp}$.
- $\dim U^{\perp} = 1$ i jako bazę dla podprzestrzeni $U^{\perp}$ możemy przyjąć dowolne niezerowe rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} (x_1,x_2,x_3) \cdot u &= 0 \\ (x_1,x_2,x_3) \cdot v &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 & & + & x_3 & = 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = 0. \end{cases}$$

- wektor $[2,-1,-2]$ jest rozwiązaniem
- $[1,0,1], [2,2,1]$ oraz $[2,-1,-2]$ to baza $\mathbb{R}^3$
- współrzędne wektora v w tej bazie to $\lambda_1[1,0,1] + \lambda_2[2,2,1] + \lambda_3[2,-1,-2] = [2,-3,-1] = v$ i rozwiązanie to $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 1.$
- $v' = 1[2,-1,-2] = [2,-1,-2]$, wtedy $||v'|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

Procedura ortonormalizacji w $\mathbb{R}^2$

Podane są wektory $v_1 = [1,1]$ oraz $v_2 = [3,-4]$.

- unormowany $u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1]$
- $u_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$
  - $0 = u_2 \cdot u_1 = \lambda_1 v_1 \cdot u_1 + \lambda_2 v_2 \cdot u_1 = \lambda_1 |v_1| + \lambda_2 v_2 \cdot u_1$
  - $\lambda_1 = -\frac{\lambda_2 (v_2 \cdot u_1)}{|v_1|}$
  - $u_2 = \lambda_2 (v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1)$
  - $|u_2| = 1 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{|(v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1)|}$
- rzut v_2 na kierunek v_1 i odejmujemy od v_2, czyli

$$\frac{1}{\lambda_2} u_2 = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_1|^2} v_1 = v_2 - (v_2 \cdot u_1) u_1 = [3,-4] - \frac{-1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1] = \frac{7}{2}[1,-1]$$

stąd $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{7}[3,-4] + \frac{1}{7\sqrt{2}}[1,1] = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]$
czyli baza ortonormalna

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1] \; oraz \; u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,-1]$$

1.14 Geometria afiniczna

1.14.1 Prosta na płaszczyźnie

1.14.2 Prosta w przestrzeni

DEFINICJA (Prosta). Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ oraz $v \in V$. Prosta l, do której należy P_0, to zbiór punktów $P \in \mathbb{R}^3$, takich że

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel v$$

Dla punktów prostej l zachodzi równanie, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda v$$

TWIERDZENIE **1.14.1** (Równanie parametryczne). *Jeśli O to początek układu współrzędnych oraz $\vec{r_0} = \overrightarrow{OP_0}$ i $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, to dla punktów prostej zachodzi równanie*

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda v$$

czyli otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_x \\ y = y_0 + \lambda v_y \\ z = z_0 + \lambda v_z \end{cases}$$

Odległość punktu od prostej. Obliczam $d(P, l)$ dla $l : [x, y, z] = P_0 + \lambda\vec{v}$

$$d = \|P\vec{P}_0 - (P\vec{P}_0 \cdot \vec{v})\vec{v}\|$$

Odległość prostych skośnych. Obliczam $d(l_1, l_2)$

$$l_1 : x = \vec{P_1} + \lambda_1 v_1 \tag{1.18}$$
$$l_2 : x = \vec{P_2} + \lambda_2 v_2 \tag{1.19}$$

z warunkiem wichrowatości:

$$P_1\vec{P}_2 \cdot (v_1 \times v_2) \neq 0$$

Wtedy

$$d(l_1, l_2) = \frac{P_1\vec{P}_2 \cdot (v_1 \times v_2)}{\|(v_1 \times v_2)\|}.$$

