Matematyka 2

skrypt do wykładów, WML WAT 2021/2022

Jerzy Różański
Instytut Matematyki i Kryptologii

20 czerwca 2022

Spis treści

2.1 Funkcje elementarne . . . 1
2.1.1 Nierówności trygonometryczne . . . 1
2.1.2 Wielomiany interpolacyjne . . . 1
2.2 Funkcje hiperboliczne . . . 3
2.2.1 Własności . . . 3
2.3 Ciągi liczbowe . . . 4
2.3.1 Pojęcie granicy . . . 4
2.4 Szeregi liczbowe . . . 5
2.4.1 Określenia . . . 5
2.4.2 Warunki zbieżności . . . 5
2.4.3 Przykłady . . . 7
Warunek konieczny . . . 7
Warunek wystarczający . . . 7
Rozbieżność szeregu harmonicznego . . . 7
Zbieżność szeregu harmonicznego rzędu 2 . . . 8
2.4.4 Kryteria zbieżności . . . 8
Testy porównawcze . . . 8
Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego . . . 9
2.5 Szeregi przemienne . . . 10
2.5.1 Kryteria zbieżności . . . 10
2.5.2 Sumowanie . . . 11
2.6 Granica funkcji. Funkcje ciągłe . . . 12
2.6.1 Określenie granicy funkcji . . . 12
2.6.2 Przykłady . . . 13
Istnienie granicy . . . 13
Asymptoty dla funkcji . . . 13
Twierdzenie o trzech funkcjach . . . 14
2.6.3 Funkcja ciągła . . . 14
2.6.4 Podstawowe twierdzenia . . . 15

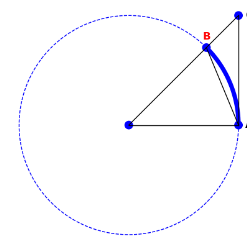
2.7 Pochodna funkcji . . . 17
2.7.1 Iloraz różnicowy i pochodna . . . 17
2.7.2 Przykłady . . . 18
Funkcja potęgowa . . . 18
Funkcje trygonometryczne . . . 18
2.7.3 Prosta styczna . . . 19
2.7.4 Różniczka funkcji . . . 22
2.7.5 Obliczanie pochodnych . . . 23
Pochodna funkcji złożonej . . . 24
Pochodna funkcji odwrotnej . . . 24
2.8 Ekstremum i monotoniczność funkcji . . . 25
2.8.1 Podstawowe twierdzenia . . . 25
2.8.2 Okrąg styczny . . . 27
2.8.3 Przykłady . . . 29
Przebieg funkcji . . . 29
2.9 Wyższe pochodne. Wzór Taylora . . . 31
2.9.1 Funkcje wypukłe . . . 31
2.9.2 Wzór Taylora . . . 31
Wzór Maclaurina . . . 33
2.9.3 Przykłady wielomianów . . . 33
Funkcja e^x . . . 33
Przykład funkcji $\sin(x)$ . . . 34
Przykład funkcji $\cos(x)$ . . . 34
Przykład funkcji $\log(1+x)$ . . . 34
2.9.4 Styczność rzędu n . . . 35
2.9.5 Druga różniczka i wyższe . . . 35
2.10 Całka nieoznaczona . . . 38
2.10.1 Funkcja pierwotna . . . 38
Długość wykresu funkcji . . . 38
2.10.2 Określenie całki nieoznaczonej . . . 40
2.10.3 Przykłady . . . 40
2.10.4 Własności całki nieoznaczonej . . . 41
Metoda przez części . . . 41
Metoda przez podstawianie . . . 42
Symbol różniczki . . . 43
2.10.5 Całka funkcji sklejonej . . . 43
2.10.6 Przykłady . . . 44
Rekurencja przez części . . . 44

Podstawienie nowej zmiennej . . . 45
2.11 Całka nieoznaczona . . . 46
2.11.1 Całka dla funkcji wymiernych . . . 46
Zmienna zespolona . . . 46
Zmienna rzeczywista . . . 46
Typy obliczanych całek . . . 47
2.11.2 Całka wyrażeń trygonometrycznych . . . 48
2.12 Całka oznaczona . . . 50
2.12.1 Całka Newtona . . . 50
Określenie i własności . . . 50
Średnia funkcji na przedziale . . . 52
Sumy całkowe . . . 53
2.12.2 Całka Riemanna . . . 54
Podział odcinka . . . 54
Własności całki . . . 57
Podstawowe twierdzenia . . . 57
2.12.3 Zastosowania . . . 59
Pole obszaru ograniczonego krzywą . . . 59
Współrzędne biegunowe . . . 60
2.12.4 Przykłady . . . 61
Pole obszaru pomiędzy wykresami . . . 61
Pole opisane astroidą . . . 62
Obrót spirali . . . 63
2.13 Całki niewłaściwe . . . 64
2.13.1 Całki niewłaściwe I rodzaju . . . 64
2.13.2 Kryteria zbieżności . . . 66
2.13.3 Przykłady całek . . . 68
Całka na półprostej . . . 68
Kryterium całkowe zbieżności szeregu . . . 68
2.13.4 Całki niewłaściwe II rodzaju . . . 69
2.13.5 Kryteria zbieżności II . . . 71
2.13.6 Przykłady całek . . . 72
Całka na odcinku (0,1] . . . 72
2.14 Przestrzenie metryczne . . . 73
2.14.1 Odległość . . . 73
2.14.2 Granica ciągu i odwzorowania . . . 78
2.14.3 Ciągłość odwzorowania . . . 78
2.14.4 Funkcje wielu zmiennych . . . 79

Poziomice funkcji 79
2.15 Pochodne cząstkowe 81
2.15.1 Funkcje skalarne 81
Ciągi i zbieżność 81
Funkcje ciągłe 82
2.15.2 Pochodne cząstkowe 83
Określenia oraz interpretacje 83
Funkcje klasy C^1 i C^2 84
Funkcje klasy C^k 87
2.16 Pochodna odwzorowania. Wzór Taylora 89
2.16.1 Pochodna funkcji skalarnej 89
Płaszczyzna styczna i różniczka 89
Pochodne cząstkowe funkcji złożonych 90
Pochodna w kierunku wektora 91
Gradient funkcji 91
Wielomian Taylora 93
2.16.2 Pochodna funkcji wektorowej 94
Pochodna w kierunku wektora 95
Różniczkowalność i pochodne kierunkowe 95
Macierz Jacobiego dla odwzorowania 95
Pochodna odwzorowania a ciągłość 96
Różniczkowalność w sensie słabym 96
2.16.3 Przykłady 96
Pochodna funkcji wektorowej 96
Część liniowa przyrostu 97
2.17 Ekstrema funkcji skalarnej 98
2.17.1 Wzór Taylora rzędu 2 98
2.17.2 Ekstrema lokalne skalarnych 99
Funkcje dwóch zmiennych 99

2.1 Funkcje elementarne

2.1.1 Nierówności trygonometryczne



Dany jest okrąg jednostkowy oraz punkt $X = B$ na okręgu, który wyznacza kąt miary x.

Twierdzenie **2.1.1.** *Dla każdej liczby $0 < x < \pi/2$ zachodzą dwie nierówności:*

1. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$,
2. $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1$.

Dowód. Z porównania odpowiednich pól

$$\frac{|OA||OB|}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{|OA||CA|}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Dla drugiej nierówności rozpiszemy $\cos x = \cos 2\frac{x}{2}$ oraz $|\sin x| \leq |x|$. □

2.1.2 Wielomiany interpolacyjne

Twierdzenie **2.1.2.** *Dla $n+1$ różnych punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i odpowiednich wartości $y_0, y_1, \ldots, y_n$ istnieje wielomian $w(x)$ co najwyżej stopnia n, który przyjmuje w punktach x_i odpowiednie wartości y_i dla każdego $i = 0, 1, ..., n$, czyli*

$$w(x_i) = y_i.$$

Dowód. Rozważmy wielomiany $L_{n,j}(x)$ stopnia n dane przez

$$L_{n,j}(x) := \prod_{k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Stwierdzimy, że dla każdego x_k wielomian

$$L_{n,j}(x_k) = \begin{cases} 1 \text{ dla } k = j \\ 0 \text{ dla } k \neq j \end{cases} .$$

Wtedy liniowa kombinacja jest wielomianem interpolacyjnym stopnia n

$$w(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_{n,j}(x).$$

□

Wzór interpolacyjny można rozpisać jako

$$w(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

2.2 Funkcje hiperboliczne

2.2.1 Własności

TWIERDZENIE **2.2.1** (Wartości funkcji dla sumy kątów)**.** *Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą dwie równości:*

1. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
2. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Dowód. Dla prawej strony równania 1:

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \cdot \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) =$$
$$= \frac{1}{4}e^x e^y + \frac{1}{4}e^x e^{-y} - \frac{1}{4}e^{-x}e^y - \frac{1}{4}e^{-x}e^{-y} + \frac{1}{4}e^x e^y - \frac{1}{4}e^x e^{-y} + \frac{1}{4}e^{-x}e^y - \frac{1}{4}e^{-x}e^{-y} =$$
$$\frac{1}{2}e^x e^y - \frac{1}{2}e^{-x}e^{-y} = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-x-y}) = \sinh(x+y).$$

□

2.3 Ciągi liczbowe

2.3.1 Pojęcie granicy

TWIERDZENIE **2.3.1.** *Jeżeli ciąg jest zbieżny, to jest ograniczony.*

Dowód. Założymy, że istnieje granica ciągu $\lim a_n = a$. Dla $\epsilon = 1$ istnieje $k \in \mathbb{N}$, że dla każdej liczby naturalnej $n > k$ zachodzi

$$|a_n - a| < 1.$$

Ponieważ $|a_n - a| > |a_n| - |a|$ to $|a_n| < a + 1$. Oznaczymy przez M największą liczbę ze zbioru: $|a_1|, ..., |a_k|, |a| + 1$. Z określenia granicy wynika, że dla każdego $n > k$ zachodzi $M > |a_n|$. Stąd zbiór wyrazów tego ciągu jest ograniczony.

□

Trzeba zauważyć, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, bo kontrprzykładem jest ciąg $a_n = (-1)^n$.

2.4 Szeregi liczbowe

2.4.1 Określenia

Dla ciągu liczb rzeczywistych $\{a_n\}_{n=1,2,...,}$ utworzymy jego sumy częściowe w postaci: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, itd, czyli

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

DEFINICJA. Szeregiem liczbowym o wyrazach z ciągu $\{a_n\}$ nazywamy ciąg jego sum cząstkowych $\{s_n\}_{n=1,2,...,}$, gdzie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Oznaczeniem szeregu jest symbol

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{lub} \quad a_1 + a_2 + a_3 + ... \tag{2.1}$$

Jeżeli $\{s_n\}$ jest ciągiem zbieżnym, to jego granicę nazywamy *sumą szeregu* (1). Szereg jest rozbieżny, jeśli nie jest zbieżny. Jeśli ciąg sum cząstkowych jest rozbieżny do $\pm\infty$, to szereg jest rozbieżny i oznaczany przez $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \pm\infty$.

PRZYKŁAD. Dla ciągu arytmetycznego o wyrazie $a_n = a_1 + (n-1)r$ suma częściowa to $s_n = \frac{2a_1+(n-1)r}{2}n$. Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ to szereg jest oczywiście rozbieżny, czyli $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_1 + (n-1)r) = \infty$.

PRZYKŁAD. Przykład. Dla ciągu geometrycznego o wyrazie $a_n = a_1 q^{n-1}$ suma częściowa to $s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Dla $|q| < 1$ granica sum cząstkowych $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{a_1}{1-q}$ i szereg jest zbieżny, czyli $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$.

2.4.2 Warunki zbieżności

Skorzystamy ze znanych własności dla granicy ciągu w przypadku ciągu sum cząstkowych s_n. Na to aby istniała granica ciągu $\{s_n\}$ potrzeba i wystarcza aby dla każdej liczby dodatniej ε istniała taka liczba naturalna n_0, że dla wszystkich $n > n_0$ zachodziła nierówność dla dowolnej naturalnej liczby k:

$$|s_{n+k} - s_n| < \epsilon$$

Zatem można sformułować twierdzenie, które polega na tym, że suma jakiejkolwiek liczby kolejnych (dostatecznie dalekich) wyrazów szeregu jest dowolnie mała.

Twierdzenie **2.4.1** (Warunek Cauchy'ego)**.** *Warunkiem koniecznym i wystarczającym zbieżności szeregu* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest aby dla* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall k > n \geq N$ *spełniona była nierówność:*

$$\left| a_{n+1} + \ldots a_{n+k} \right| < \varepsilon$$

Dowód. Wynika z równości $\left| a_{n+1} + \ldots a_{n+k} \right| = |s_{n+k} - s_n|$ □

Twierdzenie **2.4.2** (Warunek konieczny)**.** *Jeśli szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny, to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dowód. Zbieżność szeregu wymaga istnienia granicy $\lim s_n$, wtedy $a_n = s_n - s_{n-1}$ □

Uwagi. Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$ lub granica nie istnieje, to szereg $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ jest rozbieżny. Obserwujemy tutaj fakt braku dostateczności. Warunek wystarczający zapewnia w niektórych wypadkach twierdzenie Leibniza.

Twierdzenie **2.4.3.** *Dla ciągu malejącego* $\{a_n\}$*, którego granica* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ *jest zbieżny.*

Dowód. 1) podciąg s_{2n} rosnący, natomiast s_{2n-1} jest malejący; 2) obydwa podciągi ograniczone oraz 3) $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n-1}$ □

Uwagi:

- zauważmy, że $\left| a_{n+1} + \ldots a_m \right| \;=\; |s_m - s_n|$;
- warunek w powyższej definicji jest dokładnie warunkiem Cauchy'ego dla ciągów.

Monotoniczność i ograniczoność ciągu sum cząstkowych dostarcza warunku zbieżności podobnie jak w przypadku zwykłych ciągów.

Twierdzenie **2.4.4.** *Niech* (a_n) *to ciąg liczb nieujemnych. Wtedy szereg* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy ciąg sum cząstkowych jest ograniczony.*

Dowód. Ciąg sum częściowych dla takich wyrazów jest oczywiście rosnący; por. tw. o zbieżnosci ciągów monotonicznych i ograniczonych

□

Uwagi:

- w tym przypadku $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sup\{s_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$

2.4.3 Przykłady

Poniżej zamieszczamy przykłady ilustrujące podstawowe pojęcia dla szeregów liczbowych.

Warunek konieczny

Rozbieżny jest szereg geometryczny dla $|q| \geq 1$ postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = q + q^2 + q^3 + \ldots$$

Zbadanie granicy $\lim a_n = \lim q^n \neq 0$ wnosi, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności tego szeregu.

Warunek wystarczający

Dany jest ciąg malejący i zbieżny do zera postaci $a_n = \frac{1}{n}$. Wtedy z twierdzenia Leibniza zbieżny jest szereg liczbowy postaci:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Rozbieżność szeregu harmonicznego

Rozbieżny jest szereg harmoniczny postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Zbadamy warunek Cauchy'ego: tutaj sumy dalekich wyrazów nie muszą być dowolnie małe. Istotnie, biorąc $\epsilon = 1/2$ i dowolną liczbę n, otrzymujemy

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}| = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ składników}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \epsilon\,.$$

Zbieżność szeregu harmonicznego rzędu 2

Zbieżny jest szereg o wyrazach dodatnich postaci

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

Nazywamy go szeregiem harmonicznym rzędu 2 ze względu na potęgę w mianowniku. Istotnie, dla każdej liczby $n \geq 2$ mamy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

a zatem

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) =$$
$$= 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

Ciąg (s_n) sum cząstkowych tego szeregu jest rosnący (bo wyrazy szeregu są dodatnie) i ograniczony z góry przez liczbę 2, jest więc zbieżny.

2.4.4 Kryteria zbieżności

Testy porównawcze

TWIERDZENIE **2.4.5.** *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *są szeregami takimi, że: 1) wyrazy szeregu są nieujemne* $a_n \geq 0, y_n \geq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$ *2)* $\exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : \ \ a_n \leq y_n$ *to:*

- *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *też jest zbieżny;*
- *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *też jest rozbieżny.*

TWIERDZENIE **2.4.6.** *Niech* a_n, y_n *to ciągi dodatnie oraz istnieje granica* $c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{y_n}$, *wtedy*

- *jeśli* $c \neq 0$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny* $\iff$ *szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *jest zbieżny*
- *jeśli* $c = 0$ *oraz szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*

Dowód. 1) istnieje $N \in \mathbb{N}$, że $\forall n > N$ zachodzi $\frac{1}{2}c \leq a_n/y_n \leq 2c$; wtedy $\frac{1}{2}cy_n \leq a_n \leq 2cy_n$ oraz trzeba zastosować test porównawczy jak na poprzednim slajdzie □

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego

TWIERDZENIE **2.4.7.** *(Kryterium ilorazowe zbieżności szeregów).*
Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest szeregiem o wyrazach dodatnich (znaczy* $a_n > 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*), to*

- $\exists p < 1 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq p \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny;*
- $\exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny*

Uwaga. Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów przy powyższych założeniach oznacza:

- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = s > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga, czy szereg jest zbieżny.

TWIERDZENIE **2.4.8.** *(Kryterium pierwiastkowe zbieżności szeregów). Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest szeregiem o wyrazach nieujemnych (znaczy* $a_n \geq 0$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*), to*

- $\exists p < 1 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ \forall n \geq N : \ \ \sqrt[n]{a_n} \leq p \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny*
- $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *dla niesk. wielu* $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Uwaga. Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów przy powyższych założeniach oznacza:

- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = s > 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeśli $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga, czy szereg jest zbieżny.

2.5 Szeregi przemienne

Znaki wyrazów. Rozróżniamy szeregi o wyrazach dodatnich, szeregi znakozmienne (naprzemienne) ze względu na znaki elementów ciągu $\{a_n\}$. W każdym przypadku należy rozstrzygnąć z jakim szeregiem mamy do czynienia. Szereg jest bezwzględnie zbieżny, jeśli szereg modułów $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ jest zbieżny. Szereg jest warunkowo zbieżny, jeśli jest on zbieżny, ale nie bezwzględnie zbieżny.

Twierdzenie **2.5.1.** *Jeśli szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.*

Dowód. Warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu sum cząstkowych □

Działaniami algebraicznymi na szeregach zbieżnych są: dodawanie szeregów i mnożenie szeregu przez liczbę.

Twierdzenie **2.5.2.** *Jeśli szeregi* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *oraz* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *są zbieżne, to dla dowolnych liczb* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *zachodzi:* $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

2.5.1 Kryteria zbieżności

Twierdzenie **2.5.3** (Dirichlet)**.** *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest szeregiem, którego ciąg sum częściowych jest ograniczony,* $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *jest ciągiem malejącym (słabo) oraz zbieżnym do zera (to znaczy* $\lambda_n \searrow 0$*), to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n$ *jest zbieżny.*

Twierdzenie **2.5.4** (Leibniz)**.** *Jeśli* $\{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{R}$ *jest ciągiem malejącym (słabo) oraz zbieżnym do zera (to znaczy* $\lambda_n \searrow 0$*), to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lambda_n$ *jest zbieżny.*

Przykład. Następujący szereg zwany szeregiem anharmonicznym:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

jest zbieżny. Jest to konsekwencja kryterium Leibniza.

Założenie, że zbieżność ciągu $\{\lambda_n\}$ do zera jest monotoniczna (w kryteriach Dirichleta i Leibniza) jest istotne. Pokazuje to poniższy przykład.

Przykład. Zbadamy zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-(-1)^n}{n}$.

Pokażemy, że szereg jest rozbieżny. Dla dowodu niewprost przypuśćmy, że szereg jest zbieżny. Weźmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$. Jest on zbieżny (z kryterium Leibniza). Zatem suma obu szeregów jest szeregiem zbieżnym. Ale suma ta wynosi
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2-(-1)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
i jest szeregiem rozbieżnym (gdyż jest to szereg harmoniczny), sprzeczność.

Zauważmy, że chociaż $\lambda_n = \frac{2-(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$, to jednak zbieżność ta nie jest monotoniczna. Zatem nie mogliśmy tu stosować kryterium Leibniza.

2.5.2 Sumowanie

Zajmiemy się teraz bliżej sumowaniem dla szeregów nieskończonych. Sumowanie w przypadku skończonym nie sprawia trudności: dla ustalonego k możemy dowolnie przestawiać składniki sumy na $k!$ sposobów

$$a_1 + a_2 + ... + a_k = a_k + a_{k-1} + ... + a_1 = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + ... + a_{\sigma(k)}$$

zapisane na końcu dla dowolnej permutacji σ. Natomiast zmiana sposobu sumowania szeregu nieskończonego może prowadzić do innego ciągu sum cząstkowych - w pewnym sensie ta obserwacja jest trywialna. Rozważmy zatem szereg nieskończony dla dowolnej permutacji σ liczb naturalnych, który będzie oznaczał zmianę sposobu sumowania jego wyrazów:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

Definicja. Szereg nazywamy bezwarunkowo zbieżnym jeżeli dla dowolnej permutacji σ liczb naturalnych zachodzi równość

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$$

Podstawową charakterystyką jest tutaj twierdzenie o zbieżności bezwzględnej, które podamy tutaj bez dowodu.

Twierdzenie **2.5.5** (O zbieżności bezwzględnej)**.** *Szereg* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *jest zbieżny bezwarunkowo wtedy i tylko wtedy gdy jest zbieżny bezwzględnie, czyli gdy jest zbieżny szereg modułów* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.

2.6 Granica funkcji. Funkcje ciągłe

2.6.1 Określenie granicy funkcji

Przykład. Punkt zero na osi liczbowej jest punktem skupienia dla zbioru $\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}\}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Niech $D \subset \mathbb{R}$, funkcja $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz niech $x_0 \in \mathbb{R}$ będzie punktem skupienia zbioru D.