1.14.3 Płaszczyzna

DEFINICJA. Niech $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ oraz $v, w \in V$. Płaszczyzna to zbiór punktów $P \in \mathbb{R}^3$, takich że

$$\overrightarrow{P_0P} \parallel v \wedge w$$

Dla punktów płaszczyzny zachodzi równanie

$$\overrightarrow{P_0P} = \lambda_1 v + \lambda_2 w$$

Jeśli O to początek układu współrzędnych oraz $r_0 = \overrightarrow{OP_0}$ i $r = \overrightarrow{OP}$, to dla punktów płaszczyzny zachodzi równanie

$$r = r_0 + \lambda_1 v + \lambda_2 w$$

czyli otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 v_x + \lambda_2 w_x \\ y = y_0 + \lambda_1 v_y + \lambda_2 w_y \\ z = z_0 + \lambda_1 v_z + \lambda_2 w_z \end{cases}$$

Stwierdzimy, że punkt $P = (x, y, z)$ należy do płaszyzny wyznaczonej przez punkt

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) \text{ oraz } (v, w) \iff \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0.$$

Punkt $P = (x, y, z)$ należy do płaszyzny wyznaczonej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ oraz wektory (v, w) wtedy i tylko wtedy gdy spełnione jest równanie

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

► Dla wyznacznika otrzymujemy po rozwinięciu:

$A = \begin{vmatrix} v_y, & v_z \\ w_y, & w_z \end{vmatrix}$; $B = -\begin{vmatrix} v_x, & v_z \\ w_x, & w_z \end{vmatrix}$; $C = \begin{vmatrix} v_x, & v_y \\ w_x, & w_y \end{vmatrix}$ ◄

Stwierdzimy, że Wektor $\vec{N} = [A, B, C]$ jest prostopadły do wektorów (v, w), czyli

$$N \cdot v = 0 \; oraz \; N \cdot w = 0$$

Wektor $n = \frac{N}{\|N\|}$ nazywamy wektorem normalnym płaszczyzny.
Zajmiemy się teraz wyznaczaniem odległości punktu od płaszczyzny.
$d(P, \pi) = \|\vec{v} \cdot \vec{n}\| = \|(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) \cdot \vec{n}\| =$

$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.14.4 Izometrie płaszczyzny

Definicja. Odwzorowanie bijektywne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ przestrzeni metrycznej w siebie, które zachowuje odległość nazywane jest izometrią, czyli zachodzi warunek

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

Dwie figury, które mogą być transformowane w siebie izometrią nazywamy kongruentnymi.

Definicja. Dla przestrzeni wektorowej V izometria $f : V \to V$ jest przekształceniem liniowym, które zachowuje normę (długość) wektora, czyli $\|f(v)\| = \|v\|$.

Twierdzenie **1.14.2.** *Izometrie płaszczyzny zawierają:*

- *obroty i translacje,*
- *odbicia*
- *symetrie z poślizgiem, czyli przemienne złożenie symetrii osiowej i przesunięcia o wektor równoległy do osi symetrii.*

Działanie izometrii gdzie punkt $P = (x, y)$ oraz wektor $\overrightarrow{OP} = [x, y]$

- obrót o kąt ϕ

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}$$

- translacja o wektor $\xi = [\xi_x, \xi_y]$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \xi_x \\ y + \xi_y \end{bmatrix}$$

- odbicie np. względem prostej $y = 0$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

1.14.5 Przykłady

Odległość punktu od płaszczyzny

Dane $A = (1, 2, 3)$ oraz $\pi : x - y - z = -1$. Obliczam $d(A, \pi)$

- $\vec{N} = [1, -1, -1]$ oraz $\vec{n} = \frac{N}{\|N\|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}}[1, -1, -1]$
- punkt $\pi \ni P_0 = (0, 1, 0)$, to $\overrightarrow{P_0A} = [1, 1, 3]$
- $d(A, \pi) = |\overrightarrow{P_0A} \cdot n| = |\frac{1}{\sqrt{3}}(1 \cdot 1 + 1 \cdot -1 + 3 \cdot -1)| = \frac{3}{\sqrt{3}}$

Odległość punktu od prostej w $\mathbb{R}^3$

Dane $A = (2, 1, -3)$ oraz $l : r = [1, 2, 4] + \lambda[2, -3, 1]$. Obliczam $d(A, l)$