Definicja. Funkcja f ma granicę (właściwą) $g \in \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ co zapisujemy jako $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ jeśli:

$$\forall \{x_n\} \subseteq D \setminus \{x_0\} : \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \;\Rightarrow\; \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = g$$

Twierdzenie **2.6.1.** *Następujące warunki są sobie równoważne:*

- *funkcja f ma granicę (właściwą) $g \in \mathbb{R}$ w punkcie x_0*
- $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \; |x_0 - x| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - g| < \varepsilon$

Uwaga. Jeśli $f : D \to \mathbb{R}$ oraz x_0 to punkt skupienia D, to f ma tylko jedną granicą w punkcie x_0.

Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$ punktem skupienia zbioru D.

Definicja. Funkcja ma granicę niewłaściwą $+\infty$ w punkcie x_0 co zapiszemy jako $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ jeśli

$$\forall M \in \mathbb{R} \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in D \setminus \{x_0\} : \;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

Definicja. Funkcja ma granicę niewłaściwą $+\infty$ w punkcie $+\infty$ co zapiszemy jako $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\forall \{x_n\} \subseteq \mathbb{R} : \;\; x_n \to +\infty \;\Rightarrow\; f(x_n) \to +\infty$$

lub równoważnie

$$\forall N \in \mathbb{R} \;\; \exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in \mathbb{R} : \;\; x \geq M \;\Rightarrow\; f(x) \geq N$$

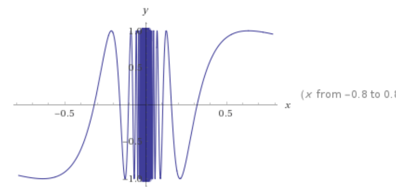
Kryteria rozbieżności. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$ punktem skupienia zbioru D. oraz podana jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$.

- f nie ma granicy g w punkcie $x_0 \iff$ istnieje ciąg x_n w D dla $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$, taki że $\lim x_n = x_0$ natomiast ciąg $f(x_n)$ nie zbiega do g, czyli $\lim f(x_n) \neq g$
- f nie ma granicy w punkcie $x_0 \iff$ istnieje ciąg x_n w D dla $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \neq x_0$, taki że $\lim x_n = x_0$ natomiast ciąg $f(x_n)$ jest rozbieżny w $\mathbb{R}$.

2.6.2 Przykłady

Istnienie granicy

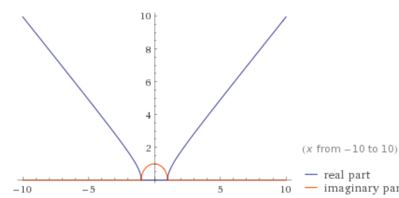
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} \quad \text{nie istnieje}$$



- niech $x_n = 1/n\pi \Rightarrow \lim x_n = 0$ oraz $f(x_n) = \sin n\pi = 0$
- niech $x'_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \Rightarrow \lim x_n = 0$ oraz $\lim f(x_n) = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$
- czyli raz $\lim f(x_n) = 0$ a raz $\lim f(x'_n) = 1$ przy tej samej granicy x_n oraz x'_n

Asymptoty dla funkcji

Wyznaczenie asymptot dla funkcji jednej zmiennej $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$



- $a = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x)/x \right]$
- $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - ax \right]$

Twierdzenie o trzech funkcjach

- $\lim_{x\to 0} x^{3/2} = 0$ dla $x > 0$
  bo: $x < x^{1/2} \leq 1$ *dla* $0 \leq x \leq 1$, *to* $x^2 < x^{3/2} \leq x$
- $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$
  bo: $-x \leq \sin x \leq x$ *dla* $x \geq 0$
- $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
  bo: $1 - x^2/2 \leq \cos x \leq$*1*
- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$
  bo: $-x/2 \leq \frac{\cos(x)-1}{x} \leq 0$ *dla* $x > 0$
  $0 \leq \frac{\cos(x)-1}{x} \leq -x/2$ *dla* $x < 0$, *czyli*
  $f_1(x) \leq \frac{\cos(x)-1}{x} \leq f_2(x)$ *dla wszystkich* $x \neq 0$
  gdzie $f_1(x) = -x/2$ dla $x \geq 0$ oraz $f(x) = 0$ dla $x < 0$
  $f_2(x) = 0$ dla $x \geq 0$ oraz $f_2(x) = -x/2$ dla $x < 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
  bo: $x - x^3/6 \leq \sin x \leq x$ *dla* $x > 0$
  $x \leq \sin x \leq x - x^3/6$ *dla* $x \leq 0$, *czyli*
  $1 - x^2/6 \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ *dla wszystkich* $x \neq 0$
- $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$
  bo: $-|x| < x\sin 1/x \leq |x|$ *dla wszystkich* $x \neq 0$

2.6.3 Funkcja ciągła

Funkcja ciągła dotyczy własności zbioru wartości ze względu na dziedzinę funkcji.

Definicja. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ oraz $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją oraz niech $x_0 \in D$ (x_0 nie musi być punktem skupienia zbioru D). Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli:

$$\forall \{x_n\} \subseteq D: \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Twierdzenie **2.6.2.** *Następujące warunki są równoważne:*

- *funkcja jest ciągła w punkcie* x_0

- *zachodzi implikacja*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D: \ \ |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest ciągła, jeśli jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.

Stwierdzimy, że funkcja jest zawsze ciągła w punkcie izolowanym dziedziny.

Twierdzenie **2.6.3.** *Jeśli* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *oraz* $f: A \longrightarrow B$ *i* $g: B \longrightarrow \mathbb{R}$ *są funkcjami, wtedy:*

- *jeśli f jest ciągła w* $x_0 \in A$ *oraz g jest ciągła w* $y_0 = f(x_0) \in B$, *to* $g \circ f$ *jest ciągła w* x_0
- *jeśli f i g są funkcjami ciągłymi, to* $g \circ f$ *jest także funkcją ciągła.*

Twierdzenie **2.6.4.** *Jeśli* $D \subseteq \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ *jest punktem skupienia zbioru D,* $f_1, f_2: D \to \mathbb{R}$ *są funkcjami,* $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = g_1$ *oraz* $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = g_2$, *to*

- $\lim_{x\to x_0} (f_1 \pm f_2)(x) = g_1 \pm g_2$;
- $\lim_{x\to x_0} (f_1 f_2)(x) = g_1 g_2$;
- $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{g_1}{g_2}$, *o ile* $g_2 \neq 0$ *oraz dla* $x \in D$ *mamy* $f_2(x) \neq 0$;

2.6.4 Podstawowe twierdzenia

Definicja. Niech $D \subset \mathbb{R}$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$. Funkcja f ma absolutne maksimum na D jeśli istnieje taki punkt $x^* \in D$, że dla każdego $x \in D$

$$f(x^*) \geq f((x)$$

Twierdzenie **2.6.5.** *(0 maksimum i minimum). Niech* $I = [a, b]$ *to przedział domknięty i ograniczony. Wtedy funkcja ciągła* $f : I \to \mathbb{R}$ *ma absolutne maksimum oraz minimum na przedziale* I.

Twierdzenie **2.6.6.** *(O położeniu pierwiastka). Niech* $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą oraz dla* $a < b$ *zachodzi* $f(a) \cdot f(b) < 0$, *to*

$$\exists c \in (a, b): \quad f(c) = 0.$$

Dowód. Metoda dwusekcji $\square$

TWIERDZENIE **2.6.7.** *(O wartościach pośrednich). Jeśli $a < b$ oraz $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $f(a) < f(b)$, to:*

$$\forall w \in \big(f(a), f(b)\big) \quad \exists c \in (a,b): \quad f(c) = w$$

Dowód. Podstawiam $g(x) = f(x) - w$. Wtedy $g(a) < 0 < g(b)$ bo $f(a) < w < f(b)$ i wracam do położenia pierwiastka. $\square$

2.7 Pochodna funkcji

2.7.1 Iloraz różnicowy i pochodna

Dla przedziału $I \subseteq \mathbb{R}$ niech $f : I \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in I$. Rzeczywista liczba g jest pochodną funkcji f w punkcie x_0 jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta(\varepsilon) > 0$ taka, że jesli $x \in I$ spełnia warunek $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ to $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g\right| < \varepsilon$.

DEFINICJA. Niech $f : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją o wartościach rzeczywistych określoną w przedziale otwartym (a,b). Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$, jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Uwagi:

- granicę tę - jeśli istnieje - nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 i oznaczamy symbolem: $f'(x_0)$ lub $\frac{df}{dx}(x_0)$
- funkcję $x \mapsto f'(x)$, która argumentowi x przyporządkowuje wartość pochodnej $f'(x)$ funkcji f w punkcie x nazywamy pochodną tej funkcji
- dziedzina pochodnej $x \mapsto f'(x)$ jest zawsze podzbiorem dziedziny funkcji $x \mapsto f(x)$.
- funkcja stała $x \mapsto c$ określona w przedziale (a,b) jest różniczkowalna w każdym punkcie tego przedziału i ma pochodną równą zeru, gdyż iloraz różnicowy $\frac{c-c}{h}$, będąc stale równy zeru, zmierza do zera.

PRZYKŁAD. Pochodna funkcji $f(x) = |x|$ nie istnieje w punkcie $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{dla } h > 0 \\ -1, & \text{dla } h < 0 \end{cases}$$

PRZYKŁAD. Pochodna funkcji $f(x) = |x|$ istnieje we wszystkich punktach $x \neq 0$.

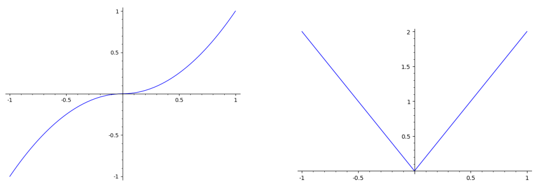
$$(|x|)' = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 \text{ dla } x > 0 \\ -1 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

PRZYKŁAD. Pochodna funkcji $f(x) = x|x|$ istnieje w każdym punkcie oraz wynosi $f'(x) = 2|x|$. Funkcja jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Rozpisując moduł mamy wzór $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \geq 0 \\ -x^2 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$. Stąd pochodna istnieje w każdym punkcie x_0 i wynosi:

$$f'(x_0) = (x_0|x_0|)' = \begin{cases} 2x_0 \text{ dla } x_0 \geq 0 \\ -2x_0 \text{ dla } x_0 < 0 \end{cases}$$

Z definicji można zapisać

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)|x_0+h| - x_0|x_0|}{h} = 2|x_0|$$



(a) wykres funkcji (b) wykres pochodnej

2.7.2 Przykłady

Funkcja potęgowa

Jednomian $f(x) = x^n$ jest różniczkowalny w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i $f'(x) = nx^{n-1}$. Na mocy wzoru dwumianowego Newtona mamy bowiem $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^3h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + \binom{n}{n}h^{n-1} \to nx^{n-1} + 0 + 0 + \cdots + 0 + 0, \text{ gdy } h \to 0.$

Funkcje trygonometryczne

- Funkcja $x \mapsto \sin x$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, ponieważ iloraz różnicowy

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{2\sin\frac{x+h-x}{2}\cos\frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= \cos(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

zmierza do $\cos x$, gdyż $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$ oraz $\cos(x + \frac{h}{2}) \to \cos x$ przy $h \to 0$

Funkcja $x \mapsto \cos x$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$, ponieważ iloraz różnicowy

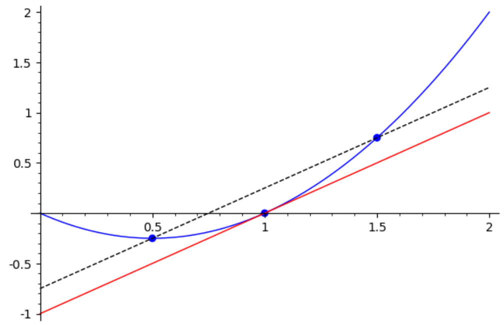
$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \frac{-2\sin\frac{x+h-x}{2}\sin\frac{x+h+x}{2}}{h} \\ &= -\sin(x + \frac{h}{2}) \cdot \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \end{aligned}$$

zmierza do $-\sin x$, gdyż $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$ oraz $\sin(x + \frac{h}{2}) \to \sin x$ przy $h \to 0$

2.7.3 Prosta styczna

Iloraz różnicowy $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej wykresu funkcji f przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0+h, f(x_0+h))$, jest równy tangensowi kąta, jaki sieczna ta tworzy z osią rzędnych.

PRZYKŁAD. Sieczna oraz styczna dla funkcji $f(x) = x(x-1)$. Wybrany punkt $x_0 = 0$ oraz przyrost $h = 1/2$.



Uwagi dotyczące interpretacji geometrycznej:

- iloraz różnicowy $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ jest równy współczynnikowi kierunkowemu siecznej wykresu funkcji f przechodzącej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0+h))$, jest równy tangensowi kąta, jaki sieczna ta tworzy z osią rzędnych.
- gdy h zmierza do zera, punkt $(x_0+h, f(x_0+h))$ zbliża się do punktu $(x_0, f(x_0))$. Jeśli istnieje pochodna $f'(x_0)$, to prostą o równaniu $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, będącą granicznym położeniem siecznych przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$ oraz $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, nazywamy styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
- pochodna $f'(x_0)$ jest więc współczynnikiem kierunkowym stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Przykład. Dla $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ obliczamy pochodną funkcji złożonej

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Asymptota prawostronna to styczna w punkcie niewłaściwym $x = +\infty$, czyli współczynnik kierunkowy asymptoty to $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) = 1$ stąd równanie y=x podaje wzór asymptoty

Dla zbioru otwartego $O \subset \mathbb{R}$ i funkcji $f : O \to \mathbb{R}$

Twierdzenie **2.7.1.** *Następujące warunki są równoważne*

- *funkcja f w punkcie x_0 ma pochodną*
- *istnieje w punkcie x_0 odwzorowanie liniowe $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie że funkcja $R_{x_0}(x) : O \to \mathbb{R}$ zadana wzorem*

$$R(x_0, x) = f(x) - f(x_0) - D(x - x_0)$$

ma własność $\frac{|R(x_0,x)|}{|x-x_0|} \to 0$, gdy $|x - x_0| \to 0$.

Wniosek **2.7.1.** Funkcja może mieć w punkcie x_0 tylko jedną pochodną.

Dowód. $f(x) - f(x_0) = D_1(x - x_0) + r_1(x_0, x) = D_2(x - x_0) + r_2(x_0, x)$ □

5.5

Twierdzenie **2.7.2.** *Następujące warunki są równoważne*

- *funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0*
- *istnieje w punkcie $(x_0, f(x_0))$ odwzorowanie styczne postaci*

$$x \to f(x_0) + D(x - x_0)$$

gdzie D jest odwzorowaniem liniowym.

Różniczkowalność i ciągłość funkcji.

Twierdzenie **2.7.3.** *Jeśli funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$, to jest w tym punkcie ciągła.*

Uwaga: implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Dowód. $\forall x \in I, x \neq x_0$ mamy $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0)$, Jeśli $f'(x_0)$ istnieje, to $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0$ □

2.7.4 Różniczka funkcji

Różniczką funkcji $f(x)$ jest funkcja $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dwóch zmiennych rzeczywistych (x, h) dana wzorem

$$\mathrm{d}f(x, h) = f'(x)h$$

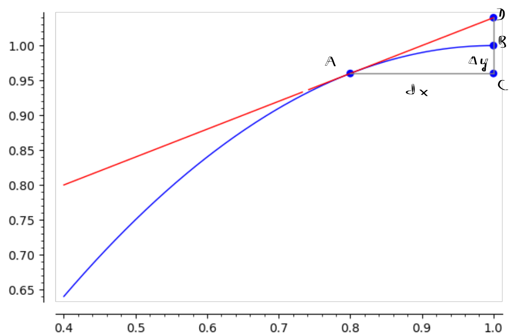
Jeśli pominąć jeden lub oba argumenty, to można się spotkać z zapisami $\mathrm{d}f(x)$ lub najkrócej $\mathrm{d}f$. Jeśli używamy $y = f(x)$, to różniczkę można zapisać także jako $\mathrm{d}y$. Oznaczenie dx będzie tutaj funkcją stałą na argumentach, stąd $d(dx) = 0$ to funkcja zerowa.

Dla różnicy wartości funkcji różniczka może być uważana za liniową część główną tego przyrostu, czyli

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(x_0, h)$$

gdzie jej nieliniowa część $\lim\limits_{h\to 0} o(x_0, h)/h = 0$.

Na rysunku poniżej mamy $dy = f'(x)dx = \operatorname{tg}\alpha dx = CD$. Odcinek BD mierzy różnicę wartości różniczki dy oraz przyrostu funkcji Δy.



Przykład. Dla $y = x^2$ oraz punktu $x_0 = 1$

$$(1 + h)^2 - 1^2 = 2h + h^2$$

Jeśli podamy przyrost $h = 1/2$, to wartość różniczki trzeba obliczyć jako dy=1. Zanotujmy, że $o(h) = h^2$ oraz $\lim\limits_{h\to 0} o(x_0, h)/h = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$.

Przykład. W notacji z deltami przyrostów $h = \Delta x$ dla $y = x^3$ oraz punktu $x_0 = -1$

$$(-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 = 3\Delta x + (\Delta x)^3 - 3(\Delta x)^2$$

Jeśli podamy przyrost $\Delta x = 1/2$, to wartość różniczki trzeba obliczyć jako dy=3/2. Zanotujmy, że przyrost wartości $\Delta y = (-1+1/2)^3-(-1)^3 = -1/8+1 = 7/8$. Trzeba zauważyć, że równość przybliżona w $x_0 = -1$ dla przyrostu funkcji i jej różniczki wygląda tak

$$\Delta y = 7/8 \simeq f'(-1)\Delta x = 3 \cdot 1/2$$

2.7.5 Obliczanie pochodnych

Jeśli c jest pewną stałą i istnieje $f'(x)$, to istnieje pochodna iloczynu

$$(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$$

Innymi słowy: stałą można wyłączyć przed znak pochodnej!

Dowód. Mamy bowiem $\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to c \cdot f'(x)$, przy $h \to 0$ □

Twierdzenie **2.7.4.** *Niech f, g będą funkcjami określonymi na przedziale otwartym (a, b), do którego należy x. Jeśli istnieją pochodne $f'(x)$ oraz $g'(x)$, to:*

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, *o ile* $g(x) \neq 0$

Dowód. Tylko dla iloczynu. □

Przykład. Pamiętając, że tangens jest ilorazem sinusa i cosinusa, możemy łatwo wyznaczyć pochodną funkcji tangens: $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$.

Przykład. W podobny sposób wyznaczamy pochodną funkcji cotangens: $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$.

Przykład. Niech $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ będzie funkcją wielomianową. Na mocy uwagi o pochodnej jednomianu i twierdzenia o pochodnej sumy w każdym punkcie zbioru $\mathbb{R}$ istnieje pochodna

$$w'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Pochodna funkcji złożonej

Niech $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ i $g : Y \mapsto \mathbb{R}$ będą funkcjami takimi, że zbiór Y zawiera obraz przedziału (a, b) przez funkcję f.

Twierdzenie **2.7.5.** *Jeśli istnieje pochodna $f'(x_0)$ i istnieje pochodna $g'(y_0)$, gdzie $y_0 = f(x_0)$, to istnieje pochodna złożenia $(g \circ f)'(x_0)$ i jest równa iloczynowi pochodnych, tzn.*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie **2.7.6.** *Niech g będzie funkcją odwrotną do funkcji $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$, czyli $g(f(x)) = x$. Niech $x_0 \in (a, b)$. Jeśli istnieje pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to funkcja g jest różniczkowalna w punkcie $y_0 = f(x_0)$ i zachodzi równość:*

$$f'(x_0) \cdot g'(y_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)) = 1$$

lub w innej postaci

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Przykład. Funkcja $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ jest odwrotna do funkcji $x \mapsto \operatorname{tg} x$, stąd - na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej - otrzymamy

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\operatorname{tg} y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Przykład. Funkcja $x \mapsto \ln x$ jest odwrotna do funkcji $x \mapsto \exp x$. Stąd - na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej - mamy:

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{\frac{d}{dy}\exp y} = \frac{1}{\exp y} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}$$

Przykład. Zauważmy też, że pochodna $\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}$, dla $x \neq 0$.
Oznaczmy symbolem $\operatorname{abs}(x) = |x|$ wartość bezwzględną liczby x. Na mocy twierdzenia o pochodnej złożenia funkcji mamy równość

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}(\ln|x|) &= (\ln \circ \operatorname{abs})'(x) = (\ln)'(\operatorname{abs}(x)) \cdot (\operatorname{abs})'(x) \\ &= \tfrac{1}{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x = \tfrac{x}{|x|^2} = \tfrac{1}{x}. \end{aligned}$$

2.8 Ekstremum i monotoniczność funkcji

2.8.1 Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie **2.8.1** (Fermat)**.** *Niech będzie dana funkcja rzeczywista $f(x)$, która ma pochodną w (a, b). Jeżeli funkcja ma w tym przedziale ekstremum w punkcie ξ, to $f'(\xi) = 0$.*

Twierdzenie **2.8.2** (Rolle'a)**.** *Niech $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i różniczkowalną w przedziale otwartym (a, b). Jeśli na końcach przedziału funkcja przyjmuje równe wartości, to istnieje punkt $\xi \in (a, b)$, w którym zeruje się pochodna funkcji, czyli*

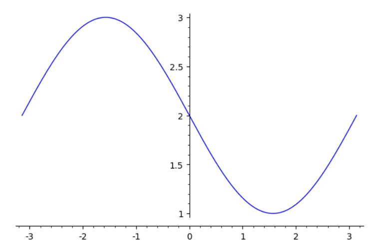
$$f(a) = f(b) \implies \exists\, \xi : \; f'(\xi) = 0.$$

Dowód. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym [tw. Weierstrassa] osiąga kresy $\xi_1 = M(ax)$ oraz $\xi_2 = m(in)$.
1. Załóżmy, że obydwa są punktami końcowymi przedziału $[a, b]$, wtedy $m = M$ i funkcja jest stała, czyli $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in [a, b]$.
2. Załóżmy, że obydwa nie są punktami końcowymi przedziału $[a, b]$, wtedy $\xi_1 \in (a, b)$ jest maksimum funkcji na tym przedziale, stąd $f'(\xi_1) = 0$. Podobnie dla punktu ξ_2 w ktoym jest minimum funkcji wewnątrz przedziału. □

Uwagi:

- wewnątrz przedziału pochodna może być niewłaściwa
- wystarczy by $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x)$

Przykład. $f(x) = 2 - \sin x$.