- wyznaczam płaszczyznę π, że $A \in \pi$ oraz $\pi \perp l$

$$2x - 3y + z = -2$$

- wyznaczam punkt A' przecięcia $\pi \cap l$

$$\lambda = -\frac{1}{7} \Rightarrow A' = (5/7, 15/7, 27/7)$$

- $d(A, l) = \|\overrightarrow{AA'}\| = \frac{1}{7}\| [-9, 8, 48] \| = \frac{\sqrt{2449}}{7}$

Odległość prostych równoległych w $\mathbb{R}^3$

Dane:
$l_1 : r = [-1, 1, 1] + \lambda_1[-1, 2, -1]$
$l_2 : r = [1, 3, 0] + \lambda_2[-1, 2, -1]$

Obliczam $d(l_1, l_2)$:

- wyznaczam $\pi \perp vw$ i zawierającą punkt $P = (1, 3, 0) \in l_2$

$$\pi : x - 2y + z = -5$$

- wyznaczam punkt przecięcia $\pi \cap l_1$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow P' = (-3/2, 2, 1/2)$$

- $\|PP'\| = \frac{1}{2}\|[-5, -2, 1]\| = \frac{\sqrt{30}}{2}$

Odległość prostych skośnych w $\mathbb{R}^3$

Dane:
$l_1 : r = [1, 3, 2] + \lambda_1[1, 2, 1] = r_0 + \lambda_1 v$
$l_2 : r = [3, -1, 2] + \lambda_2[1, -2, -1] = r_0 + \lambda_2 w$

Obliczam $d(l_1, l_2)$:

- wyznaczam płaszczyznę π, że $l_1 \subset \pi$ oraz $\pi || l_2$

$$v \times w = [0, 2, -4] \Rightarrow \pi : 2y - 4z = -1$$

- odległość $l_2 \ni P = (3, -1, 2)$ od π

$$\frac{|-1-4+1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

1.15 Krzywe i powierzchnie

1.15.1 Krzywe płaskie drugiego stopnia

Krzywe to zbiór punktów (x, y) na płaszczyźnie, które spełniają równanie postaci:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

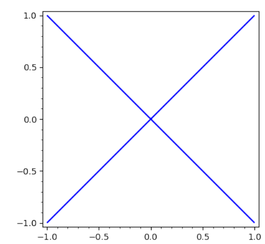
Dla oznaczenia wektora $\mathbb{R}^2 \ni X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ możemy zapisać dla części kwadratowej macierz symetryczną $\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ jako

$$X^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}X = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$$

Para prostych

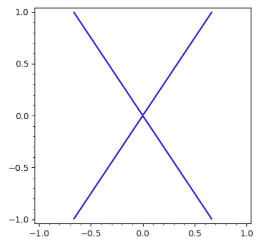
Rysunek przedstawia parę prostych przecinających się o równaniu $x^2 - y^2 = 0$, czyli

$$|x| = |y|.$$



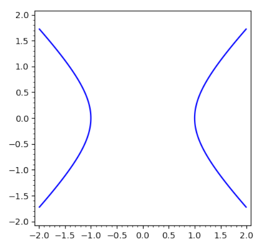
Rysunek przedstawia parę prostych przecinających się w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$



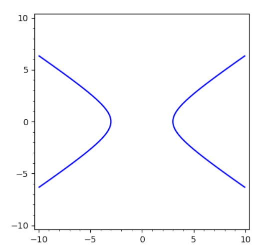
Hiperbola

Rysunek przedstawia hiperbolę $x^2 - y^2 + 1 = 0$.



Rysunek przedstawia hiperbolę w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$



Twierdzenie **1.15.1** (Dwie ogniskowe)**.** *Dane są dwa różne punkty na płaszczyźnie F_1 oraz F_2. Dla liczby $a > 0$, takiej że $2a < |F_1F_2|$ następujący zbiór $\mathcal{H}(F_1, F_2, a)$ jest hiperbolą:*

$$\mathcal{H}(F_1, F_2, a) := \{X \in \mathbb{R}^2 : |F_1X| - |F_2X| = \pm 2a\}.$$

Dowód. Niech $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$, wtedy $|F_1F_2| = 2c$. Połóżmy $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, wtedy pokażemy, że

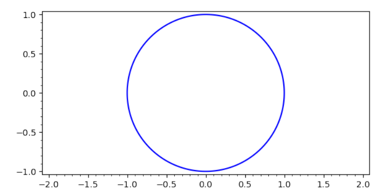
$$\mathcal{H}(F_1, F_2, a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

Powinowactwo prostokątne daje w obrazie hiperbolę: $(x, y) \mapsto (x', y') = (x, \frac{a}{b}y)$ o równaniu $(x')^2 - (y')^2$.