Twierdzenie **2.8.3** (Lagrange'a). *Jeśli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a,b]$ i różniczkowalna w (a,b), to istnieje punkt wewnątrz przedziału $\xi \in (a,b)$ taki, że pochodna w tym punkcie wynosi $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, czyli*

$$\exists\, \xi : \; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Dowód. Niech $F(x) = f(x) + hx$. Wtedy h dobierzemy tak

$$F(a) = F(b)$$

czyli dla $f(a) + ha = f(b) + hb$ otrzymamy

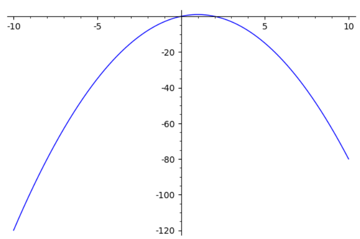
$$h = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Wtedy $F(x) = f(x) + h$ spełnia założenia tw. Rolle'a, czyli istnieje ξ, że

$$F'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) + h = 0$$

□

Przykład. $f(x) = -x(x-2)$.



Wnioski z twierdzenia Lagrange'a.

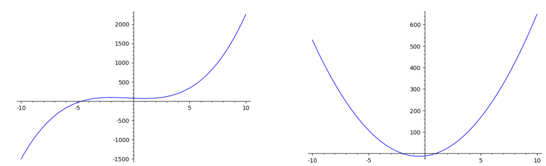
Twierdzenie **2.8.4.** *Niech f będzie funkcją różniczkowalną w przedziale (a,b).*

- *Jeśli $f'(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest rosnąca w przedziale (a,b)*
- *Jeśli $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest ściśle rosnąca w przedziale (a,b)*

- *Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest stała w przedziale (a,b)*
- *Jeśli $f'(x) \leq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest malejąca w przedziale (a,b)*
- *Jeśli $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to f jest ściśle malejąca w przedziale (a,b)*

Przykład. Pochodna funkcji $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 74$ wynosi $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$.

- f'(x)<0 w przedziale (-2,1),
- w obu przedziałach $(-\infty,-2)$ oraz $(1,+\infty)$ pochodna jest dodatnia
- f jest ściśle rosnąca w przedziale $(-\infty,-2)$, następnie maleje w przedziale (-2, 1) i znowu rośnie w przedziale $(1,\infty)$.



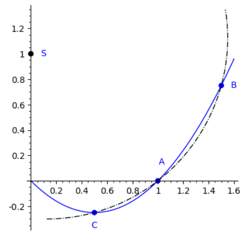
(a) wykres funkcji (b) wykres pochodnej

2.8.2 Okrąg styczny

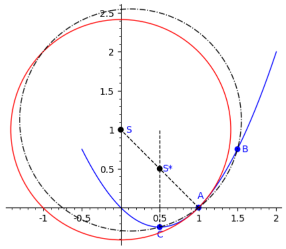
W ustalonym punkcie A wykresu funkcji $f(x)$ możemy znaleźć nieskończenie wiele okręgów, dla których styczna pokrywa się ze styczną wykresu funkcji w tym punkcie. Jeden z tych okręgów jest wyróżniony przez swoją konstrukcję. Dla dwóch punktów wykresu funkcji B oraz C rozważymy okrąg opisany na trójkącie ΔABC. Przechodząc od siecznej BC do stycznej w punkcie A otrzymamy okrąg, który przybliża krzywą w punkcie. Nazywamy go okręgiem oskulacyjnym (stykającym się).

Przypomnijmy równanie stycznej w punkcie A to prosta $y - f(x_A) = f'(x_a)(x - x_A)$. Wyznaczymy teraz punkt S*, który jest przecięciem dwóch prostych normalnych dla punktów A oraz C, czyli

$$\begin{cases} y - f(x_A) = -\frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A) \\ y - f(x_C) = -\frac{1}{f'(x_C)}(x - x_C). \end{cases}$$



(a) okrąg opisany



(b) okrąg styczny

Inaczej

$$\begin{cases} x + f'(x_A)y = x_A + f'(x_A)f(x_A) \\ x + f'(x_C)y = x_C + f'(x_C)f(x_C). \end{cases}$$

Odejmując stronami wyznaczamy y jako

$$y = \frac{x_A - x_C + f'(x_A)f(x_A) - f'(x_C)f(x_C)}{f'(x_A) - f'(x_C)}$$

i przedstawimy w innej postaci względem wartości $f(x_A)$, czyli:

$$y = f(x_A) + \frac{x_A - x_C + f'(x_C)(f(x_A) - f(x_C))}{f'(x_A) - f'(x_C)} = f(x_A) + \lambda$$

Rozwiązanie to współrzędne punktu S*, gdzie $\lambda = \frac{x_C - x_A + f'(x_C)(f(x_C) - f(x_A))}{f'(x_C) - f'(x_A)}$:

$$x_{S*} = x_A - \lambda f'(x_A)$$
$$y_{s*} = y_A + \lambda$$

Dla współczynnika λ mianownik oraz licznik podzielimy przez $x_C - x_A$ oraz przejdziemy do granicy $x_C - x_A \to 0$. Wtedy $\lambda^* = \frac{1+[f'(x_A)]^2}{f''(x_A)}$. Współrzędne środka okręgu, czyli punktu S można zapisać

$$x_S = x_A - \lambda^* f'(x_A)$$
$$y_s = y_A + \lambda^*$$

Na koniec obliczymy promień okręgu otrzymując twierdzenie o wykresie funkcji

$$R^2 = (x - x_S)^2 + (y - y_S)^2 = (\lambda^*)^2(1 + [f'(x_A)]^2).$$

TWIERDZENIE **2.8.5.** *Promień okręgu oskulacyjnego do funkcji $y = f(x)$ w punkcie A wynosi*

$$R = \frac{\sqrt{(1 + {y'_A}^2)^3}}{|y''_A|}$$

2.8.3 Przykłady

Przebieg funkcji

Dana jest funkcja, gdzie notacja $\exp(x) = e^x$

$$f(x) = \begin{cases} (x+3)\exp(\frac{x+1}{x-1}) & \text{dla } x \neq 1 \\ 0 & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Własności podstawowe.

- dziedzina $x \in \mathbb{R}$
- własności symetrii brak
- potrzebne granice funkcji:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

Wyznaczanie asymptot.

- współczynnik kierunkowy: $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = e, a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = e$
- współczynnik $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ex)$

Analiza pierwszej pochodnej.

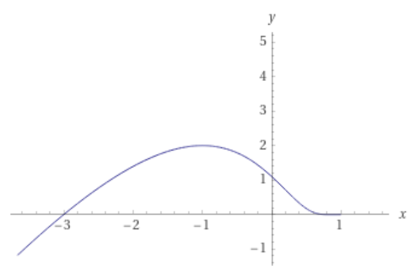
- $f'(x) = \frac{x^2-4x-5}{(x-1)^2} \exp\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-1)^2} \exp\frac{x+1}{x-1}$

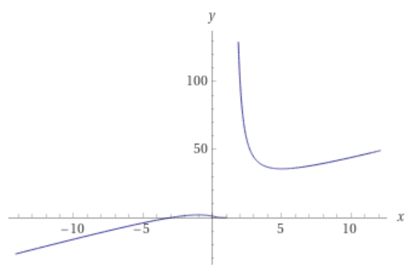
- punkty krytyczne: $x = 5$ oraz $x = 1$
- monotoniczność funkcji: rosnąca $(-\infty, -1)$, $(5, \infty)$ oraz malejąca $(-1, 1), (1, 5)$

Analiza drugiej pochodnej.

- $f''(x) = \frac{4(5x-1)}{(x-1)^4} \exp \frac{x+1}{x-1}$
- znak +: $\{f'' > 0\} = \left(\frac{1}{5}, 1\right) \cup (1, \infty)$
- znak -: $\{f'' < 0\} = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$
- zerowanie się $x = \frac{1}{5}$

Wykresy funkcji.





2.9 Wyższe pochodne. Wzór Taylora

2.9.1 Funkcje wypukłe

Rozpoczniemy od znanego określenia zbioru wypukłego na płaszczyznie jako warunku względem odcinka.

Definicja. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest wypukły jeśli dla dowolnych dwóch punktów tego zbioru odcinek, który je łączy też zawiera się w tym zbiorze, czyli

$$a, b \in A \implies \overline{ab} \subset A$$

Definicja. Funkcja $f(x)$ jest wypukła jeżeli jej nadwykres $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$ jest zbiorem wypukłym.

Twierdzenie **2.9.1.** *Funkcja $f(x)$ dwukrotnie różniczkowalna w sposó ciągły na odcinku (a, b) jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy druga pochodna jest nieujemna:*

$$\forall x \in (a, b): \ f''(x) \geq 0$$

2.9.2 Wzór Taylora

Wielomian Taylora w punkcie x_0 stopnia $n \in \mathbb{N}$ dla funkcji $f(x)$

$$T_n(x) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ma następujące własności dla $k = 1, 2, ..., n$

- $T_n(x_0) = f(x_0)$
- $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

Twierdzenie **2.9.2** (Wzór Taylora z resztą Lagrange'a)**.** *Niech funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ posiada ciągłe pochodne $f', f'', ..., f^{(n-1)}$ na przedziale $[x_0, x]$ oraz n-tą pochodną $f^{(n)}$ na przedziale (x_0, x). Istnieje punkt $c \in (x_0, x)$ taki że:*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x - x_0)^n.$$

Wyrażenie $R_n(x) := \frac{f^{(n)}(c)}{(n)!}(x-x_0)^n$ nazywane jest n-tą resztą w postaci Lagrange'a dla c pomiędzy x_0 oraz x.

Dowód. Określimy funkcję $F(t)$ na ustalonym przedziale $t \in [x_0, x]$ postaci

$$F(t) := f(x) - f(t) - (x-t)f'(t) - ... - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)$$

- $F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)$
- funkcja
$$G(t) := F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0)$$
ma własność $G(x_0) = G(x) = 0$
- twierdzenie Rolle'a mówi, że istnieje $c \in \mathbb{R}$, że
$$0 = G'(c) = F'(c) + (n+1)\frac{(x-c)^n}{(x-x_0)^{n+1}} F(x_0)$$
- $F(x_0) = -\frac{1}{(n+1)} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} F'(c) = \frac{1}{(n+1)} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(x-c)^n} \frac{(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$
- $F(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

□

PRZYKŁAD. Dla funkcji $y = \sqrt{1+x}$, gdzie $1 + x \geq 0$, użyjemy wzoru Taylora dla $n = 3$ oraz $x_0 = 0$. Szacujemy też błąd przybliżenia wartości $\sqrt{1,4}$ przez resztę $R_3(x)$.

- Obliczymy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ oraz $f''(x) = -\frac{1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ w celu wyznaczenia wartości $f'(0) = 1/2$ oraz $f''(0) = -1/4$. Stąd podstawienie do wzoru Taylora
$$\sqrt{1+x} = T_2(x) + R_3(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_3(x).$$
- Obliczymy resztę $R_3(x)$ jako wyrażenie w punkcie c pomiędzy 0 oraz x, czyli $\frac{f'''(c)}{3!}x^3$. Potrzeba zatem jeszcze jednego różniczkowania $f'''(x) = \frac{3}{8(x+1)^{\frac{5}{2}}}$, stąd $R_3(x) = \frac{3}{8 \cdot 3!}(c+1)^{-\frac{5}{2}} x^3$.

- Zbierając obliczenia możemy położyć równość funkcji $\sqrt{1+x}$ z wielomianem stopnia 3 dla pewnego punktu c pomiędzy 0 oraz x, czyli:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}(c+1)^{-\frac{5}{2}} x^3.$$
- Na koniec użyjemy równości $f(x) - T_2(x) = R_3(x)$ dla $x = 0,4$ w celu szacowania różnicy $|\sqrt{1+0,4} - T_2(0,4)|$ pomiędzy *nieznaną wartością funkcji* $\sqrt{1,4}$ a jej przybliżeniem przez wielomian Taylora drugiego stopnia $T_2(0,4) = 1,18$. Sprowadza się to do szacowania reszty $R_3(x)$. Stąd dla $c > 0$ możemy zapisać:
$$R_3(0,4) = \frac{(0,4)^3}{16(c+1)^{\frac{5}{2}}} \leq \frac{4^3}{16000} < 0,4 \cdot 10^{-2}$$
Wtedy $|\sqrt{1,4} - 1,18| < 0,5 \cdot 10^{-2}$, czyli jest tutaj pewna dokładność do 2 miejsc po przecinku. Odnotujmy wartość podaną przez kalkulator $\sqrt{1,4} = 1,183...$

Wzór Maclaurina

Oznaczymy przyrost dla zmiennej $h = \Delta x = x - x_0$ (dlaczego dwa oznaczenia?). Wzór Taylora przyjmie wtedy postać dla $c \in (x_0, x_0 + h)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}h + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$$

W punkcie $x_0 = 0$ punkt $c \in (0, h) = (0, x)$ i można zapisać wzór Maclaurina

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$

Uwagi:

- dla $x > 0$ mamy $c \in (0, x)$
- dla $x < 0$ mamy $c \in (x, 0)$

2.9.3 Przykłady wielomianów

Funkcja e^x

Niech $f(x) = \exp(x)$. Wówczas $f^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, więc wzór dla funkcji wykładniczej przybiera postać

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{(n)!}e^c.$$

Uwagi:

- Dla $n \to \infty$ reszta $r_n(0,x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \to 0$.
- $e^x - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 0$
- Sumowanie nieskończonej liczby wyrazów.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Przykład funkcji $\sin(x)$

Dla $f(x) = \sin x$ mamy $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \sin 0 = 0$, natomiast $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \cos 0 = (-1)^n$ dla $n = 0, 1, \ldots$. Wzór Maclaurina dla sinusa jest więc następujący:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \cos(c)$$

Przykład funkcji $\cos(x)$

Dla $f(x) = \cos x$ mamy $f^{(2n+1)}(0) = 0$ dla każdego $n = 0, 1, \ldots$, natomiast $f^{(2n)}(0) = (-1)^n \cos 0 = (-1)^n$ i dlatego wzór Maclaurina ma postać

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cos(c)$$

Przykład funkcji $\log(1+x)$

Niech $f(x) = \ln x$ i $x_0 = 1$. Tym razem zastosujemy wzór Taylora w punkcie $x_0 = 1$. Mamy $f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, a więc

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \frac{1}{(1+c)^n}$$

2.9.4 Styczność rzędu n

Definicja. Jeżeli dla funkcji $f(c) = g(c), f'(c) = g'(c), ..., f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$, natomiast $f^{(n+1)}(c) \neq g^{(n+1)}(c)$ to funkcje f(x) oraz g(x) mają styczność rzędu n w punkcie c.

Przykład. Dla funkcji $g(x) = ax+b$ warunek styczności pierwszego rzędu z dowolną funkcją $f(x)$ w punkcie c, czyli

$$\begin{cases} a = f'(c) \\ b = f(c) - cf'(c) \end{cases}$$

Rzowiązaniem jest równanie prostej postaci

$$y = xf'(c) + f(c) - cf'(c)$$

znane bardziej w postaci $y - f(c) = f'(c)(x - c)$.

Przykład. Dla równania okręgu $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ rozważymy styczność z wykresem pewnej funkcji $y = f(x)$ w punkcie płaszczyzny $(c, f(c))$. Mamy dwa równania wynikające z różniczkowania:

$$(x-a) + (y-b)f'(c) = 0$$
$$1 + (f'(c))^2 + (y-b)f''(c) = 0$$

Wtedy $(c-a)/f'(c) = b - f(c) = r/\sqrt{1 + (f'(c))^2}$. Możemy obliczyć też $b = f(c) + \frac{1+(f'(c))^2}{f''(c)}$. Środek okręgu ma koordynaty

$$a = c - \frac{f'(c)(1 + (f'(c))^2)}{f''(c)} \quad b = f(c) + \frac{1 + (f'(c))^2}{f''(c)}$$

oraz promien $r = \frac{\sqrt{(1+(f'(c))^2)^3}}{f''(c)}$

2.9.5 Druga różniczka i wyższe

Dla różniczki funkcji $df(x) = f'(x)dx$ możemy stosować zapis symboliczny, który jest niezmienniczy względem postaci. Jak zauważył G. Leibniz opuszczanie symbolu dx uniemożliwia prowadzenie ścisłych rachunków z użyciem tej notacji. Oznacza to, że przy uzależnieniu zmiennej $x = \phi(t)$ należy rozumieć, że postać $df(x)$ pozostaje jako

$$df(x) = f'(x)dx = f'(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Przy stosowaniu drugiej różniczki $d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx)$ należy określić sposób w jaki symbol d będzie działał na wyrażenia. Określamy to zwykle jako odpowiednie różniczkowanie, czyli

$$d^2f(x) = df'(x)dx + f'(x)d(dx) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x$$

Tym razem mamy dwie sytuacje, które prowadzą do rachunków przy braku niezmienniczości

- zmienna x jest niezależna i wówczas $d^2x = 0$, wtedy

$$d^2f(x) = f''(x)(dx)^2$$

- $x = \phi(t)$ jest zależna i wówczas $d^2t = 0$ oraz potrzebne wyrażenia:
  - $dx = \phi'(t)dt$
  - $d^2x = \phi''(t)(dt)^2 + \phi'(t)d^2t$
  - wtedy $d^2f(\phi(t)) = f''(\phi(t))(\phi'(t))^2(dt)^2 + f'(\phi(t))\phi''(t)(dt)^2 + f'(\phi(t))\phi'(t)d^2t$
  - w sumie tylko dwa wyrazy

$$d^2f(\phi(t)) = f''(\phi(t))(\phi'(t))^2(dt)^2 + f'(\phi(t))\phi''(t)(dt)^2 = \tag{2.2}$$
$$= \left(f''(\phi(t))(\phi'(t))^2 + f'(\phi(t))\phi''(t)\right)(dt)^2 \tag{2.3}$$

Przykład. Dla funkcji $f(x) = x$ oraz podstawienia $x = t^3$ jest $f(t) = t^3$ oraz

$$d^2f(t) = 6t(dt)^2$$

Z drugiej strony:

- $dx = 3t^2dt$ oraz $f''(x) = 0$
- $d^2x = 6t(dt)^2$ oraz $f'(x) = 1$
- wyprowadzając od początku obliczenia:

$$d^2f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x = d^2x = 6tdt$$

Przykład. Dla funkcji $f(x) = x^2$ oraz podstawienia $x = t^3$ jest $f(t) = t^6$ oraz

$$d^2f(t) = 30t^4\ (dt)^2$$

Z drugiej strony:

- $dx = 3t^2dt$ oraz $f''(x) = 2$
- $d^2x = 6t(dt)^2$ oraz $f'(x) = 2x$
- wyprowadzając ponownie od początku obliczenia:

$$d^2f(x) = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x = d^2x = 2(3t^2dt)^2 + 2t^36t(dt)^2$$

Zapiszemy jeszcze formułę dla trzeciej różniczki, którą używa się w obliczeniach:

$$d^3f(x) = \left(f'''(\phi(t))(\phi'(t))^3 + 3f''(\phi(t))\phi'(t)\phi''(t) + f'(\phi(t))\phi'''(t)\right)(dt)^3$$

Stosuje się też wzory wynikające z obliczeń na wyższe różniczki, które przedstawimy w następujący sposób:

1. $\phi'(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{1}{f'(x)}$
2. $\phi''(t) = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} = -\frac{f''(x)(\phi'(t))^2}{f'(x)} = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}$
3. $\phi'''(t) = \frac{d^3\phi(t)}{dt^3} = \frac{3(f''(x))^2 - f'(x)f'''(x)}{(f'(x))^5}$

2.10 Całka nieoznaczona

Funkcje elementarne to funkcje, które można za pomocą operacji: dodawania, mnożenia, złożenia i odwracania otrzymać z funkcji: stałych, potęgowych, wykładniczych, lub trygonometrycznych.

Uwaga **2.10.1.** Odnotujmy fakt, że pochodna funkcji elementarnej jest zawsze funkcją elementarną, bo wynika to ze wzorów na pochodną funkcji stałej, potęgowej, wykładniczej, trygonometrycznej oraz wzorów na pochodne sumy, iloczynu, ilorazu, złożenia i funkcji odwrotnej.

2.10.1 Funkcja pierwotna

Definicja**.** Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją na przedziale. Funkcję $F(x)$ nazywamy funkcją pierwotną, jeśli jest różniczkowalna oraz na przedziale zachodzi równość

$$F'(x) = f(x).$$

Uwaga **2.10.2.** Dwie dowolne pierwotne funkcji $f(x)$ różnią się o stałą, czyli można zapisać:

- jeśli $F_1(x)$ i $F_2(x)$ są pierwotnymi funkcji $f(x)$, to $F_1(x) - F_2(x) = const$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$.
- jeśli $F_1(x)$ jest pierwotną funkcji $f(x)$ oraz $F_1(x) - F_2(x) = C$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$, to $F_2(x)$ też jest pierwotną funkcji $f(x)$.

Długość wykresu funkcji

Wzór na dowolną różniczkę postaci $g(x)dx$ w sytuacji, gdy istnieje funkcja pierwotna $g(x) = G'(x)$ można zapisać jako $G'(x)dx$ i wyrażenie staje się różniczką zupełną:

$$g(x)dx = G'(x)dx = dG(x)$$

Przypomnijmy, że mamy wtedy do czynienia z dokładnym przybliżeniem wzrostu wartości funkcji przez różniczkę, czyli

$$dG(x,h) = G(x+h) - G(x).$$

Przypomnijmy, że wraz z funkcją różniczkowalną w punkcie x_0 mamy prostą styczną, której nachylenie odpowiada wartości pochodnej $f'(x_0)$. Rozpatrzymy teraz wektor kieunkowy prostej stycznej w punkcie, który oznaczymy przez $T(x_0)$. Przypomnijmy, że równanie prostej można zapisać dla parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ w postaci $x_0 + \lambda\vec{T}(x_0)$.

Dla wykresu funkcji $f(x)$, która jest różniczkowalna w punkcie x_0 wektor styczny wynosi $T(x_0) = [1, f'(x_0)]$. Obliczymy jego długość $|T(x_0)| = \sqrt{1 + (f'(x_0))^2}$ i utworzymy różniczkę postaci $|T(x_0)|dx$. Jeżeli funkcja długości wektora stycznego ma funkcję pierwotną oznaczaną zwykle przez $S(x)$, czyli $S'(x) = |T(x)|$, to taką różniczkę można zapisać jako zupełną $|T(x)|dx = dS(x)$. Wtedy wartość różniczki na przyroście h wynosi:

$$|T(x)|dx(h) = dS(x)(h) = S(x)\Big|_{x=a}^{x+h=b} = S(b) - S(a).$$

Przykład (Odległość wzdłuż prostej)**.** Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ dane są dwa punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Z twierdzenia Pitagorasa wiemy, że odległość pomiędzy nimi wynosi $|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$. Równanie prostej, która przechodzi przez te dwa punkty to $(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$ zapisane w postaci kierunkowej

$$y = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}x + y_A - \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}x_A$$

Z drugiej strony dla równania w postaci kierunkowej $y = ax + b$ pochodna to $y' = a$ oraz długość wektora kierunkowego stycznej $T = [1, y']$ wynosi $|T| = \sqrt{1 + a^2}$. Funkcja pierwotna wynosi tutaj $S(x) = x\sqrt{1 + a^2}$. Można zauważyć, że odległość pomiędzy punktami A oraz B jest równa

$$|AB| = S(x_B) - S(x_A) = \sqrt{1 + a^2}(x_B - x_A) = \sqrt{1 + \left(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}\right)^2}(x_B - x_A)$$

Definicja**.** Dla funkcji $f(x)$, która ma pochodną na odcinku $[a,b]$ długość linii $l(A,B)$ pomiędzy dwoma punktami połączonymi wzdłuż krzywej o równaniu $y = f(x)$ określimy jako różnicę wartości funkcji pierwotnej w tych punktach:

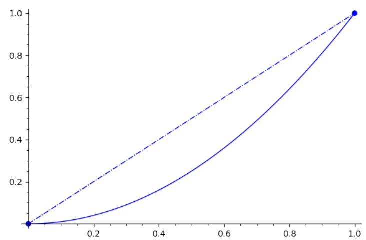
$$l(A,B) = S(x_B) - S(x_A)$$

gdzie $S(x)$ to funkcja pierwotna dla funkcji długości wektora stycznego

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Przykład (Długość paraboli). Dla paraboli $y = x^2$ względem wektora $T = [1, 2x]$ o długości $\sqrt{1+4x^2}$ funkcja pierwotna wynosi $S(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4\,x^2+1}x + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}\,(2\,x)$. Wtedy długość linii pomiędzy punktami $(0,0)$ oraz $(1,1)$ obliczamy jako

$$l(A,B) = S(1) - S(0) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\,\mathrm{arsinh}\,(2)\,.$$



2.10.2 Określenie całki nieoznaczonej

Definicja. Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$ nazywamy zbiór jego funkcji pierwotnych i oznaczamy

$$\int f(x)dx \text{ lub krócej } \int f dx$$

Uwaga **2.10.3.** Jeśli $F(x)$ jest funkcją pierwotną dla $f(x)$, to

$$\int f(x)\,dx \;=\; F(x) + C$$

Uwaga **2.10.4.** Jeśli F jest jedną z pierwotnych funkcji f oraz $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, to pierwotna G funkcji f spełniająca $G(x_0) = y_0$ (to znaczy której wykres przechodzi przez punkt (x_0, y_0)) jest równa $G(x) \;=\; F(x) + c$, gdzie $C = y_0 - F(x_0)$.

2.10.3 Przykłady

- $\int 0\,dx = c$
- $\int 1\,dx = x + c$
- $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + c$ dla $\alpha \neq -1$

- $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$
- $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$, dla $a > 0, a \neq 1$, w szczególności $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\mathrm{ctg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \mathrm{arc}\sin x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}\,x + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \mathrm{arsinh}\,x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \mathrm{arcosh}\,x = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right|$

2.10.4 Własności całki nieoznaczonej

Twierdzenie **2.10.1.** *Jeśli $f, g\colon \mathbb{R} \supseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami, dla których istnieją całki nieoznaczone, $\lambda \in \mathbb{R}$, to*

- $\int (f+g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$

Uwaga **2.10.5.** Całka nieoznaczona funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną np. $\int \frac{\sin x}{x} dx$

Metoda przez części

Twierdzenie **2.10.2.** *Jeśli $I \subseteq \mathbb{R}$ jest przedziałem, $f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami różniczkowalnymi oraz istnieje całka nieoznaczona dla funkcji $f(x)g'(x)$, to istnieje także całka nieoznaczona dla funkcji $f'(x)g(x)$ oraz*

$$\int f'(x)g(x)\,dx \;=\; f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Dowód. bo: $(f \cdot g)' \;=\; f' \cdot g + f \cdot g'$, zatem $f' \cdot g \;=\; (f \cdot g)' - f \cdot g'$. □

Przykład. Całka $\int \sin x \cos x dx$ $\int \sin x \cos x \, dx =$

$= \begin{vmatrix} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \end{vmatrix}$

$= -\cos x \cos x - \int (-\cos x)(-\sin x) \, dx = -\cos^2 x - \int \sin x \cos x \, dx$.

czyli:

$$\int \sin x \cos x \, dx \;=\; -\frac{1}{2} \cos^2 x + c$$

Metoda przez podstawianie

Twierdzenie **2.10.3.** *Jeśli $I, J \subseteq \mathbb{R}$ są przedziałami, $f\colon I \longrightarrow J$ jest funkcją różniczkowalną oraz $g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją, dla której istnieje pierwotna $G\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$, to istnieje całka nieoznaczona dla funkcji $g(f(x)) \cdot f'(x)$ oraz*

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) \, dx \;=\; G(f(x))$$

Dowód. bo: funkcje G i f są różniczkowalne, więc ich złożenie także oraz mamy $(G \circ f)' = (G' \circ f) \cdot f' = (g \circ f) \cdot f'$. Całkując obie strony, dostajemy tezę naszego twierdzenia. □

Uwaga **2.10.6.** Wzór całkowania przez podstawianie często zapisujemy jako:

$$\int g\Big(f(x)\Big) f'(x) \, dx \;=\; \int g(t) \, dt$$

gdzie $t = f(x)$

$$\int \sin x \cos x \, dx \;=\; \begin{vmatrix} \sin x & = & t \\ \cos x \, dx & = & dt \end{vmatrix} \;=\; \int t \, dt \;=\; \frac{1}{2} t^2 + c \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{2} \sin^2 x + c. \tag{2.5}$$

Przykład. Przykład: całka $\int \mathrm{tg}(x) dx$ przez podstawienie

- $f(x) = \frac{1}{x}$ oraz $\phi(t) = \cos t$ oraz $F(x) = \ln |x|$
- $\int \mathrm{tg}\, x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$
- $-\int f(\phi(x))\phi'(x) \, dx = F(\phi(x)) + C = \ln |\cos x| + C$

Symbol różniczki

Własności różniczki:

- liniowość gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$$d(\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 df + \lambda_2 dg$$

- różniczkowanie iloczynu

$$d(f \cdot g) = f dg + g df$$

Niezmienniczość postaci pierwszej różniczki:

$$df(x) = f'(x) \; dx = f'(\phi(t)) \; d\phi(t) = f'(\phi(t))\phi'(t) \; dt$$

2.10.5 Całka funkcji sklejonej

Przykład. Dla funkcji ciągłej $f(x) = |x|$ możemy wyznaczyć całkę nieoznaczoną postaci

$$\int |x| \; dx = \frac{1}{2} x|x| + C$$

Rozpiszemy moduł $|x|$ przy pomocy klamry na przedziałach dziedziny

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dla } x \geq 0 \\ -x \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Wtedy całka na każdym przedziale ciągłości może być określona z własną stałą całkowania, czyli:

$$\int |x| \; dx = \begin{cases} x^2/2 + C_1 \text{ dla } x \geq 0 \\ -x^2/2 + C_2 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Ponieważ funkcja pierwotna jest sklejona w $x = 0$, to $C_1 = C_2$.

Przykład. Dla funkcji ciągłej $f(x) = \sin |x|$ możemy rozpisać przedziałami

$$\sin |x| = \begin{cases} \sin x \text{ dla } x \geq 0 \\ -\sin x \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Wtedy wyznaczymy całkę nieoznaczoną ze stałą C jako

$$\int \sin |x| \; dx = \begin{cases} -\cos x + C \text{ dla } x \geq 0 \\ \cos x + 2 + C \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Ogólnie możemy zapisać dla funkcji na dwóch przedziałach

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ dla } a < x \le \xi \\ f_2(x) \text{ dla } \xi \le x < b \end{cases}$$

warunek sklejenia w punkcie ξ pomiędzy $[a, b]$ jako $f_1(\xi) = f_2(\xi)$. Wtedy całkę nieoznaczoną zapiszemy przy użyciu funkcji pierwotnej $F(x)$, tak że $F'(x) = f(x)$ jako

$$\int f(x)\ dx = \begin{cases} F_1(x) + C \text{ dla } a < x \le \xi \\ F_2(x) + F_1(\xi) - F_2(\xi) + C \text{ dla } \xi \le x < b \end{cases}$$

Dla funkcji sklejonej na trzech przedziałach, czyli $f_1(\xi_1) = f_2(\xi_1)$ oraz $f_2(\xi_2) = f_3(\xi_2)$ postaci

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ dla } a < x < \xi_1 \\ f_2(x) \text{ dla } \xi_1 \le x \le \xi_2 \\ f_3(x) \text{ dla } \xi_2 \le x < b \end{cases}$$

możemy zapisać całkę nieoznaczoną jako

$$\int f(x)\ dx = \begin{cases} F_1(x) + C \text{ dla } a < x \le \xi_1 \\ F_2(x) + F_1(\xi) - F_2(\xi) + C \text{ dla } \xi_1 \le x \le \xi_2 \\ F_3(x) + F_1(\xi) - F_2(\xi) + F_2(\xi) - F_3(\xi) + C \text{ dla } \xi_2 \le x < b \end{cases}$$

2.10.6 Przykłady

Rekurencja przez części

Wyznaczymy rekurencję dla całki nieoznaczonej $F_n = \int \sin^n(x)\ dx$, która ma postać dla $n \ge 2$:

$$F_n = \frac{n-1}{n} F_{n-2} - \frac{1}{n} \sin^{n-1}(x) \cos(x)$$

Przykłady użycia:

- $\int \sin^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,\sin(2\,x)$
- $\int \sin^3(x)\ dx = \frac{1}{3}\,\cos(x)^3 - \cos(x)$
- $\int \sin^4(x)\ dx = \frac{3}{8}\,x + \frac{1}{32}\,\sin(4\,x) - \frac{1}{4}\,\sin(2\,x)$
- $\int \sin^5(x)\ dx = -\frac{1}{5}\,\cos(x)^5 + \frac{2}{3}\,\cos(x)^3 - \cos(x)$

Obliczenia przez części:

- $\sin^n(x)\ dx = \sin^{n-1}(x)\sin(x)dx$
- oznaczymy $u = \sin^{n-1}(x)$ oraz $dv = \sin(x)dx$
- obliczymy $du = (n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx$ oraz $v = -\cos(x)$
- wtedy $F_n = udv = \sin^{n-1}(x)(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))(n-1)\sin^{n-2}(x)\cos(x)dx$
- ponieważ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ stąd

$$F_n = -\sin^{n-1}(x)\cos(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\ dx - (n-1)F_n$$

Podstawienie nowej zmiennej

Wyznaczymy całkę nieoznaczoną

$$F = \int x^5\sqrt{x^2-1}\ dx$$

Obliczenia:

- podstawienie $u = \sqrt{x^2-1}$
- różniczka $du = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\ dx$, czyli $udu = xdx$
- wyraz $x^4 = (u^2+1)^2$ tak by $\int x^4\sqrt{x^2-1}\ xdx$
- stąd całka w nowej zmiennej

$$F = \int [(u^2+1)^2 \cdot u \cdot u]\ du$$

- całka $F = \frac{1}{7}u^7 + \frac{2}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C$
- wracamy do zmiennej x

$$F = \frac{1}{7}(\sqrt{x^2-1})^7 + \frac{2}{5}(\sqrt{x^2-1})^5 + \frac{1}{3}(\sqrt{x^2-1})^3 + C$$

2.11 Całka nieoznaczona

2.11.1 Całka dla funkcji wymiernych

Zmienna zespolona

TWIERDZENIE **2.11.1** (Podstawowe twierdzenie algebry). *Wielomian zespolony stopnia n o współczynnikach zepolonych ma dokładnie n pierwiastków zespolonych.*

$$W_n(z) = 0 \implies \exists \alpha_i : \ W_n(z) = a_n(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)...(z-\alpha_n).$$

gdzie $W_n(z) \in \mathbb{C}[z]$ jest postaci $W_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$. Zauważmy, że pierwiastki mogą być wielokrotne, czyli $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ nie muszą być różne.

Dana jest funkcja wymierna $f(z)$ zmiennej zespolonej, czyli postaci

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

gdzie $n < m$. Jeżeli stopień wielomianu mianownika jest mniejszy, to należy wykonać dzielenie tych wielomianów. Wielomian dla mianownika zapiszemy uwzględniając pierwiastki wielokrotne w postaci

$$Q(z) = (z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}...(z-\alpha_i)^{n_i}$$

dla $m = n_1 + n_2 + ... + n_i$.

TWIERDZENIE **2.11.2** (O rozkładzie na ułamki proste). *Dla funkcji wymiernej $f(z)$ istnieją liczby zespolone A_i, takie że*

$$f(z) = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{(z-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{n_1}}{(z-\alpha_1)^{n_1}} + \\ + \frac{A_{n_1+1}}{z-\alpha_2} + \frac{A_{n_1+2}}{(z-\alpha_2)^2} + ... + \frac{A_{n_1+n_2}}{(z-\alpha_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{A_m}{(z-\alpha_i)^{n_i}}.$$

Zmienna rzeczywista

Niech $W_n(z)$ będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, czyli $W_n(z) \in \mathbb{R}[z]$. Dla dowolnego pierwiastka α tego wielomianu $\bar{\alpha}$ też jest pierwiastkiem, czyli

$$W_n(z) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n = 0 = a_0 + a_1\bar{\alpha} + a_2\bar{\alpha}^2 + ... + a_n\bar{\alpha}^n,$$

gdzie współczynniki $a_i = \bar{a}_i$ są rzeczywiste.

Jeżeli w rozkładzie wielomianu $W_n(z)$ występuje czynnik $z - \alpha$, to występuje również $z - \bar{\alpha}$ oraz

$$(z-\alpha)(z-\bar{\alpha}) = z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}.$$

gdzie $(\alpha + \bar{\alpha} = 2\Re\alpha$ oraz $\alpha\bar{\alpha} = \alpha^2$. Zatem wielomian ze współczynnikami rzeczywistymi rozkłada się na iloczyny czynników postaci $z-\alpha$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz trójmianów kwadratowych $z^2 + bx + c$ też o współczynnikach rzeczywistych.

Dla wielomianów $W_n(z) \in \mathbb{R}[z]$ można przedstawić wyrazy odpowiadające pierwiastkom α oraz $\bar{\alpha}$ jako

$$\frac{A_\alpha}{(z-\alpha)^n} + \frac{A_{\bar{\alpha}}}{(z-\bar{\alpha})^n} = \frac{Bz + C}{(z^2 - (\alpha+\bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha})^n}.$$

Dla funkcji wymiernych rzeczywistych postaci $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gdzie

$$Q_m(x) = (x-\alpha_1)^{n_1} \dots (x-\alpha_i)^{n_i}(x^2 + b_1x + c_1)^{k_1} \dots (x^2 + b_sx + c_s)^{k_s}$$

dla $\sum_{j=1}^{i} n_j + 2\sum_{j=1}^{s} k_j = m.$

TWIERDZENIE **2.11.3** (O rozkładzie na ułamki proste). *Dla rzeczywistej funkcji wymiernej $f(x)$ istnieją liczby rzeczywiste A_i oraz B_k, C_k, takie że*

$$f(x) = \frac{A_1}{z-\alpha_1} + \frac{A_2}{(z-\alpha_1)^2} + ... + \frac{A_{n_1}}{(z-\alpha_1)^{n_1}} + \dots + \\ + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + b_1x + c_1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + b_1x + c_1)^2} + \dots + \frac{B_{k_1}x + C_{k_1}}{(x^2 + b_1x + c_1)^{k_1}} + \dots + \\ + \dots \frac{B_{k_s}x + C_{k_s}}{(x^2 + b_sx + c_s)^{k_s}}.$$

Typy obliczanych całek

Najprościej jest obliczyć całkę typu

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = \begin{cases} \ln(x-\alpha) \text{ dla } k = 1, \\ \frac{-1}{(k-1)(x-\alpha)^{k-1}} \text{ dla } k > 1 \end{cases}$$

Druga całka dotyczy wyrażeń postaci

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + bx + c)^{k-1}} dx$$

Nierozkładalny mianownik $x^2+bx+c = x^2+bx+\frac{b^2}{2^2}-\frac{b^2}{2^2}+c$. Dalej $(x+b/2)^2+\frac{4c-b^2}{4} = \left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right)\cdot\left(\frac{-\Delta}{4}\right)$, gdzie $\Delta = b^2-4ac < 0$ z założenia. Przez podstawienie $t = \frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}$ możemy sprowadzić całkę do typu

$$\int \frac{Dt+E}{(1+t^2)^n}dt$$

Wtedy obliczamy całki:

- przy współczynniku D

$$\int \frac{t}{(1+t^2)^n}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1+t^2) \text{ dla } n=1, \\ \frac{-1}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \text{ dla } n>1. \end{cases}$$

- przy współczynniku E

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(t) \text{ dla } n=1, \\ \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt \text{ dla } n>1. \end{cases}$$

Druga całka w ostatnim wzorze może być obliczona przez części:

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^n}dt = \int \frac{t}{(1+t^2)^n}tdt = \frac{-t}{2(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}}dt.$$

Wykonując $n-1$ kroków możemy sprowadzić całkę do postaci dla $n=1$, czyli

$$\int \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arc\,tg}(t).$$

2.11.2 Całka wyrażeń trygonometrycznych

Uwaga **2.11.1.** Dla całki postaci

$$\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\,dx$$

stosujemy podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ otrzymamy:

- dla funkcji sinus
$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
- dla funkcji cosinus
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
- dla funkcji tangens
$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

  oraz $x = 2\operatorname{arctg} t$, zatem $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

Podsumowując: całkę postaci $\int R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x)\,dx$ możemy zapisać jako całkę z wyrażenia wymiernego (wielomianów) w zmiennej t, czyli

$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Przykład. Obliczymy całkę

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}\sin(x)}{3(\cos(x)+1)}\right)+C.$$

Zastosujemy podstawienie $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, wówczas $x = 2\operatorname{arctg} t$ i $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$. Zatem

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+3} = \\ = \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}t\right)$$

Przykład. Obliczymy całkę

$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}dx = \frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\operatorname{tg}(x)\right)+C$$

W całce tej stosujemy podstawienie $\operatorname{tg} x = t$, wówczas $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$ i $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Zatem

$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{2}{1+t^2}}dt = \int \frac{dt}{t^2+3}.$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{1+2\cos^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}}\right).$$

2.12 Całka oznaczona

2.12.1 Całka Newtona

Określenie i własności

Definicja. Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przedziale. Całką oznaczoną funkcji $f(x)$ na przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

gdzie $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, czyli $F'(x)=f(x)$.

Przykład. Całka $\int\limits_0^1 x^2+x+1 = F(1)-F(0)=\frac{11}{6}$, gdzie funkcja pierwotna $F(x) = x^3/3+x^2/2+x$.

Twierdzenie **2.12.1** (Liniowość całki). *Jeśli $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ są ciągłe, zaś $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, to*

$$\int_a^b \Big(\alpha f(x)+\beta g(x)\Big)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Przykład. Całka $\int\limits_0^1 2x^2+3x+4 = 2\int\limits_0^1 x^2+3\int\limits_0^1 x+4\int\limits_0^1 1 = \frac{37}{6}$.

Twierdzenie **2.12.2** (Całka przez części). *Jeśli $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ są klasy C^1, to*

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = \\ = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx\,.$$

Przykład. Całka $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$.