□

Elipsa

Rysunek przedstawia elipsę/okrąg $x^2 + y^2 - 1 = 0$.



Równanie okręgu. Dla równania okręgu w dowolnym punkcie/środku (a, b) mamy $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Wtedy po rozwinięciu

$$-R^2 + a^2 + b^2 - 2\,ax + x^2 - 2\,by + y^2.$$

Możemy ustalić zatem, że dla formy kwadratowej 1.15.1 w przypadku takiego równania okręgu

$$B = 0 \;\wedge\; A = C \neq 0.$$

Zapisując w tej sytuacji formę równań dla krzywej jako

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

otrzymamy, że możemy zwinąć postać równania do

$$(x + D/A)^2 + (y + E/A)^2 - (D^2 + E^2 - AF)/A^2 = 0.$$

Ponieważ promień $R^2 = (D^2 + E^2 - AF)/A^2$, to trzy sytuacje: $R^2 > 0$ okrąg, $R^2 = 0$ punkt oraz $R^2 < 0$ tzw. okrąg urojony.

Styczna do okręgu. Skorzystamy z podstawowej własności stycznej, która jest prostopadła do promienia w punkcie styczności. Dla punktu P(x,y) poza okręgiem na stycznej oraz punktu na okręgu $P_0 = (x_0, y_0)$ mamy zatem

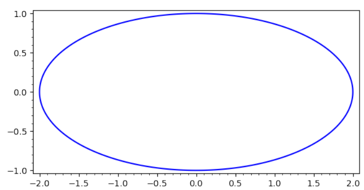
$$\overrightarrow{PP_0} \perp \overrightarrow{0P_0},$$

czyli równanie $[x - x_0, y - y_0] \perp [x_0, y_0]$. Stąd mamy równanie stycznej w punkcie (x_0, y_0) okręgu o promieniu R

$$xx_0 + yy_0 = R^2.$$

Postać kanoniczna. Rysunek poniżej przedstawia elipsę w postaci kanonicznej:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$



Twierdzenie **1.15.2** (Dwie ogniskowe)**.** *Dane są dwa różne punkty na płaszczyźnie F_1 oraz F_2. Dla liczby $a > 0$, takiej że $|F_1F_2| < 2a$ następujący zbiór $\mathcal{E}(F_1, F_2, a)$ jest elipsą:*

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, a) := \{X \in \mathbb{R}^2 : |F_1X| + |F_2X| = 2a\}.$$

Dowód. Niech $F_1 = (-c, 0)$ oraz $F_2 = (c, 0)$, wtedy $|F_1F_2| = 2c$. Połóżmy $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, wtedy pokażemy, że

$$\mathcal{E}(F_1, F_2, a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

Powinowactwo prostokątne daje w obrazie okrąg w promieniu a:

$$(x, y) \mapsto (x', y') = (x, \frac{a}{b}y).$$

Niech punkt $X = (x, y) \in \mathcal{E}(F_1, F_2, a)$, wtedy

$$2a = |F_1X| + |F_2X| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Dla podstawienia $u = x^2 + y^2 + c^2$ otrzymamy

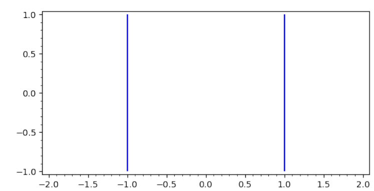
$$4a^2 = (u + 2cx) + (u - 2cx) + 2\sqrt{(u + 2cx)(u - 2cx)}.$$

Stąd $2a^2 - u = \sqrt{u^2 - 4c^2x^2}$ i podnosząc do kwadratu $4a^4 - 4a^2u + u^2 = u^2 - 4c^2x^2$. Wynika, że

$$a^2b^2 = b^2x^2 + a^2y^2.$$

□

Para równoległych

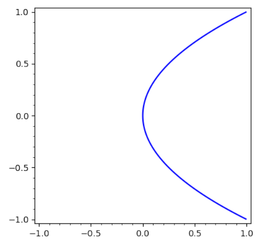


Rysunek przedstawia parę prostych o równaniu $-x^2 + 1 = 0$, czyli

$$|x| = 1.$$

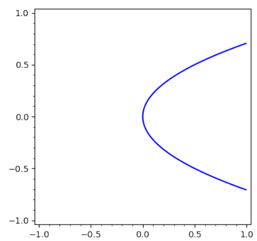
Parabola

Rysunek przedstawia parabolę $x - y^2 = 0$.



Rysunek przedstawia parabolę w postaci kanonicznej

$$\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$



Twierdzenie **1.15.3** (Ognisko i kierownica)**.** *Na płaszczyźnie dany jest punkt $F \in \mathbb{R}^2$ oraz prosta $l \subset \mathbb{R}^2$, dla której $F \notin l$. Następujący zbiór $\mathcal{P}(F,l)$ jest parabolą:*

$$\mathcal{P}(F,l) := \{X \in \mathbb{R}^2 : |FX| = |X,l|\}.$$

Dowód. Niech punkt $F = (p/2, 0)$ oraz prosta $l : x = -p/2$, wtedy

$$\mathcal{P}(F,l) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px\}.$$

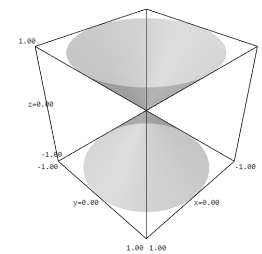
□

1.15.2 Powierzchnie drugiego stopnia

Stożek

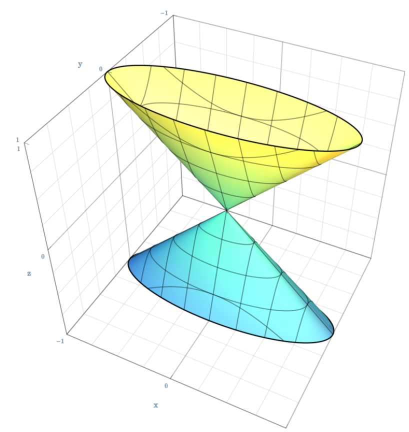
Rysunek przedstawia stożek $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, czyli

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}.$$

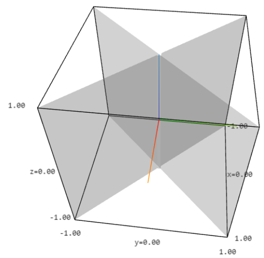


Rysunek przedstawia stożek eliptyczny w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Para płaszczyzn



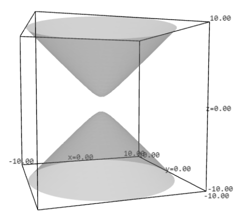
Rysunek przedstawia parę płaszczyzn przecinających się $x^2 - y^2 = 0$, czyli

$$|x| - |y| = 0.$$

Hiperboloida dwupowłokowa

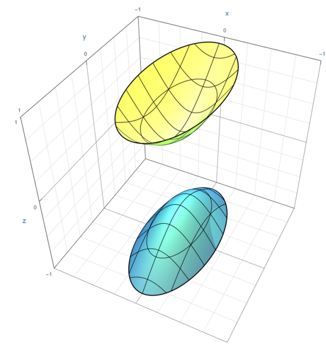
Rysunek przedstawia hiperboloidę dwupowłokową $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$, czyli

$$z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$



Rysunek przedstawia hiperboloidę dwupowłokową w postaci kanonicznej

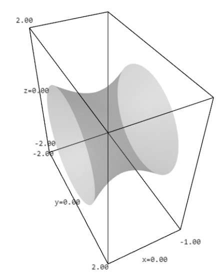
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