Twierdzenie **2.12.3** (Całka przez podstawienie). *Niech funkcja $g(x)$ ma ciągłą pochodną w przedziale $[\alpha,\beta]$. Dla funkcji $f(x)$ ciągłej we wszystkich wartościach funkcji $g(x)$ zachodzi równanie*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt,$$

gdzie $a=g(\alpha)$ oraz $b=g(\beta)$.

Uwaga **2.12.1.** Jeżeli funkcja $g(t)$ jest ściśle monotoniczna, to możemy zapisać

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Przykład. Dla całki

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{4}{15}(1+\sqrt{2})$$

oraz podstawienia $t=1+x$ mamy $f(g(t))=(t-1)\sqrt{t}$ oraz

$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx = \int_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt = \int_1^2 t^{3/2}dt - \int_1^2 t^{1/2}dt$$

Twierdzenie **2.12.4** (Addytywność względem przedziału). *Załóżmy, że $f(x)$ jest ciągła na przedziale $I\subset\mathbb{R}$. Dla $a,b,c\in I$ zachodzi wzór:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie **2.12.5** (O równości całek). *Założymy, że funkcje $f(x)$ oraz $g(x)$ różnią się wartościami w skończonej liczbie punktów. Jeżeli istnieje całka $\int_a^b f(x)dx$, to istnieje również całka $\int_a^b g(x)dx$ oraz zachodzi równość:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Przykład. Całka z funkcji $\int_0^3 E(x)dx$ da się obliczyć jako suma całek z funkcji liniowych, czyli

$$\int_0^3 E(x)dx = \int_0^1 0dx + \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx = 3.$$

Uwaga **2.12.2** (O całkach funkcji (nie)parzystych). Dla funkcji $f(x)$ całkowalnej na przedziale $[-a,a]$ zachodzi:

- jeżeli funkcja jest nieparzysta, to $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0$,
- jeżeli funkcja jest parzysta, to $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx$,

Uwaga **2.12.3** (O całkach funkcji okresowych)**.** Dla funkcji okresowych $f(x+T) = f(x)$ i całkowalnych na przedziale $[0,T]$ zachodzi:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx,$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ dowolna liczba.

Średnia funkcji na przedziale

Twierdzenie **2.12.6.** *Jeśli funkcje $f(x), g(x)$ są ciągłe na przedziale $[a,b]$ oraz zachodzi nierwóność $f(x) \le g(x)$ dla każdego $x \in [a,b]$, to*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx\,.$$

Nierówność staje się ostra przy założeniu nierówności ostrej.

Twierdzenie **2.12.7** (O szacowaniach wartości całki)**.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Wówczas dla $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ oraz $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ zachodzą dwie własności:*

1. *nierówności szacujące wartość całki*

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

2. *dla modułu wartości całki*

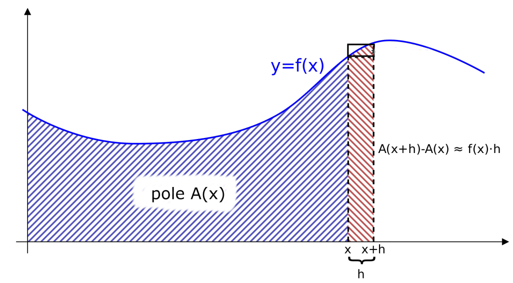
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Twierdzenie **2.12.8** (O całkowej wartości średniej funkcji)**.** *Istnieje punkt $\xi \in (a,b)$, że*

$$(b-a)\cdot f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Uwaga **2.12.4.** Jeżeli funkcja $f(x)$ jest monotoniczna, to punkt ξ jest określony jednoznacznie.

Sumy całkowe



Zapiszemy $A(x+h) - A(x) = f(x)h + R$. Po przekształceniu otrzymamy $f(x) = \frac{A(x+h)-A(x)}{h} + \frac{R}{h}$ i zdążamy do wzoru

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h}.$$

Możemy wykazać, że $\frac{R}{h} \to 0$ ponieważ $\left|f(x) - \frac{A(x+h)-A(x)}{h}\right| < \frac{|R|}{h}$ oraz

$$\frac{|R|}{h} < \ < \frac{hf(x+\xi_1) - hf(x+\xi_2)}{h} = f(x+\xi_1) - f(x+\xi_2),$$

gdzie argumenty $x+\xi_1$ są dla maksimum oraz $x+\xi_2$ dla minimum funkcji na przedziale $[x, x+h]$. Ponieważ funkcja jest ciągła to różnica $f(x+\xi_1) - f(x+\xi_2)$ dąży do zera wraz z $h \to 0$.

Przykład (Pole koła jednostkowego)**.** Dla koła o promieniu 1

- $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ dla $0 \le x \le 1$
- całka
$$P = 4\int_0^1 f(x)\,dx$$
- funkcja pierwotna $F(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)$
- $F(1) - F(0) = 2(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \pi$

Twierdzenie **2.12.9.** *Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła. Dla $\epsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że jeśli $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, i $x_i - x_{i-1} < \delta$ oraz $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, to*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \epsilon\,.$$

2.12.2 Całka Riemanna

Konstrukcja pozwala rozszerzyć klasę funkcji, dla których całka jest określona, o pewne funkcje nieciągłe. Dla funkcji ciągłych całka Newtona oraz całka Riemanna dają taki sam wynik.

Podział odcinka

Definicja. Niech $[a, b]$ będzie przedziałem domkniętym. Zbiór odcinków $P_k, k = 1, 2, ..., s$ zawartych w $[a, b]$ nazywamy podziałem tego odcinka jeśli:

- $\bigcup\limits_{k=1}^{s} P_k = [a, b]$
- $P_i \cap P_j = \emptyset$ dla $j \neq i$

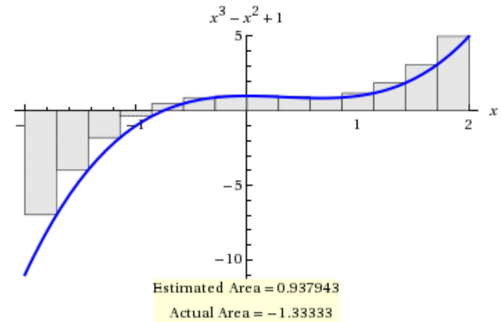
Wybrany podział oznaczam przez $\pi = \{P_k\}_{k\in 1,..,s}$
Podział normalny:

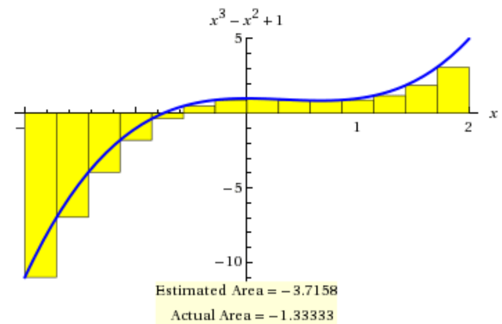
- liczbę $diam(\pi) := \max_{i=1,...s} |P_i|$ nazywamy średnicą podziału π
- warunek na średnicę - podział normalny

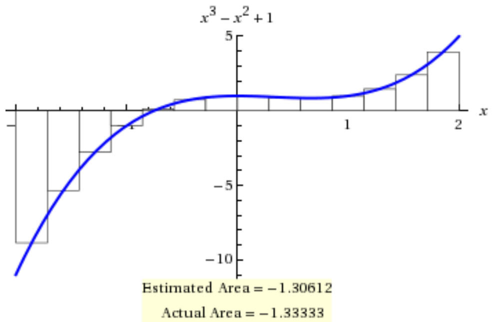
Dany jest odcinek I=[a,b] i funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ ograniczona na nim. Określamy dwa ciągi:

- $\pi \to \overline{S}(f, \pi) := \sum\limits_k (\sup f(P_k)) \cdot |P_k|$
- $\pi \to \underline{S}(f, \pi) := \sum\limits_k (\inf f(P_k)) \cdot |P_k|$

Otrzymane sumy to suma górna i suma dolna odpowiadające funkcji f i podziałowi π.







Określimy dwie całki:

- całka górna $\mathrm{Int}^{\mathrm{up}}(f) = \int\limits_{[a,b]} f := \inf\limits_{\pi\in\Pi} \overline{S}(f,\pi)$
- całka dolna $\mathrm{Int}_{\mathrm{low}}(f) = \int\limits_{[a,b]} f := \sup\limits_{\pi\in\Pi} \underline{S}(f,\pi)$

Definicja. Funkcję $f(x)$ ograniczoną na [a,b] nazywa się całkowalną wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathrm{Int}^{\mathrm{up}}(f) = \mathrm{Int}_{\mathrm{low}}(f)$$

Twierdzenie **2.12.10.** *Ciąg $\overline{S}(f,\pi)$ jest nierosnący, natomiast Ciąg $\underline{S}(f,\pi)$ jest niemalejący.*

Wniosek. $\lim\limits_{\pi\in\Pi} \overline{S}(f,\pi) = \overline{\int\limits_{[a,b]}} f$ oraz $\lim\limits_{\pi\in\Pi} \underline{S}(f,\pi) = \underline{\int\limits_{[a,b]}} f$.

12.

Twierdzenie **2.12.11.** *Funkcja f ciągła na [a, b] jest całkowalna.*

Twierdzenie **2.12.12.** *Każda funkcja ciągła ma funkcję pierwotną.*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)dx$$

Fakt. Funkcja pierwotna nie zawsze istnieje.

Własności całki

13.

Twierdzenie **2.12.13.** *Jeśli $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami całkowalnymi $a < b \in \mathbb{R}$, to funkcje $kf, f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (o ile $g(x) \neq 0$ dla $x \in [a,b]$) są całkowalne oraz:*

- **liniowość całki:**
  - $\int\limits_a^b \left[f \pm g\right] = \int\limits_a^b f \pm \int\limits_a^b g$
  - $\int\limits_a^b kf = k\int\limits_a^b f$
- **dodatniość całki:** $f \geq 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f \geq 0$
- $\left|\int\limits_a^b f\right| \leq \int\limits_a^b \left|f\right|$

Stwierdzenie. Niech $C([a,b])$ oznacza zbiór funkcji ciągłych na [a,b]. Wtedy funkcjonał $C([a,b]) \ni f \to \int\limits_a^b f \in \mathbb{R}$ jest dodatni i liniowy.

Oznaczenie $\int\limits_a^b f := \int\limits_{[a,b]}$ gdy $b > a$ oraz $\int\limits_a^b f := -\int\limits_{[b,a]}$ gdy $b < a$.

Twierdzenie **2.12.14.** *Niech $a < b < c$ oraz funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $[b,c]$. Wtedy f jest całkowalna na $[a,c]$ oraz*

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$$

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie **2.12.15.** *Jeśli $f \in C([a,b])$, to istnieje taki punkt $c \in [a,b]$, że*

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

Inny stosowany zapis dla punktu $c = a + \theta(b-a)$

$$\exists\, \theta \in \mathbb{R},\ 0 \le \theta \le 1 : f(a+\theta(b-a)) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

TWIERDZENIE **2.12.16.** *Jeśli $f \in C([a,b])$ oraz*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

to $F(x)$ jest różniczkowalna na (a,b) oraz $F'(x) = f(x)$ dla $x \in [a,b]$.

Dowód. $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\int_a^{x_0+h} f(x)dx - \int_a^{x_0} f(x)dx}{h} =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\cdot f(x_0+h\theta)}{h} = f(x_0)$ □

TWIERDZENIE **2.12.17** (Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.)**.** *F jest funkcją pierwotną danej funkcji f, czyli $F'(x) = f(x)$. Wtedy:*

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) - F(a)$$

Uwaga: często zapisujemy skrótowo: $F(x)\Big|_a^b \;=\; F(b) - F(a)$.

Dowód:

1. jeśli oznaczymy funkcję pierwotną jako $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, to

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) + const$$

2. stałą C obliczymy z warunku $\int_a^a f(t)dt = 0 = F(a) + C$

3. zatem

$$\int_a^b f(x)dx \;=\; F(b) + C = F(b) - F(a)$$

Przez części Jeśli f, g to funkcje różniczkowalne na (a, b) i ciągłe na [a, b], wtedy $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [fg]^b{}_a - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Przez podstawienie. Niech $[a,b] \ni t \to \phi(t) \in [\phi(a), \phi(b)]$, ciągła $\phi' \neq 0$ oraz $f \in C[\phi(a), \phi(b)]$ wtedy

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\,dt$$

*

2.12.3 Zastosowania

Pole obszaru ograniczonego krzywą

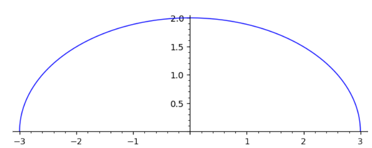
Dana jest krzywa na płaszczyznie w sposób parametryczny, czyli dla $t_1 < t < t_2$, czyli $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$ oraz

$$x = x(t) \text{ oraz } y = y(t)$$

Dla funkcji $y = f(x)$ pole obszaru pod wykresem funkcji

$$A = \int_a^b f(x)\;dx = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\;dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\;dt$$

PRZYKŁAD. Dla półelipsy $x(t) = 3\cos t$ oraz $y(t) = 2\sin t$ otrzymamy $x'(t) = -3\sin t$.



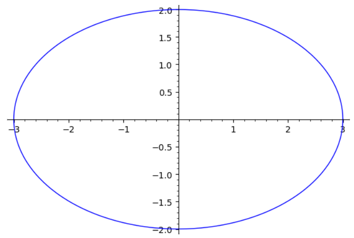
Obliczenie pola pod krzywą dla obiegu odwrotnie do wskazówek zegara

$$A = \int_\pi^0 2\sin t(-3\sin t)\;dt = -6\int_\pi^0 \sin^2 t\;dt = 3\pi$$

Zajmiemy się teraz przypadkiem, w którym krzywa zamknięta ogranicza pewien obszar. Wtedy pole tego obszaru dla obiegu odwrotnego do wskazówek zegara:

$$A = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\ dt = \int_{t_1}^{t_2} x(t)y'(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt$$

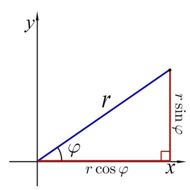
Przykład. Dla elipsy $x(t) = 3\cos t$ oraz $y(t) = 2\sin t$ otrzymamy $x'(t) = -3\sin t$ oraz $y'(t) = 2\cos t$



Obliczenie pola pod krzywą dla obiegu odwrotnie do wskazówek zegara

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} ((3\cos t)(2\cos t) + (2\sin t)(3\sin t))\ dt = 6\pi$$

Współrzędne biegunowe



Współrzędne punktu na płaszczyznie, który jest różny od początku układu współrzędnych, można określić za pomocą

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$

gdzie $r > 0$ odległość od początku układu oraz $\phi \in [0, 2\pi)$ kąt z osią OX.

Rozważymy obszar dla $\alpha < \phi < \beta$ ograniczony przez krzywą $r(\phi)$. Pole obszaru wynosi wtedy

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} ((r\sin\phi)(r\sin\phi) + (r\cos\phi)(r\cos\phi))\, d\phi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\ d\phi$$

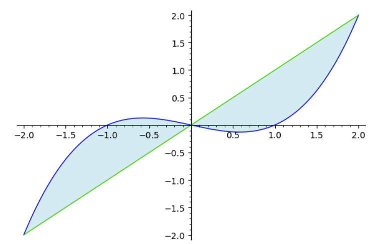
Przykład. Pole koła o promieniu R.

- r=R oraz $\phi \in [0, 2\pi)$
- $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} R^2\ d\phi = \frac{1}{2}R^2\phi\Big|_0^{2\pi} = \pi R^2$

2.12.4 Przykłady

Pole obszaru pomiędzy wykresami

Wyznaczymy pole obszaru ograniczonego wykresami $y = x$ oraz wielomianem stopnia trzeciego.



Obliczenia:

- pole pod $y = x$ w granicach od 0 do 2 to $\int_0^2 x dx = 2^2/2$
- pole pod wielomianem $W(x) = x(x-1)(x+1)/3$ w tych samych granicach to 2/3
- pole różnicy to 4/2-2/3=4/3

- całe zakreślone pole to 8/3
- w skrócie

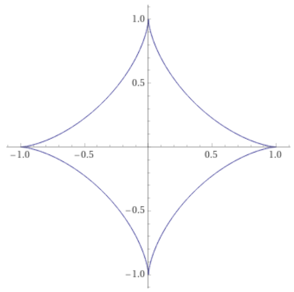
$$8/3 = 2\int\limits_0^2 [x - x(x-1)(x+1)]\ dx = 2(-\frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^2)\Big|_0^2$$

- uwaga na $\int\limits_{-2}^{2} [x - x(x-1)(x+1)]\ dx = 0$ bo tutaj "pole" ma znak

Pole opisane astroidą

Dla obszaru ograniczonego przez krzywą na płaszczyznie

$$x^{3/2} + y^{3/2} = 1$$



Rozpiszemy równanie w postaci parametrycznej jako układ dla $t \in [0, 2\pi)$:

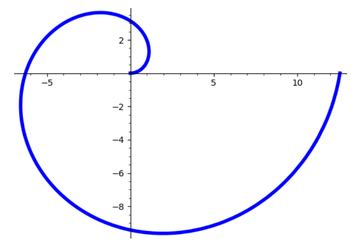
$$\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$$

Wtedy $x'(t) = -3\cos^2 t \sin t$ oraz $y'(t) = 3\sin^2 t \cos t$. Wyznaczymy pole obszaru za pomocą całki

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt = \frac{3}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2(2t)\ dt = \frac{3}{8}\pi$$

Obrót spirali

Dla spirali Archimedesa obliczymy jej długość oraz pole, które zakreśla w pierwszym obrocie.



We współrzędnych biegunowych określimy równanie spirali $r = a\phi$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ - na wykresie $a = 2$. Przyjmiemy zatem kąt jako zmienną niezależną i obliczymy długość wektora stycznego $[\dot{x}, \dot{y}] = a[\cos\phi - \phi\sin\phi, \sin\phi - \phi\cos\phi]$ jako

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |a|\sqrt{1 + \phi^2}$$

Wtedy długość tej linii zapiszemy jako

$$|a|\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\phi^2}\ d\phi = |a|(\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(2\pi))$$

Pole obliczymy jako

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} a^2\phi^2\ d\phi = \frac{1}{6}a^2\phi^3\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

2.13 Całki niewłaściwe

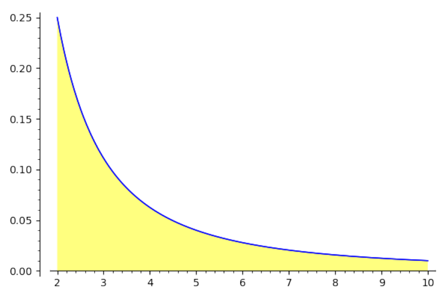
2.13.1 Całki niewłaściwe I rodzaju

Definicja (Całka na półprostej). Dana jest funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[a,\infty]$. Całkę $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ określamy w następujący sposób:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Przykład. Całka $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ wynosi

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx := \lim_{b\to\infty}\int\limits_2^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$



Uwaga **2.13.1.** Dla prawej strony, która określa wartość całki:

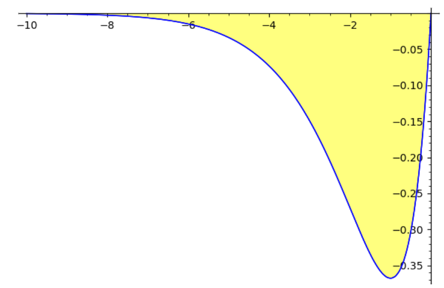
- całka jest zbieżna, jeśli granica jest właściwa,
- całka może być rozbieżna do $\pm\infty$
- całka może być rozbieżna

Definicja (Całka na półprostej). Dana jest funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[-\infty,b]$. Całkę $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx$ określamy w następujący sposób:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Przykład. Całka $\int\limits_{-\infty}^0 xe^x\,dx$ wynosi

$$\int\limits_{-\infty}^0 xe^x\,dx := \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 xe^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}[(x-1)e^x]_a^0 = \lim_{a\to-\infty}(-1-(a-1)e^a) = -1.$$



Uwaga **2.13.2.** Dalsze uwagi:

- jeśli całka niewłaściwa $\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$ istnieje to mówimy, że całka jest bezwzględnie zbieżna (oczywiście zbieżność bezwzględna całki implikuje zbieżność całki w sensie nierówności dla każdej całki oznaczonej
$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx;$$
- jeśli funkcja $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna, to całki niewłaściwe z funkcji $f|_{(a,b]}$, $f_{[a,b)}$ oraz $f_{(a,b)}$ są równe $\int_a^b f$.

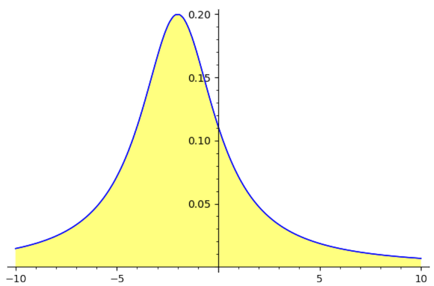
DEFINICJA (Całka na prostej). Niech funkcja $f(x)$ będzie określona na całym przedziale $[-\infty, \infty]$. Całkę niewłaściwą funkcji $f(x)$ na tym przedziale określamy w sposób:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \ := \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx.$$

PRZYKŁAD. Całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi$ jest obliczana jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{5}\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}(x+2)\right)\right]_a^0 +$$

$$+ \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{5}\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{5}\sqrt{5}(x+2)\right)\right]_0^b = \frac{1}{5}\sqrt{5}\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right].$$



2.13.2 Kryteria zbieżności

TWIERDZENIE **2.13.1** (Kryterium porównawcze). *Załóżmy, że funkcje $f(x), g(x)$ określone na półprostej $[a, \infty]$ spełniają nierówność:*

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

Wtedy:

- *jeżeli zbieżna jest całka $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$, to zbieżna jest $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$,*

- *jeżeli całka $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ też jest rozbieżna.*

TWIERDZENIE **2.13.2** (Kryterium ilorazowe). *Załóżmy, że funkcje $f(x), g(x)$ określone na półprostej $[a, \infty]$ spełniają warunek:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = g$$

gdzie $g > 0$ to granica właściwa a funkcje są dodatnie (ujemne). Wtedy całki $\int\limits_a^{\infty} g(x)\,dx$ oraz $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\pm\infty$.