Hiperboloida jednopowłokowa

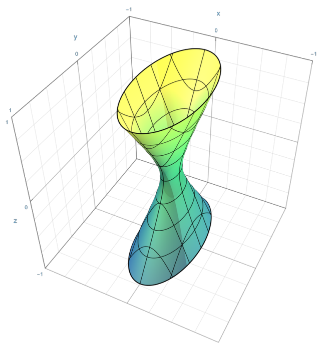
Rysunek przedstawia hiperboloidę jednopowłokową $x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$, czyli

$$z = \pm\sqrt{x^2 - y^2 + 1}.$$



Rysunek przedstawia hiperboloidę jednopowłokową w postaci kanonicznej

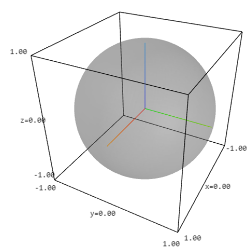
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Elipsoida

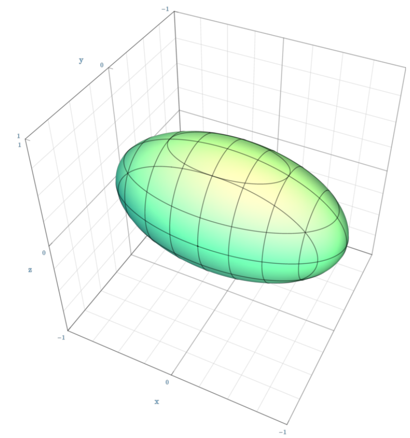
Rysunek przedstawia elipsoidę $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$, czyli

$$z = \pm\sqrt{-x^2 - y^2 + 1}.$$



Rysunek przedstawia elipsoidę w postaci kanonicznej

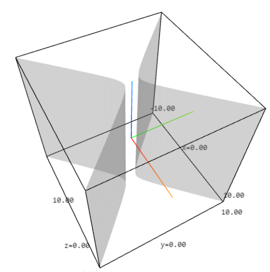
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Walec hiperboliczny

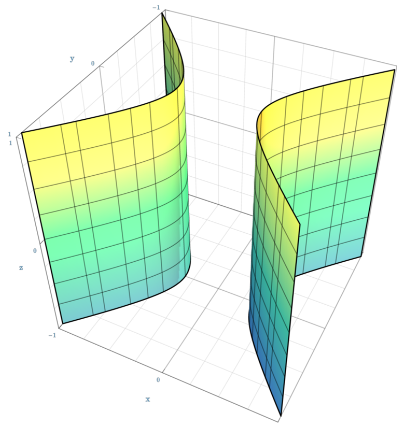
Rysunek przedstawia walec hiperboliczny $x^2 - y^2 + 1 = 0$, czyli

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 1}.$$



Rysunek przedstawia walec eliptyczny w postaci kanonicznej

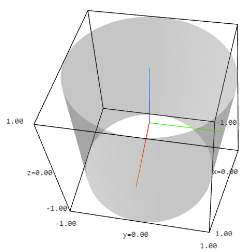
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Walec eliptyczny

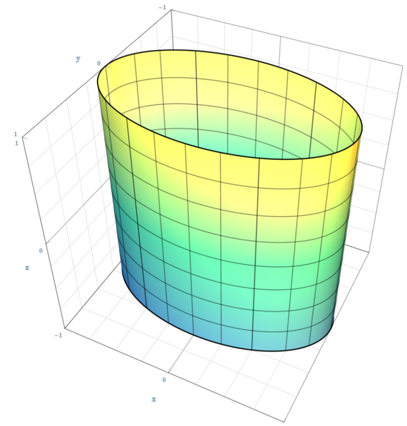
Rysunek przedstawia walec eliptyczny $-x^2 - y^2 + 1 = 0$, czyli