UWAGA **2.13.3.** Obydwa twierdzenia można sformułować dla przypadku całki na przedziale $[-\infty, b]$.

TWIERDZENIE **2.13.3** (Zbieżność bezwzględna). *Jeżeli całka $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx$ jest zbieżna bezwzględnie $\int\limits_a^{\infty} |f(x)|\,dx$, to jest zbieżna oraz zachodzi nierówność*

$$\left|\int_a^{\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_a^{\infty} |f(x)|\,dx$$

UWAGA **2.13.4.** Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe. Kontrprzykładem jest całka $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$. Ponieważ funkcja jest stałego znaku, to całka $\int\limits_a^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|$ dla $a \in \mathbb{R}$ może być liczona jako

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b |\frac{\sin x}{x}|.$$

Ponieważ $\frac{|\sin x|}{x} > \frac{|\sin x|}{(k+1)\pi}$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, to

$$\int_{k\pi}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{n=k}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \ge \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,dx$$

$= \sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{2}{\pi(n+1)} = +\infty$. Wniosek: całka $\int\limits_a^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|$ jest rozbieżna, wobec tego całka $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x}$ też jest rozbieżna ale $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}$ istnieje!

2.13.3 Przykłady całek

Całka na półprostej

Zbiór funkcji postaci $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$.

1. Przypadek $\alpha \neq 1$ i obliczamy całkę

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx == \frac{1}{\alpha-1}a^{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty} b^{1-\alpha}.$$

   Wtedy ciąg całek jest zbieżny jeśli $\alpha > 1$.

2. Przypadek $\alpha = 1$. Wtedy całka jest rozbieżna do nieskończoności

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log b - \log a \to \infty$$

   gdy $b \to \infty$.

Kryterium całkowe zbieżności szeregu

TWIERDZENIE **2.13.4.** *Dana jest funkcja dodatnia $f(x) \geq 0$ określona na półprostej $[a, \infty)$ dla której $f(x) \searrow 0$ przy $x \to +\infty$. Wtedy*

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n) < \infty \iff \int_k^\infty f(x)dx < \infty$$

PRZYKŁAD. dla $p > 1$ szereg jest zbieżny

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \int_1^\infty x^{-p}dx = \frac{1}{(-p+1)}x^{(-p+1)}\Big|_{x=1}^{x\to\infty}$$

Na przykład dla p=2

$$= \frac{1}{(-1)}x^{(-1)}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} = \frac{-1}{x}\Big|_{x=1}^{x\to\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Dowód. Dla twierdzenia o kryterium zbieżności szeregu:

1. użyjemy dwóch funkcji schodkowych $u(x) = f(n)$ dla $[n, n+1)$ oraz $w(x) = f(n)$ dla $[n-1, n)$
2. zachodzi $0 \leq u(x) \leq f(x) \leq w(x)$
3. $\int\limits_k^p u(x)\,dx = \sum\limits_{n=k}^{p} f(n)$
4. $\int\limits_k^p w(x)\,dx = \sum\limits_{n=k+1}^{p} f(n)$
5. zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n)$ jest równoważna całkowalności funkcji $u(x)$ oraz $w(x)$ ale z nieróności 2. wynika że równoważne całkowalności $f(x)$

□

2.13.4 Całki niewłaściwe II rodzaju

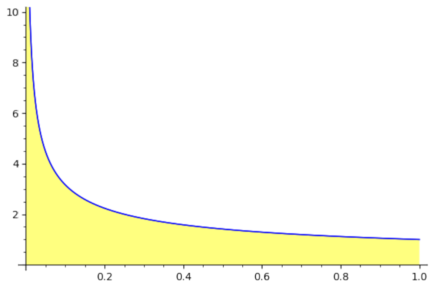
DEFINICJA (Całka z funkcji nieograniczonej)**.** Niech funkcja $f(x)$ określona na przedziale $(a, b]$ będzie nieograniczona w prawym sąsiedztwie punktu a. Całkę $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ określamy na przedziale $(a, b]$ w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx,$$

dla $\varepsilon > 0$.

PRZYKŁAD. Całka $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$ jest obliczona jako

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0}(2 - 2\sqrt{\varepsilon}).$$



Definicja (Całka z funkcji nieograniczonej). Niech funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[a, b)$ będzie nieograniczona w lewym sąsiedztwie punktu b. Całkę $\int_a^b f(x)\,dx$ określamy na przedziale $[a, b)$ w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

dla $\varepsilon > 0$.

Definicja (Całka z funkcji nieograniczonej). Niech funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[a, b) \cup (b, c]$ będzie nieograniczona w prawym i lewym sąsiedztwie punktu b. Całkę $\int_a^c f(x)\,dx$ określamy na przedziale $[a, b) \cup (b, c]$ w następujący sposób:

$$\int_a^c f(x)\,dx := \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Przykład. Całka $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 0$ jest obliczona jako

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\left[\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{0-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\left[\frac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}\right]_{0+\varepsilon_2}^{1} = 0.$$

Definicja (Wartość główna całki). Niech funkcja $f(x)$ określona na przedziale $[a, b]\setminus c$ będzie nieograniczona w prawym i lewym sąsiedztwie punktu c. Wartość główną całki $\int_a^b f(x)\,dx$ określamy na przedziale $[a, b]$ w następujący sposób:

$$V.p. \int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

Przykład. Całka $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ ma wartość główną równą zero ponieważ

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left([\ln|x|]_{-1}^{0-\varepsilon} + [\ln|x|]_{0+\varepsilon}^1\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon) = 0.$$

2.13.5 Kryteria zbieżności II

Twierdzenie **2.13.5** (Kryterium porównawcze). *Załóżmy, że funkcje $f(x), g(x)$ określone na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone w prawym sąsiedztwie punktu a spełniają nierówność dla każdego $x \in (a, b]$:*

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

Wtedy:

- *jeżeli zbieżna jest całka $\int_a^b g(x)\,dx$, to zbieżna jest $\int_a^b f(x)\,dx$,*
- *jeżeli całka $\int_a^b f(x)\,dx$ jest rozbieżna, to $\int_a^b g(x)\,dx$ też jest rozbieżna.*

Twierdzenie **2.13.6** (Kryterium ilorazowe). *Załóżmy, że funkcje $f(x), g(x)$ określone na przedziale $(a, b]$ i nieograniczone w prawym sąsiedztwie punktu a spełniają warunek:*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = g$$

gdzie $g > 0$ to granica właściwa a funkcje są dodatnie (ujemne). Wtedy całki $\int_a^b f(x)\,dx$ oraz $\int_a^b g(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo rozbieżne do $\pm\infty$.

Uwaga **2.13.5.** Obydwa twierdzenia można sformułować dla przypadku całki na przedziale $[-\infty, b]$.

2.13.6 Przykłady całek

Całka na odcinku (0,1]

Dla zbioru funkcji $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

1. Dla $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_a^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right)\Bigg|_a^1$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \tfrac{1}{1-\alpha}(1-a^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{dla} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{dla} \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

2. Dla $\alpha = 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \int\limits_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \ln x \Big|_a^1 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} (0 - \ln a) = +\infty.$$

2.14 Przestrzenie metryczne

2.14.1 Odległość

Definicja (Odległość). Metryka w zbiorze A to funkcja

$$d : A \times A \to \mathbb{R},$$

która dla dowolnych elementów $a, b, c \in A$ spełnia trzy warunki:

1. $d(a,b) = 0 \iff a = b$,
2. symetria: $d(a,b) = d(b,a)$,
3. nierówność trójkąta: $d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$,

Przestrzeń metryczna to zbiór z metryką.

Definicja (Przestrzeń). Przestrzenią $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ nazywamy zbiór uporządkowanych trójek (x, y, z). Elementy zbioru nazywamy punktami, natomiast $(x_1, y_1, z_1) = P_1$ to współrzędne punktu P_1.

Definicja (Metryka euklidesowa). Metrykę określoną w zbiorze $\mathbb{R}^3$ wzorem:

$$d(P_1, P_2) := \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

nazywamy odległością euklidesową dwóch punktów $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$.

Przykład (Metryka taksówkowa). Metryka określona wzorem dla $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^3$

$$d_t(P_1, P_2) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|.$$

Przykład. Dla punktów $A = (1, -2\sqrt{3}, \sqrt{5})$ oraz $B = (-3, \sqrt{3}, -\sqrt{5})$

$$d(A,B) = \sqrt{4^2 + 9\cdot 3 + 4\cdot 5} = \sqrt{63}$$

natomiast

$$d_t(A,B) = 4 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$

.

Przykład (Metryka kolejowa). Odległość między dwoma punktami P_1 oraz P_2 zadana jest z wykorzystaniem węzła O:

- jeśli punkty P_1 i P_2 znajdują się na wspólnej półprostej wychodzącej z punktu O, to ich odległość jest zwykłą odległością euklidesową, czyli

$$d(P_1, P_2) = d_e(P_1, P_2),$$

- w przeciwnym przypadku ich odległość jest równa sumie odległości od P_1 do O oraz od O do P_2, czyli

$$d(P_1, P_2) = d_e(P_1, O) + d_e(O, P_2).$$

Definicja (Norma euklidesowa). W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ określamy normę euklidesową elementu $[v_1, v_2, v_3] = v \in \mathbb{R}^3$ jako:

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Przykład (Norma taksówkowa). Dla elementu $v \in \mathbb{R}^3$ określamy metrykę wzorem:

$$\|v\| := |v_1| + |v_2| + |v_3|$$

Twierdzenie **2.14.1** (Metryka zadana przez normę). *Dana jest wektorowa przestrzeń unormowana $\mathbb{R}^3$ oraz dowolne wektory $\vec{p}, \vec{q} \in \mathbb{R}^3$. Funkcja określona wzorem*

$$d(p, q) := \|\vec{p} - \vec{q}\|$$

jest metryką dla punktów $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Uwaga **2.14.1** (Euklidesowa odległość punktów). Dla dwóch punktów $p = (p_1, p_2, p_3)$ i $q = (q_1, q_2, q_3)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ odległość euklidesową wyznaczamy wzorem

$$\|p - q\| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Definicja (Otoczenie i sąsiedztwo punktu). Otoczeniem ustalonego punktu $p_0 \in \mathbb{R}^3$ o promieniu $r > 0$ nazywamy zbiór

$$d(p_0, p) < r.$$

Sąsiedztwem punktu $p_0 \in \mathbb{R}^3$ jest zbiór $O(p_0, r) \setminus p_0$.

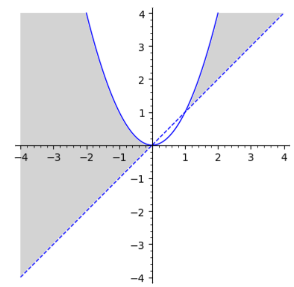
Definicja (Zbiór ograniczony). Zbiór $A \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy ograniczonym, jeśli jest on zawarty w otoczeniu pewnego punktu. W przeciwnym razie mówimy, że zbiór jest nieograniczony. Oznacza to, że istnieją p_0 oraz $r > 0$, że zachodzi warunek:

$$A \subset O(p_0, r).$$

Przykład. Dla zbioru $A \subset \mathbb{R}^2$ określonego przez nierówności dla (x, y) związane z wykresami funkcji

$$y \leq x^2 \text{ oraz } y > x$$

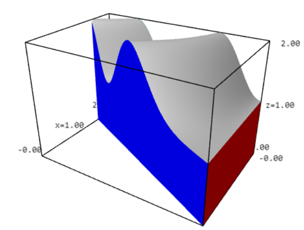
określenie: czy zbiór jest ograniczony, może polegać na wskazaniu, że pewna półprosta należy tego zbioru.



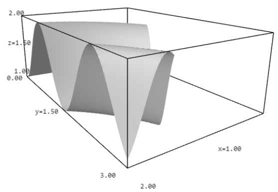
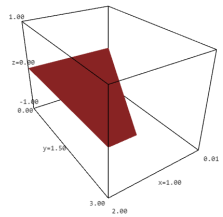
Przykład. Niech bryła $B \subset \mathbb{R}^3$ będzie określona dla funkcji $f(x, y) = 1 + \sin^2(xy)$ w sposób

$$0 \leq z \leq f(x, y)$$

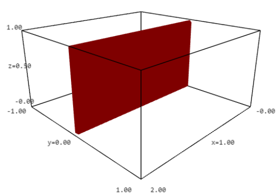
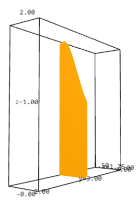
oraz ograniczona przez płaszczyzny $x = 2$, $y - 2x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$.



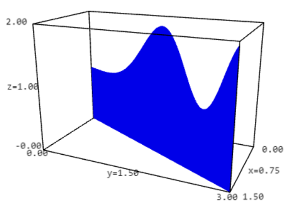
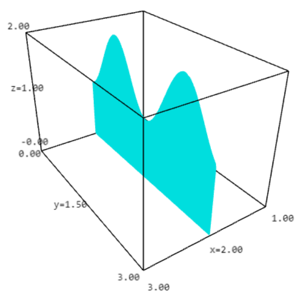
Bryła ma sześć różnych perspektyw:
góra i dół:

przód i tył:

lewo i prawo:

Definicja (Wnętrze zbioru). Punkt $a \in A$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru A, jeśli istnieje otoczenie punktu zawarte w tym zbiorze, czyli istnieje $r > 0$, że zachodzi warunek:

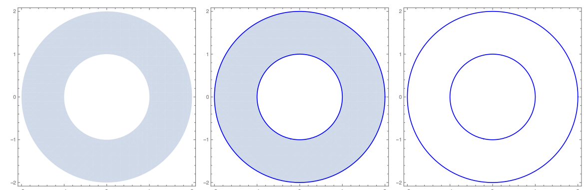
$$O(a, r) \subset A.$$

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A nazywamy wnętrzem tego zbioru i oznaczamy Int A.

Definicja (Zbiór otwarty). Zbiór, którego każdy punkt jest jego punktem wewnętrznym nazywamy zbiorem otwartym.

Definicja (Brzeg zbioru). Punkt a nazywamy punktem brzegowym zbioru A, jeśli w każdym otoczeniu tego punktu istnieje punkt należący do A i punkt nie należący do zbioru A. Brzegiem ∂A zbioru nazywamy zbiór jego wszystkich punktów brzegowych.

Przykład (Zbiory na płaszczyźnie). Wnętrze, domknięcie oraz brzeg zbioru w $\mathbb{R}^2$:



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

- $\operatorname{int} A = \{(x, y) : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
- $\overline{A} = \{(x, y) : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $\partial A = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) : \ x^2 + y^2 = 4\}$

Definicja (Zbiór domknięty). Jeżeli zbiór zawiera swój brzeg, to nazywamy go zbiorem domkniętym.

Definicja (Obszar przestrzeni). Otwarty podzbiór $A \subset \mathbb{R}^3$ jest obszarem, gdy każde dwa punkty można połączyć linią łamaną.

Definicja (Punkt skupienia zbioru). Jeżeli w każdym sąsiedztwie punktu $P \in A$ istnieją punkty zbioru A, to P nazywamy punktem skupienia.

2.14.2 Granica ciągu i odwzorowania

Definicja (Granica ciągu punktów). W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ciąg punktów p_n jest zbieżny do punktu p_0 jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \|p_n - p_0\| = 0.$$

Zapiszemy $\lim_{n\to\infty} p_n = p_0$.

Dane jest odwzorowanie $T : X \to Y$ określone na zbiorach $X,\ Y \subset \mathbb{R}^3$.

Definicja (Granica odwzorowania w punkcie). Odwzorowanie $T(x)$ ma granicę g w punkcie skupienia x_0 zbioru X, jeżeli dla każdego $\varepsilon < 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdego x zachodzi implikacja:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|T(x) - g\| < \varepsilon$$

Zapiszemy $\lim_{x\to x_0} T(x) = g$.

2.14.3 Ciągłość odwzorowania

Definicja (Odwzorowanie ciągłe). Odwzorowanie $T(x)$ jest ciągłe w punkcie x_0, jeżeli dla każdego $\varepsilon < 0$ istnieje $\delta > 0$, że dla każdego x zachodzi implikacja:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies \|T(x) - T(x_0)\| < \varepsilon$$

Mówimy, że odwzorowanie $T(x)$ jest ciągłe w zbiorze $X \subset \mathbb{R}^3$, jeśli jest ciągłe w każdym punkcie tego zbioru.

Twierdzenie **2.14.2.** *Następujące warunki są równoważne:*

- *Odwzorowanie $T(x)$ jest ciągłe w punkcie x_0,*
- *zachodzi równość $\lim_{x\to x_0} T(x) = T(x_0)$.*

Twierdzenie **2.14.3** (Ciągłość normy). *Norma jest funkcją ciągłą, to znaczy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \implies \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Dowód. Warunek $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oznacza, że

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Ustalmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z powyższej równości wynika, że

$$\exists k\ \forall n \geq k\ :\ \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

Zatem dla $n \geq k$ mamy

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leq \|x_n - x\| \leq \varepsilon,$$

czyli pokazaliśmy, że $\|x_n\| \to \|x\|$.

□

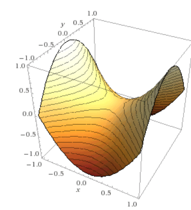
Twierdzenie **2.14.4** (O ciągłości złożenia). *Złożenie $S \circ T : X \to Z$ odwzorowań ciągłych $T : X \to Y$ oraz $S : Y \to Z$ też jest odwzorowaniem ciągłym.*

2.14.4 Funkcje wielu zmiennych

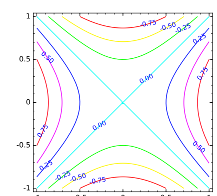
Poziomice funkcji

Do wykresów $z = f(x, y)$ często dodaje się analizę wysokości, czyli jaki zbiór punktów (x, y) ma ustaloną wysokość $h = f(x, y)$.

Przykład. Wykres $z = x^2 - y^2$ + linie tej samej wysokości



Przykład. Poziomice funkcji $z = x^2 - y^2$ na płaszczyźnie. Dla parametru $c \in \mathbb{R}$ opisujemy zbiór $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c\}$



Twierdzenie **2.14.5.** *(o przyjmowaniu kresów). Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem zwartym w $\mathbf{R}^n$, a funkcja skalarna $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ będzie ciągła. Istnieją punkty w dziedzinie $\mathcal{D}$, dla których $f(x) = \sup_{\mathcal{D}} f$ oraz $f(x) = \inf_{\mathcal{D}} f$.*

Definicja. (jednostajna ciągłość). Funkcja wielu zmiennych $f : \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ jest jednostajnie ciągła w dziedzinie wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeżeli $\|x - y\| < \delta$, to $\|f(x) - f(y)\| < \epsilon$ dla każdej pary punktów $x, y \in \mathcal{D}$.

Twierdzenie **2.14.6.** *(o jednostajnej ciągłości). Jeżeli $\mathcal{D}$ jest zbiorem zwartym w $\mathbf{R}^n$, a funkcja skalarna $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ jest ciągła, to f jest jednostajnie ciągła w zbiorze $\mathcal{D}$.*

Twierdzenie **2.14.7.** *(obraz zbioru zwartego). Jeżeli $\mathcal{D}$ jest zbiorem zwartym w $\mathbf{R}^n$, a funkcja wektorowa $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^m$ jest ciągła, to obraz zbioru $f(\mathcal{D})$ jest zwarty w $\mathbf{R}^m$.*

Twierdzenie **2.14.8.** *(własność Darboux). Niech $\mathcal{D}$ będzie zbiorem otwartym i spójnym w $\mathbf{R}^n$, a funkcja skalarna $f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ będzie ciągła. Jeżeli $f(x) < c < f(y)$ dla $x, y \in \mathcal{D}$, to dla pewnego $c \in \mathbf{R}$ istnieje punkt $p \in \mathcal{D}$, taki że $f(p) = c$.*

2.15 Pochodne cząstkowe

2.15.1 Funkcje skalarne

Ciągi i zbieżność

Definicja (Ciąg punktów). Ciąg punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, to przyporządkowanie

$$p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$$

Przykład. Dla $n \in \mathbb{N}$ określimy dwa ciągi wzorami po współrzędnych:

$$p_n = (x_n, y_n) = \left(n, \frac{1}{n}\right)$$

oraz

$$p'_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{n}{n+1}\right)$$

Definicja (Zbieżność ciągu). Ciąg punktów na płaszczyźnie $p_n = (x_n, y_n)$ jest zbieżny do punktu $p_0 \in \mathbb{R}^2$ jeżeli

$$x_n \to x_0 \ \wedge \ y_n \to y_0$$

Przykład. Dla $n \in \mathbb{N}$ granicą ciągu punktów:

$$p_n = (x_n, y_n) = \left(\log_n 2, \frac{1}{n}\right)$$

jest punkt $p_0 = (0, 0)$.

Definicja (Granica właściwa funkcji). Dla funkcji $f(x)$ określonej w pewnym otoczeniu punktu $p_0 = (x_0, y_0)$ określimy granicę właściwą g jeżeli dla każdego ciągu punktów $p_n \to p_0$ ciąg wartości funkcji $f(p_n) \to g$. Zapiszemy

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = g.$$

Przykład. Granica $\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x+y}{xy} = -\frac{1}{2}$.