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

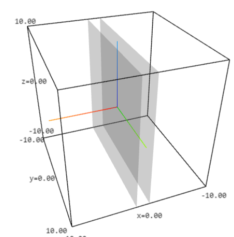


Rysunek przedstawia walec eliptyczny w postaci kanonicznej

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



Para płaszczyzn równoległych



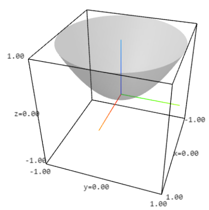
Rysunek przedstawia parępłaszczyzn równoległych $-x^2 + 1$, czyli

$$|x| - 1 = 0.$$

Paraboloida eliptyczna

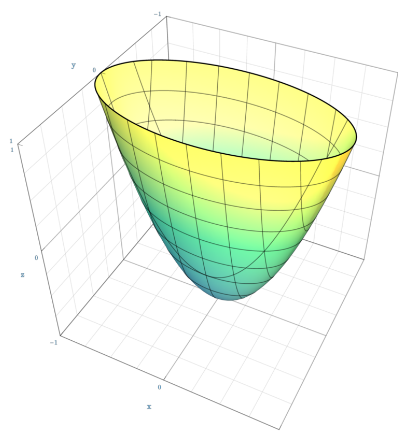
Rysunek przedstawia paraboloidę eliptyczną $x^2 + y^2 + z = 0$, czyli

$$z = -x^2 - y^2.$$



Rysunek przedstawia paraboloidę eliptyczną w postaci kanonicznej

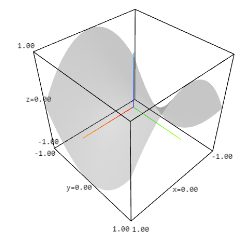
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



Paraboloida hiperboliczna

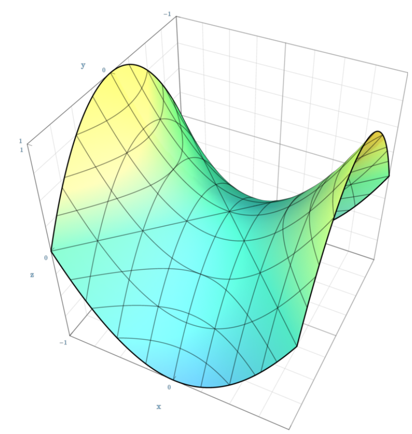
Rysunek przedstawia paraboloidę hiperboliczną $x^2 - y^2 + z = 0$, czyli

$$z = y^2 - x^2.$$



Rysunek przedstawia paraboloidę hiperboliczną w postaci kanonicznej

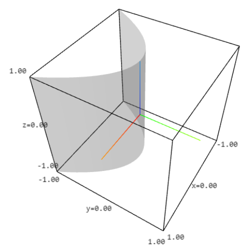
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$



Walec paraboliczny

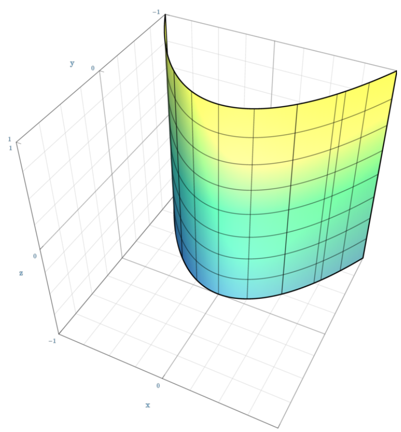
Rysunek przedstawia walec paraboliczny $x^2 + y = 0$, czyli

$$y = -x^2.$$



Rysunek przedstawia walec paraboliczny w postaci kanonicznej

$$x^2 + 2ay = 0.$$



Bibliografia

[1] R. Leitner i J. Zacharski, *Zarys matematyki wyższej dla studentów*, tom 3. PWN Warszawa 2017.

[2] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy (ze wstępem do równań różniczkowych)*, PWN Warszawa 2021 (wyd. 17).

[3] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN 1970.

[4] A. Plucińska i E. Pluciński, *Probabilistyka*, PWN WNT, Warszawa 2021 (wyd. 1).

[5] M. Stark, *Geometria analityczna ze wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN 1974.

[6] W. Żakowski, G. Decewicz i W. Kołodziej: *Matematyka*, części 1 i 2.

Indeks alfabetyczny