Przykład. Granica

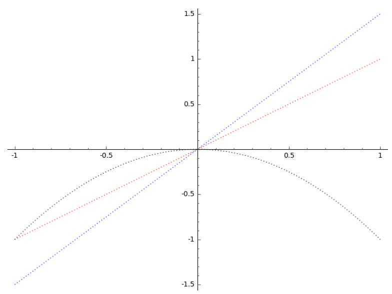
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)(\sqrt{1 + x^2 + y^2} + 1)} = \frac{1}{2}.$$

UWAGA **2.15.1.** Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ istnieją granice $\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$ oraz $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$ natomiast nie istnieje granica

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Z istnienia granic iterowanych nie wynika ciągłość funkcji w punkcie. Rozważymy trzy ciągi punktów zmierzające do punktu (0,0):

$$p_n=\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right), p_n'=\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right), p_n''=\left(\frac{1}{n},\frac{-1}{n^2}\right)$$



Funkcje ciągłe

Funkcja $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $p_0\in\mathbb{R}^3$, jeżeli dla dowolnego otoczenia $V: f(p_0)-\varepsilon<f(p_0)<f(p_0)+\varepsilon$ w $\mathbb{R}$ istnieje takie otoczenie U punktu p_0 w $\mathbb{R}^3$, że

$$f(U)\subset V.$$

DEFINICJA. Dla funkcji określonej w pewnym otoczeniu punktu (x_0,y_0) jest ciągła w punkcie

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

PRZYKŁAD. Podana funkcja nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} \text{ dla } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Natomiast można stwierdzić, że jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez $(0,0)$, czyli $y=ax$.

2.15.2 Pochodne cząstkowe

Określenia oraz interpretacje

DEFINICJA (Pochodne cząstkowe). Oznaczymy teraz przez $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ punkt w $\mathbb{R}^3$ oraz ustalimy zmienne za wyjątkiem jednej. Pochodne powstałych w ten sposób trzech funkcji jednej zmiennej oznaczamy przez

$$\partial_i f(p_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_i(x_i+h)-f_i(x_i)}{h}.$$

Zapiszemy $\partial_x f(p_0)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$ lub $\partial_y f(p_0)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$, $\partial_z f(p_0)=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)$.

PRZYKŁAD. Pochodne cząstkowe funkcji $f(x,y)=\frac{x}{y}$ w punkcie $(1,-1)$ wynoszą

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(1,-1)=\frac{1}{y}(1,-1)=-1,$$

oraz

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}(1,-1)=-\frac{x}{y^2}(1,-1)=-1.$$

PRZYKŁAD. Dla funkcji $f(x,y)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$, gdzie $(x,y,z)\neq(0,0,0)$

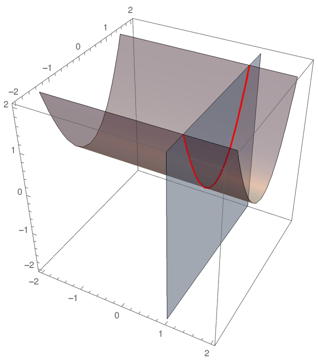
$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{2\,x^2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{yz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2\,xy^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{xz}{x^2+y^2+z^2},$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{2\,xyz^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}+\frac{xy}{x^2+y^2+z^2}.$$

PRZYKŁAD (Interpretacja geometryczna). Dla pochodnych cząstkowych $z=f(x,y)$, gdzie $f(x,y)=y^2$ oraz płaszczyzny $x=1$ mamy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$



DEFINICJA (Pochodne cząstkowe drugiego rzędu). Niech funkcja ma pochodne cząstkowe f'_x oraz f'_y wokół punktu (x_0, y_0). Określimy cztery pochodne cząstkowe drugiego rzędu:

$$f''_{xx}(x_0,y_0) := (f'_x)'_x(x_0,y_0), \; f''_{yy}(x_0,y_0) := (f'_y)'_y(x_0,y_0),$$

oraz

$$f''_{xy}(x_0,y_0) := (f'_x)'_y(x_0,y_0), \; f''_{yx}(x_0,y_0) := (f'_y)'_x(x_0,y_0).$$

PRZYKŁAD. Dla funkcji $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{xy}$, gdzie $xy \neq 0$ otrzymamy dwie pierwsze pochodne $f'_x = \frac{2}{y} - \frac{x^2-y^2}{x^2y}$ oraz $f'_y = -\frac{2}{x} - \frac{x^2-y^2}{xy^2}$ oraz cztery drugie:

$$f''_{xx} = -\frac{2}{xy} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{x^3y}, \; f''_{yy} = \frac{2}{xy} + \frac{2\left(x^2-y^2\right)}{xy^3},$$

oraz

$$f''_{xy} = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}, \; f''_{yx} = \frac{2}{x^2} - \frac{2}{y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}.$$

Funkcje klasy C^1 i C^2

Pochodne cząstkowe można obliczyć znając wartości funkcji na n liniach prostych, które przechodzą przez x i są równoległe do odpowiednich osi układu współrzędnych. Jest to powód dla którego z istnienia pochodnych cząstkowych $\partial_i f(x)$ nie otrzymujemy pełnej informacji o funkcji wielu zmiennych $f(x)$. Wtedy najczęściej ograniczamy klasę funkcji, na przykład rozważając klasę C^1 funkcji ciągłych i mających ciągłe pierwsze pochodne cząstkowe - określonych na podzbiorach otwartych.

Przyrost funkcji. Zaczniemy od przypomnienia (bez dowodu) twierdzenia o wartości średniej dla funkcji jednej zmiennej $\exists c: \; f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Zapiszemy je w postaci, która będzie pomocna w dalszych obliczeniach. Zauważmy przy okazji, że dla liczby $x_0 \in [a,b]$ przyrost argumentu x_0+h może wyjść poza przedział $[a,b]$ i w zasadzie powinniśmy zastrzeć na przykład, że $x_0+h < b$. Liczba c, o której istnieniu mówi twierdzenia Lagrange'a, zawarta jest pomiędzy $[x_0, x_0+h]$ i może być zapisana jako

$$c = x_0 + \theta h, \quad \text{gdzie} \quad 0 < \theta < 1$$

Zachodzi wzór na wartość przyrostu skończonego funkcji $f(x)$ dla skończonego przyrostu argumentu $a < x_0 + h < b$.

TWIERDZENIE **2.15.1** (o wartości średniej). *Niech funkcja jednej zmiennej $f(x)$ będzie określona i ciągła na przedziale $[a,b]$. Założymy istnienie pochodnej skończonej $f'(x)$ na przedziale otwartym (a,b). Dla $x_0 \in [a,b]$ istnieje $0 < \theta < 1$, że*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0+\theta h)h$$

Zwraca się uwagę, że ta równość opisuje dokładną wartość tego przyrostu. Dowód twierdzenia o wartości średniej jest podawany na wykładach rachunku różniczkowego i całkowego funkcji jednej zmiennej. Jeżeli funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 pochodną skończoną $f'(x_0)$ to przyrost tej funkcji może być przedstawiony jako

$$f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + o(h), \quad h \to 0.$$

TWIERDZENIE **2.15.2.** *Funkcje wielu zmiennych klasy C^1 są różniczkowalne w następującym sensie*

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\partial_i f(x)\right) h_i + o(1)|h|$$

gdzie $|h| = \max(|h_1|, |h_2|, ..., |h_n|)$ oraz $o(1) \to 0$, gdy $|h| \to 0$.

Dowód. Rozważymy przyrost $f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)$ dla funkcji dwóch zmiennych. Wtedy odpowiednio dodając i odejmując otrzymujemy przyrosty cząstkowe dla pojedynczych zmiennych

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) + f(x, y+h_2) - f(x,y).$$

Analiza tego wyrażenia pozwala skorzystać z lematu o wartości średniej w następujący sposób

$$\partial_1 f(x+\theta_1 h, y+h_2)h_1 + \partial_2 f(x+h_1, y+\theta_2 h_2)h_2$$

Stosując teraz z zapisu dla przyrostu funkcji otrzymamy dla tych dwóch wyrazów

$$\partial_1 f(x+\theta_1 h, y+h_2)h_1 = \partial_1 f(x,y) + o(h_1), \quad h_1 \to 0$$

$$\partial_2 f(x+h_1, y+\theta_2 h_2)h_2 = \partial_2 f(x,y) + o(h_2), \quad h_2 \to 0$$

Zbierając te wzory dla przyrostu funkcji dwóch zmiennych

$$f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y) = \partial_1 f(x,y) + o(h_1) + \partial_2 f(x,y) + o(h_2) =$$

$$= \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y) + o(h_1) + o(h_2) =$$

$$= \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y) + o(h) = \partial_1 f(x,y) + \partial_2 f(x,y) + o(1)h, \quad h \to 0$$

gdzie h to $\max(h_1, h_2)$. Zwiększanie liczby zmiennych nie wnosi już niczego nowego do tego dowodu □

Możemy teraz określić dla funkcji klasę C^2 - kiedy funkcja $f(x)$ oraz wszystkie jej pochodne cząstkowe są funkcjami klasy C^1. Najważniejszą własnością takich funkcji jest fakt, że pochodna cząstkowa drugiego rzędu nie zależy od porządku, w którym wykonujemy dwa różniczkowania, czyli twierdzenie Schwarza.

Twierdzenie **2.15.3** (O pochodnych mieszanych)**.** *Dla funkcji $f(x)$ klasy C^2 oraz dowolnych i, j zachodzi*

$$\partial_i \partial_j f(x) = \partial_j \partial_i f(x)$$

Dowód. Wystarczy rozważyć tylko dwie zmienne. Pomocniczo użyjemy funkcji g

1. dla $g(y) := f(x+h_1, y) - f(x,y)$ otrzymujemy z twierdzenia o wartości średniej

$$g(y+h_2) - g(y) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x+h_1, y) - f(x, y+h_2) + f(x,y) =$$

$$= \partial_2 g(y+\theta_2 h_2)h_2 + o(h_2) = \partial_2 f(x+h_1, y+\theta_2 h_2)h_2 + o(h_2) - \partial_2 f(x, y+\theta_2 h_2)h_2 + o(h_2) =$$

$$= (\partial_2 f(x+h_1, y+\theta_2 h_2) - \partial_2 f(x, y+\theta_2 h_2))h_2 + o(h_2) =$$

$$= (\partial_1 \partial_2 f(x+\theta_1 h_1, y+\theta_2 h_2)h_1 + o(h_1))h_2 + o(h_2)$$

$$= \partial_1 \partial_2 f(x+\theta_1 h_1, y+\theta_2 h_2)h_1 h_2 + o(1)h_1 h_2$$

2. dla $g(x) := f(x, y+h_2) - f(x,y)$ i podobnie

$$g(x+h_1) - g(x) = f(x+h_1, y+h_2) - f(x, y+h_2) - f(x+h_1, y) + f(x,y) =$$

$$= \partial_1 g(x+\theta_1 h_1)h_1 = (\partial_1 f(x+\theta_1 h_1, y+h_2) - \partial_1 f(x+\theta_1 h_1, y))h_1 =$$

$$= \partial_2 \partial_1 f(x+\theta_1 h_1, y+\theta_2 h_2)h_1 h_2 + o(1)h_1 h_2$$

Stąd dla

$$\partial_1 \partial_2 f(x+\theta_1 h_1, y+\theta_2 h_2)h_1 h_2 + o(1)h_1 h_2 = \partial_2 \partial_1 f(x+\theta_1 h_1, y+\theta_2 h_2)h_1 h_2 + o(1)h_1 h_2$$

w granicy $h_1 h_2 \to 0$ otrzymujemy równość dla mieszanych pochodnych drugiego rzędu. □

Przykład**.** (Funkcja klasy C^0 i nie C^1) Podamy wzór dla $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ dla } x \geq 0 \\ 0 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

W punkcie $x = 0$ funkcja jest ciągła ale nie jest różniczkowalna.

Przykład**.** (Funkcja klasy C^0 i nie C^1) Podamy wzór dla $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

Funkcja jest ciągła i jest różniczkowalna w dziedzinie. Niestety pierwsza pochodna nie jest ciągła w $x = 0$, bo

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \text{ dla } x \neq 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \end{cases}$$

Przykład**.** (Funkcja klasy C^1 i nie C^2) Podamy wzór dla $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \geq 0 \\ 0 \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$

Funkcja nie posiada drugiej pochodnej $f''(0)$w punkcie $x = 0$.

Funkcje klasy C^k

Dla $r > 2$ funkcje klasy C^r można zdefiniować rekurencyjnie, czyli funkcja tej klasy ma wszystkie pochodne cząstkowe klasy C^{r-1}. Można wykonać dla takiej funkcji różniczkowanie r razy. Takie wielokrotne pochodne oznaczymy

$$\partial^\alpha f(x) = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} f(x)$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ to składowe (wielowskaźnik) oraz rząd pochodnej to liczba $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Zauważmy, że dla funkcji klasy C^r oraz $\alpha < r$ to prawa strona zawsze istnieje i jest niezależna od kolejności różniczkowania.

Przykład. (Funkcja klasy C^k i nie C^{k+1}) Podamy wzór dla $x \in \mathbb{R}$ oraz parzystego $k \geq 2$

$$f(x) = |x|^{k+1}$$

Funkcja jest ciągła oraz k razy różniczkowalna w dziedzienie. Natomiast $k+1$ pochodna w $x = 0$ nie istnieje - tak jak nie istnieja pochodna $|x|$ w tym punkcie.

Definicja. (funkcja gładka). Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ klasy C^r dla dowolnego r nazywamy funkcją klasy C^∞ lub funkcją gładką.

Formalnie rzecz biorąc $C^\infty = \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} C^r$ dla funkcji z dziedziną - nośnikiem otwartym.

2.16 Pochodna odwzorowania. Wzór Taylora

2.16.1 Pochodna funkcji skalarnej

Płaszczyzna styczna i różniczka

Uwaga **2.16.1.** Rozważymy funkcje $z = f(x, y)$, która ma ciągłe pochodne cząstkowe. W punkcie przestrzeni $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ mamy zatem dwa wektory styczne, które tworzą płaszczyznę o równaniu:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Przykład. Dla funkcji $f(x, y) = (1+x+y)^2$ otrzymamy w punkcie $(0, 0, 1)$ równanie płaszczyzny

$$z - 1 = 2x + 2y$$

Uwaga **2.16.2.** Dla powierzchni o równaniu $F(x, y, z) = 0$ płaszczyzna styczna w punkcie (x_0, y_0, z_0) ma postać:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Przykład. Dla równania sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ wektor normalny $\vec{\mathbf{n}}$ do płaszczyzny stycznej w dowolnym punkcie sfery jest równy $\vec{\mathbf{n}} = [2x_0, 2y_0, 2z_0]$. Wtedy w punkcie biegunowym (0,0,1) mamy płaszczyznę

$$[2, 2, 2] \circ [x, y, z - 1] = x + y + z - 1 = 0.$$

Definicja (Różniczka funkcji). Dla funkcji $f(x, y)$, która ma pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0) jej różniczką $df(x, y)$ nazywamy funkcję określoną wzorem

$$df(x, y) := f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Przykład. Dla funkcji $f(x, y) = xe^{x-y}$ jej różniczka wynosi

$$df(x, y) = (x_0 e^{(x_0 - y_0)} + e^{(x_0 - y_0)})dx + (-x_0 e^{(x_0 - y_0)})dy$$

W punkcie (1,0) otrzymamy

$$df(x, y) = 2edx - edy$$

Aproksymacja liniowa. Dla zadanej funkcji dwóch zmiennych $z = f(x, y)$ oraz punktu $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$ rozważymy funkcję powstałą z płaszczyzny stycznej w tym punkcie w postaci funkcji

$$L(x, y) = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

- Funkcję $L(x,y)$ nazwiemy linearyzacją funkcji $f(x,y)$ w punkcie p_0.
- Liniową aproksymacją nazwiemy przybliżenie wartości funkcji $f(x,y)$ przez $L(x,y)$.

Pochodne cząstkowe funkcji złożonych

TWIERDZENIE **2.16.1** (Pochodna funkcji złożonej)**.** *Funkcja złożona $f(t) = f(x(t), y(t))$ ma pochodną w punkcie t_0 oraz zachodzi wzór*

$$f'(t) = f'_x x'(t) + f'_y y'(t).$$

Zapiszemy dla pochodnej złożonej

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

PRZYKŁAD**.** Dla funkcji $f(x,y) = xy + x/y$ oraz $x = e^t$, $y = t$ mamy $\frac{dx}{dt} = e^t$ oraz $\frac{dy}{dt} = 1$ oraz $f'_x = y + \frac{1}{y}$ i $f'_y = x - \frac{x}{y^2}$. Wtedy

$$\frac{df(t)}{dt} = (y + \frac{1}{y})e^t + (x - \frac{x}{y^2})1 = (t + 1/t)e^t + (e^t - \frac{e^t}{t^2})1.$$

Z drugiej strony możemy obliczyć

$$(te^t + e^t/t)' = te^t + \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + e^t.$$

TWIERDZENIE **2.16.2** (Pochodne cząstkowe funkcji złożonej)**.** *Niech funkcje $x(u,v)$ oraz $y(u,v)$ mają pochodne cząstkowe w punkcie (u_0, v_0) oraz funkcja z=f(x,y) ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie $(x(u_0,v_0)), y(u_0,v_0)$. Funkcja złożona $f(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ ma pochodne cząstkowe i zachodzą wzory*

$$f'_u = f'_x x'(u) + f'_y y'(u) \text{ oraz } f'_v = f'_x x'(v) + f'_y y'(v).$$

Zapiszemy powyższe wzory

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

PRZYKŁAD**.** Dla współrzędnych $x = r\cos\phi$ oraz $y = r\sin\phi$ mamy $\frac{\partial x}{\partial \phi} = -r\sin\phi$ oraz $\frac{\partial y}{\partial \phi} = r\cos\phi$. Wtedy funkcja $f(x,y) = xy$ ma pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = y(-r\sin\phi) + x(r\cos\phi) = r\sin\phi(-r\sin\phi) + r\cos\phi(r\cos\phi) = r^2(\cos^2\phi - \sin^2\phi),$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial r} = y(\cos\phi) + x(\sin\phi) = r\sin\phi(\cos\phi) + r\cos\phi(\sin\phi) = 2r(\cos\phi\sin\phi) = r\sin 2\phi.$$

Pochodna w kierunku wektora

Niech będzie ustalony punkt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz wektor kierunkowy $v \in \mathbb{R}^n$. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ wzdłuż ustalonej prostej $p_0 + tv$ rozważymy funkcję wektorową $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ przy pomocy $f(p)$ jako $\mathbf{r}(t) = f(p_0 + tv)$, czyli zmienną jest $t \in \mathbb{R}$.

DEFINICJA**.** Funkcja $f(p)$ posiada w punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^n$ pochodną kierunkową $\nabla_v f(p_0)$ jeśli $\mathbf{r}(t) = f(p_0 + tv)$ jest różniczkowalna w punkcie t=0.

$$\nabla_v f(p_0) = \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$$

Gradient funkcji

Niech funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie p_0 wtedy pochodna $f'(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz

$$f(p_0 + h) = f(p_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Dla przyrostu h zmiennej niezależnej $f'(p_0)h$ jest wartością różniczki funkcji w punkcie p_0.

DEFINICJA (Gradient funkcji)**.** Wektor $\nabla f(p_0)$ określamy za pomocą iloczynu skalarnego:

$$\nabla f(p_0) \circ h := f'(p_0)h$$

UWAGA **2.16.3.** Współrzędne gradientu w bazie standardowej $e_1, e_2, ..., e_n$ wyznaczymy za pomocą współrzędnych. Wartość różniczki wynosi

$$f'(p_0)h = \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_2}h_2 + \cdots + \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_n}h_n$$

Wtedy wektor gradientu we współrzędnych $(x_1, x_2, ..., x_n)$ to

$$\nabla f((p_0)) = \left[\frac{\partial f(p_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(p_0)}{\partial x_n}\right]$$

Rozważmy funkcję wektorową $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ o wartościach w pewnej poziomicy funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Wtedy $f(r(t)) = const.$ oraz pochodna jest równa zeru. Oznaczymy wektor $v = r'(t_0)$ dla pochodnej.

Twierdzenie **2.16.3** (O prostopadłości gradientu)**.** *Dla lini poziomicowych zachodzi równanie*

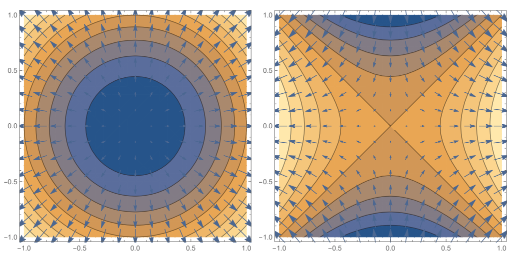
$$\nabla f(p_0) \circ v = 0.$$

Dowód. Dla pochodnej funkcji złożonej $f(r(t))$

$$0 = \left.\frac{d(f(r(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = f'(p_0)r'(t_0) = \nabla f(p_0) \circ v$$

czyli w każdym punkcie poziomicy funkcji wektor gradientu jest prostopadły do wektora stycznego. □

Przykład**.** Dla funkcji: a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ oraz b) $f(x, y) = x^2 - y^2$ otrzymamy pole gradientu w każdym punkcie dziedziny.



Dla funkcji skalarnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (o wartościach rzeczywistych) sposób wyznaczenia pochodnej kierunkowej ma prosty sens geometryczny. Jednocześnie obliczenie pochodnej kierunkowej jest uproszczone i wykonywane jest przy pomocy gradientu.

Twierdzenie **2.16.4** (O pochodnej kierunkowej)**.** *Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie p_0 to dla pochodnej kierunkowej zachodzi wzór*

$$\nabla_v f(p_0) = \nabla f(p_0) \circ v$$

Dowód. Wynika z określenia wektora gradientu i tw. o istnieniu pochodnych kierunkowych $\nabla_v f(p_0) = f'(p_0)v$ □

Uwaga **2.16.4.** Rozważymy przyrost wartości funkcji $f(p_0 + h) - f(p_0)$ szacowany przez wartość różniczki $f'(p_0)h$ przy zaniedbaniu reszty. Jeśli oznaczymy kąt α pomiędzy wektorem h oraz wektorem gradientu $\nabla f(p_0)$ to otrzymamy

$$f'(p_0)h = \nabla f(p_0) \circ h = \|\nabla f(p_0)\|\|h\| \cos \alpha$$

Twierdzenie **2.16.5** (O kierunku gradientu)**.** *Dla funkcji skalarnej wektor gradientu jest kierunkiem najszybszego wzrostu wartości funkcji w punkcie p_0. Zachodzi wzór*

$$\nabla_v f(p_0) \leq \|\nabla f(p_0)\|.$$

Dowód. Dla $\cos \alpha = 1$. Wtedy długość wektora gradientu jest w przybliżeniu równa

$$\frac{|f(p_0 + h) - f(p_0)|}{\|h\|}$$

□

Wielomian Taylora

Wzór Taylora dla jednej zmiennej. Zamieścimy na początek dwie uwagi:

- Dla $n = 1$ w punkcie x_0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + o(1)h.$$

- Zauważmy, że w przypadku $n = 1$ twierdzenie Taylora sprowadza się do twierdzenia Lagrange'a dla $b = x_0 + h$ oraz $a = x_0$ możemy zapisać resztę tak, że istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$

$$f(b) = f(a) + f'(\xi_1)(b - a).$$

Niech funkcja skalarna $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie p_0 w sposób ciągły. Rozważamy $\mathbf{r}(t) = f(p_0 + th)$ dla wektora $h \in \mathbb{R}^n$. Wzór Taylora-Maclaurina dla jednej zmiennej $t \in \mathbb{R}$ zapewnia istnienie punktu ξ

$$\mathbf{r}(0 + t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{r}'(\xi).$$

Wyznaczymy pochodną

$$\mathbf{r}'(0) = \left.\tfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\tfrac{d}{dt} f(p_0 + th)\right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \left.\tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p_0 + th)\right|_{t=0} \cdot h_i = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \cdot h_i.$$

TWIERDZENIE **2.16.6** (Wzór Taylora rzędu 1). *Niech funkcja skalarna $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne drugiego rzędu w punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Wtedy istnieje punkt $\xi \in \mathbb{R}^n$, taki że*

$$f(p_0 + h) - f(p_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)h_i.$$

gdzie ξ leży na odcinku od p_0 do $p_0 + th$, o którym zakładamy, że należy do dziedziny D_f, wtedy wektor h spełnia warunek $p_0 + th \in D_f$.

Dowód. Tylko dla wzoru Taylora z pierwszą pochodną, gdzie funkcja ma jedną zmienną. □

PRZYKŁAD. Dla funkcji $f(x, y) = x^2y$ wokół $p_0 = (-1, 1)$

$$x^2y = 1 - 2(x + 1) + (y - 1) + o(h).$$

2.16.2 Pochodna funkcji wektorowej

Na początek określimy pochodną funkcji dwóch zmiennych.

DEFINICJA. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma obie pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0). Funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek dla $h = [h_1, h_2] \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

Uwaga: istnienie pochodnych cząstkowych w pewnym punkcie nie gwarantuje, że funkcja jest różniczkowalna w tym punkcie.

Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ w punkcie p_0 określimy resztę $R(p_0, h)$ względem $h \in \mathbb{R}^n$ oraz odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$

$$R(p_0, h) = f(p_0 + h) - f(p_0) - L(h)$$

DEFINICJA. Funkcja $f(x)$ jest różniczkowalna w punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^n$ jeżeli istnieje odwzorowanie liniowe $f'(p_0)$ (pochodna), takie że odpowiednia reszta spełnia warunek

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|R(p_0, h)\|}{\|h\|} = 0$$

Macierz odwzorowania $\mathbf{f}'(p_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ nazywamy *macierzą Jacobiego*. Trzeba zauważyć, że taka pochodna jest określona jednoznacznie, o ile istnieje (stwierdzenie).

Pochodna w kierunku wektora

Niech będzie ustalony punkt $p_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz wektor kierunkowy $v \in \mathbb{R}^n$. Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ wzdłuż ustalonej prostej $p_0 + tv$ rozważymy funkcję wektorową $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ przy pomocy f jako

$$\mathbf{r}(t) = f(p_0 + tv)$$

czyli zmienną jest $t \in \mathbb{R}$

DEFINICJA. Funkcja f posiada w punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^n$ pochodną kierunkową $\nabla_v f(p_0)$ jeśli $\mathbf{r}(t) = f(p_0 + tv)$ jest różniczkowalna w punkcie t=0.

$$\nabla_v f(p_0) = \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(p_0 + tv) - f(p_0)}{t}$$

Mówimy też, że funkcja na zbiorze otwartym $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbf{R}$ ma w punkcie p pochodną kierunkową w kierunku niezerowego wektora v, jeśli istnieje granica ilorazu różnicowego $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(p+hv)-f(p)}{h}$; granicę oznaczamy symbolem $\nabla_v f(p)$.

Różniczkowalność i pochodne kierunkowe

TWIERDZENIE **2.16.7.** *Jeżeli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie p_0, to istnieją pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku $v \in \mathbb{R}^n$. Wtedy*

$$\nabla_v f(p_0) = f'(p_0)v$$

Dowód. Twierdzenie wynika z wykonania pochodnej funkcji złożonej, czyli

$$\nabla_v f(p_0) = \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df(x + vt)}{dt}\right|_{t=0} = f'(p_0 + tv)\Big|_{t=0} \cdot \frac{d(p_0 + vt)}{dt}$$

□

Macierz Jacobiego dla odwzorowania

TWIERDZENIE **2.16.8.** *Dla funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ opisanej przez układ funkcji $(f_1, f_2, ..., f_k)$ pochodna f' posiada macierz (Jacobiego) postaci*

$$[f'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \frac{\partial f_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Dowód. Kolumna nr 1 jest otrzymana jako $f'(p_0)e_1$ czyli $\nabla_{e_1} f(p_0)$ dla każdej ze współrzędnych układu funkcji $(f_1, f_2, ..., f_k)$. Dalej po kolejnych współrzędnych x_i wzdłuż osi. □

Pochodna odwzorowania a ciągłość

TWIERDZENIE **2.16.9.** *Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie $p_0 \in \mathbb{R}^n$, to jest w tym punkcie ciągła.*

Dowód. $\forall x$ oraz $x \neq a$ możemy zapisać

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

Ponieważ $f'(a)$ istnieje to

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim_{x \to a}(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}) \cdot \lim_{x \to a}(x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Stąd funkcja jest ciągła w punkcie a

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

□

Różniczkowalność w sensie słabym

TWIERDZENIE **2.16.10.** *Jeżeli w otoczeniu punktu p_0 istnieją ciągłe pochodne cząstkowe pewnej funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, to istnieje pochodna tej funkcji w dowolnym kierunku.*

DEFINICJA. Funkcja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jest różniczkowalna w punkcie p_0 w sposób ciągły (słabo) jeżeli istnieje pochodna tej funkcji w dowolnym kierunku w tym punkcie.

2.16.3 Przykłady

Pochodna funkcji wektorowej

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ jak poprzednio $f(x, y, z) = (x + y, xz^2) = (f_1, f_2)$.
Wtedy:

$$\frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial x} = z^2, \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} = 0, \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial z} = 2xz$$

Czyli macierz Jacobiego pochodnej w dowolnym punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$f'(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ z_0^2 & 0 & 2x_0 z_0 \end{bmatrix}$$

Część liniowa przyrostu

Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $f(x, y, z) = (x + y, xz^2)$ i w punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 3)$

$$f'(2, 1, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 12 \end{bmatrix} = \mathbf{F}$$

Macierz $\mathbf{F}$ pochodnej f' spełnia dla dowolnego $h = [h_1, h_2, h_3] \in \mathbb{R}^3$

$$R(p_0, h) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) - \mathbf{F}h =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + h_1 + 1 + h_2 \\ (2h_1)(3 + h_3)^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2h_3^2 + 6h_1h_3 + h_1h_3^2 \end{bmatrix} \text{ czyli}$$

$$\|R(h)\| = |2h_1^2 + 6h_1h_3 + h_1h_3^2|$$

2.17 Ekstrema funkcji skalarnej

2.17.1 Wzór Taylora rzędu 2

TWIERDZENIE **2.17.1** (Wzór Taylora rzędu 2). *Dla funkcji skalarnej $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, która jest klasy C^2 w pewnym zbiorze otwartym $D_f \subset \mathbb{R}^n$, istnieje taki punkt $\xi \in D_f$, że przyrost wartości w punkcie $p_0 \in D_f$ względem wektora $h = [h_1, ..., h_n]$ jest równy*

$$f(p_0 + h) - f(p_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot h_i h_j,$$

gdzie ξ leży na odcinku od p_0 do $p_0 + th$, o którym zakładamy, że powinien należeć do dziedziny D_f, wtedy długość wektora $\|h\|$ spełnia warunek $p_0 + th \in D_f$.

Zapiszemy też w punkcie p_0 dla drugich pochodnych cząstkowych:

$$f(p_0 + h) - f(p_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0) \cdot h_i h_j + o(h^2).$$

PRZYKŁAD. Dla funkcji dwóch zmiennych w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(p_0) = f'_x(p_0)h_1 + f'_y(p_0)h_2 + \\ + \frac{1}{2}\left(f''_{xx}(\xi)h_1^2 + 2f''_{xy}(\xi)h_1h_2 + f''_{yy}(\xi)h_2^2\right).$$

Dla wybranej funkcji dwóch zmiennych $f(x, y) = x^3 + y^2 + x^2y$ mamy pierwsze pochodne cząstkowe $f'_x = 3x^2 + 2xy$, $f'_y = 2y + x^2$ oraz drugie $f''_{xx} = 6x + 2y$, $f''_{xy} = 2x$ oraz $f''_{yy} = 2$. W ustalonym punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ istnieje punkt $\xi = (x_\xi, y_\xi)$ na odcinku p_0 do $p_0 + th$ wzdłuż wektora $h = [h_1, h_2]$ taki, że

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - x_0^3 + y_0^2 + x_0^2 y_0 = \\ = (3x_0^2 + 2x_0y_0)h_1 + (2y_0 + x_0^2)h_2 + \frac{1}{2}\left((6x_\xi + 2y_\xi){h_1}^2 + 4x_\xi h_1 h_2 + 2{h_2}^2\right).$$

Dowód. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie p_0 dwukrotnie w sposó ciągły. Rozważamy funkcję wektorową $\mathbf{r}(t) = f(p_0 + th)$ dla wektora $h \in \mathbb{R}^n$, czyli $h = [h_1, h_2, ..., h_n]$. Wzór Taylora-Maclaurina dla jednej zmiennej $t \in \mathbb{R}$ rzędu 2

$$\mathbf{r}(0 + t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{r}'(0) + t^2\mathbf{r}''(\xi).$$

Wyznaczymy:

$$\mathbf{r}'(0) = \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt} f(p_0 + th)\right|_{t=0} = \left.\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0 + th)\right|_{t=0} \cdot h_i = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) h_i,$$

oraz

$$\mathbf{r}''(\xi) = \left.\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}\right|_{t=\xi} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt} f(\xi)\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi) \cdot h_i\right)$$

czyli

$$\mathbf{r}''(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\xi) h_i h_j$$

□

DEFINICJA (Druga różniczka). Dla funkcji skalarnej $f(x, y)$, która ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu, przez drugą różniczkę oznaczymy funkcję $d^2 f(p_0)$ zmiennych dx, dy określoną wzorem

$$d^2 f(p_0)(dx, dy) := \left.\left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(p)\right|_{p=p_0}.$$

Zapiszemy

$$d^2 f(p_0)(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p_0) dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p_0) dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p_0) dy^2$$

2.17.2 Ekstrema lokalne skalarnych

Funkcje dwóch zmiennych

DEFINICJA (Ekstremum lokalne). Dla funkcji dwóch zmiennych $f(x, y)$ minimum lokalne właściwe w punkcie (x_0, y_0) oznacza istnienie sąsiedztwa tego punktu, dla którego $\forall\ (x, y) \in S_{(x_0, y_0)}$ zachodzi:

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$

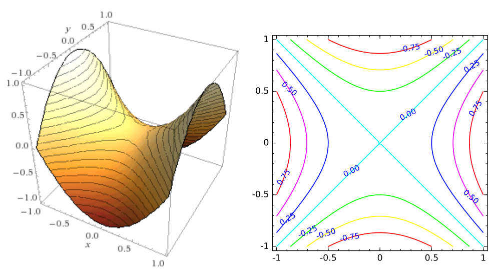
Dla maksimum lokalnego właściwego nierówność jest odwrotna. Ekstremum lokalne, to wspólna nazwa dla punktu, który jest minimum lub maksimum. Podczas, gdy nierówności są słabe, to mamy do czynienia z ekstremum lokalnym.

TWIERDZENIE **2.17.2** (Warunek konieczny istnienia ekstremum)**.** *Dla różniczkowalnej funkcji $z = f(x, y)$ warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego właściwego w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ jest $\nabla f(p_0) = 0$, czyli zachodzi układ równań:*

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

UWAGA **2.17.1.** Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, czyli z zerowania się pochodnych cząstkowych nie musi wynikać istnienie ekstremum, np. dla funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$ (przykład poniżej).

PRZYKŁAD. $f(x, y) = x^2 - y^2$ i brak ekstremum



Rozwiązanie układu równań dla punktów krytycznych dziedziny

$$\begin{cases} f'_x = 2x = 0 \\ f'_y = -2y = 0 \end{cases}$$

Stąd punkt krytyczny to $(0, 0)$.

Analiza poziomic. Funkcja $f(x, y) = x^2 - y^2$ nie osiąga w punkcie (0,0) żadnego ekstremum, gdyż dla dowolnego punktu $(x, 0) \neq (0, 0)$ mamy $f(x, 0) > 0$, natomiast w punktach $(0, y) \neq (0, 0)$ mamy z kolei $f(0, y) < 0$.

DEFINICJA. Punkt (x_0, y_0), w którym obie pochodne cząstkowe funkcji $z = f(x, y)$ zerują się nazywamy punktem stacjonarnym lub punktem krytycznym funkcji.

UWAGA **2.17.2.** Funkcja skalarna może mieć ektremum tylko w punkcie krytycznym albo w punkcie, gdzie jedna z pochodnych cząstkowych nie istnieje.

Dla macierzy kwadratowej oznaczmy przez $D(p_0) = \det \boldsymbol{H}(x_0, y_0)$, gdzie

$$\boldsymbol{H}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{bmatrix} (x_0, y_0)$$

TWIERDZENIE **2.17.3** (Warunek wystarczający istnienia ekstremum)**.** *Dana jest funkcja $f(x, y)$, która ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu drugiego w otoczeniu punktu $p_0 = (x_0, y_0)$. Założymy, że p_0 jest punktem krytycznym tej funkcji, czyli $(\nabla f)(p_0) = 0$. Wtedy:*

a) jeżeli $D(p_0) > 0$ oraz $f''_{xx}(p_0) < 0$, to p_0 jest lokalnym maksimum właściwym funkcji,

b) jeżeli $D(p_0) > 0$ oraz $f''_{xx}(p_0) > 0$, to p_0 jest lokalnym minimum właściwym funkcji,

c) jeżeli $D(p_0) < 0$, to w punkcie $p_0 = (x_0, y_0)$ funkcja nie ma ekstremum.

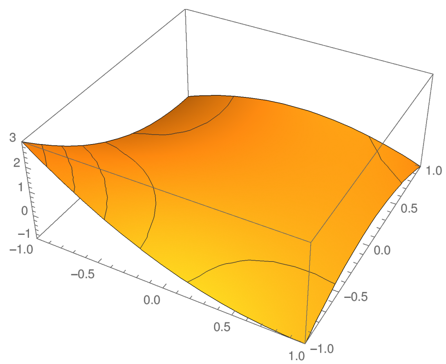
UWAGA **2.17.3.** W przypadku, gdy wyznacznik D jest równy zero, to trzeba rozstrzygać istnienie ekstremum z definicji.

Dowód. Dla pochodnej ∇_h w kierunku dowolnego wektora $h = [h_1, h_2]$ mamy $\nabla_h f = f'_x h_1 + f'_y h_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 f = \nabla_h(\nabla_h f) = h_1 \frac{\partial}{\partial x}(\nabla_h f) + h_2 \frac{\partial}{\partial y}(\nabla_h f) = \\ = h_1(f'_{xx} h_1 + f'_{yx} h_2) + h_2(f'_{xy} h_1 + f'_{yy} h_2) = f''_{xx} h_1^2 + 2 f''_{xy} h_1 h_2 + f''_{yy} h_2^2 = \\ = f''_{xx} \left(h_1 + \frac{f''_{xy}}{f''_{xx}} h_2 \right)^2 + \frac{h_2^2}{f''_{xx}} (f_{xx} f''_{yy} - f''_{xy} f''_{yx}). \end{aligned}$$

$\square$

PRZYKŁAD. $f(x, y) = xy(1 - x - y)$



Rozwiązanie układu równań dla punktów krytycznych dziedziny

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 2xy - y^2 = 0 \\ x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy

$$\begin{cases} y = 0 \text{ lub } 1 - 2x - y = 0 \\ x = 0 \text{ lub } 1 - x - 2y = 0 \end{cases}$$

który spełniają współrzędne czterech punktów

$$P_1 = (0,0), P_2 = (1,0), P_3 = (0,1), P_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

$$\boldsymbol{H}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} -2y_0, & -2x_0 - 2y_0 + 1 \\ -2x_0 - 2y_0 + 1, & -2x_0 \end{pmatrix}$$

Macierze drugich pochodnych w kolejnych punktach

$$\boldsymbol{H}(0,0);\ \boldsymbol{H}(0,1);\ \boldsymbol{H}(1,0);\ \boldsymbol{H}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

wynoszą odpowiednio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Fakt 1.

- $\boldsymbol{H}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ jest jedyną macierzą, której wyznacznik $\det \boldsymbol{H}(P_4) > 0$
- $f''_{xx}(P_4) = -2/3 < 0$
- otrzymujemy, że $f(P_4) = \frac{1}{27}$ to lokalne maksimum

Odnotujmy:

- obydwie wartości własne macierzy $\boldsymbol{H}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ są ujemne i wynoszą odpowiednio $(-\frac{1}{3}, -1)$
- forma kwadratowa $Q(h) = -\frac{1}{3}h_1^2 - h_2^2$ jest ujemnie określona $\forall h = [h_1, h_2]$ w punkcie P_4

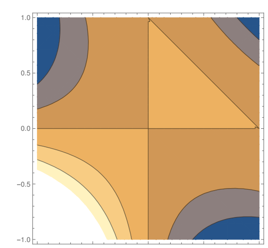
Fakt 2.

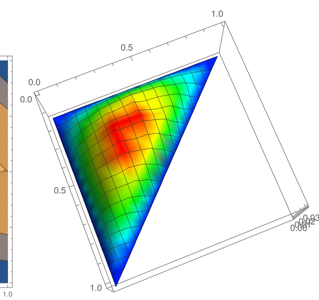
- dla $\boldsymbol{H}(P_1)$ wyznacznik jest ujemny $\det \boldsymbol{H}(0,0) < 0$
- w punkcie $P_1 = (0,0)$ nie istnieje ekstremum

Odnotujmy:

- wartości własne $\boldsymbol{H}(0,0)$ mają różne znaki i wynoszą $(-1, 1)$
- forma kwadratowa $Q(h) = -h_1^2 + h_2^2$ jest nieokreślona w $(0,0)$

Uwaga: podobnie jest w pozostałych punktach P_2 oraz P_3.
wykres poziomic





Analiza wykresu poziomic:

- jedynym punktem z wnętrza widocznego trójkąta jest punkt P_4, w którym funkcja $f(x,y)$ osiąga maksimum równe $f(P_4) = \frac{1}{27}$
- pozostałe punkty P_1, P_2 oraz P_3 leżą na poziomicy zerowej funkcji, czyli spełniają $f(x,y) = 0$
- punkty leżące na wspólnej poziomicy nie mogą zawierać lokalnego ekstremum

Bibliografia

[1] R. Leitner i J. Zacharski, *Zarys matematyki wyższej dla studentów*, tom 3. PWN Warszawa 2017.

[2] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy (ze wstępem do równań różniczkowych)*, PWN Warszawa 2021 (wyd. 17).

[3] A. Mostowski i M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, PWN 1970.

[4] A. Plucińska i E. Pluciński, *Probabilistyka*, PWN WNT, Warszawa 2021 (wyd. 1).

[5] M. Stark, *Geometria analityczna ze wstępem do geometrii wielowymiarowej*, PWN 1974.

[6] W. Żakowski, G. Decewicz i W. Kołodziej: *Matematyka*, części 1 i 2.

Indeks alfabetyczny

istnienie ekstremum
warunek konieczny, 100
warunek wystarczający, 101

twierdzenie Lagrange'a, 26
twierdzenie Rolle'a, 25

wzór Taylora
rzędu 1, funkcje wielu zmiennych, 94
rzędu 2, funkcja wielu zmiennych, 98